

घन तथा घनमूल

Cube and Cube Root

किसी संख्या को उसके वर्ग से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, उसे उस संख्या का 'घन' कहते हैं अर्थात् किसी संख्या को परस्पर तीन बार गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है वही गुणनफल उस संख्या का 'घन' कहलाता है। इसके ठीक विपरीत यदि किसी संख्या को तीन ऐसे भागों से गुणा किया जाए, जो परस्पर समान हों, तो प्राप्त गुणनफल युग्म का कोई भी भाग (संख्या) दी गई संख्या का 'घनमूल' कहलाता है। घनमूल को चिह्न ' $\sqrt[3]{\quad}$ ' के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

जैसे 6 का घन = $6^2 \times 6 = 6 \times 6 \times 6 = 216$; 125 का घनमूल = $\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$

घनमूल की गणना करने की विधि

Method to Calculate Cube Root

अभाज्य गुणनखण्ड विधि Prime Factorization Method

इस विधि के विभिन्न चरण निम्नलिखित हैं

चरण 1 दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना।

चरण 2 प्राप्त गुणनखण्डों को तीन-तीन के समूह में रखना।

चरण 3 प्रत्येक समूह में से एक संख्या लेकर उन्हें एक साथ गुणा करना। प्राप्त गुणनफल ही अभीष्ट घनमूल है।

उदाहरण 19683 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल $19683 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अतः $\sqrt[3]{19683} = 3 \times 3 \times 3 = 27$

दशमलव संख्याओं का घनमूल ज्ञात करना

To Find Out Cube Root of Decimal Numbers

दशमलव में दी हुई संख्या का घनमूल निकालने के लिए निम्नलिखित चरणों का पालन करेंगे।

जैसे $0.000343 = \frac{343(\text{अंश})}{1000000(\text{हर})}$

चरण 1 सर्वप्रथम संख्या को भिन्न के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं, कि दशमलव के बाद जितने अंक होते हैं, अंक 1 के आगे उतने ही शून्य लगाकर उसे हर के रूप में प्रकट कर सकें तथा शेष पूर्णांक संख्या को अंश के रूप में व्यक्त कर सकें।

चरण 2 तत्पश्चात् अंश और हर के गुणनखण्ड करते हैं।

$$\begin{aligned} &= \frac{343}{1000000} \\ &= \frac{7 \times 7 \times 7}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \end{aligned}$$

चरण 3 गुणनखण्डों में 3-3 के समूह बनाते हैं।

$$\begin{aligned} &= \frac{7 \times 7 \times 7}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} \end{aligned}$$

चरण 4 अन्त में प्रत्येक समूह (ऊपर-नीचे) की गुणा करके, गुणनफल में अन्त से उतने ही अंक बाद दशमलव लगा देते हैं, नीचे जितनी शून्य होती है।

$$= \frac{7}{10 \times 10} = \frac{7}{100} = 0.07$$

कुछ महत्त्वपूर्ण संख्याओं के घनमूल

$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt[3]{1000} = 10$	$\sqrt[3]{1331} = 11$
$\sqrt[3]{1728} = 12$	$\sqrt[3]{2197} = 13$
$\sqrt[3]{2744} = 14$	$\sqrt[3]{3375} = 15$

महत्त्वपूर्ण सूत्र

यदि a तथा b दो अशून्य तथा घन संख्याएँ हों, तो

$$(i) \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad (ii) \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

कुछ महत्त्वपूर्ण संख्याओं के घन

$(2)^3 = 8$	$(3)^3 = 27$
$(4)^3 = 64$	$(5)^3 = 125$
$(6)^3 = 216$	$(7)^3 = 343$

$(8)^3 = 512$	$(9)^3 = 729$
$(10)^3 = 1000$	$(11)^3 = 1331$
$(12)^3 = 1728$	$(13)^3 = 2197$
$(14)^3 = 2744$	$(15)^3 = 3375$

साधित उदाहरण

1. 3600 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से भाग किया जाए, कि भागफल पूर्ण घन हो?

- (1) 5 (2) 2
(3) 650 (4) 9
(5) 450

हल (5) $3600 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

उपरोक्त से स्पष्ट है, कि 3600 को 450 से भाग देने पर भागफल पूर्ण घन बन जाएगा।

2. $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}}$ का मान क्या होगा?

- (1) 2 (2) 6 (3) 7 (4) 8
(5) 9

हल (1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{1 + 7} = \sqrt[3]{8} = 2$

3. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$ का मान क्या होगा?

- (1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 12
(5) 17

हल (1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$

4. $\sqrt[3]{\frac{72.9}{0.4096}}$ का मान है

- (1) 5.625 (2) 72 (3) 9 (4) 90
(5) 107

हल (1) $\sqrt[3]{\frac{72.9}{0.4096}} = \sqrt[3]{\frac{729 \times 1000}{4096}}$
 $= \sqrt[3]{\frac{9 \times 9 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10}{16 \times 16 \times 16}} = \frac{9 \times 10}{16} = 5.625$

अभ्यास प्रश्न

1. 675 को किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल पूर्ण घन हो?

- (1) 5 (2) 6 (3) 7
(4) 8 (5) 4

2. 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या जो पूर्ण घन हो, होगी

- (1) 9999 (2) 9261 (3) 8000
(4) 9000 (5) इनमें से कोई नहीं

3. $\sqrt[3]{\sqrt{0.000064}}$ का मान है

- (1) 0.02 (2) 0.2 (3) 2
(4) 0.002 (5) इनमें से कोई नहीं

4. $\sqrt[3]{4 \frac{12}{125}}$ का मान है

- (1) $2\frac{3}{5}$ (2) $1\frac{2}{5}$ (3) $1\frac{4}{5}$
(4) $2\frac{2}{5}$ (5) $1\frac{3}{5}$

5. 0.000001 का घनमूल होगा

- (1) 0.1 (2) 0.01 (3) 0.001
(4) 0.00001 (5) 0.0001

6. $8^{2/3}$ का मान है

- (1) 3 (2) 4 (3) 2
(4) 1 (5) $\sqrt{2}$

7. $\sqrt{2^4} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{2^8}$ का मान है

- (1) 20 (2) 16 (3) 18
(4) 24 (5) 12

8. $2\sqrt[3]{32} - 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{500}$ बराबर है

- (1) $4\sqrt[3]{6}$ (2) $3\sqrt[3]{24}$ (3) $6\sqrt[3]{4}$
(4) $9/6$ (5) $6\sqrt[3]{3}$

9. $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{16}} + \sqrt{\frac{100}{49}} \times \sqrt[3]{125}$ बराबर है

- (1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) -2
(4) 1 (5) 514

10. $\sqrt[3]{(216)^{-3}} + (343)^{-2}$ का मान है

- (1) $\frac{36}{156}$ (2) $\frac{17}{54}$ (3) $\frac{47}{216}$
(4) $\frac{49}{412}$ (5) $\frac{49}{216}$

उत्तरमाला

1. (1) 2. (2) 3. (2) 4. (5) 5. (2) 6. (2) 7. (5) 8. (3) 9. (1) 10. (5)

संकेत एवं हल

1. $\because 675 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि यदि 675 को 5 से गुणा किया जाए तो गुणनफल पूर्ण घन होगा।

3. $\sqrt[3]{\sqrt{0.000064}} = \sqrt[3]{0.008} = 0.2$

4. $\sqrt[3]{4 \frac{12}{125}} = \sqrt[3]{\frac{512}{125}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 8 \times 8}{5 \times 5 \times 5}} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

5. $\sqrt[3]{0.000001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000000}} = \frac{1}{100} = 0.01$

6. $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

7. $\sqrt{2^4} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{2^8} = (2^4)^{1/2} + (4^3)^{1/3} + (2^8)^{1/4}$
 $= 2^2 + 4 + 2^2 = 4 + 4 + 4 = 12$

8. $2\sqrt[3]{32} - 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{500} = 4\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$

9. $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{16}} + \sqrt{\frac{100}{49}} \times \sqrt[3]{125} = \frac{2}{4} \times \frac{7}{10} \times 5 = \frac{7}{4}$

10. $\sqrt[3]{(216)^{-3}} + (343)^{-2} = \sqrt[3]{(6^3)^{-3}} \times \frac{1}{(7^3)^{-2}}$
 $= \sqrt[3]{6^{-9}} \times (7^3)^2 = \frac{7^2}{6^3} = \frac{49}{216}$