$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

ਇਸ ਲਈ $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

ਜਾਂ $$-4k - 4 = 3k - 6$$

ਜਾਂ $$7k = 2$$

ਜਾਂ $$k : 1 = 2 : 7$$

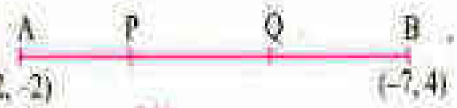
ਤੁਸੀਂ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(-4, 6)$, ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-6, 10)$ ਅਤੇ $B(3, -8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ $2 : 7$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦੂਰੀਆਂ PA ਅਤੇ PB ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਲੈ ਕੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, P ਅਤੇ B ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਬਿੰਦੂਆਂ $A(2, -2)$ ਅਤੇ $B(-7, 4)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ (Trisection) ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਹਨ। ਭਾਵ $AP = PQ = QB$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.11)।



ਚਿੱਤਰ 7.11

ਇਸ ਲਈ, P ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $1 : 2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ ਭਾਵ } (-1, 0)$$

ਹੁਣ Q ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ ਭਾਵ } (-4, 2)$$

ਇਸ ਲਈ, ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-1, 0)$ ਅਤੇ $(-4, 2)$ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਉਸਨੂੰ PB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਕੇ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਾਲੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਬਿੰਦੂਆਂ (5, –6) ਅਤੇ (–1, –4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $k : 1$ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ, ਇਸ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$$

ਇਹ ਬਿੰਦੂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਭੁਜ (x ਦਾ ਮੁੱਲ) ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$k = 5 \text{ ਹੈ}$$

ਭਾਵ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 1 ਹੈ। k ਦਾ ਮੁੱਲ 5 ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) ਅਤੇ D(p, 3) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਵਿਕਰਣ AC ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ = ਵਿਕਰਣ BD ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

ਭਾਵ $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

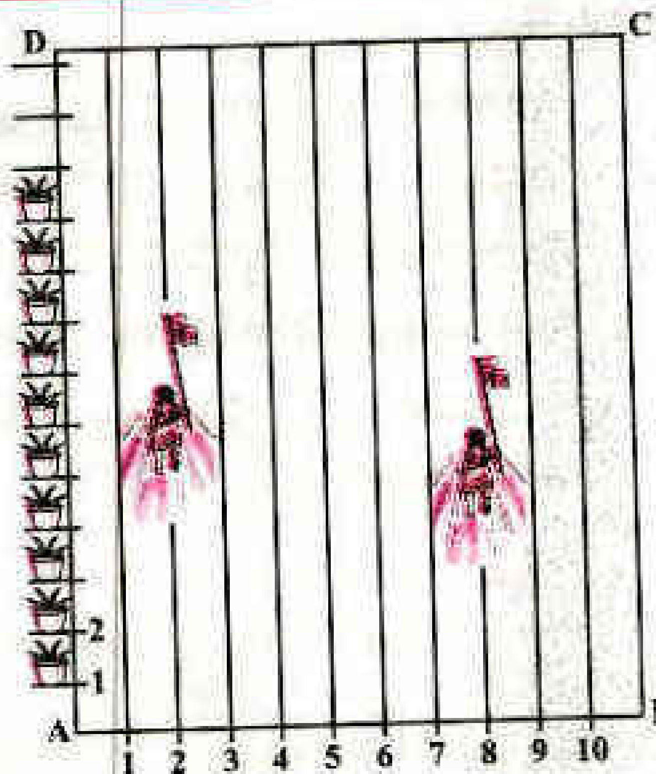
ਜਾਂ $$p = 7$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.2

1. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (–1, 7) ਅਤੇ (4, –3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ 2 : 3 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

2. ਬਿੰਦੂਆਂ $(4, -1)$ ਅਤੇ $(-2, -3)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ (Trisection) ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਖੇਡਣ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਕਰਵਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਮੈਦਾਨ ABCD ਵਿੱਚ, ਚੂਨੇ ਦੇ ਨਾਲ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਕਤਾਰਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। AD ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ 100 ਗਮਲੇ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਹਾਰਿਕਾ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ AD ਦੇ $\frac{1}{4}$ ਭਾਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਦੌੜਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਥੇ ਇੱਕ ਹਰਾ ਝੰਡਾ ਗੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰੀਤ ਅੱਠਵੀਂ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ AD ਦੇ $\frac{1}{5}$ ਭਾਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਦੌੜਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਥੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਝੰਡਾ ਗੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਝੰਡਿਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕੀ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਰਸ਼ਿਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨੀਲਾ ਝੰਡਾ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਝੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਠੀਕ ਅੱਧੀ ਦੂਰੀ (ਵਿਚਕਾਰ) 'ਤੇ ਗੱਡਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਆਪਣਾ ਝੰਡਾ ਕਿੱਥੇ ਗੱਡਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 7.12

4. ਬਿੰਦੂਆਂ $(-3, 10)$ ਅਤੇ $(6, -8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(-1, 6)$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ?

5. ਬਿੰਦੂਆਂ $A(1, -5)$ ਅਤੇ $B(-4, 5)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ ਅਤੇ $(3, 5)$ ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ AB ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ $(2, -3)$ ਹੈ ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(1, 4)$ ਹਨ।

8. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(-2, -2)$ ਅਤੇ $(2, -4)$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $AP = \frac{3}{7} AB$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ।

9. ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-2, 2)$ ਅਤੇ $B(2, 8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਚਾਰ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ ਸਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ ਅਤੇ $(-2, -1)$ ਹਨ। [ਸੰਕੇਤ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}$ (ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)]

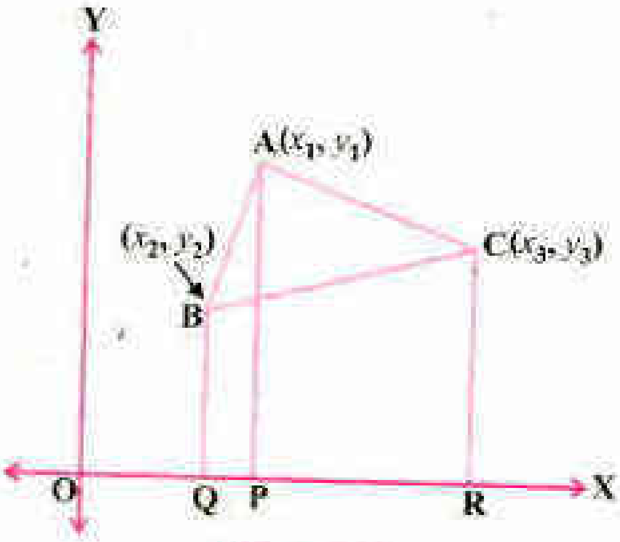
7.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਆਧਾਰ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਗਤ ਸਿਖਰ ਲੰਬ (ਉੱਚਾਈ) ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ :

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ **ਆਧਾਰ** $\times$ **ਸਿਖਰ ਲੰਬ**

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੀਰੋਨ (Heron) ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤਿੰਨੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲਉ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵਿਧੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੇ ਉਸ ਵੇਲੇ ਜਦ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਣ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਇਸਦੀ ਹੋਰ ਕੋਈ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.13

ਮੰਨ ਲਉ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਿਖਰ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ਅਤੇ $C(x_3, y_3)$ ਹਨ। ਬਿੰਦੂਆਂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੰਬ AP, BQ ਅਤੇ CR ਖਿੱਚੋ। ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਤੁਰਭੁਜ ABQP, APRC ਅਤੇ BQRC ਸਮਲੰਬ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.13)।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 7.13 ਤੋਂ, ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਲੰਬ ABQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ APRC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਸਮਲੰਬ BQRC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}$(ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) × (ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ)

ਇਸ ਲਈ,

$$\Delta \text{ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

ਇਸ ਲਈ, ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (1, –1), (– 4, 6) ਅਤੇ (–3, –5) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਿਖਰਾਂ A(1, –1), B(– 4, 6) ਅਤੇ C (–3, –5) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}\left[1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

ਇਸ ਲਈ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 24 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਬਿੰਦੂਆਂ A(5, 2), B(4, 7) ਅਤੇ C (7, – 4) ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਿਖਰਾਂ A(5, 2), B(4, 7) ਅਤੇ C (7, – 4) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}\left[5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) = \frac{-4}{2} = -2$$

ਕਿਉਂਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਮਾਪ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ – 2 ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ 2 ਲਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਬਿੰਦੂਆਂ P(–1.5, 3), Q(6, –2) ਅਤੇ R(–3, 4) ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3+2)]$$
$$=\frac{1}{2}(9+6-15)=0$$

ਕੀ ਅਸੀਂ 0 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲਾ ਕੋਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 0 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸਿਖਰ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A(2, 3), B(4, k) ਅਤੇ C(6, –3) ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 0 ਹੋਵੇਗਾ।

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

ਭਾਵ $\frac{1}{2}(-4k)=0$

ਜਾਂ $k=0$

ਇਸ ਲਈ, k ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ

Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)]=0$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜੇਕਰ A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) ਅਤੇ D(4, 5) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABD ਅਤੇ BCD ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$

$\frac{1}{2}(50+8+48)=\frac{106}{2}=53$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਨਾਲ ਹੀ, Δ BCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$

$=\frac{1}{2}(44-10+4)=19$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 53 + 19 = 72 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਖੇਤਰ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਜੋੜ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.3

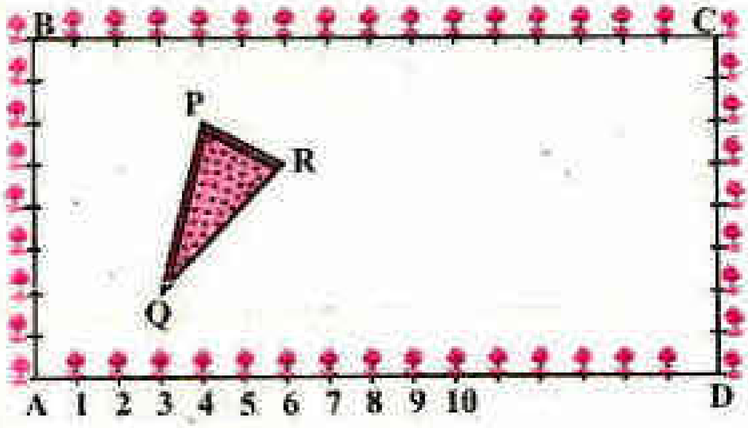
1. ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ:
   (i) $(2, 3), (-1, 0), (2, -4)$ (ii) $(-5, -1), (3, -5), (5, 2)$
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ 'k' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ:
   (i) $(7, -2), (5, 1), (3, k)$ (ii) $(8, 1), (k, -4), (2, -5)$
3. ਸਿਖਰਾਂ $(0, -1), (2, 1)$ ਅਤੇ $(0, 3)$ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਉਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ, ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ $(-4, -2), (-3, -5), (3, -2)$ ਅਤੇ $(2, 3)$ ਹਨ।
5. ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ (ਪਾਠ 9, ਉਦਾਹਰਣ 3) ਕਿ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ (Median) ਉਸਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਲਈ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ $A(4, -6), B(3, -2)$ ਅਤੇ $C(5, 2)$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਬਿੰਦੂਆਂ $A(2, -2)$ ਅਤੇ $B(3, 7)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਰੇਖਾ $2x + y - 4 = 0$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. x ਅਤੇ y ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ $(x, y), (1, 2)$ ਅਤੇ $(7, 0)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
3. ਬਿੰਦੂਆਂ $(6, -6), (3, -7)$ ਅਤੇ $(3, 3)$ ਤੋਂ ਹੋਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਦੋ ਸਾਹਮਣੇ (Opposite) ਦੇ ਸਿਖਰ $(-1, 2)$ ਅਤੇ $(3, 2)$ ਹਨ ਤਾਂ ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਕੀ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿਖਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਕ੍ਰਿਸ਼ਨਾ ਨਗਰ ਦੇ ਇੱਕ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ ਦੀ X ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਬਾਗਬਾਨੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਜ਼ਮੀਨ ਦਾ ਟੁਕੜਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਗੁਲਮੋਹਰ

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੇ ਪੌਦੇ (Sapling) ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ (Boundary) 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਇਸ ਟੁੱਕੜੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਕਾਰ ਦਾ ਘਾਹ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਲੱਅਨ (lawn) ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.14 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲਾਂ ਦੇ ਪੌਦਿਆਂ ਦੇ ਬੀਜ ਬੀਜਣੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.14

(i) A ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ C ਹੋਵੇ ਤਾਂ ΔPQR ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਣਗੇ ?
ਨਾਲ ਹੀ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

6. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ A(4, 6), B(1, 5) ਅਤੇ C(7, 2) ਹਨ। ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ ਕਿ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ ਹੈ। ΔADE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਤੁਲਨਾ ΔABC ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨਾਲ ਕਰੋ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) 6.2 ਅਤੇ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) 6.6 ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ)।

7. ਮੰਨ ਲਉ A (4, 2), B(6, 5) ਅਤੇ C(1, 4) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

(i) A ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਮੱਧਿਕਾ BC ਨੂੰ D 'ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) AD 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ AP : PD = 2 : 1 ਹੋਵੇ।

(iii) ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ BE ਅਤੇ CF ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂਆਂ Q ਅਤੇ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ BQ : QE = 2:1 ਹੋਵੇ ਅਤੇ CR : RF = 2:1 ਹੋਵੇ।

(iv) ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?
[ਨੋਟ : ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ *(centroid)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਹਰ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ਅਤੇ C(x_3, y_3) ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੇਂਦਰਕ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਬਿੰਦੂਆਂ A (-1,-1), B (-1,4), C (5,4) ਅਤੇ D (5,-1) ਤੋਂ ਇੱਕ ਆਇਤ ABCD ਬਣਦਾ ਹੈ। P,Q,R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC, CD ਅਤੇ DA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਕੀ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ? ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

7.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼ (Summary)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ਹੈ।
2. ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $\sqrt{x^2 + y^2}$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਉਸ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

4. ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
5. ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਭਾਗ 7.3 ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਲਈ ਜਿਸਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $PA : PB = m_1 : m_2$

ਪਰ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ P ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਬਾਹਰ ਰੇਖਾ AB ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜਿਥੇ $PA : PB = m_1 : m_2$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ (externally) 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜੋਗੇ।

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਬਾਰੇ ਜਾਣ ਪਛਾਣ 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

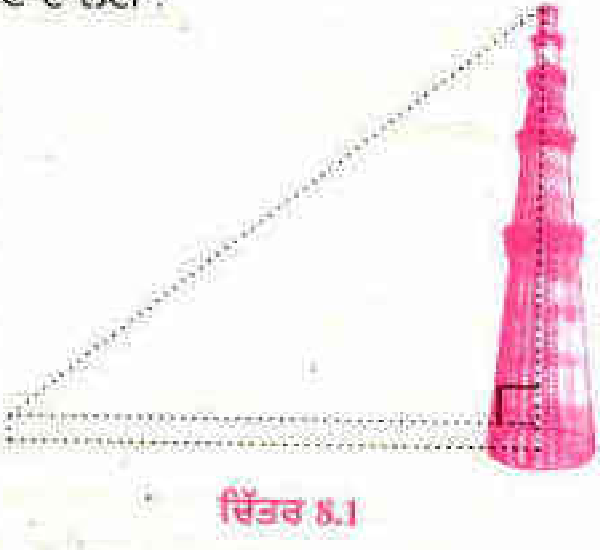
(ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸ਼ਾਇਦ ਹੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ, ਜੋ ਉਸਦੀ ਮੱਧ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਥਾਨ ਲੈ ਸਕੇ)

– J.F. Herbart (1890)

8.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਤੋਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ, ਜਿਥੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਨਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :

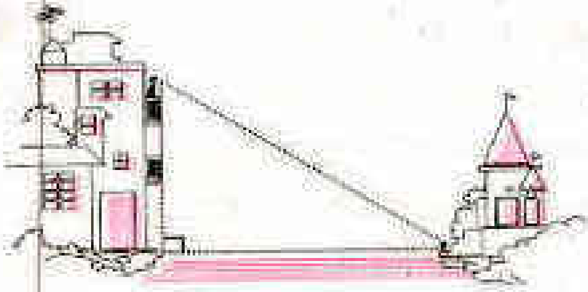
1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕੁਤੁਬ-ਮੀਨਾਰ ਦੇਖਣ ਗਏ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਨਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮਿਣਤੀ (Measure) ਬਗੈਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 8.1

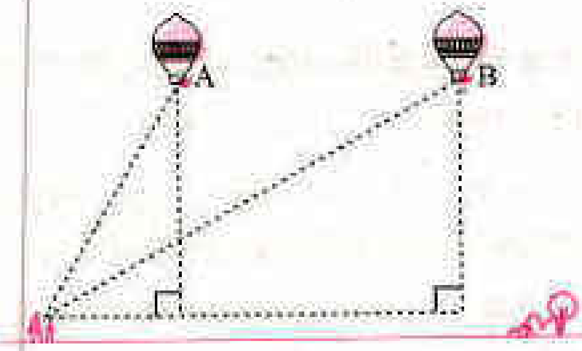
2. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਸਥਿਤ ਆਪਣੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਬਾਲਕੋਨੀ 'ਤੇ ਬੈਠੀ ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਇਸ ਨਦੀ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਕਿਨਾਰੇ 'ਤੇ

ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਮੰਦਰ ਦੀ ਇੱਕ ਹੇਠਲੀ ਪੌੜੀ 'ਤੇ ਰੱਖੇ ਗਮਲੇ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਨਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਜਿਸ 'ਤੇ ਇਹ ਲੜਕੀ ਬੈਠੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ 8.2

3. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਗਰਮ ਹਵਾ ਦਾ ਗੁਬਾਰਾ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸਮਾਨ ਵਿੱਚ ਉੱਡਣ ਵਾਲੇ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਦੇਖ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਲਈ ਆਪਣੀ ਮਾਂ ਕੋਲ ਭੱਜ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਤੁਰੰਤ ਘਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਲੜਕੀ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਗੁਬਾਰਾ ਬਿੰਦੂ A 'ਤੇ ਸੀ। ਜਦ ਮਾਂ ਬੇਟੀ ਦੋਵੇਂ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਲਈ ਬਾਹਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਗੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਆ ਚੁੱਕਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਮੀਨ ਦੇ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੋਂ, ਜਿਥੇ ਮਾਂ ਬੇਟੀ ਦੋਵੇਂ ਖੜੀਆਂ ਹਨ, B ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਉੱਪਰ ਦੱਸੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀਆਂ ਜਾਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਕੁਝ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਰਤ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਤਕਨੀਕਾਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸ਼ਾਖਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ 'trigonometry' ਗ੍ਰੀਕ ਸ਼ਬਦ 'tri' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਤਿੰਨ) 'gon' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਭੁਜਾ) ਅਤੇ 'metron' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਮਾਪ) ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ **ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਉੱਪਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਮਿਸਰ ਅਤੇ ਬੇਬੀਲਾਨ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦੀ ਤਾਰਿਆਂ ਅਤੇ ਗ੍ਰਿਹਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਮਾਪਣ ਲਈ ਕਰਦੇ ਸਨ। ਅੱਜ ਵੀ **ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ** ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਵਿਧੀਆਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਸੰਕਲਪਾਂ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹਨ।

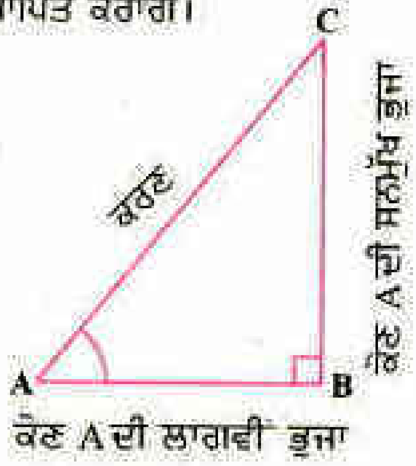
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਉਸਦੇ

ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ (Trigonometric) ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਭਾਵੇਂ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਦੂਸਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ $0°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ **ਤਤਸਮਕਾਂ (identities)**, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਤਤਸਮਕ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਭਾਗ 8.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਕੁਝ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

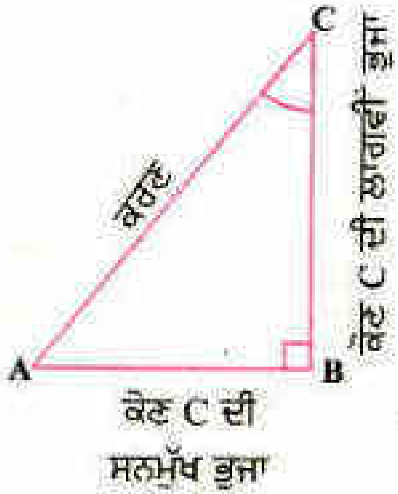
ਆਉ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈਏ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.4

ਇੱਥੇ $\angle CAB$ (ਜਾਂ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਕੋਣ A) ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ। ਕੋਣ A ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇਖੋ ਇਹ ਭੁਜਾ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਹੈ। ਇਸ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਭੁਜਾ AC ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AB, $\angle A$ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕੋਣ C ਲੈਣ 'ਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਜਾਵੇਗੀ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.5)।



ਚਿੱਤਰ 8.5

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ 'ਅਨੁਪਾਤ' ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.4) ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:

$$\angle A \text{ ਦਾ sine} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cosine} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ tangent} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ sine}} = \frac{\text{ਕਰਣ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ secant} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ cosine}} = \frac{\text{ਕਰਣ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ tangent}} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}} = \frac{AB}{BC}$$

ਉੱਪਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A ਅਤੇ cot A ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਨੁਪਾਤ **cosec A, sec A ਅਤੇ cot A** ਅਨੁਪਾਤਾਂ sin A, cos A ਅਤੇ tan A ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਲਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਇਥੇ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ ਅਤੇ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ C ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.5)?

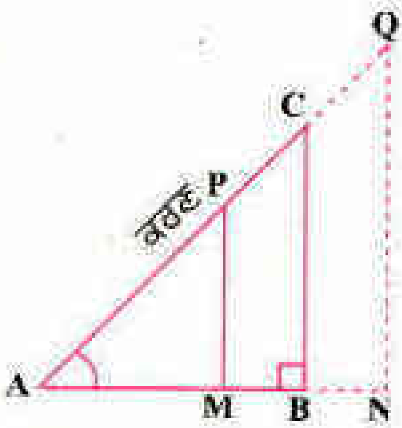
ਸ਼ਬਦ "**sine**" ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਜਿਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਉਸਦਾ ਉਲੇਖ 500 ਈ: ਵਿੱਚ ਆਰਿਆਭੱਟ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਗਈ ਪੁਸਤਕ ਆਰਿਆਭਟੀਯਮ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਆਰਿਆ ਭੱਟ ਨੇ ਸ਼ਬਦ **ਅਰਧ- ਜਯਾ** ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਧ ਜੀਵਾ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ ਜਿਸਨੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ **ਜਯਾ** ਜਾਂ ਜੀਵਾ ਦਾ ਸੰਖਿਪ ਰੂਪ ਲੈ ਲਿਆ। ਜਦੋਂ ਪੁਸਤਕ ਆਰਿਆਭਟੀਯਮ ਦਾ ਅਨੁਵਾਦ ਅਰਬੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਤਾਂ ਸ਼ਬਦ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰੱਖ ਲਿਆ ਗਿਆ। ਸ਼ਬਦ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਾਇਨਸ (sinus) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਵਕਰ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਅਰਬੀ ਰੂਪਾਂਤਰ ਨੂੰ ਲੈਟਿਨ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਦੇ ਤਰੁੰਤ ਬਾਦ sinus ਸ਼ਬਦ

ਆਰਿਆਭੱਟ
476 – 550 ਈ:

ਨੂੰ sine ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰੇ ਯੂਰਪ ਦੇ ਗਣਿਤੀ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣ ਲੱਗ ਪਿਆ। ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ ਏਡਮੰਡ ਗੁੰਟਰ (1581-1626) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਖੇਪ ਸੰਕੇਤ *'sin'* ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਸ਼ਬਦਾਂ **'cosine** ਅਤੇ **'tangent'** ਦਾ ਪਤਾ ਇਸ ਤੋਂ ਕਾਫੀ ਦੇਰ ਬਾਦ ਲੱਗਿਆ। ਫਲਨ **cosine** ਦੀ ਖੋਜ ਦਾ ਪੂਰਕ ਕੋਣ ਦਾ **sine** ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੋਈ। ਆਰਿਆਭੱਟ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ (Kotijya) **ਕੋਟਿਜਯਾ** ਦਾ ਨਾਮ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ***cosinus*** ਨਾਮ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਇਡਮੰਡ ਗੁੰਟਰ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਹੋਈ ਸੀ। 1674 ਵਿੱਚ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਸਰ ਜੋਨਾਸ ਮੂਰੇ ਨੇ, ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਖੇਪ ਸੰਕੇਤ ***'cos'*** ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਿੰਨ੍ਹ sin A ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੋਣ A' ਦੇ sin ਦੇ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਥੇ sinA, sin ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। A ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੋ ਕੇ 'sin' ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਹੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ cosA, 'cos' ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.6

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕਰਣ AC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਈਏ ਜਾਂ ਵਧਾਈ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AC 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ Q ਲਈਏ ਅਤੇ AB 'ਤੇ ਲੰਬ PM ਸੁੱਟੀਏ ਅਤੇ ਵਧੀ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AB ਤੇ ਲੰਬ QN ਸੁੱਟੀਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.6) ਤਾਂ Δ PAM ਦੇ $\angle$A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਅਤੇ Δ QAN ਦੇ $\angle$A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਅੰਤਰ ਹੋਵੇਗਾ?

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ। ਕੀ Δ PAM ਅਤੇ Δ CAB ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ Δ PAM ਅਤੇ Δ CAB ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਗੁਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $$\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ ਆਦਿ -ਆਦਿ

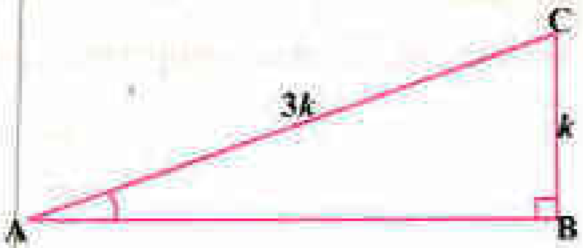
ਇਸਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ Δ PAM ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ΔCAB ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ Δ QAN ਵਿੱਚ ਵੀ sinA ਦਾ ਮੁੱਲ (ਅਤੇ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ) ਬਰਾਬਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਤੋਂ ਹੁਣ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਣ ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰਹੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੌਖ ਦੇ ਲਈ $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, ਆਦਿ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ਆਦਿ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰੰਤੂ $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਇਨ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) $\sin^{-1} A$ ਦਾ ਅਲਗ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੰਪਰਾਵਾਂ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ 'ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ ਗ੍ਰੀਕ ਅੱਖਰ θ (ਥੀਟਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੋਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦੇ ਛੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 8.7

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ $\sin A = \frac{1}{3}$, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, ਭਾਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ BC ਅਤੇ AC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ 1 : 3 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.7)। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ BC, k ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AC, $3k$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਯਾਦ ਹੈ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

ਇਸ ਲਈ $AB = \pm\, 2\sqrt{2}\,k$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $AB = 2\sqrt{2}\,k$ ($AB = -2\sqrt{2}\,k$ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹੈ?)

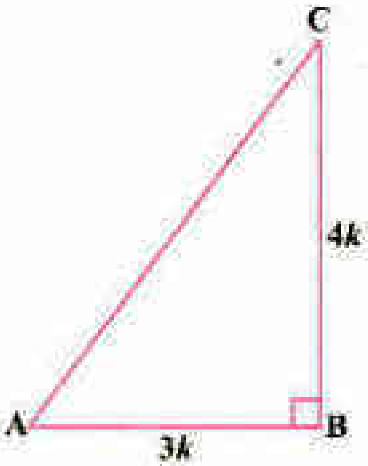
ਹੁਣ $$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sin A$ ਜਾਂ $\cos A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੀ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਜਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)। ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $\tan A = \frac{4}{3}$, ਤਾਂ ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ΔABC ਬਣਾਈਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.8)।



ਚਿੱਤਰ 8.8

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ $BC = 4k$, ਤਾਂ $AB = 3k$, ਜਿਥੇ k ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

ਇਸ ਲਈ $$AC = 5k$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

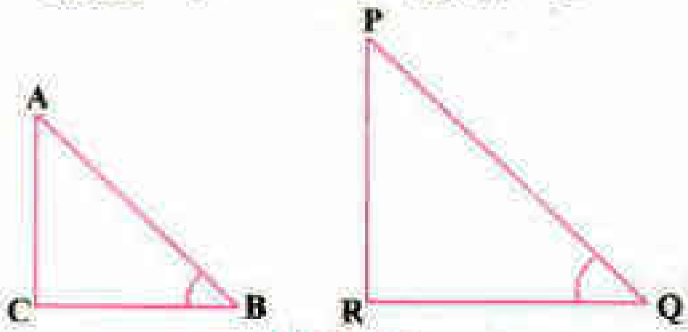
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

ਇਸ ਲਈ : $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ ਅਤੇ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜੇਕਰ $\angle B$ ਅਤੇ $\angle Q$ ਅਜਿਹੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $\sin B = \sin Q$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle B = \angle Q$

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ PQR ਲਈਏ, ਜਿਥੇ $\sin B = \sin Q$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.9)



ਚਿੱਤਰ 8.9

ਇਥੇ $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$

ਅਤੇ $\sin Q = \dfrac{PR}{PQ}$

ਹੁਣ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ} = k$ (ਮੰਨ ਲਓ) (1)

ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

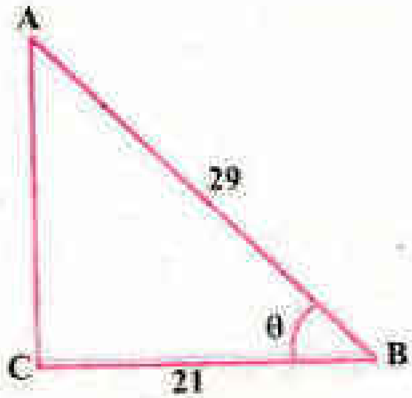
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.4 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle B = \angle Q$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ΔACB ਲਉ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB = 29$ ਇਕਾਈਆਂ, $BC = 21$ ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ $\angle ABC = \theta$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.10) ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



ਚਿੱਤਰ 8.10

ਹੱਲ : ΔACB ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

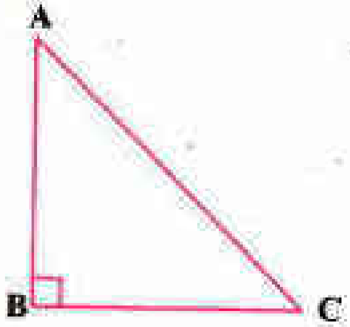
$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ ਇਕਾਈਆਂ}$$

ਇਸ ਲਈ $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

ਹੁਣ, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{20^2+21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = 1$

ਅਤੇ (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\tan A = 1$ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $2\sin A\cos A = 1$



ਚਿੱਤਰ 8.11

ਹੱਲ : ΔABC ਵਿੱਚ $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.11)

ਭਾਵ $BC = AB$

ਮੰਨ ਲਉ $AB = BC = k$, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

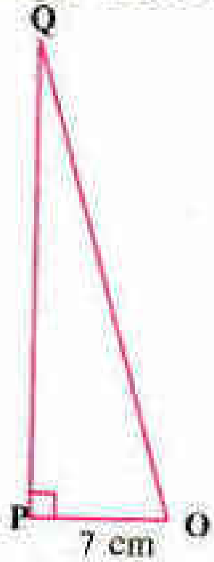
ਹੁਣ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਅਤੇ $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ਇਸ ਲਈ $2\sin A\cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ΔOPQ ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ P ਸਮਕੋਣ ਹੈ, OP = 7 cm ਅਤੇ OQ – PQ = 1 cm (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.12), sin Q ਅਤੇ cos Q ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.12

ਹੱਲ : ΔOPQ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

ਭਾਵ $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

ਭਾਵ $1 + 2PQ = 7^2$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $PQ = 24$ cm ਅਤੇ $OQ = 1 + PQ = 25$ cm

ਇਸ ਲਈ $\sin Q = \frac{7}{25}$ ਅਤੇ $\cos Q = \frac{24}{25}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.1

1. ΔABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, $AB = 24$ cm ਅਤੇ $BC = 7$ cm ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $\sin A, \cos A$
   (ii) $\sin C, \cos C$

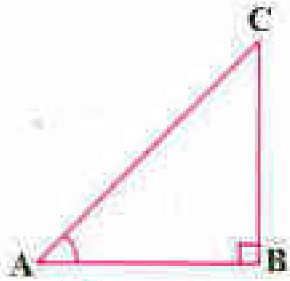
ਚਿੱਤਰ 8.13

2. ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ, $\tan P - \cot R$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਜੇਕਰ $\sin A = \frac{3}{4}$ ਤਾਂ $\cos A$ ਅਤੇ $\tan A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ $15 \cot A = 8$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\sin A$ ਅਤੇ $\sec A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜੇਕਰ $\sec \theta = \frac{13}{12}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ $\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਣ, ਜਿਥੇ $\cos A = \cos B$ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\angle A = \angle B$
7. ਜੇਕਰ $\cot \theta = \frac{7}{8}$, ਤਾਂ (i) $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$, (ii) $\cot^2 \theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੇਕਰ $3 \cot A = 4$ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।
9. Δ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:
   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$
10. ΔPQR ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ Q ਸਮਕੋਣ ਹੈ, $PR + QR = 25$ cm ਅਤੇ $PQ = 5$ cm ਹੈ। $\sin P, \cos P$ ਅਤੇ $\tan P$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਠੀਕ ਹਨ ਜਾਂ ਗਲਤ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
    (i) $\tan A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
    (ii) ਕੋਣ A ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਲਈ $\sec A = \frac{12}{5}$
    (iii) $\cos A$, ਕੋਣ A ਦੇ cosecant ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਹੈ।
    (iv) $\cot A$, cot ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
    (v) ਕਿਸੇ ਵੀ ਕੋਣ θ ਦੇ ਲਈ $\sin \theta = \frac{4}{3}$

8.3 ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ 30°, 45°, 60° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ 0° ਵਾਲੇ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

45° ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ



ਚਿੱਤਰ 8.14

Δ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕੋਣ 45° ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਸਰਾ ਕੋਣ ਵੀ 45° ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਭਾਵ $\angle A = \angle C = 45°$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.14)।

ਇਸ ਲਈ $\quad BC = AB \quad$ (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ $BC = AB = a$

ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ(ਪ੍ਰਮੇਯ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

ਇਸ ਲਈ $\quad AC = a\sqrt{2}$

ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

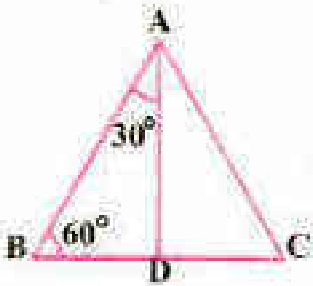
$$\sin 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

ਅਤੇ $\quad \operatorname{cosec} 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \dfrac{1}{\tan 45°} = 1$

30° ਅਤੇ 60° ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ



ਚਿੱਤਰ 8.15

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ 30° ਅਤੇ 60° ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਕੋਣ 60° ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

A ਤੋਂ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਲੰਬ AD ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.15)।

ਹੁਣ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ $BD = DC$

ਅਤੇ $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ :

ΔABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ D ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਥੇ $\angle BAD = 30°$ ਅਤੇ $\angle ABD = 60°$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.15)। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $AB = 2a$

ਤਾਂ $BD = \frac{1}{2}BC = a$

ਅਤੇ $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

ਇਸ ਲਈ $AD = a\sqrt{3}$

ਹੁਣ $\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਅਤੇ $\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$, $\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$$

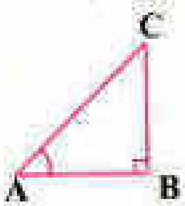
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \tan 60° = \sqrt{3}$$

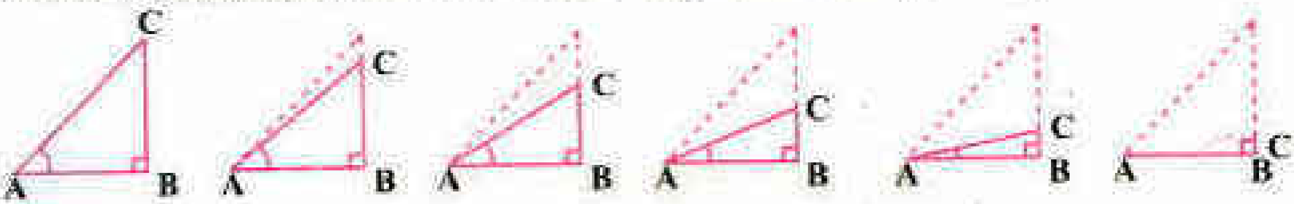
$\operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec 60° = 2$ ਅਤੇ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕੋਣ A ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ, ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ 'ਤੇ ਕੀ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.16) ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਕੋਣ A ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ C, ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਆਉਂਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ∠A, 0° ਦੇ ਕਾਫੀ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ AC ਲਗਭਗ AB ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.17)।



ਚਿੱਤਰ 8.16



ਚਿੱਤਰ 8.17

ਜਦੋਂ ∠A, 0° ਦੇ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਉਸ ਵੇਲੇ BC, 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜ਼ਦੀਕ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਵਕਤ $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜ਼ਦੀਕ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ ∠A, 0° ਦੇ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ AC ਲਗਭਗ ਉਹ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ AB ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ sin A ਅਤੇ cos A ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ $A = 0°$ ਅਸੀਂ $\mathbf{\sin 0° = 0}$ ਅਤੇ $\mathbf{\cos 0° = 1}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

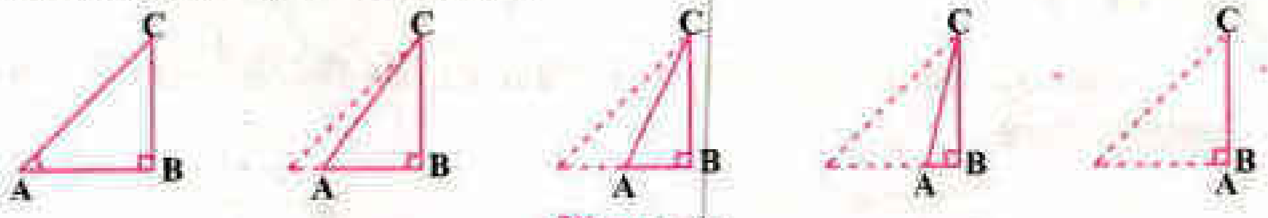
ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$, $\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ ਅਤੇ $\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ∠A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ Δ ABC ਦੇ ਇਸ ਕੋਣ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਇਹ 90° ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ। ∠A ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇਗਾ, ∠C ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਵਾਲੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ A, ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ∠A, 90° ਦਾ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ,

ਤਾਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AC ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਨਾਲ ਲੱਗਭਗ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.18)।



ਚਿੱਤਰ 8.18

ਜਦੋਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\angle A$, $90°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AC ਲਗਭਗ ਭੁਜਾ BC ਵਰਗੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ sin A, 1 ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $\angle A$, $90°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AB ਲਗਭਗ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ cos A, 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $\sin 90° = 1$ ਅਤੇ $\cos 90° = 0$

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ $90°$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ?

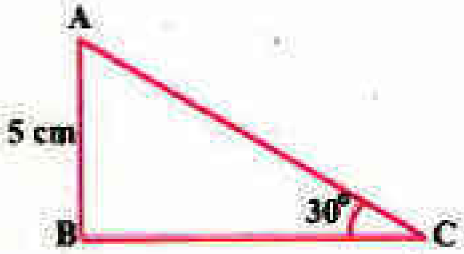
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ 8.1 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਸਾਰਣੀ 8.1

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ
cosec A	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ
cot A	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰਣੀ 8.1 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਿਵੇਂ -ਜਿਵੇਂ $\angle A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0° ਤੋਂ 90° ਤੱਕ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\sin A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 1 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cos A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੇ 0 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਸਾਰਣੀ 8.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 8.19

ਉਦਾਹਰਣ 6 : Δ ABC ਵਿੱਚ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ, ਹੈ AB = 5 cm ਅਤੇ $\angle ACB = 30^\circ$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.19) ਹੈ। ਭੁਜਾਵਾਂ BC ਅਤੇ AC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਸ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਲਵਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AB ਹੋਵੇ। ਕਿਉਂਕਿ BC, ਕੋਣ C ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਹੈ, ਅਤੇ AB ਕੋਣ C ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

ਭਾਵ $$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $BC = 5\sqrt{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭੁਜਾ AC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ (ਕਿਉਂ?)

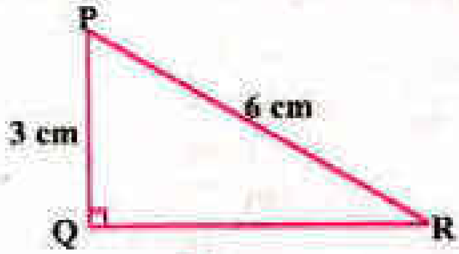
ਭਾਵ $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

ਭਾਵ $$AC = 10 \text{ cm}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਜੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਵੀ ਲਾਗੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਸੀ,

ਭਾਵ $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ cm} = 10 \text{cm}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ΔPQR ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ Q ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.20), PQ = 3 cm ਅਤੇ PR = 6 cm ਹੈ। $\angle QPR$ ਅਤੇ $\angle PRQ$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.20

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ PQ = 3 cm ਅਤੇ PR = 6 cm

ਇਸ ਲਈ $\quad \frac{PQ}{PR} = \sin R$

ਜਾਂ $\quad \sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad \angle PRQ = 30^\circ$

ਅਤੇ $\quad \angle QPR = 60^\circ \quad$ (ਕਿਉਂ?)

ਤੁਸੀਂ ਇਥੇ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਗ (ਜੋ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਹੋਵੇ) ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਾਕੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਜੇਕਰ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A + B \le 90^\circ$, $A > B$, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, ਇਸ ਲਈ $A - B = 30^\circ$ (ਕਿਉਂ?) $\quad$ (1)

ਅਤੇ, ਕਿਉਂਕਿ $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, ਇਸ ਲਈ $A + B = 60^\circ$ (ਕਿਉਂ?) $\quad$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $A = 45^\circ$ ਅਤੇ $B = 15^\circ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ

(i) $\frac{2 \tan 30°}{1 + \tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\frac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ ਉਦੋਂ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ A ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $0°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$

(iv) $\frac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. ਜੇਕਰ $\tan (A + B) = \sqrt{3}$ ਅਤੇ $\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਦੱਸੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਗਲਤ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

(i) $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

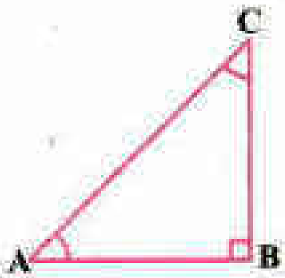
(ii) θ ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ $\sin \theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(iii) θ ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ $\cos \theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(iv) θ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $\sin \theta = \cos \theta$

(v) $A = 0°$ ਤੇ $\cot A$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

8.4 ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ



ਚਿੱਤਰ 8.21

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $90°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Δ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਜੋੜਾ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.21)।

ਕਿਉਂਕਿ $\angle A + \angle C = 90°$ ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਣਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \frac{BC}{AC} & \cos A = \frac{AB}{AC} & \tan A = \frac{BC}{AB} \\ \operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} & \sec A = \frac{AC}{AB} & \cot A = \frac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\angle C = 90° - \angle A$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖੀਏ।

ਸੌਖ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $90° - \angle A$ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ $90° - A$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਕੋਣ $90° - A$ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ AB ਕੋਣ $90° - A$ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ ਅਤੇ BC ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\left.\begin{aligned} &\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC},\quad \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC},\quad \tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} \\ &\operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB},\quad \sec(90° - A) = \frac{AC}{BC},\quad \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ ਅਤੇ } \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A,$$

ਅਤੇ
$$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A, \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A, \quad \operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

ਇਸ ਲਈ
$$\begin{aligned} &\mathbf{\sin(90° - A) = \cos A,} && \mathbf{\cos(90° - A) = \sin A} \\ &\mathbf{\tan(90° - A) = \cot A,} && \mathbf{\cot(90° - A) = \tan A} \\ &\mathbf{\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A,} && \mathbf{\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A} \end{aligned}$$

ਇਥੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 0° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹ $A = 0°$ ਜਾਂ $A = 90°$ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ ਅਤੇ $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ ਅਤੇ $\cot 0°$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cot A = \tan(90° - A)$

ਇਸ ਲਈ $$\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$$

ਭਾਵ $$\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਜੇਕਰ $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ ਹੋਵੇ, ਜਿਥੇ, 3 A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ (1)

ਕਿਉਂਕਿ $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (1) ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$$

ਕਿਉਂਕਿ $90° - 3A$ ਅਤੇ $A - 26°$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

$$90° - 3A = A - 26°$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $A = 29°$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $\cot 85° + \cos 75°$ ਨੂੰ 0° ਅਤੇ 45° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ :
$$\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$$
$$= \tan 5° + \sin 15°$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ

   (i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

   (ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3. ਜੇਕਰ $\tan 2A = \cot (A - 18°)$, ਜਿਥੇ 2A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ, ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ $\tan A = \cot B$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A + B = 90°$

5. ਜੇਕਰ $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20°)$, ਜਿਥੇ 4A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਜੇਕਰ A, B ਅਤੇ C ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ

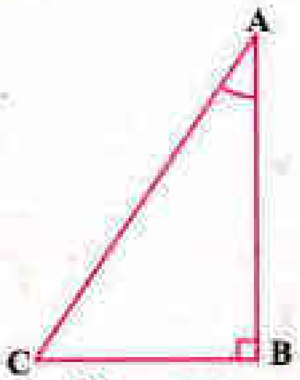
$$\sin\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

7. $\sin 67° + \cos 75°$ ਨੂੰ 0° ਅਤੇ 45° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

8.5 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਤਤਸਮਕ(ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ)

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ (ਸਰਬਸਮਤਾ) ਉਦੋਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਸੰਬੰਧਤ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ** ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਸੰਬੰਧਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਤਿਕੋਣਤਿਮਈ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 8.22

ΔABC ਵਿੱਚ, ਜੋ B 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.22) ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (1)

(1) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ AC^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

ਭਾਵ $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

ਭਾਵ $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$$

ਇਹ ਸਾਰੇ A ਦੇ ਲਈ, ਜਿਥੇ $0° \le A \le 90°$, ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ (1) ਨੂੰ AB^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਈਏ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

ਭਾਵ $$\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$$

ਕੀ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ $A = 0°$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ? ਹਾਂ, ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ $A = 90°$ ਦੇ ਲਈ

ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ? $A = 90°$ ਦੇ ਲਈ tan A ਅਤੇ sec A ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, (3) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ A ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ $0° \le A < 90°$

ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ (1) ਨੂੰ BC^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

ਭਾਵ $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ਭਾਵ $$\mathbf{\cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \qquad (4)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $A = 0°$ ਦੇ ਲਈ cosec A ਅਤੇ cot A ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, (4) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ A ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ $0° < A \le 90°$

ਇਹਨਾਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਪਤਾ ਹੈ ਤਾਂ $\cot A = \sqrt{3}$

ਕਿਉਂਕਿ $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ਅਤੇ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ ਇਸ ਲਈ $\text{cosec } A = 2$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਅਨੁਪਾਤਾਂ cos A, tan A ਅਤੇ sec A ਨੂੰ sin A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, ਇਸ ਲਈ

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, ਭਾਵ $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ : $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ ਅਤੇ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=1$

ਹੱਲ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ} = \sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}$

ਹੱਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= \dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}-\cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\cos A}$

$$\frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1} = \text{ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਤਤਸਮਕ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ $\sec\theta$ ਅਤੇ $\tan\theta$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤਤਸਮਕ ਵਰਤਣੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਪਹਿਲੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos\theta$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ $\sec\theta$ ਅਤੇ $\tan\theta$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੀਏ

$$\text{ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ} = \frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

ਜੋ ਸਿੱਧ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਲੋੜੀਦੀ ਤਤਸਮਕ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.4

1. ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ sin A, sec A ਅਤੇ tan A ਨੂੰ cot A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।
2. $\angle A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ sec A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।
3. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

   (i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

   (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$
4. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਵਿਕਲਪ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ :

   (i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

   (iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

   (iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$
5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ (ਤਤਸਮਕਾਂ) ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ ਉਹ ਕੋਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਵਿਅੰਜਕਾਂ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ, ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹਨ :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[ਸੰਕੇਤ : ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $\sin\theta$ ਅਤੇ $\cos\theta$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[ਸੰਕੇਤ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਰਲ ਕਰੋ]

(v) ਤਤਸਮਕ $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ

$\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[ਸੰਕੇਤ : ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਰਲ ਕਰੋ]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ :

$$\sin A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}}, \cos A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦਾ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ।

5. sin A ਜਾਂ cos A ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਦੇ ਵੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਜਦੋਂ ਕਿ sec A ਜਾਂ cosec A ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$

   $\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

   $\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ ਜਿੱਥੇ $0° \le A < 90°$

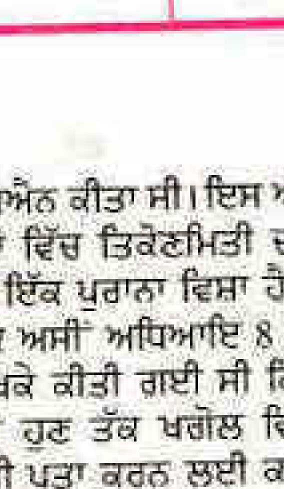
   $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ਜਿੱਥੇ $0° < A \le 90°$

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਕੁਝ ਉਪਯੋਗ 9

9.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਉਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਹਾਡੇ ਆਸ ਪਾਸ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਇੱਕ ਪੁਰਾਨਾ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਧਿਐਨ ਪੂਰੇ ਜਗਤ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ ਕਰਦੇ ਆਏ ਹਨ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਦੱਸ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੀ ਖੋਜ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ ਕਿ ਇਸਦੀ ਖਗੋਲਕੀ (astronomy) ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਸੀ। ਉਸ ਵੇਲੇ ਤੋਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪ੍ਰਿਥਵੀ (ਧਰਤੀ) ਤੋਂ ਗ੍ਰਹਿਾਂ ਅਤੇ ਤਾਰਿਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਦੇ ਆਏ ਹਨ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਭੂਗੋਲ ਅਤੇ ਨੌਚਾਲਣ (navigation) ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਕਸ਼ੇ ਬਣਾਉਣ ਅਤੇ ਲੰਬਕਾਰ (longitude) ਅਤੇ ਵਿੱਥਕਾਰ (latitude) ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਦੀਪ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਰਵੇ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਦੀਆਂ ਤੋਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹਨ। ਉਨਵੀਂ ਸਦੀ ਦਾ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਾਲ ਸਰਵੇਖਣ "ਵੱਡਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਵੇ" ਬਰਤਾਨੀ ਭਾਰਤ ਦੀ ਪਰਿਯੋਜਨਾ ਸੀ। ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਦੋ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। 1852 ਵਿੱਚ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਪਹਾੜ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ। ਲਗਭਗ 160 km ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਧ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ 6 ਕੇਂਦਰਾਂ ਤੋਂ ਇਸ ਪਹਾੜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। 1856 ਵਿੱਚ ਇਸ ਚੋਟੀ ਦਾ ਨਾਮਕਰਣ ਸਰ ਜਾਰਜ ਐਵਰੈਸਟ ਦੇ ਨਾਮ 'ਤੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਜਿਸ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਸ਼ਾਲ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਨੂੰ ਵਰਤਿਆ (ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲਾ ਚਿੱਤਰ ਦੇਖੋ) ਹੁਣ ਇਹ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਦੇਹਰਾਦੂਨ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਭਾਰਤ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹਘਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਲਈ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ।



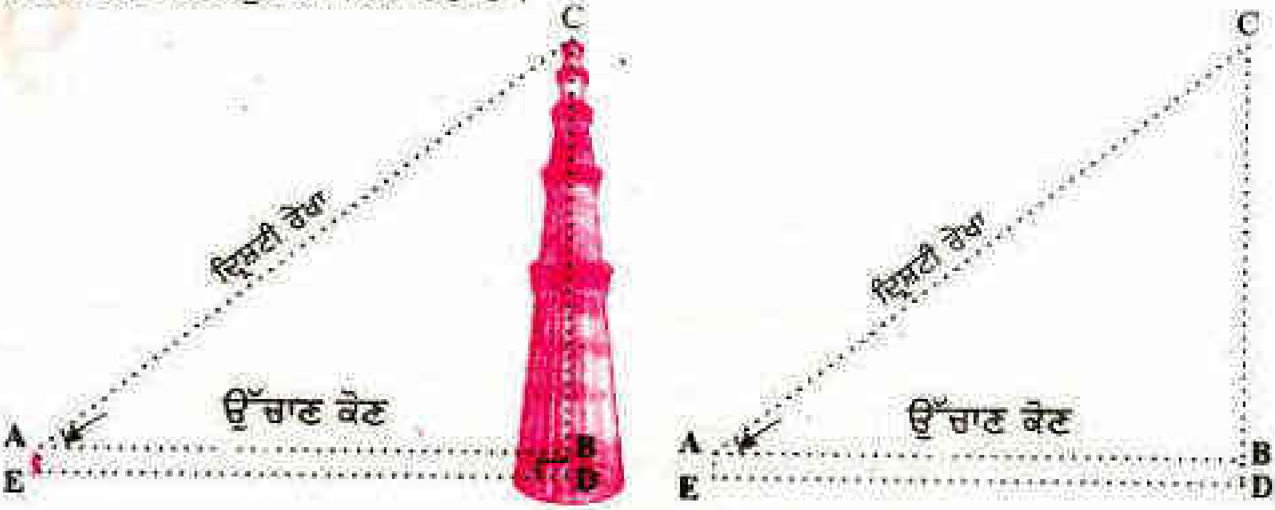
ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ

ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਯੰਤਰ ਜੋ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰਬੀਨ ਨਾਲ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

9.2 ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ

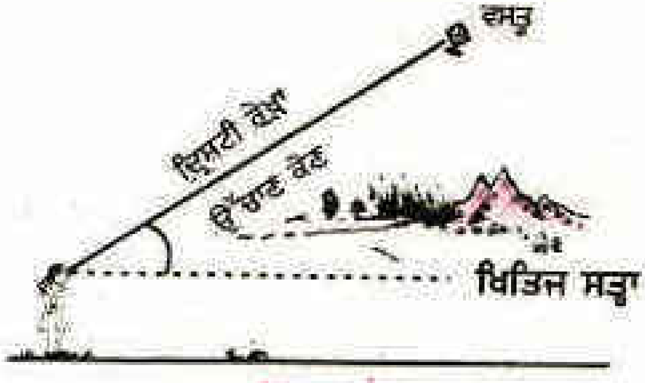
ਆਉ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 8.1 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਚਿੱਤਰ 9.1 ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਖਿੱਚ ਰਹੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 9.1

ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੱਕ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ AC ਨੂੰ **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ (line of sight)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਦੇਖ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ **ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ** (Horizontal Line) ਨਾਲ ਬਣੇ ਕੋਣ BAC ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਅੱਖ ਦੁਆਰਾ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ **ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ (angle of elevation)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

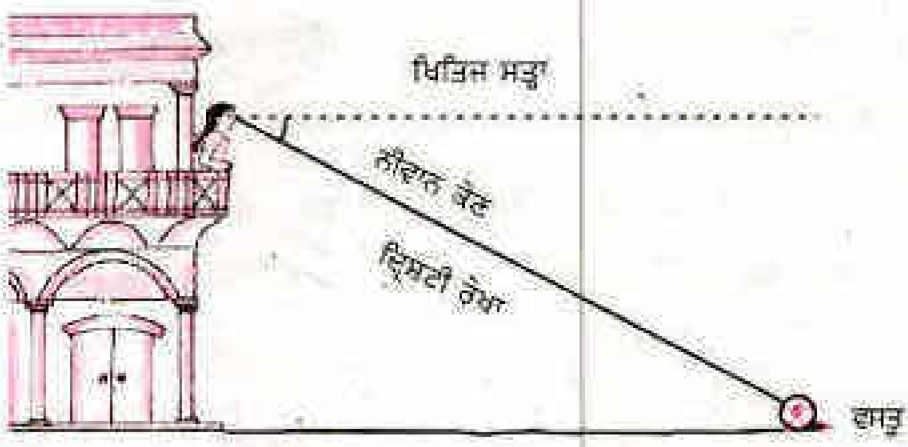
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ** ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੀ ਅੱਖ ਨੂੰ ਉਸ ਵਸਤੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੇਖਦਾ ਹੈ। ਦੇਖੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ; ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣਾ ਸਿਰ ਉੱਪਰ ਚੁਕਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.2)।



ਚਿੱਤਰ 9.2

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਬਾਲਕੋਨੀ ਵਿੱਚ ਬੈਠੀ ਲੜਕੀ ਮੰਦਰ ਦੀ ਪੌੜੀ 'ਤੇ ਰੱਖੇ ਗਮਲੇ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਦੇਖ ਰਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਕੋਣ ਨੂੰ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ (angle of depression)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੇਖੀ ਜਾ ਰਹੀ ਵਸਤੂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ** ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੇਖੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣਾ ਸਿਰ ਹੇਠਾਂ ਝੁਕਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.3)।



ਚਿੱਤਰ 9.3

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.3 ਵਿੱਚ ਬਣੀਆਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਕੋਣ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ ਜਾਂ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ?

ਆਉ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 9.1 ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਦੇਖੀਏ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਮਤਲੱਬ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਮਾਪੇ ਹੀ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ CD ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? ਇਸਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

(i) ਦੂਰੀ DE ਜਿਥੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ।

(ii) ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ $\angle BAC$

(iii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AE

ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਤਿੰਨੇ ਜਾਣਕਾਰੀਆਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ $CD = CB + BD$ ਜਿੱਥੇ $BD = AE$ ਜੋ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਹੈ।

BC ਪਤਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $\angle BAC$ ਜਾਂ $\angle A$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

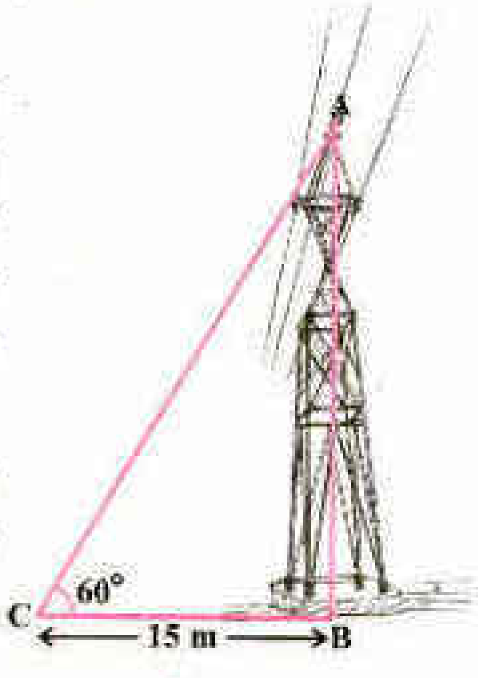
ΔABC ਵਿੱਚ, ਭੁਜਾ BC ਕੋਣ A (ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ) ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਮੁੱਲ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? tan A ਜਾਂ cot A ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਡੀ ਖੋਜ ਦਾ ਘੇਰਾ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BC ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\tan A = \frac{BC}{AB}$ ਜਾਂ $\cot A = \frac{AB}{BC}$, ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ BC ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

BC ਅਤੇ AE ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗੀ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਹਾਰਣਾਂ ਨਾਲ ਹੁਣੇ-ਹੁਣੇ ਦੱਸੇ ਗਏ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਸਿੱਧੀ (Vertically) ਖੜੀ ਹੈ। ਧਰਤੀ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 15 m ਦੂਰ ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਰਲ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਈਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.4)। ਇੱਥੇ AB ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, CB ਮੀਨਾਰ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ ਅਤੇ $\angle ACB$ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਭਾਵ AB ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ACB ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜੋ B 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.4

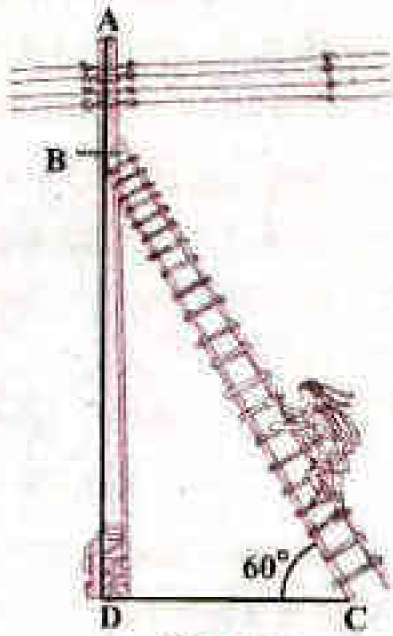
ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ tan 60° (ਜਾਂ cot 60°) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BC ਦੋਵੇਂ ਹਨ।

ਹੁਣ $$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

ਭਾਵ $$\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

ਭਾਵ $$AB = 15\sqrt{3}$$

ਇਸ ਲਈ, ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $15\sqrt{3}$ m ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.5

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਮਿਸਤਰੀ ਨੂੰ 5 m ਉੱਚੇ ਖੰਬੇ 'ਤੇ ਆ ਗਈ ਖਰਾਬੀ ਨੂੰ ਠੀਕ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੁਰੰਮਤ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਨ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਖੰਬੇ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ 1.3 m ਥੱਲੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.5)। ਇਥੋਂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਦੇ ਲਈ ਉੱਚਿਤ ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਕਿ ਖਿਤਿਜ 'ਤੇ 60° ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕਾਉਣ ਨਾਲ ਇਹ ਉੱਚਿਤ (ਲੋੜੀਂਦੀ) ਸਥਿਤੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚ ਜਾਏ? ਇਹ ਵੀ ਦੱਸੋ ਕੀ ਖੰਬੇ ਦਾ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਪੌੜੀ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ 'ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ? (ਇਥੇ ਤੁਸੀਂ $\sqrt{3} = 1.73$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ)।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.5 ਵਿੱਚ, ਬਿਜਲੀ ਮਿਸਤਰੀ ਨੂੰ ਖੰਬੇ AD 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{ m} = 3.7\text{ m}$

ਇਥੇ BC, ਪੌੜੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਭਾਵ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ BDC ਦਾ ਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹਦਾ ਹੈ?

ਇਹ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ sin 60° ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{BD}{BC} = \sin 60° \text{ ਜਾਂ } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28\text{ m (ਲਗਭਗ)}$$

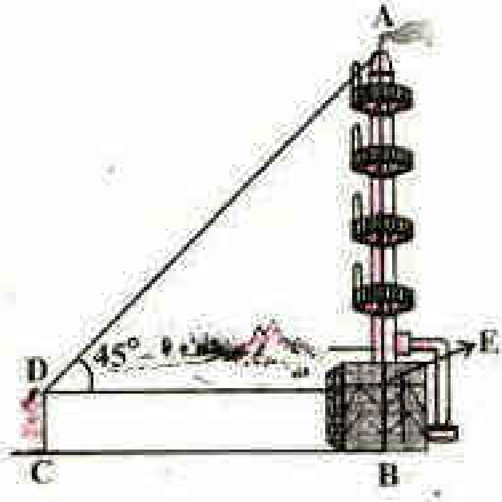
ਭਾਵ ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4.28 m ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਭਾਵ $$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14\text{ m (ਲਗਭਗ)}$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਪੌੜੀ ਦੇ ਪੈਰ ਨੂੰ ਖੰਬੇ ਦੇ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 2.14 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : 1.5 m ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਕ ਚਿਮਨੀ ਤੋਂ 28.5 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਅੱਖਾਂ ਨਾਲ ਚਿਮਨੀ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.6

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ AB ਚਿਮਨੀ ਹੈ, CD ਪ੍ਰੇਖਕ ਹੈ ਅਤੇ ∠ ADE ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.6)। ਇੱਥੇ ADE ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ E ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $AB = AE + BE = (AE + 1.5)$ m

ਅਤੇ $DE = CB = 28.5$ m

AE ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AE ਅਤੇ DE ਦੋਵੇਂ ਹੋਣ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਦਾ tangent ਲਈਏ।

ਹੁਣ $$\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

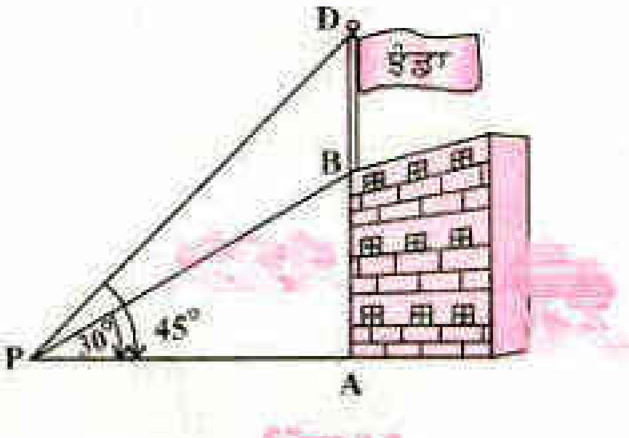
ਭਾਵ $$1 = \frac{AE}{28.5}$$

ਇਸ ਲਈ $AE = 28.5$

ਇਸ ਲਈ, ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $(AB) = (28.5 + 1.5)$ m $= 30$ m

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਇੱਕ 10 m ਉੱਚੇ ਭਵਨ (ਮਕਾਨ) ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਭਵਨ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਝੰਡਾ ਲਹਿਰਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ P ਤੋਂ ਝੰਡੇ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ (flagstaff) ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਥੇ ਤੁਸੀਂ $\sqrt{3} = 1.73$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ)।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.7 ਵਿੱਚ, AB ਭਵਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, BD ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ P ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ PAB ਅਤੇ PAD ਹਨ। ਅਸੀਂ ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਭਾਵ DB ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ ਭਾਵ PA ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.7

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਭਵਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AB ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ Δ PAB ਲਵਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

ਭਾਵ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

ਇਸ ਲਈ $AP = 10\sqrt{3}$

ਭਾਵ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ $10\sqrt{3}$ m = 17.32 m

ਆਉ ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ DB = x m ਹੈ। ਹੁਣ AD = $(10 + x)$ m

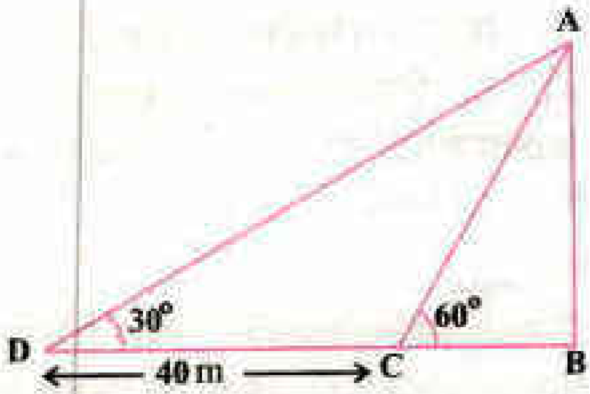
ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ Δ PAD ਵਿੱਚ $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

ਇਸ ਲਈ $1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

ਭਾਵ $x = 10\left(\sqrt{3}-1\right) = 7.32$

ਇਸ ਲਈ, ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 7.32 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਖੜੀ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 40 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸੂਰਜ ਦਾ ਸਿਖ਼ਰ ਲੰਬ (altitude) 60° ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੇ 30° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ DB ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.8

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AB = h m ਹੈ ਅਤੇ BC, x m ਹੈ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ DB, BC ਤੋਂ 40 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $DB = (40 + x)$ m

ਇਥੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ ABD ਹਨ।

Δ ABC ਵਿੱਚ $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

ਜਾਂ $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

Δ ABD ਵਿੱਚ $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

ਭਾਵ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40}$ (2)

(1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$h = x\sqrt{3}$$

ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ (2)ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$, ਭਾਵ $3x = x + 40$

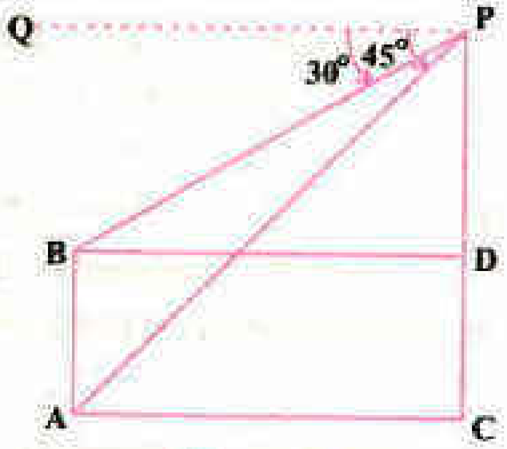
ਇਸ ਲਈ $x = 20$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $h = 20\sqrt{3}$ [(1) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $20\sqrt{3}$ m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਬਹੁਮੰਜਲੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਤੋਂ ਦੇਖਣ 'ਤੇ ਇੱਕ 8 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਅਤੇ ਤਲ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30° ਅਤੇ 45° ਹਨ। ਬਹੁਮੰਜਲੀ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਦੋਹਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.9 ਵਿੱਚ PC ਬਹੁਮੰਜਿਲ ਇਮਾਰਤ ਅਤੇ AB, 8 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਮੰਜਿਲ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਭਾਵ PC ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਭਾਵ AC ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.9

ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ BD ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ PB ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle$ QPB ਅਤੇ $\angle$ PBD ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\angle PBD = 30^\circ$, ਇਸੇ ਤਰਾਂ $\angle PAC = 45^\circ$

ਸਮਕੋਣ Δ PBD ਵਿੱਚ

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ਜਾਂ } BD = PD\sqrt{3}$$

ਸਮਕੋਣ Δ PAC ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

ਭਾਵ $PC = AC$

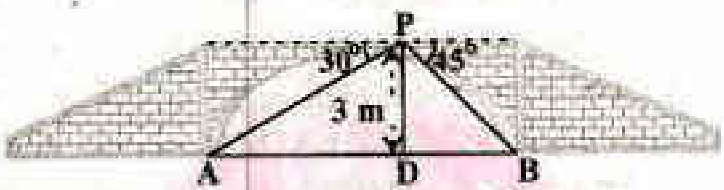
ਅਤੇ $PC = PD + DC$ ਇਸ ਲਈ $PD + DC = AC$

ਕਿਉਂਕਿ $AC = BD$ ਅਤੇ $DC = AB = 8$ m, ਇਸ ਲਈ $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ: $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)$ m

ਇਸ ਲਈ, ਬਹੁਮੰਜਿਲ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ m $= 4(3+\sqrt{3})$ m ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ $4(3+\sqrt{3})$ m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੇ ਪੁਲ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਨਦੀ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30° ਅਤੇ 45° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪੁਲ, ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.10

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.10 ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਨਦੀ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ AB ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਹੈ। 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਬਣੇ ਪੁਲ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਹੈ ਭਾਵ DP = 3 m ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ Δ APB ਦੀ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ।

ਹੁਣ $AB = AD + DB$

ਸਮਕੋਣ Δ APD ਵਿੱਚ $\angle A = 30°$

ਇਸ ਲਈ $\tan 30° = \frac{PD}{AD}$

ਭਾਵ $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ ਜਾਂ } AD = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮਕੋਣ Δ PBD ਵਿੱਚ, $\angle B = 45°$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ BD = PD = 3 m

ਹੁਣ $$AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ m}$$

ਇਸ ਲਈ, ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ m ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 9.1

1. ਸਰਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਕਲਾਕਾਰ ਇੱਕ 20 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ 'ਤੇ ਚੜ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜੋ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਤਣੀ (ਕਸੀ) ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਸਿੱਧੇ ਖੜੇ ਖੰਭੇ ਦੇ ਸਿਖਰ ਨਾਲ ਬੰਨੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੱਸੀ ਧਰਤੀ ਦੇ ਤਲ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਖੰਭੇ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.11)।

ਚਿੱਤਰ 9.11

2. ਹਨੇਰੀ ਆਉਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਟੁੱਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਟੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਭਾਗ ਇਸ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਮੁੜ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਰੱਖਤ ਦਾ ਸਿਖਰ ਜ਼ਮੀਨ ਨੂੰ ਛੂਹਣ (touch) ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਜਿੱਥੇ ਦਰੱਖਤ ਦਾ ਸਿਖਰ ਜ਼ਮੀਨ ਨੂੰ ਛੂਹੰਦਾ ਹੈ, 8 m ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਠੇਕੇਦਾਰ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਖੇਡਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤਿਲਕਣ ਪੱਟੀਆਂ (Slides) ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਲਈ ਉਹ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ 1.5 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹ ਜ਼ਮੀਨ ਨਾਲ 30° ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀ ਹੋਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਲਈ ਉਹ 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਵੱਧ ਢਾਲ ਦੀ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਜ਼ਮੀਨ ਨਾਲ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ?
4. ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 30 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 60 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਉੱਡ ਰਹੀ ਹੈ। ਪਤੰਗ ਨਾਲ ਲੱਗੇ ਧਾਗੇ ਨੂੰ ਅਸਥਾਈ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਬੰਨ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜ਼ਮੀਨ ਨਾਲ ਧਾਗੇ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 60° ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਕਿ ਧਾਗੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਢਿਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. 1.5 m ਲੰਬਾ ਲੜਕਾ 30 ਮੀਟਰ ਉੱਚੀ ਇੱਕ ਇਮਾਰਤ ਤੋਂ ਕੁਝ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਉਹ ਇਮਾਰਤ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਲਦਾ ਹੈ) ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਅੱਖ ਨਾਲ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਤੋਂ 60° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਹ ਇਮਾਰਤ ਵੱਲ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਚਲ ਕੇ ਗਿਆ।

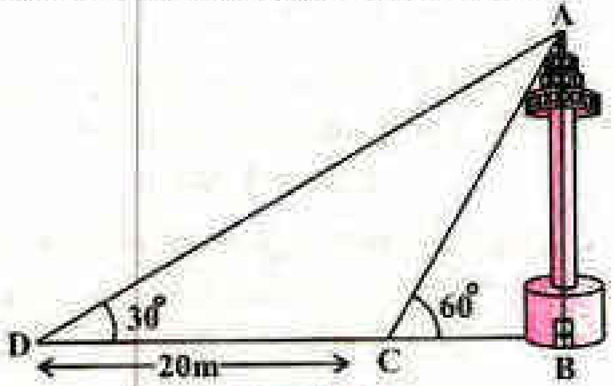
7. ਜਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ 20 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਲੱਗੇ ਸੰਚਾਰ ਮੀਨਾਰ (transmission tower) ਦੇ ਤਲ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 45° ਅਤੇ 60° ਹੈ। ਸੰਚਾਰ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਪੈਡਸਟਲ (Pedestal) ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਇੱਕ 1.6 m ਉੱਚੀ ਮੂਰਤੀ ਲੱਗੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਜਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੂਰਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਹੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪੈਡਸਟਲ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਪੈਡਸਟਲ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ ਅਤੇ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੀਨਾਰ 50 ਮੀਟਰ ਉੱਚੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ 80 ਮੀਟਰ ਚੌੜੀ ਸੜਕ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਦੋ ਖੰਬੇ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਖੰਬਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੜਕ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖੰਬਿਆਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 60° ਅਤੇ 30° ਹੈ। ਖੰਬਿਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਖੰਬਿਆਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਦੇ ਇੱਕ ਤਟ 'ਤੇ ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ ਟਾਵਰ ਸਿੱਧਾ ਖੜਾ ਹੈ। ਟਾਵਰ ਦੇ ਠੀਕ ਸਾਹਮਣੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਟ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਇਸੇ ਤਟ ਤੋਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 20 m ਦੂਰ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.12)। ਟਾਵਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਨਹਿਰ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

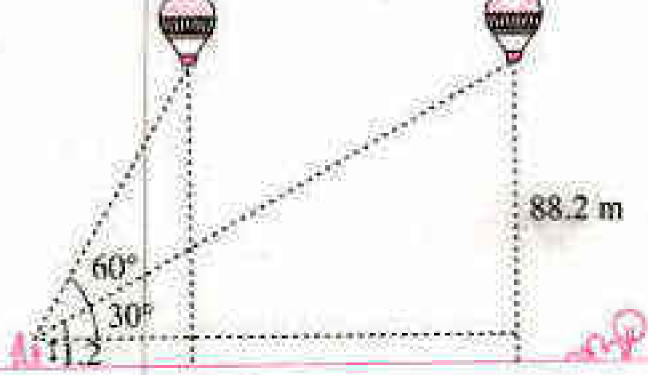


ਚਿੱਤਰ 9.12

12. 7 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕੇਬਲ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਪੈਰ ਦਾ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਟਾਵਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਸਮੁੰਦਰ ਤਲ ਤੋਂ 75 m ਉੱਚੇ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਦੇਖਣ ਨਾਲ ਦੋ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜਾਂ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 30° ਅਤੇ 45° ਹਨ। ਜੇਕਰ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਜਹਾਜ ਦੂਸਰੇ ਜਹਾਜ ਦੇ ਬਿਲਕੁਲ ਪਿਛੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਜਹਾਜਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. 1.2 m ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਜਮੀਨ ਤੋਂ 88.2 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਉੱਡ ਰਹੇ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਲੜਕੀ ਦੀ ਅੱਖ ਨਾਲ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਬਾਦ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਘੱਟ ਕੇ 30° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.13)। ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਦੌਰਾਨ ਗੁਬਾਰੇ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.13

15. ਇੱਕ ਸਿੱਧਾ ਰਾਜ ਮਾਰਗ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੱਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਖੜਾ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕਾਰ ਨੂੰ $30°$ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 'ਤੇ ਦੇਖਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਵੱਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਆ ਰਹੀ ਹੈ। ਛੇ ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਦ ਕਾਰ ਦਾ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ $60°$ ਹੋ ਗਿਆ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ 4 m ਅਤੇ 9 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦੇ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਪੂਰਕ ਕੋਣ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 m ਹੈ।

9.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. (i) **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ** ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੁਆਰਾ ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

   (ii) ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦਾ **ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ** ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਸਿਰ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਚੁਕਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

   (iii) ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦਾ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ** ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਝੁਕਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

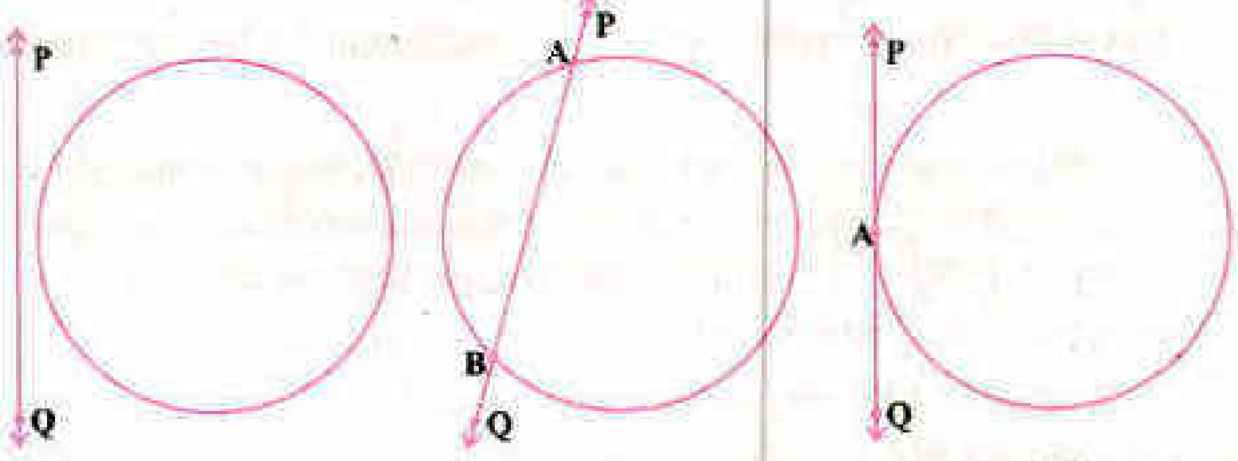
2. ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਦੋ ਦੂਰ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਚੱਕਰ 10

10.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਇੱਕ ਤਲ ਦੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (ਕੇਂਦਰ) ਤੋਂ ਅਚਲ ਦੂਰੀ (ਅਰਧ ਵਿਆਸ) 'ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਜਿਵੇਂ ਜੀਵਾ (ਵਤਰ), ਚੱਕਰ ਖੰਡ, ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਚਾਪ ਆਦਿ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਥਿਤੀਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

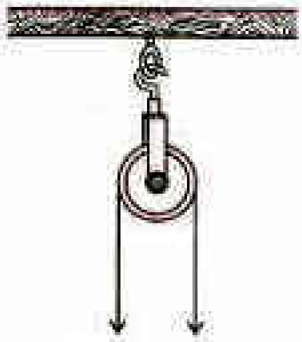
ਆਓ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ PQ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇਈਏ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.1

ਚਿੱਤਰ 10.1 (i) ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ PQ ਚੱਕਰ ਦੀ **ਨਾ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ** ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਚਿਤਰ 10.1 (ii) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ PQ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੀ **ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 10.1 (iii) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ A ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਚੱਕਰ ਦੀ **ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਖੂਹ 'ਤੇ ਲੱਗੀ ਘਿਰਨੀ ਨੂੰ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਜਿਸਦਾ ਉਪਯੋਗ ਖੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਪਾਣੀ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.2 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਇਥੇ ਘਿਰਨੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਰੱਸੀ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕਿਰਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਘਿਰਨੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕਿ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰੇਖਾ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

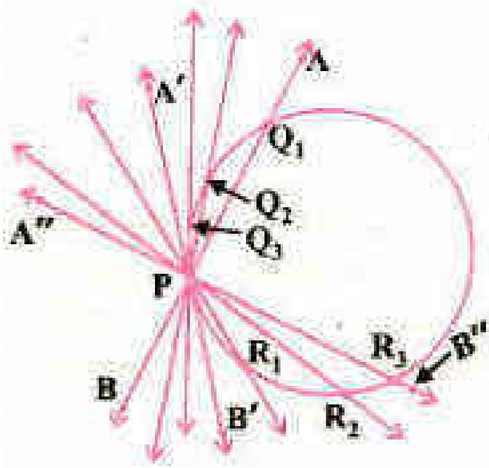
10.2 ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ **ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਉਹ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।**

ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰੋ।

ਕਿਰਿਆ 1: ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਲਓ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਿੱਧਾ ਤਾਰ AB ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੋੜੋ ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮ ਸਕੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਮੇਜ 'ਤੇ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਤਾਰ AB ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਹੌਲੀ ਹੌਲੀ ਘੁਮਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਤਾਰ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਣ। [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.3(i)]।

ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਤਾਰ, ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ Q_1 ਜਾਂ Q_2 ਜਾਂ Q_3 ਆਦਿ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਹ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਹੀ ਕੱਟੇਗਾ (AB ਦੀ ਸਥਿਤੀ A′B′ ਨੂੰ ਦੇਖੋ)। ਇਹ, ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਫਿਰ ਘੁਮਾਉਣ ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਪਰਖ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ AB ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ R_1 ਜਾਂ R_2 ਜਾਂ R_3 ਆਦਿ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ **ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।**

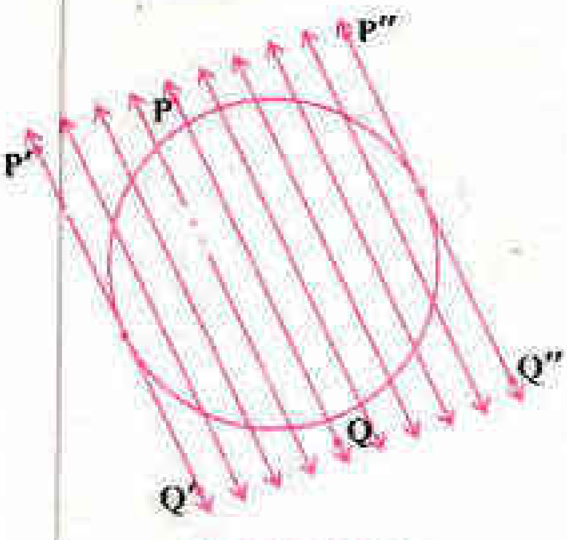


ਚਿੱਤਰ 10.3 (i)

ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਸਥਿਤੀ AB ਤੋਂ ਸਥਿਤੀ A′ B′ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਰੇਖਾ AB ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ Q_1, ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ AB ਦੀ ਸਥਿਤੀ A′B′ 'ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ A″B″, P ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ? ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ R_1 ਹੋਲੀ ਹੋਲੀ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ P ਨਾਲ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ:

ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਣ।

ਕਿਰਿਆ 2 : ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ PQ ਖਿੱਚੋ। ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਅਨੇਕ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਦੇ ਬਾਦ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੀ ਗਈ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੌਲੀ-ਹੌਲੀ ਘੱਟ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੋਵੇਂ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਨੇੜੇ ਆ ਰਹੇ ਹਨ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.3(ii)]। ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ P′Q′ ਅਤੇ P″Q″ ਦੇ ਚਿੱਤਰ 10.3 (ii) ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ। ਇਹ ਦੋਨੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਇਸ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

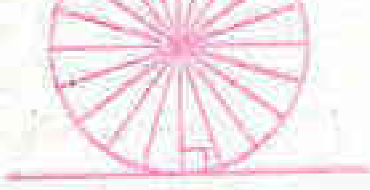


ਚਿੱਤਰ 10.3(ii)

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਣ।

ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ **ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ** [ਚਿੱਤਰ 10.1 (iii) ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A] ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ **ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨਾ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਦੇਖੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਜਾਂ ਇੱਕ ਬੈਲ ਗੱਡੀ ਨੂੰ ਚੱਲਦੇ ਦੇਖਿਆ ਹੈ? ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਹੀਆਂ ਵੱਲ ਦੇਖੋ। ਇੱਕ ਪਹੀਏ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤੀਲੀਆਂ ਉਸਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਅਨੁਰੂਪ ਹਨ। ਹੁਣ ਪਹੀਏ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਗਤੀ ਕਰਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਿਖਦੀ ਹੈ? (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.4)।


ਚਿੱਤਰ 10.4

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪਹੀਆ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਵੇਖੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 10.4 ਧਰਤੀ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਥਿਊਰਮ 10.1 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

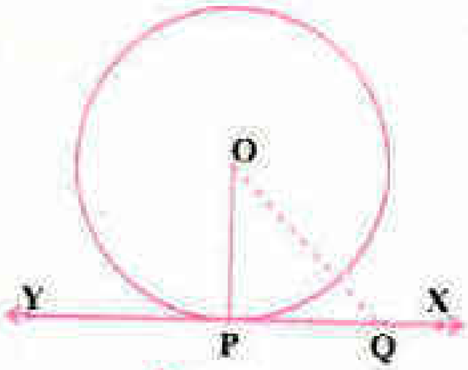
ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ XY ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ OP, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

XY 'ਤੇ P ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਲਓ ਅਤੇ OQ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.5)।

ਬਿੰਦੂ Q ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ Q ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਤਾਂ XY ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ਅਤੇ ਉਹ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।) ਇਸ ਲਈ OQ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ OP ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ। ਭਾਵ

$$OQ > OP$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਇਲਾਵਾ XY ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, OP ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ XY ਦੇ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ OP, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਥਿਊਰਮ A 1.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ)।



ਚਿੱਤਰ 10.5

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ 'ਅਭਿਲੰਬ' (Normal) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.1

1. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?
2. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ:
   (i) ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਉਸਨੂੰ ________ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ________ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ________ ਸਮਾਂਤਰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।
   (iv) ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ________ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

3. 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ PQ ਕੇਂਦਰ O ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂ Q 'ਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ OQ = 12 cm। PQ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ:
   (A) 12 cm (B) 13 cm (C) 8.5 cm (D) $\sqrt{119}$ cm
4. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ।

10.3 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ:

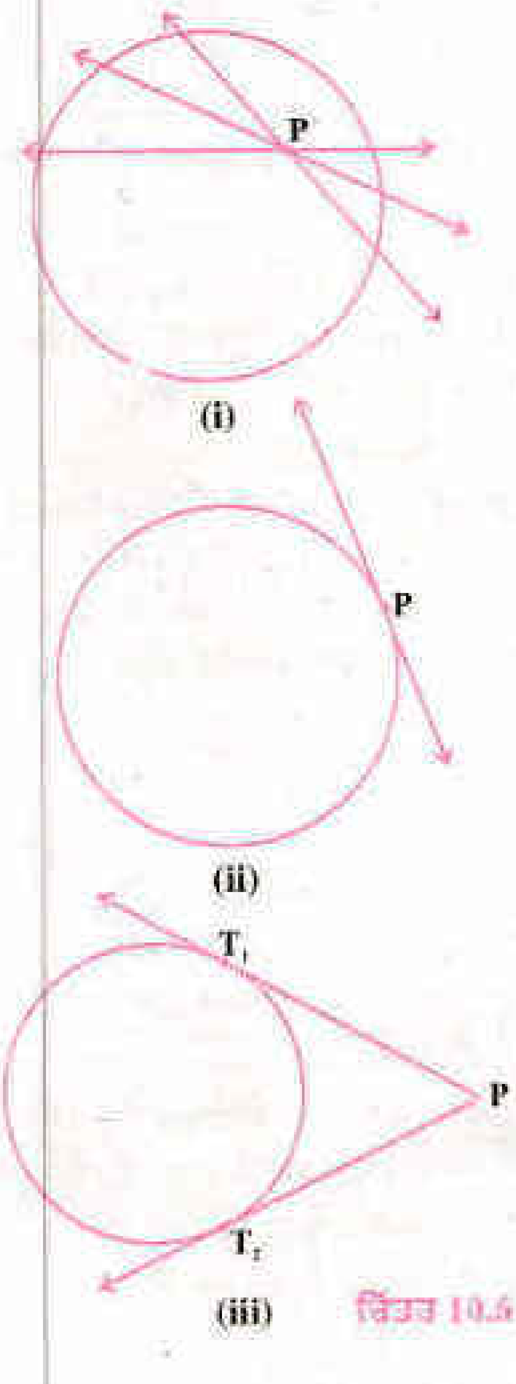
ਕਿਰਿਆ 3 : ਇੱਕ ਕਾਗਜ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਓ। ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਨ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (i)] ।

ਦੁਬਾਰਾ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਓ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਮਹਿਸੂਸ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (ii)]।

ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਓ ਅਤੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰਦੇ ਹੋ? ਤੁਸੀਂ ਪਾਓਗੇ ਕਿ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii)]।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਸਥਿਤੀ 1 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.6

ਸਥਿਤੀ 2 : ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ।

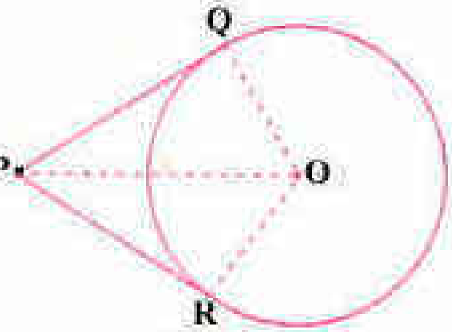
ਸਥਿਤੀ 3 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii) ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ T_1 ਅਤੇ T_2 ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ **ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii) ਵਿੱਚ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ। ਲੰਬਾਈਆਂ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਕੀ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਹੈ। ਆਓ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਸਬੂਤ ਹੇਠਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਵਿੱਚ ਦੇਈਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.2 : *ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ, PR ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.7)। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ PQ = PR



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ OP, OQ ਅਤੇ OR ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ $\angle OQP$ ਅਤੇ $\angle ORP$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲੇ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ 10.1 ਤੋਂ ਇਹ ਸਮਕੋਣ ਹਨ। ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ OQP ਅਤੇ ORP ਵਿੱਚ,

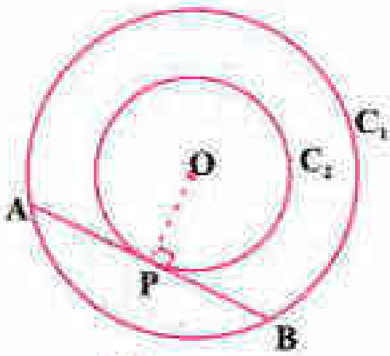
	OQ = OR	(ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ)
	OP = OP	(ਸਾਂਝਾ)
ਇਸ ਲਈ	$\Delta OQP \cong \Delta ORP$	(RHS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੁਆਰਾ)
ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ	PQ = PR	(CPCT)

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (ਕਿਉਂਕਿ OQ = OR)
   ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ PQ = PR
2. ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\angle OPQ = \angle OPR$ । ਇਸ ਲਈ OP ਕੋਣ QPR ਦਾ ਦੁਭਾਜਕ ਹੈ, ਭਾਵ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੋਣ-ਦੁਭਾਜਕ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮਕੇਂਦਰੀ (concentric) ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.8

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰ C_1 ਅਤੇ C_2 ਅਤੇ ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ C_1 ਦੀ ਜੀਵਾ AB, ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ C_2 ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ, (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.8)।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $AP = BP$

ਆਓ OP ਨੂੰ ਮਿਲਾਈਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ AB, C_2 ਦੇ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ OP ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

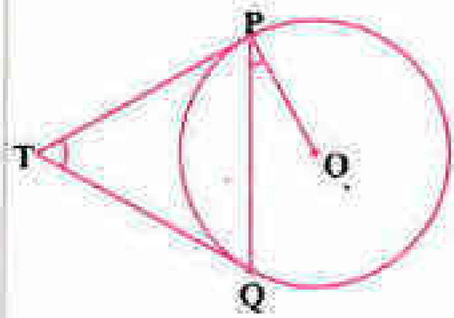
ਇਸ ਲਈ : ਪ੍ਰਮੇਯ 10.1 ਤੋਂ

$$OP \perp AB$$

ਹੁਣ AB ਚੱਕਰ C_1 ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਹੈ ਅਤੇ $OP \perp AB$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰਾਂ, OP ਜੀਵਾ AB ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜੀਵਾ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਉਸਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ,

ਭਾਵ $\quad AP = BP$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ T ਤੋਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ TP ਅਤੇ TQ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ T ਅਤੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ TP ਅਤੇ TQ, ਜਿਥੇ P, Q ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਦਿੱਤੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.9)। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ:

$$\angle PTQ = 2\angle OPQ$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad \angle PTQ = \theta$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.2 ਤੋਂ $TP = TQ$ । ਇਸ ਲਈ TPQ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

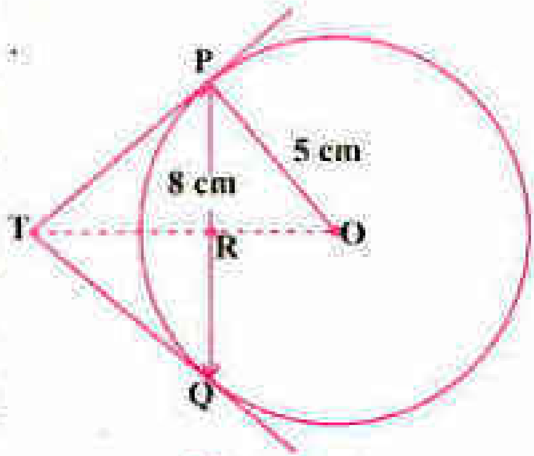
ਇਸ ਲਈ $\quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.1 ਤੋਂ $\angle OPT = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$

ਇਸ ਤੋਂ $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ 8 cm ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ PQ ਹੈ। P ਅਤੇ Q 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ T 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.10) TP ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.10

ਹੱਲ : OT ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ PQ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ R 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Δ TPQ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਹੈ ਅਤੇ TO, $\angle PTQ$ ਦਾ ਕੋਣ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $OT \perp PQ$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ OT, PQ ਦਾ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ PR = RQ = 4 cm

ਨਾਲ ਹੀ $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm = 3 cm

ਹੁਣ $\angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle RPO = \angle PTR$

ਇਸ ਲਈ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ TRP ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PRO, AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਨਾਲ $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ ਭਾਵ $TP = \frac{20}{3}$ cm

ਟਿੱਪਣੀ : TP ਨੂੰ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੁਆਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ:

ਮੰਨ ਲਓ $TP = x$ ਅਤੇ $TR = y$ ਤਾਂ

$$x^2 = y^2 + 16 \quad \text{(ਸਮਕੋਣ } \Delta \text{ PRT ਲੈ ਕੇ)} \qquad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y+3)^2 \quad \text{(ਸਮਕੋਣ } \Delta \text{ OPT ਲੈ ਕੇ)} \qquad (2)$$

(1) ਨੂੰ (2) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$25 = 6y - 7 \quad \text{ਜਾਂ} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

ਇਸ ਲਈ $$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16\times 25}{9} \qquad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਜਾਂ $$x = \frac{20}{3}\ \text{cm}$$

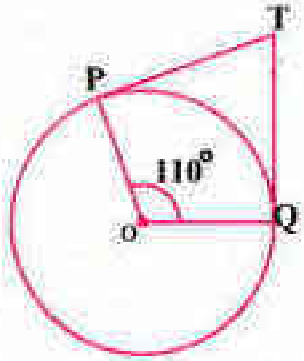
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੰ: 1, 2, 3 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਵਿਕਲਪ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉੱਚਿਤ ਕਾਰਣ ਦਿਓ।

1. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਤੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 24cm ਅਤੇ Q ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 25cm ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ:

   (A) 7 cm (B) 12 cm

   (C) 15 cm (D) 24.5 cm



ਚਿੱਤਰ 10.11

2. ਚਿੱਤਰ 10.11 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ TP, TQ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਹਨ ਕਿ $\angle POQ = 110°$, ਤਾਂ $\angle PTQ$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ:

   (A) 60° (B) 70°

   (C) 80° (D) 90°

3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ O ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ PA, PB ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 80° ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $\angle POA$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ:

   (A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

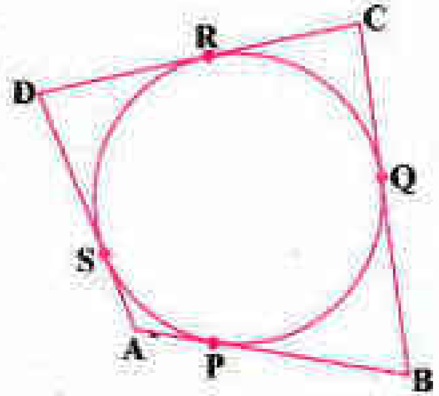
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

6. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ, ਜੋ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 5 cm ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4 cm ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਦੋ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 cm ਤੇ 3 cm ਹਨ। ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਉਸ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੋਵੇ।

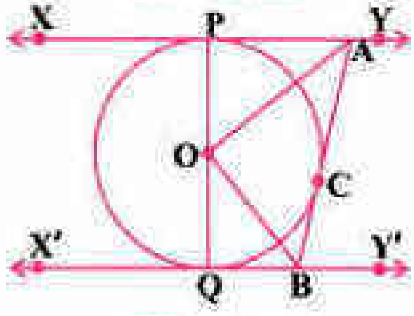
8. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਛੂੰਹਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.12)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ:

$$AB + CD = AD + BC$$



ਚਿੱਤਰ 10.12

9. ਚਿੱਤਰ 10.13 ਵਿੱਚ XY ਅਤੇ X′Y′, O ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ AB, XY ਨੂੰ A ਅਤੇ X′Y′ ਨੂੰ B 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\angle AOB = 90°$ ਹੈ।

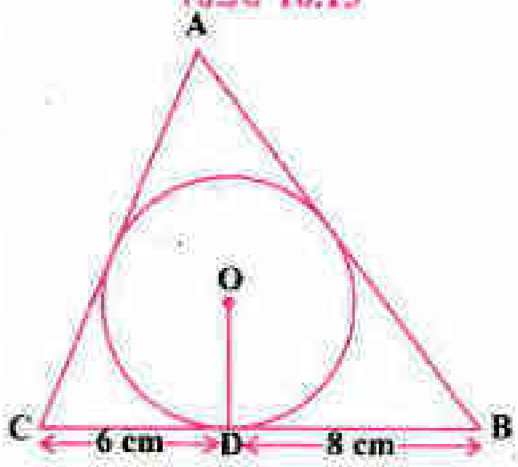


ਚਿੱਤਰ 10.13

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਸੰਪੂਰਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

12. 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦਾ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਇਸ ਤਰਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ BD ਅਤੇ DC (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ D ਦੁਆਰਾ BC ਵਿਭਾਜਿਤ ਹੈ) ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.14)। ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.14

13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦੀ ਹੋਈ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਆਹਮਣੇ-ਸਾਹਮਣੇ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

10.4 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਅਰਥ।
2. ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਨੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਰਚਨਾਵਾਂ 11

11.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਫੁੱਟੇ ਅਤੇ ਪਰਕਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁੱਝ ਰਚਨਾਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਸਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨਾ, ਕਿਸੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਖਿੱਚਣਾ, ਕੁੱਝ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਆਖਿਆ (ਪ੍ਰਮਾਣ) ਵੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੇਣੇ ਹੋਣਗੇ।

11.2 ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੀ ਵੰਡ (ਵਿਭਾਜਨ)

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ, ਮੰਨਿਆ 3 : 2 ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਮਾਪ ਕੇ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ, ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਨੂੰ ਸਹੀ-ਸਹੀ ਮਾਪਣ ਦੀ ਕੋਈ ਵਿਧੀ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ? ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

ਰਚਨਾ 11.1 : *ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ।*

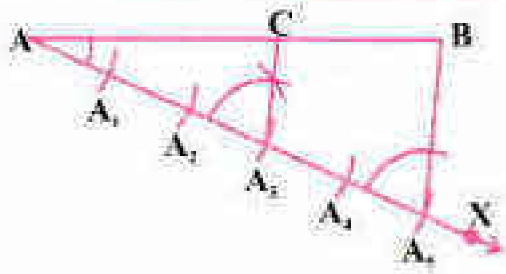
ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $m = 3$ ਅਤੇ $n = 2$ ਲਵਾਂਗੇ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. AB ਤੋਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਕੋਈ ਕਿਰਨ AX ਖਿੱਚੋ।
2. AX 'ਤੇ 5 $(= m + n)$ ਬਿੰਦੂ A_1, A_2, A_3, A_4 ਅਤੇ A_5 ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ਹੋਵੇ।
3. BA_5 ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

4. ਬਿੰਦੂ A_3 ($m = 3$) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ A_5B ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ (A_3 'ਤੇ $\angle AA_5B$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾ ਕੇ) AB ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1)।

ਹੁਣ AC : CB = 3 : 2 ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.1

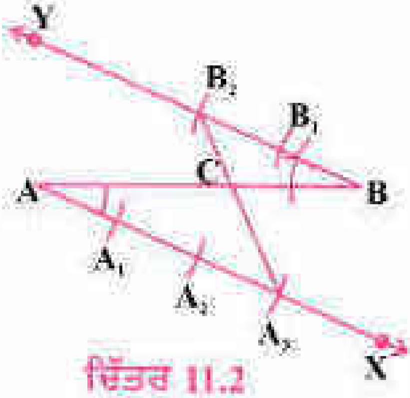
ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਵੇਂ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ A_3C, A_5B ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$ (ਮੂਲ ਭੂਤ ਸਮਾਨ–ਅਨੁਪਾਤਿਕਤਾ ਥਿਊਰਮ ਦੁਆਰਾ)

ਰਚਨਾ ਤੋਂ, $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ C, AB ਨੂੰ 3 : 2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.2

ਵੈਕਲਪਿਕ ਜਾਂ ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. AB ਤੋਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਕੋਈ ਕਿਰਣ AX ਖਿੱਚੋ।
2. $\angle BAX$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ $\angle ABY$ ਬਣਾ ਕੇ AX ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਕਿਰਣ BY ਖਿੱਚੋ।
3. AX 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A_1, A_2, A_3 ($m = 3$) ਅਤੇ BY 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B_1, B_2 ($n = 2$) ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ ਹੋਵੇ।
4. A_3B_2 ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਮੰਨਿਆ ਇਹ AB ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.2)।

ਤਾਂ AC : CB = 3 : 2 ਹੈ।

ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ?

ਇਥੇ $\Delta AA_3C \sim \Delta BB_2C$ (ਕਿਉਂ?)

ਤਾਂ
$$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$$

ਪਰੰਤੂ ਰਚਨਾ ਦੁਆਰਾ $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ।

ਰਚਨਾ 11.2 : *ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।*

ਇਸ ਰਚਨਾ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿੱਚ, ਜਿਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਉਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ **ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ** ਦਾ ਅਰਥ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਤੋਂ ਹੈ। (ਅਧਿਆਇ 6 ਵੀ ਦੇਖੋ) ਇਨ੍ਹਾਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਓ।

ਇਹੀ ਵਿਧੀ ਆਮ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋਵੇਗੀ।

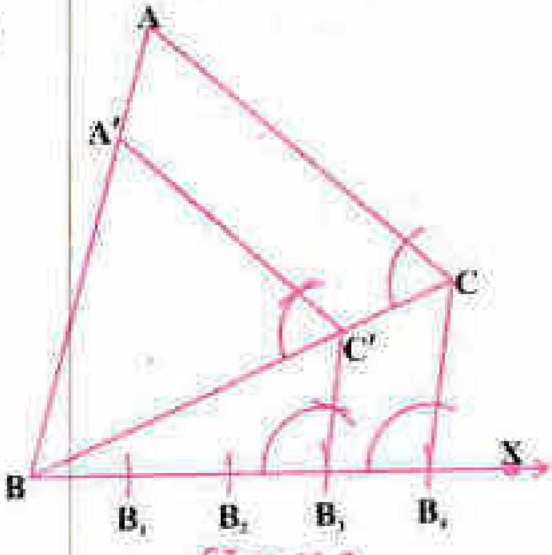
ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਹੋਵੇ (ਭਾਵ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{3}{4}$ ਹੈ)।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਹੋਵੇ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. BC ਤੋਂ ਸਿਖਰ A ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਕਿਰਨ BX ਖਿੱਚੋ।
2. BX 'ਤੇ 4 ਬਿੰਦੂ ($\frac{3}{4}$ ਵਿੱਚ 3 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ) B_1, B_2, B_3 ਅਤੇ B_4, ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ਹੋਵੇ।
3. B_4C ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ B_3 (ਤੀਸਰੇ ਬਿੰਦੂ, ਇੱਥੇ $\frac{3}{4}$ ਵਿੱਚ 3 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਛੋਟੀ ਹੈ) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ B_4C ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ BC ਨੂੰ C' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਖਿੱਚੋ।
4. C' ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ BA ਨੂੰ A' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.3)।

ਤਾਂ, Δ A'BC' ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.3

ਆਓ ਵੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਕਿਵੇਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਰਚਨਾ 11.1 ਤੋਂ, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, ਭਾਵ $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, C'A', CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਹੋਵੇ (ਭਾਵ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{5}{3}$ ਹੈ)।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਹੋਵੇ।

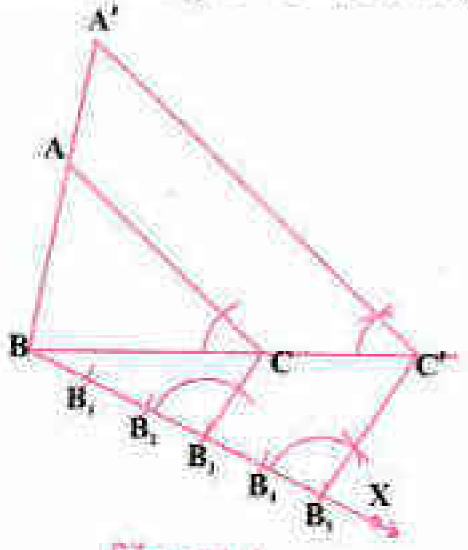
ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. BC ਤੋਂ ਸਿਖ਼ਰ A ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਕਿਰਨ BX ਖਿੱਚੋ।
2. 5 ($\frac{5}{3}$ ਵਿੱਚ 5 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ) ਬਿੰਦੂ B_1, B_2, B_3, B_4 ਅਤੇ B_5, BX 'ਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ ਹੋਵੇ।
3. B_3 (ਤੀਸਰਾ ਬਿੰਦੂ, $\frac{5}{3}$ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ) ਨੂੰ C ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ B_5 ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ B_3C ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਵਧਾਏ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ BC ਨੂੰ C' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ।
4. C' ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਰੇਖਾਖੰਡ BA ਨੂੰ A' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.4)।

ਤਾਂ, A'BC' ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਰਚਨਾ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਧਿਆਨ ਦਿਓ $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.4

ਪਰੰਤੂ $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ AB ਜਾਂ AC 'ਤੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਕਿਰਣ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਸੀ ਅਤੇ ਉਸੇ ਤਰਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਸੀ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 11.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਰਚਨਾ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਣ ਵੀ ਦਿਓ :

1. 7.6 cm ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 5 : 8 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ। ਦੋਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ।
2. 4 cm, 5 cm ਅਤੇ 6 cm ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{2}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
3. 5 cm, 6 cm ਅਤੇ 7 cm ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{7}{5}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
4. ਆਧਾਰ 8 cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 4 cm ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇਸ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $1\frac{1}{2}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਬਣਾਓ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC = 6 cm, AB = 5 cm ਅਤੇ $\angle ABC = 60°$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
6. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਬਣਾਓ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC = 7 cm, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{4}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
7. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਕਰਣ ਦੇ ਇਲਾਵਾ) 4 cm ਅਤੇ 3 cm ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਹੋਣ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।

11.3 ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ :

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ। ਤਦ ਇਹੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

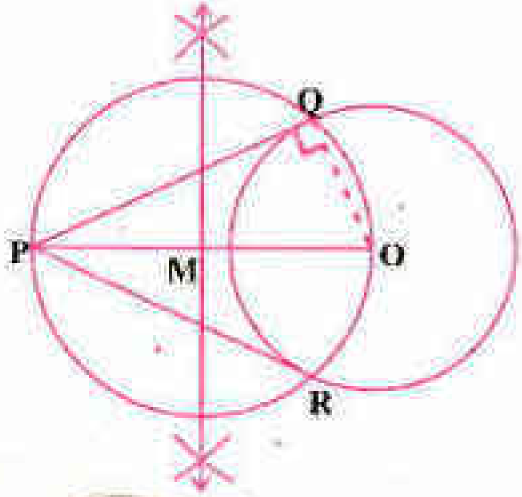
ਰਚਨਾ 11.3 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।*

ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣੀਆਂ ਹਨ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. PO ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਓ PO ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ M ਹੈ।
2. M ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਅਤੇ MO ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚੱਕਰ ਨੂੰ Q ਅਤੇ R 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।
3. P ਨੂੰ Q ਅਤੇ R ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।

ਤਾਂ, PQ ਅਤੇ PR ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1)।



ਚਿੱਤਰ 11.5

ਆਓ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। OQ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

ਤਾਂ, $\angle PQO$ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਬਣਿਆ ਇੱਕ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\angle PQO = 90^\circ \text{ ਹੈ।}$$

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $PQ \perp OQ$ ਹੈ?

ਕਿਉਂਕਿ, OQ ਦਿੱਤੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ PQ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ, PR ਵੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਦੋ ਅਸਮਾਂਤਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਦ, ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 11.2

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹਰੇਕ ਰਚਨਾ ਦੇ ਲਈ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਵੀ ਦਿਓ :

1. 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 10 cm ਦੂਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਮਾਪੋ।
2. 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਮਾਪੋ। ਗਣਨਾ ਕਰਕੇ ਇਸ ਮਾਪ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰੋ।
3. 3 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਧਾਏ ਗਏ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 7 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਲਓ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ।
4. 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 60° ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀਆਂ ਹੋਣ।
5. 8 cm ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਖਿੱਚੋ। A ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਲੈ ਕੇ 3 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੂਸਰੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।
6. ਮੰਨ ਲਓ ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm ਅਤੇ $\angle B = 90°$ ਹੈ। B ਤੋਂ AC 'ਤੇ BD ਲੰਬ ਹੈ। ਬਿੰਦੂਆਂ B, C, D ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। A ਤੋਂ ਇਸ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।
7. ਕਿਸੇ ਵੰਗ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਓ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।

11.4 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ :

1. ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ।
2. ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। (ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ)।
3. ਕਿਸੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਜੋੜੇ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਰਚਨਾ 11.2 ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਪਗਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਤੁਰਭੁਜ (ਜਾਂ ਬਹੁਭੁਜ) ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਰ ਚਤਰਭੁਜ (ਜਾਂ ਬਹੁਭੁਜ) ਦੀ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਖੇਤਰਫਲ 12

12.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ, ਆਪਣੀਆਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਆਇਤ, ਵਰਗ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਜੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਨੇਕ ਇੱਕ ਨਾ ਇੱਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਆਕਾਰ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਾਇਕਲ ਦੇ ਪਹੀਏ, ਠੇਲਾ, ਡਾਰਟਬੋਰਡ (dartboard) (ਅਜਿਹਾ ਬੋਰਡ ਜਿਸ 'ਤੇ ਤੀਰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਖੇਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ), ਗੋਲ ਕੇਕ (cake), ਪਾਪੜ, ਨਾਲੀ ਦੇ ਢੱਕਣ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਨਾਵਟ ਦੀਆਂ ਵੰਗਾਂ, ਬਰੂਚ (brooches), ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ, ਵਾਸ਼ਰ, ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਆਦਿ ਅਜਿਹੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ (ਘੇਰਾ) ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਖਿਆ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦਾ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ (ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ) ਦੇ ਦੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ 'ਭਾਗਾਂ' ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ *ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ (sector)* ਅਤੇ *ਚੱਕਰ ਖੰਡ (segment of a circle)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਚੱਕਰਾਂ ਜਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ।

ਚਿੱਤਰ 12.1

12.2 ਚੱਕਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ - ਇੱਕ ਸਮੀਖਿਆ

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਚੱਲਣ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਉਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ *ਘੇਰਾ (circumference)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਘੇਰੇ ਦਾ ਉਸਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਅਚਲ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਚਲ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਅੱਖਰ π (ਜਿਸ ਨੂੰ 'ਪਾਈ' ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ,

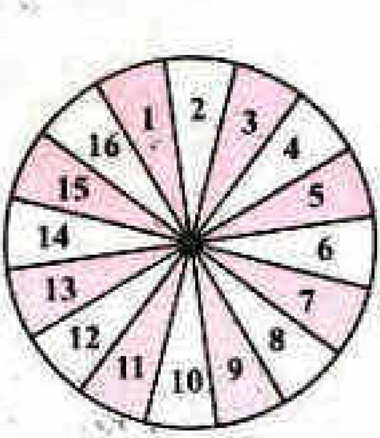
$$\frac{\text{ਘੇਰਾ}}{\text{ਵਿਆਸ}} = \pi$$

ਜਾਂ

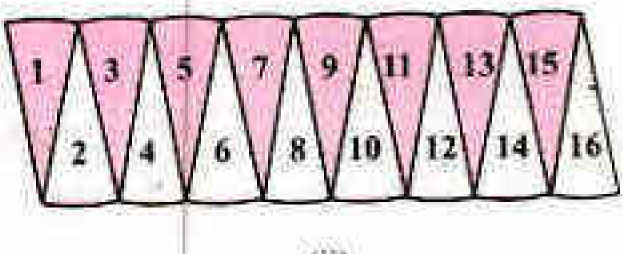
$$\text{ਘੇਰਾ} = \pi \times \text{ਵਿਆਸ}$$
$$= \pi \times 2r \quad \text{(ਜਿੱਥੇ } r \text{ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ)}$$
$$= 2\pi r$$

ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤਕ ਆਰਿਆਭੱਟ (476 – 550 ਈ.ਪੂ.) ਨੇ π ਦਾ ਇੱਕ ਨਜ਼ਦੀਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ $\pi = \frac{62832}{20000}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਲਗਭਗ 3.1416 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਵੀ ਰੋਚਕ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਪ੍ਰਤਿਭਾਸ਼ਾਲੀ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤਕ ਸ੍ਰੀਨਿਵਾਸ ਰਾਮਾਨੁਜਨ (1887–1920) ਦੀ ਇੱਕ ਸਰਵਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਗਣਿਤਕ π ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਲੱਖਾਂ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਮਰੱਥ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਅਧਿਆਇ 1 ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ π ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ (irrational) ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਥਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਨਾ-ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ (non-terminating and non-repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਕੰਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੁੱਲ ਲਗਭੱਗ $\frac{22}{7}$ ਜਾਂ 3.14 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ πr^2 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਜੋੜ ਕੇ ਕੀਤੀ ਸੀ।



(i)



(ii)

ਚਿੱਤਰ 12.2

ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 12.2 (ii) ਵਿੱਚ ਆਕਾਰ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲਗਭਗ ਲੰਬਾਈ $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ r ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸੁਝਾਅ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$ ਹੈ। ਆਓ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਗਈਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਖੇਤ 'ਤੇ ₹ 24 ਪ੍ਰਤਿ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ₹ 5280 ਹੈ। ਇਸ ਖੇਤ ਦੀ ₹ 0.50 ਪ੍ਰਤਿ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਹਾਈ ਕਰਵਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)।

ਹੱਲ : ਵਾੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ) $= \frac{\text{ਪੂਰਾ ਖਰਚ}}{\text{ਦਰ}} = \frac{5280}{24} = 220$

ਇਸ ਲਈ, ਖੇਤ ਦਾ ਘੇਰਾ $= 220$ m

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਖੇਤ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਮੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$2\pi r = 220$$

ਜਾਂ
$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

ਜਾਂ
$$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$$

ਭਾਵ ਖੇਤ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 35 ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ m}^2 = 22 \times 5 \times 35 \text{ m}^2$

ਹੁਣ 1 m^2 ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਦਾ ਖਰਚ $=$ ₹ 0.50

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਕਰਨ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ $= 22 \times 5 \times 35 \times$ ₹ 0.50 = ₹ 1925

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.1

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਕੁੱਝ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)

1. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 19 cm ਅਤੇ 9 cm ਹਨ। ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਘੇਰਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਘੇਰਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
2. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ। ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 12.3

3. ਚਿੱਤਰ 12.3 ਇੱਕ ਤੀਰ ਅੰਦਾਜ਼ੀ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਵੱਲ ਪੰਜ ਖੇਤਰ PINK , RED,GREY BLACK ਅਤੇ WHITE ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ 'ਤੇ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। PINK ਅੰਕ ਵਾਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 21 cm ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਹੋਰ ਪੱਟੀ 10.5 cm

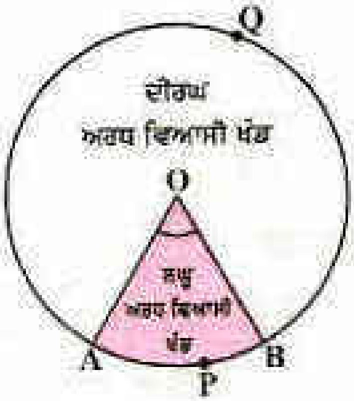
ਜੋੜੀ ਹੈ। ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਉਣ ਵਾਲੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਪੰਜਾ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਕਿਸੇ ਕਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਹੀਏ ਦਾ ਵਿਆਸ 80 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰ 66 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ 10 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਹੀਆ ਕਿੰਨੇ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ?

5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿਓ :
ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ :
(A) 2 ਇਕਾਈਆਂ (B) π ਇਕਾਈਆਂ (C) 4 ਇਕਾਈਆਂ (D) 7 ਇਕਾਈਆਂ

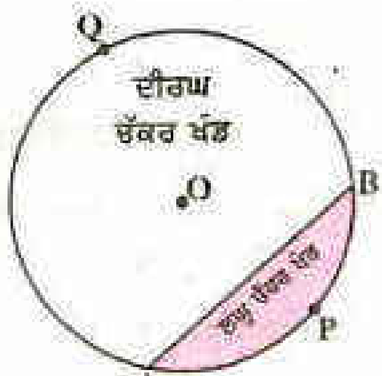
12.3 ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ *(sector)* ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਖੰਡ*(segment of a circle)* ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜੋ ਦੋ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜੋ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ OAPB ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ। $\angle AOB$ ਇਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਗੈਰ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ OAQB ਵੀ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਨਾਂ ਤੋਂ OAPB ਇੱਕ ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ *(minor sector)* ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ OAQB ਇੱਕ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ (major sector) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ $360° - \angle AOB$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.4

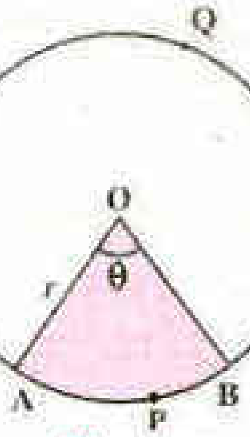
ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB ਕੇਂਦਰ ਚਿੱਤਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ APB ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਬਗੈਰ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ AQB ਵੀ ਜੀਵਾ AB ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਇਆ ਇੱਕ ਹੋਰ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਨਾਂ ਤੋਂ, APB ਲਘੂ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ AQB ਦੀਰਘ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.5

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਲਿਖਣ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲਘੂ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਅਤੇ ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਨਾਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਓ ਉਪਰੋਕਤ ਗਿਆਨ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

ਮੰਨ ਲਓ OAPB ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.6)। ਮੰਨ ਲਓ $\angle AOB$ ਦਾ ਦਰਜ਼ਾ (ਅੰਸ਼) (degree) ਮਾਪ θ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰ [ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਜਾਂ ਡਿਸਕ (disc)] ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ πr^2 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O 'ਤੇ 360° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ (ਭਾਵ ਦਰਜ਼ਾ ਮਾਪ 360°) ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ (Unitary Method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜ਼ਾ (degree) ਮਾਪ 360 ਹੈ, ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πr^2

ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜ਼ਾ (degree) ਮਾਪ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{\pi r^2}{360}$

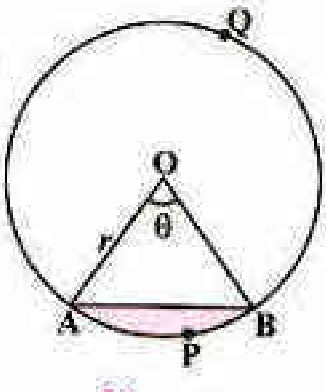
ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜ਼ਾ (degree) ਮਾਪ θ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਸਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : -

ਕੋਣ θ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

ਜਿਥੇ r ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ θ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਦਰਜੇ (degree) ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੀ ਸੰਗਤ ਚਾਪ APB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦੁਬਾਰਾ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ (unitary method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਚੱਕਰ (360° ਕੋਣ ਵਾਲੇ) ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2\pi r$ ਲੈਣ 'ਤੇ,ਅਸੀਂ ਚਾਪ APB ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 12.7

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਣ θ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ਆਓ ਹੁਣ ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.7)। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}$$

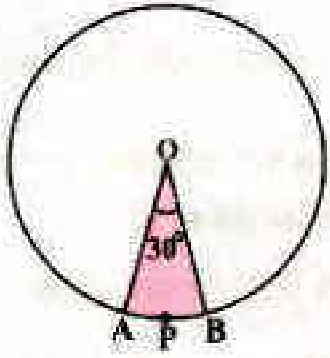
ਟਿੱਪਣੀ : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 12.6 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 12.7 ਤੋਂ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πr^2 – ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚੱਕਰਖੰਡ AQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πr^2 – ਲਘੂ ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (ਜਾਂ ਪਰਿਣਾਮਾਂ) ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4 ਸੈ.ਮੀ. ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। (π = 3.14 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.8

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.8)।

ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi r^2 - \text{ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$$

$$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਿੱਚ,

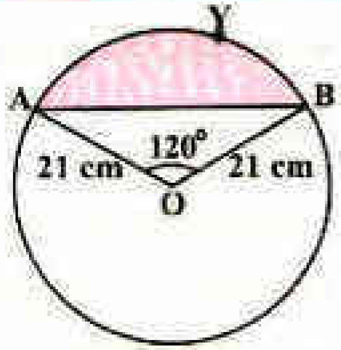
ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2 = 46.05 \text{ cm}^2$$

$$= 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 12.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21cm ਹੈ ਅਤੇ $\angle AOB = 120°$ ਹੈ [$\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ]।



ਚਿੱਤਰ 12.9

ਹੱਲ : ਚੱਕਰ ਖੰਡ AYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (1)

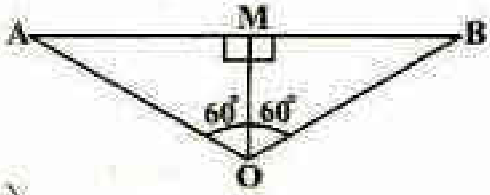
ਹੁਣ, ਅਰਧਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2$ (2)

Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ OM $\perp$ AB ਖਿੱਚੋ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ OA = OB ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, RHS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਤੋਂ, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, M ਜੀਵਾ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $\quad OM = x$ cm ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.10

ਇਸ ਲਈ Δ OMA ਤੋਂ, $\quad \frac{OM}{OA} = \cos 60°$

ਜਾਂ $\quad \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

ਜਾਂ $\quad x = \frac{21}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad OM = \frac{21}{2}$ cm

ਨਾਲ ਹੀ $\quad \frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

ਇਸ ਲਈ $\quad AB = 2\,AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}\ cm^2$

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\, cm^2 \quad (3)$$

ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰਖੰਡ AYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right) cm^2$ [(1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ]

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\ cm^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.2

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)

1. 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ $60°$ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਚੌਥੇ ਭਾਗ (quadrant) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਘੇਰਾ 22 cm ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਘੜੀ ਦੀ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 14 cm ਹੈ। ਇਸ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ 5 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. 10 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

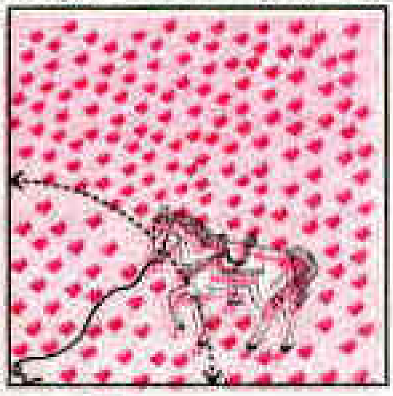
   (i) ਸੰਗਤ ਲਘੂ ਚੱਕਰਖੰਡ (ii) ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।
5. ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21cm ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ $60°$ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ii) ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

   (iii) ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
6. 15 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ $60°$ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਗਤ ਲਘੂ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚੱਕਰ ਖੰਡਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{3} = 1.73$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।
7. 12 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ $120°$ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਗਤ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{3} = 1.73$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)
8. 15 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਘਾਹ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਨੇ 'ਤੇ ਲੱਗੇ ਕਿੱਲੇ ਨਾਲ ਘੋੜੇ ਨੂੰ 5 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਨਾਲ ਬੰਨ੍ਹਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.11)। ਪਤਾ ਕਰੋ:

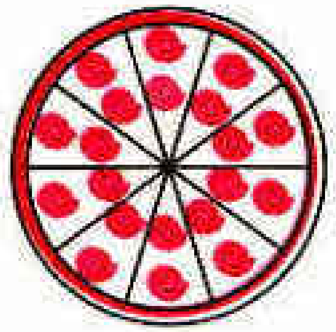
   (i) ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਉਸ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿੱਥੇ ਘੋੜਾ ਘਾਹ ਚਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.11

(ii) ਚਰੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜੇਕਰ ਘੋੜੇ ਨੂੰ 5 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 10 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਨਾਲ ਬੰਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।

9. ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਬਰੂਚ (brooch) ਨੂੰ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਤਾਰ ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਿਆਸ 35 mm ਹੈ। ਤਾਰ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ 5 ਵਿਆਸਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਉਸ ਨੂੰ 10 ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਕੁੱਲ ਲੋੜੀਂਦੀ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ
   (ii) ਬਰੂਚ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ



ਚਿੱਤਰ 12.12

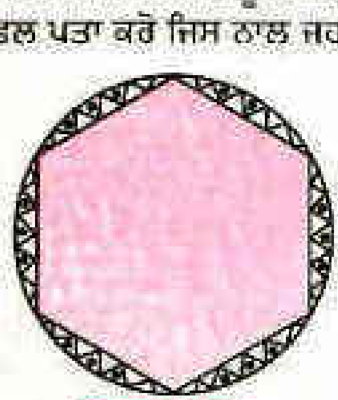
10. ਇੱਕ ਛੱਤਰੀ ਵਿੱਚ ਅੱਠ ਤਾਰਾਂ ਹਨ, ਜੋ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਲੱਗੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.13)। ਛੱਤਰੀ ਨੂੰ 45 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਪਾਟ ਚੱਕਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਤਾਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 12.13

11. ਕਿਸੇ ਕਾਰ ਦੇ ਦੋ ਵਾਇਪਰ (wipers) ਹਨ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕਦੇ ਵੀ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਛੂੰਹਦੇ ਨਹੀਂ। ਹਰੇਕ ਵਾਇਪਰ, ਜਿਸ ਦੀ ਪੱਤੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 25 cm ਹੈ ਅਤੇ 115° ਦੇ ਕੋਣ ਤੱਕ ਘੁੰਮ ਕੇ ਸਫਾਈ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਾਇਪਰਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਗੇੜੇ ਨਾਲ ਜਿੰਨਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਾਫ਼ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਸਮੁੰਦਰ ਵਿੱਚ ਜਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਸਥਿਤ ਚੱਟਾਨਾਂ ਦੀ ਚੇਤਾਵਨੀ ਦੇਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ (lighthouse) 80° ਕੋਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਵਿੱਚ 16.5 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਫੈਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੁੰਦਰ ਦੇ ਉਸ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਚੇਤਾਵਨੀ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।

13. ਇੱਕ ਗੋਲ ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ 'ਤੇ ਛੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ (ਸਮਾਨ) ਡਿਜ਼ਾਈਨ ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 28 cm ਹੈ ਤਾਂ ₹ 0.35 ਪ੍ਰਤਿ ਵਰਗ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਡਿਜ਼ਾਈਨਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\sqrt{3} = 1.7$ ਲਓ)



ਚਿੱਤਰ 12.14

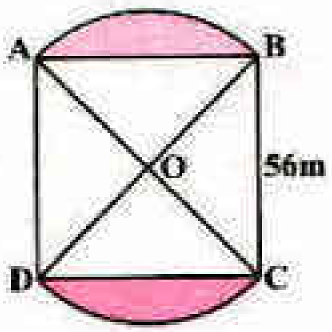
14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :
   ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਉਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ $p°$ ਹੈ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਆਓ ਹੁਣ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸੰਯੋਜਨਾਂ (combinations) ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੋਚਕ ਡਿਜਾਈਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ, ਨਾਲੀਆਂ ਦੇ ਢੱਕਣ, ਖਿੜਕੀਆਂ ਦੇ ਡਿਜਾਈਨ, ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ਾਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਡਿਜਾਈਨ ਆਦਿ ਅਜਿਹੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 12.15 ਵਿੱਚ, 56 m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ (lawn) ABCD ਦੇ ਦੋ ਪਾਸੇ ਬਣੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਿਖਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਕਿਆਰੀ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਲਾਅਨ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕਾਟਵਾਂ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ, ਤਾਂ ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ ਅਤੇ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.15

ਹੱਲ : ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 56 \times 56 \text{ m}^2$ (1)

ਮੰਨ ਲਓ $OA = OB = x$ m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x^2 + x^2 = 56^2$

ਜਾਂ $2x^2 = 56 \times 56$

ਜਾਂ $x^2 = 28 \times 56$ (2)

ਹੁਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4} \times \pi x^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ m}^2 \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}] \quad (3)$$

ਨਾਲ ਹੀ Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ m}^2 \quad (\angle AOB = 90^\circ)$ (4)

ਇਸ ਲਈ, ਕਿਆਰੀ AB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{m}^2$

[(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ]

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right) m^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} m^2 \qquad (5)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਕਿਆਰੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} m^2$ (6)

ਇਸ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ = $\left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right) m^2$ [(1), (5) ਅਤੇ (6) ਤੋਂ]

$$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) m^2$$

$$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7} m^2 = 4032 m^2$$

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ :

ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ODC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + Δ OAD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + Δ OBC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

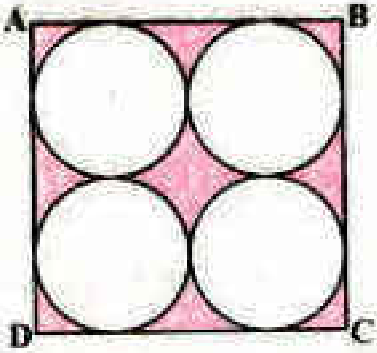
$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) m^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) m^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) m^2$$

$$= 56 \times 72 \, m^2 = 4032 \, m^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਚਿੱਤਰ 12.16 ਵਿੱਚ ਰੰਗੀਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.16

ਹੱਲ : ਵਰਗ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 14 \times 14 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$

ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ $= \frac{14}{2} \text{cm}^2 = 7\text{cm}^2$

ਇਸ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{7}{2}\text{cm}$

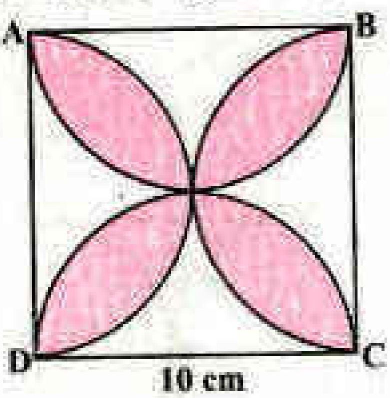
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ,ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2$

$$= \frac{154}{4} cm^2 = \frac{77}{2} \text{ cm}^2$$

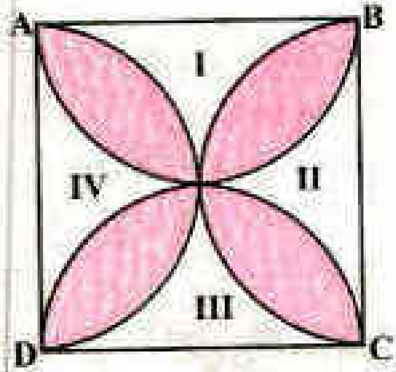
ਇਸ ਲਈ ਚਾਰੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4 \times \frac{77}{2} \text{cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੰਗੀਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (196 - 154) \text{ cm}^2 = 42 \text{ cm}^2$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 12.17 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਡਿਜਾਈਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਥੇ ABCD ਭੁਜਾ 10 cm ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਰਗ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.17



ਚਿੱਤਰ 12.18

ਹੱਲ : ਆਓ ਚਾਰ ਅਣ–ਰੰਗੇ ਖੇਤਰਾਂ ਨੂੰ I, II, III ਅਤੇ IV ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.18)।

I ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + III ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਦੋਨਾਂ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $5\,cm^2$ ਹੈ।

$$= \left(10\times 10 - 2\times\frac{1}{2}\times\pi\times 5^2\right)cm^2 = (100 - 3.14\times 25)\ cm^2$$

$$= (100 - 78.5)\ cm^2 = 21.5\ cm^2$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, II ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + IV ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 21.5\ cm^2$

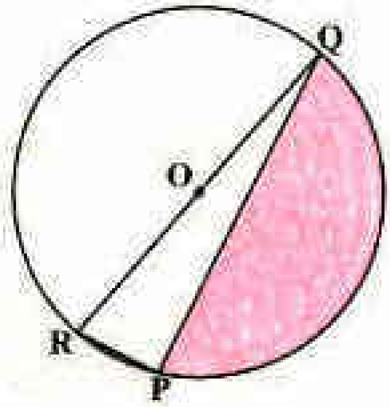
ਇਸ ਲਈ ਰੰਗੀਨ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – (I + II + III + IV) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= (100 - 2\times 21.5)\ cm^2 = (100 - 43)\ cm^2 = 57\ cm^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.3

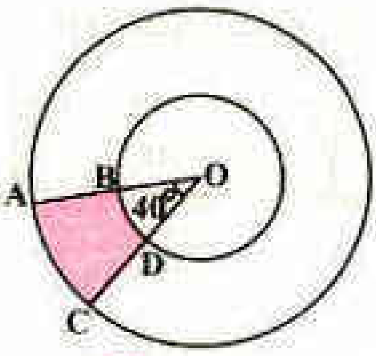
(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।)

1. ਚਿੱਤਰ 12.19 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ, ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ PQ = 24 cm, PR = 7 cm ਅਤੇ O ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ।

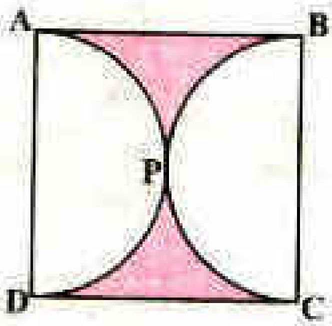


ਚਿੱਤਰ 12.19

2. ਚਿੱਤਰ 12.20 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਦੋਵਾਂ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ (concentric) ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7 cm ਅਤੇ 14 cm ਹਨ ਅਤੇ $\angle AOC = 40°$ ਹੈ।



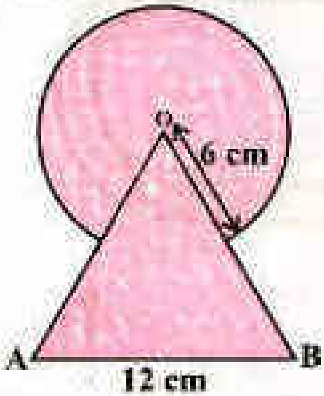
ਚਿੱਤਰ 12.20



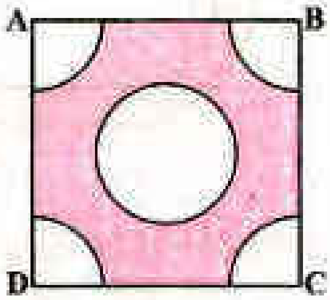
ਚਿੱਤਰ 12.21

3. ਚਿੱਤਰ 12.21 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ APD ਅਤੇ BPC ਦੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਹਨ।

4. ਚਿੱਤਰ 12.22 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ ਭੁਜਾ 12 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAB ਦੇ ਸਿਖਰ O ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਾਪ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।



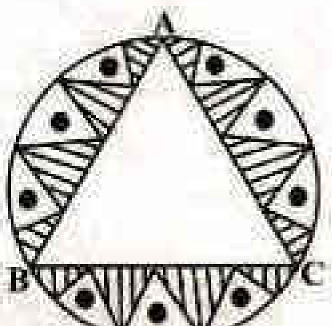
ਚਿੱਤਰ 12.22



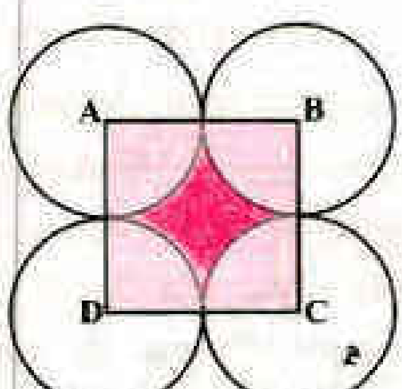
ਚਿੱਤਰ 12.23

5. ਭੁਜਾ 4 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ 1 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਚਾਲੇ 2 cm ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵੀ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.23 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਮੇਜਪੋਸ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 32 cm ਹੈ, ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.24 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



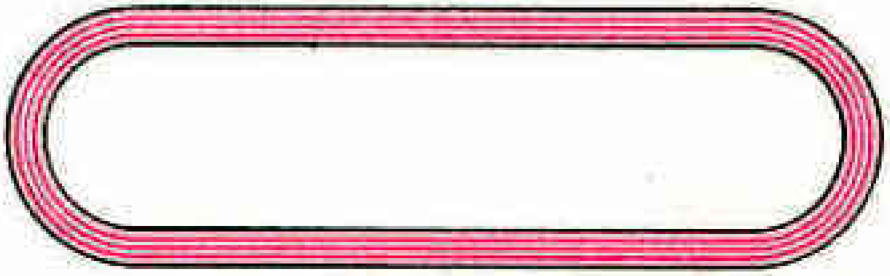
ਚਿੱਤਰ 12.24



ਚਿੱਤਰ 12.25

7. ਚਿੱਤਰ 12.25 ਵਿੱਚ, ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ। A, B, C ਅਤੇ D ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ, ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ ਕਿ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਤਿੰਨ ਬਾਕੀ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਚਿੱਤਰ 12.26 ਇੱਕ ਦੌੜਨ ਦਾ ਰਸਤਾ (racing track) ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਸਿਰੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਹਨ।

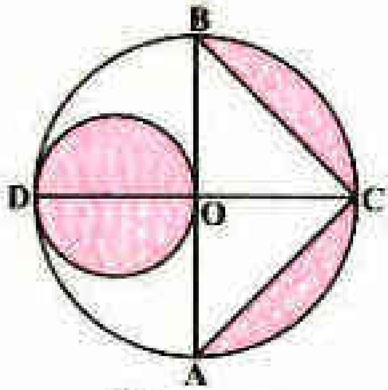


ਚਿੱਤਰ 12.26

ਦੋਨਾਂ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਦੀ ਦੂਰੀ 60 m ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 106 m ਲੰਬਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਰਸਤਾ 10 m ਚੌੜਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

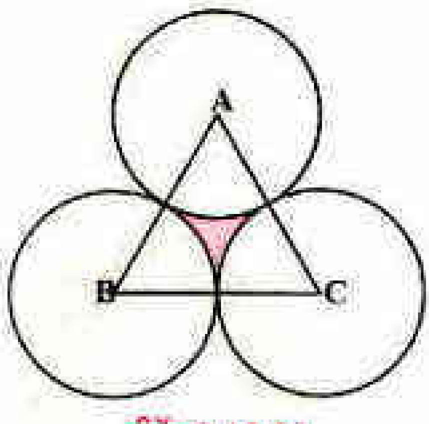
(i) ਰਸਤੇ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ

(ii) ਰਸਤੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ



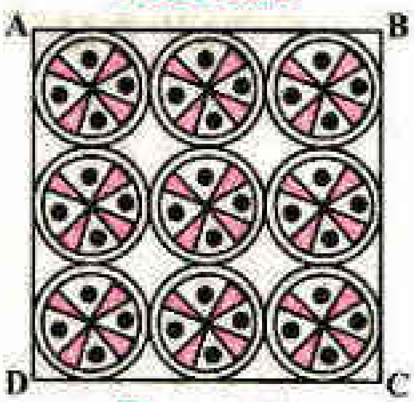
ਚਿੱਤਰ 12.27

9. ਚਿੱਤਰ 12.27 ਵਿੱਚ, AB ਅਤੇ CD ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਦੋ ਪਰਸਪਰ (ਆਪਸ ਵਿੱਚ) ਲੰਬ ਵਿਆਸ ਹਨ ਅਤੇ OD ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਜੇਕਰ OA = 7 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 12.28

10. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 17320.5 cm^2 ਹੈ। ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਖ਼ਰ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਅੱਧ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.28)। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, (π = 3.14 ਅਤੇ $\sqrt{3}$ = 1.73205 ਲਓ)।

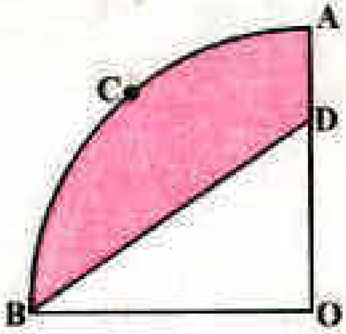


ਚਿੱਤਰ 12.29

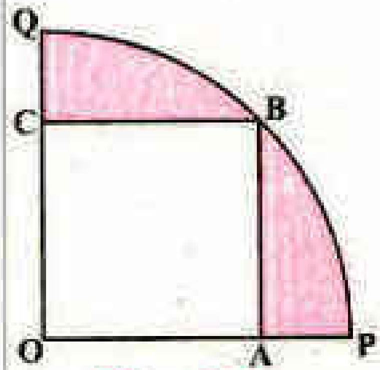
11. ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਰੁਮਾਲ 'ਤੇ, ਨੌ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਬਣੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 cm ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.29)। ਰੁਮਾਲ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਚਿੱਤਰ 12.30 ਵਿੱਚ, OACB ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਚੌਥਾ ਭਾਗ ਹੈ। ਜੇਕਰ OD = 2 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਚੌਥਾਈ OACB (ii) ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ



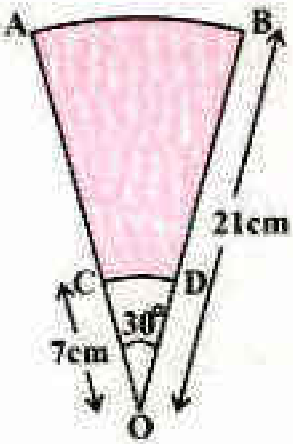
ਚਿੱਤਰ 12.30



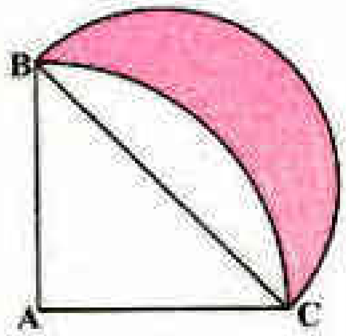
ਚਿੱਤਰ 12.31

13. ਚਿੱਤਰ 12.31 ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ OPBQ ਦੇ ਅੰਦਰ ਇੱਕ ਵਰਗ OABC ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ OA = 20 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।

14. AB ਅਤੇ CD ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ 21 cm ਅਤੇ 7 cm ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਚਾਪ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.32)। ਜੇਕਰ $\angle AOB = 30^\circ$ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



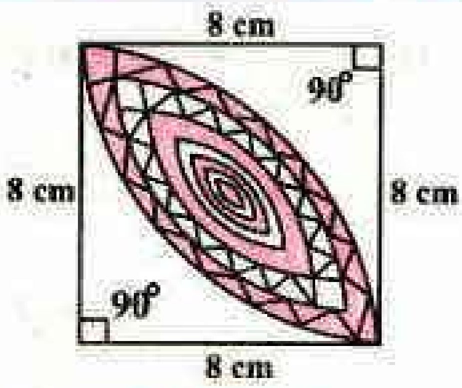
ਚਿੱਤਰ 12.32



ਚਿੱਤਰ 12.33

15. ਚਿੱਤਰ 12.33 ਵਿੱਚ, ABC ਅਰਧ ਵਿਆਸ 14 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਚੌਥਾਈ ਹਿੱਸਾ ਹੈ ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

*16. ਚਿੱਤਰ 12.34 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇ 8 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.34

12.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

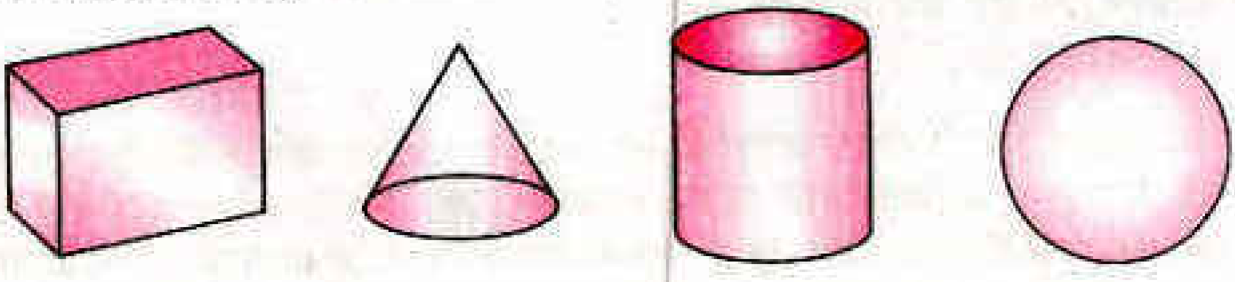
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $= 2\pi r$
2. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2$
3. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ ਦਰਜੇ(Degree) ਵਿੱਚ θ ਹੈ, ਦੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ ਦਰਜੇ (ਅੰਸ਼)(Degree) ਵਿੱਚ θ ਹੈ, ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸੰਗਤ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਸੰਗਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ 13

13.1 ਭੂਮਿਕਾ

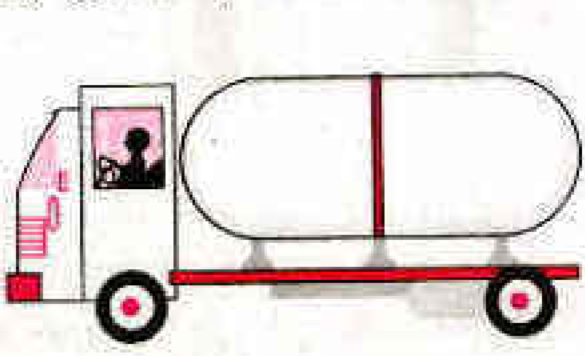
ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੁੱਝ ਠੋਸ ਚਿੱਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਘਣਾਵ, ਸ਼ੰਕੂ, ਬੇਲਨ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਨਾਲ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.1)। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਅਜਿਹੇ ਅਨੇਕ ਠੋਸ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਅਧਾਰਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਕਾਂ ਤੋਂ (ਭਾਵ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ) ਬਣਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਟਰੱਕ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਰੱਖੇ ਵੱਡੇ ਕੰਟੇਨਰ (Container) ਨੂੰ ਜਰੂਰ ਹੀ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.2) ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਤੇਲ ਜਾਂ ਪਾਣੀ ਲੈ ਕੇ ਜਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸਦਾ ਆਕਾਰ ਉਪਰੋਕਤ ਚਾਰ ਠੋਸਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਜਿਹਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਠੋਸ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਅਤੇ



ਚਿੱਤਰ 13.2

ਉਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਦੋ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਲਗਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੀ ਵਸਤੂ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰ ਵੇਖੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜੋ ਚਿੱਤਰ 13.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਨਾਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇੱਕ ਪਰਖ ਨਲੀ (test tube) ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਪਰਖ ਨਲੀ ਵੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਯਾਤਰਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੀ ਉਪਰੋਕਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਵੱਡੀਆ ਅਤੇ ਸੁੰਦਰ ਇਮਾਰਤਾਂ ਅਤੇ ਸਮਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ।

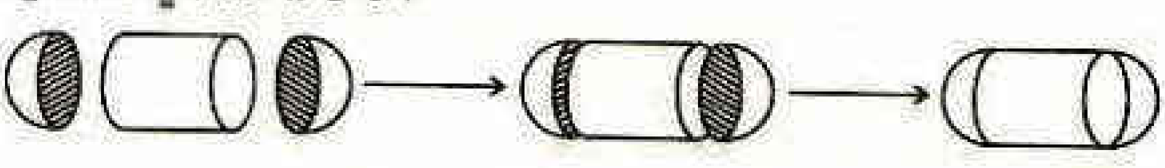
ਚਿੱਤਰ 13.3

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ, ਤੁਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਤਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਾਂ ਆਇਤਨ ਜਾਂ ਧਾਰਨ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋਗੇ? ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਤੱਕ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਚਾਰ ਠੋਸ ਰਚਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਿਰਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ?

13.2 ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਓ ਉਸ ਕੰਟੇਨਰ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜੋ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 13.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ? ਹੁਣ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਕੋਈ ਨਵੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਦੇਖਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਛੋਟੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੱਲ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ, ਠੋਸ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲਗਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਚਿੱਤਰ 13.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਠੋਸ ਵਰਗਾ ਲੱਗੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਟੁੱਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 13.4

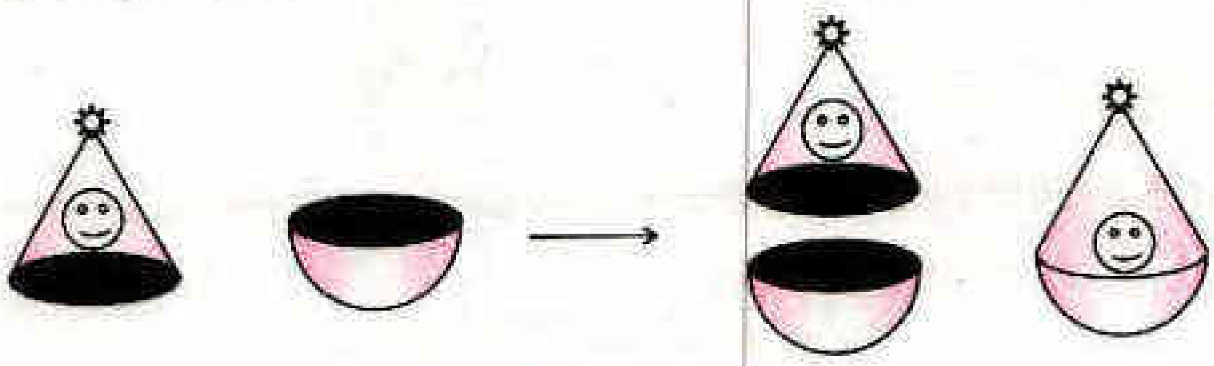
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਨਵੀਂ ਬਣੀ ਹੋਈ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਦੋਨਾਂ ਅਰਧ ਗੋਲਿਆਂ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦੇ ਕੇਵਲ ਵਕਰ ਤਲ ਹੀ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਠੋਸ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਤਿੰਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਠੋਸ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (TSA) = ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (CSA)
+ ਵੇਲਨ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਦੂਸਰੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਜਿਨਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਕੰਮ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮਤਲ (ਸਪਾਟ) ਤਲਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਲਿਆਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ, ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਚਿੱਕਣਾ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ, ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਵਾਂਗੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੇ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਲੜੀਵਾਰ ਪਗ ਚਿੱਤਰ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਣਗੇ :



ਚਿੱਤਰ 13.5

ਆਪਣੇ ਯਤਨ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਗੋਲ ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਸੁੰਦਰ ਖਿਡੌਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) 'ਤੇ ਰੰਗ ਕਰਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਰੰਗ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ? ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਜੋ ਅਰਧ-ਗੋਲੇ ਦੇ CSA ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ CSA ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

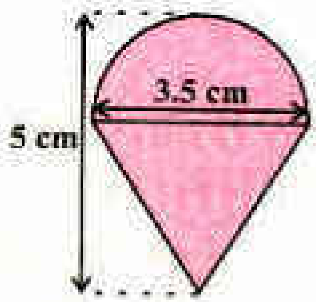
ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA + ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA

ਹੁਣ ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਰਸ਼ੀਦ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੇ ਤੋਹਫੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਟੂ ਮਿਲਿਆ ਜਿਸ 'ਤੇ ਰੰਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਹ ਇਸ 'ਤੇ ਆਪਣੇ ਮੋਮ ਦੇ ਰੰਗਾਂ (Crayons) ਨਾਲ ਰੰਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਲਾਟੂ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.6)। ਲਾਟੂ ਦੀ ਪੂਰੀ ਉੱਚਾਈ 5 cm ਹੈ ਇਸਦਾ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਹੈ। ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.6

ਹੱਲ : ਇਹ ਲਾਟੂ ਬਿਲਕੁਲ ਉਸ ਵਸਤੂ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ 13.5 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉੱਥੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਥੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$\text{ਲਾਟੂ ਦਾ TSA} = \text{ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA} + \text{ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA}$$

ਹੁਣ, ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

ਨਾਲ ਹੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ = ਲਾਟੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ – ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ (ਅਰਧ ਵਿਆਸ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm} = 3.25 \text{ cm}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ cm} = 3.7 \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

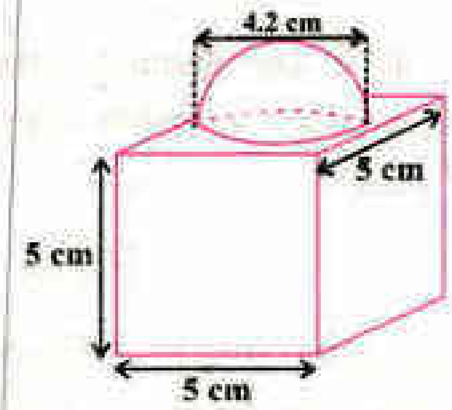
ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਲਾਟੂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਲਾਟੂ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਤਲ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਚਿੱਤਰ 13.7 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਸਜਾਵਟ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਬਲਾਕ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਣ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਲਾਕ (block) ਦਾ ਆਧਾਰ 5 cm ਭੁਜਾ ਜਾਂ ਕਿਨਾਰੇ (edge) ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਉੱਪਰ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 4.2 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਲਾਕ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.7

ਹੱਲ : ਘਣ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 6 × (ਕਿਨਾਰੇ)^2 = 6 × 5 × 5 cm^2 = 150 cm^2

ਹੁਣ, ਘਣ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜਿਸ ਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

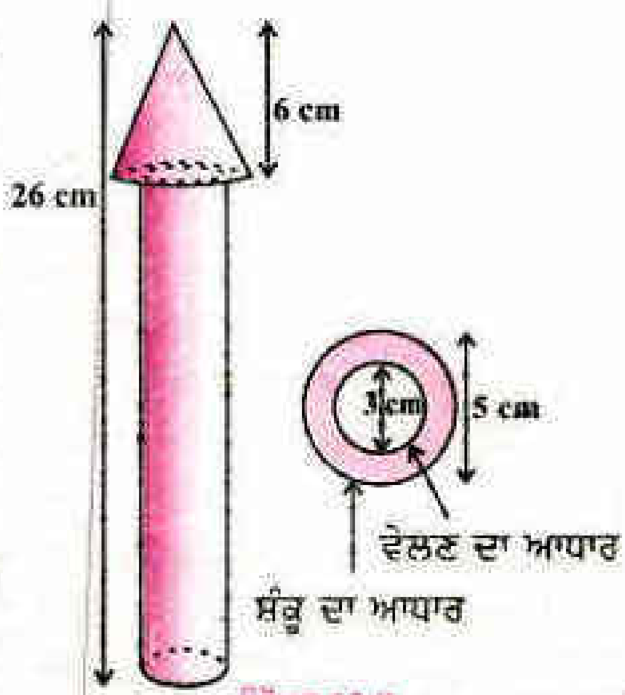
ਇਸ ਲਈ, ਬਲਾਕ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਘਣ ਦਾ TSA – ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2)\ \text{cm}^2$$

$$= 150\ \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)\text{cm}^2$$

$$= 150\ \text{cm}^2 + 13.86\ \text{cm}^2 = 163.86\ \text{cm}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਲੱਕੜੀ ਦਾ ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ ਰਾਕੇਟ (rocket) ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਵੇਲਣ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸੰਪੂਰਨ ਰਾਕੇਟ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 26 cm ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 cm ਹੈ। ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 5 cm ਅਤੇ ਵੇਲਣਕਾਰ ਭਾਗ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ 'ਤੇ ਨਾਰੰਗੀ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਭਾਗ 'ਤੇ ਪੀਲਾ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਰੰਗ ਦੁਆਰਾ ਰਾਕੇਟ ਦਾ ਰੰਗੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.8

ਹੱਲ : ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ r ਨਾਲ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ l ਨਾਲ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ h ਨਾਲ, ਵੇਲਣ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ r' ਨਾਲ, ਵੇਲਣ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ h' ਨਾਲ ਦਰਸਾਉ। ਇਸ ਲਈ $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r' = 1.5$ cm, $h' = 26 - 6 = 20$ cm ਅਤੇ

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ cm} = 6.5 \text{ cm}$$

ਇੱਥੇ, ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ [ਛੱਲੇ(ring) ਨੂੰ ਵੀ ਰੰਗਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

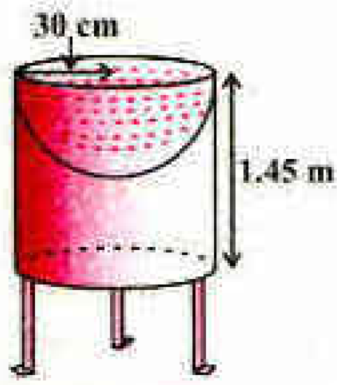
ਇਸ ਲਈ, ਨਾਰੰਗੀ ਰੰਗ ਨਾਲ ਰੰਗੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA + ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$$
$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2$$
$$= \pi[20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2$$
$$= 63.585 \text{ cm}^2$$

ਹੁਣ, ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਰੰਗੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਵੇਲਣ ਦਾ CSA + ਵੇਲਣ ਦੇ ਇੱਕ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$$
$$= \pi r'(2h' + r')$$
$$= 3.14 \times 1.5 [2 \times 20 + 1.5] \text{ cm}^2$$
$$= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2$$
$$= 195.465 \text{ cm}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਰਾਹੁਲ ਨੇ ਆਪਣੇ ਬਗੀਚੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ(bird-bath) ਬਣਵਾਇਆ ਜਿਸਦਾ ਆਕਾਰ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਵੇਲਣ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਬਰਤਨ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.9)। ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ 1.45 m ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 30 cm ਹੈ। ਇਸ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.9

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ h ਹੈ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ।

ਹੁਣ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਵੇਲਣ ਦਾ CSA + ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

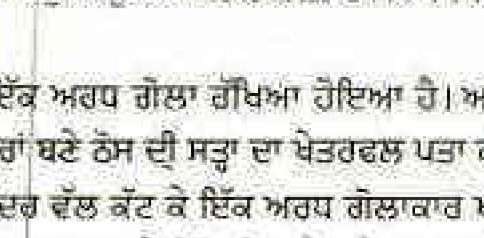
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30) \text{ cm}^2$$

$$= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ m}^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.1

ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।

1. ਦੋ ਘਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਇਤਨ 64 cm^3 ਹੈ, ਦੇ ਸਮਾਨ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘਣਾਵ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਕੋਈ ਬਰਤਨ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਉਪਰ ਇੱਕ ਖੋਖਲਾ ਵੇਲਣ ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 14 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਰਤਨ ਦੀ ਕੁਲ ਉਚਾਈ 13 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਰਤਨ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਉਸੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ 'ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉਚਾਈ 15.5 cm ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਭੁਜਾ 7 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਘਣਾਕਾਰ ਬਲਾਕ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਆਸ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ ਘਣਾਕਾਰ ਲੱਕੜ ਦੇ ਬਲਾਕ ਦੇ ਇੱਕ ਫਲਕ ਨੂੰ ਅੰਦਰ ਵੱਲ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਖੱਡਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ ਘਣ ਦੇ ਇੱਕ ਕਿਨਾਰੇ l ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਦਵਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਕੈਪਸੂਲ (capsule) ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.10) ਪੂਰੇ ਕੈਪਸੂਲ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 14 mm ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਵਿਆਸ 5 mm ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

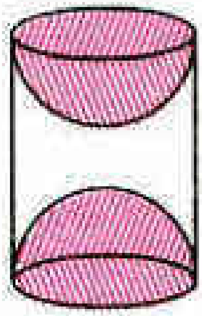


ਚਿੱਤਰ 13.10

7. ਕੋਈ ਤੰਬੂ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 2.1 m ਅਤੇ 4 m ਹਨ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 2.8 m ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤੰਬੂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕੈਨਵਸ (canvas) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ, ₹ 500 ਪ੍ਰਤੀ m^2 ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਕੈਨਵਸ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੰਬੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਨੂੰ ਕੈਨਵਸ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਢੱਕਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।)

8. ਉੱਚਾਈ 2.4 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 1.4 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚੋਂ ਇਸੇ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਖੋਲ (cavity) ਕੱਟ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਠੋਸ ਦਾ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਵਰਗ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ (cm^2) ਤੱਕ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਲੱਕੜੀ ਦੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੇਲਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਖੋਦ ਕੇ ਕੱਢਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਬਣਾਈ ਗਈ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬੇਲਣ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 10 cm ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

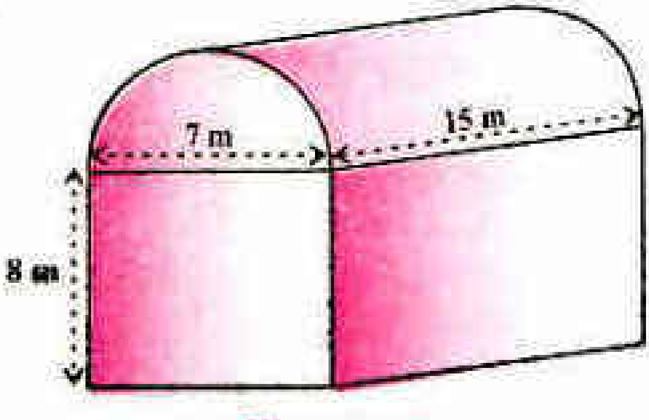


ਚਿੱਤਰ 13.11

13.3 ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਇਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਘਟਕਾਂ (ਠੋਸਾਂ) ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਕੁੱਝ ਭਾਗ ਲੁਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਸੀ। ਪਰੰਤੂ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਦੋ ਆਧਾਰਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਘਟਕਾਂ (ਠੋਸਾਂ) ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸ਼ਾਂਤੀ ਕਿਸੇ ਸ਼ੈੱਡ (shed) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਚਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸ਼ੈੱਡ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵੇਲਣ ਬਣਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.12)। ਜੇਕਰ ਇਸ ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੀਆਂ ਪਸਾਰਾਂ 7 m × 15 m ਹਨ ਅਤੇ ਘਣਾਵ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 8 m ਹੈ ਤਾਂ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.12

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਮਸ਼ੀਨਰੀ 300 m^3 ਸਥਾਨ ਘੇਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਅੰਦਰ 20 ਮਜਦੂਰ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ 0.08 m^3 ਦੇ ਔਸਤ ਨਾਲ ਸਥਾਨ ਘੇਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਹਵਾ ਹੋਵੇਗੀ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ (ਜਦੋਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਜਾਂ ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਘਣਾਵ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਅਤੇ ਅਰਧ ਬੇਲਣ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ ਘਣਾਵ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 15 m, 7 m ਅਤੇ 8 m ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ,ਅਰਧ ਵੇਲਣ ਦਾ ਵਿਆਸ 7 m ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 15 m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ + $\frac{1}{2}$ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{m}^3 = 1128.75 \text{ m}^3$$

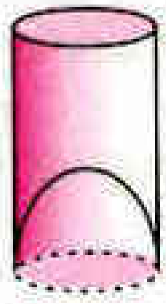
ਅੱਗੇ, ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਸਥਾਨ = 300 m^3

ਅਤੇ 20 ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਸਥਾਨ = $20 \times 0.08 \text{ m}^3 = 1.6 \text{ m}^3$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਉਸ ਸਮੇਂ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਅਤੇ ਮਜਦੂਰ ਹਨ

$$= 13128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ m}^3$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਜੂਸ (juice) ਵੇਚਣ ਵਾਲਾ ਆਪਣੇ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਿਲਾਸਾਂ ਨਾਲ ਜੂਸ ਦਿੰਦਾ ਸੀ। ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਗਿਲਾਸ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ 5 cm ਸੀ, ਪਰੰਤੂ ਗਿਲਾਸ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਆਧਾਰ (ਤਲ) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਸੀ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 10 cm ਸੀ, ਤਾਂ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਆਭਾਸੀ (apparent) ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)।



ਚਿੱਤਰ 13.13

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਗਿਲਾਸ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ = 5 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ = 10 cm ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਆਭਾਸੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ cm}^3 = 196.25 \text{ cm}^3$$

ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਉਪਰੋਕਤ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਆਧਾਰ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਘੱਟ ਹੈ।

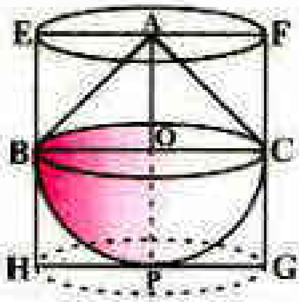
ਭਾਵ ਘਾਟ ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ cm}^3 = 32.71 \text{ cm}^3$

ਇਸ ਲਈ, ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ = ਆਭਾਸੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ – ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= (196.25 - 32.71) \text{ cm}^3$$

$$= 163.54 \text{ cm}^3$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਠੋਸ ਖਿਡੌਣਾ ਇੱਕ ਅਰਧਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 2 cm ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 4 cm ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਉੱਪਰ (circumscribes) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.14

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ BPC ਅਰਧਗੋਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ABC ਅਰਧਗੋਲੇ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.14)। ਅਰਧਗੋਲੇ (ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਵੀ) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{cm}^3 = 25.12 \text{ cm}^3$$

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਠੋਸ ਦੇ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ EFGH ਹੈ। ਇਸ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = HP = BO = 2 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਉੱਚਾਈ

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਬੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ – ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ cm}^3$$

$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੋਨਾਂ ਆਇਤਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ = 25.12 cm^3 ਹੈ।

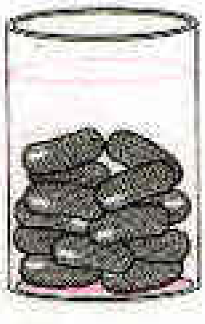
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.2

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)

1. ਇੱਕ ਠੋਸ ਇੱਕ ਅਰਧਗੋਲੇ 'ਤੇ ਖੜੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਉਸਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ π ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

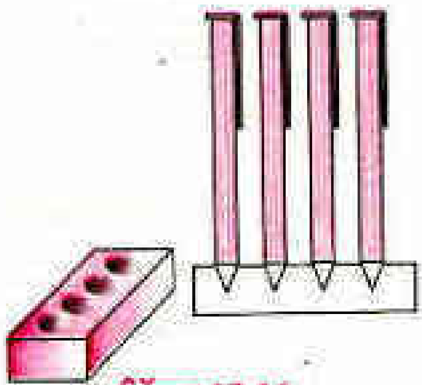
2. ਇੱਕ ਇੰਜੀਨਿਅਰਿੰਗ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮਨੋਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਤਲੀ ਐਲੂਮੀਨੀਅਮ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਜੋ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਦੋ ਸ਼ੰਕੂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹੋਣ। ਇਸ ਮਾਡਲ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 2 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮਨੋਹਰ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਇਹ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮਾਡਲ ਦੀਆਂ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ ਪਸਾਰਾਂ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।)

3. ਇੱਕ ਗੁਲਾਬਜਾਮਣ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਲਗਭਗ 30% ਖੰਡ ਦੀ ਚਾਸਣੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। 45 ਗੁਲਾਬ ਜਾਮਣਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਕਿੰਨੀ ਚਾਸਣੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਗੁਲਾਬਜਾਮਣ ਇੱਕ ਬੇਲਨ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਅਰਧਗੋਲਾਕਾਰ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 2.8 cm ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.15)।



ਚਿੱਤਰ 13.15

4. ਇੱਕ ਕਲਮਦਾਨ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਲੱਕੜੀ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਲਮ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਚਾਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਖੱਡੇ ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਘਣਾਵ ਦੀਆਂ ਪਸਾਰਾਂ (dimensions) 15 cm × 10 cm × 3.5 cm ਹਨ। ਹਰੇਕ ਖੱਡੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.5 cm ਅਤੇ ਗਹਿਰਾਈ 1.4 cm ਹੈ। ਪੂਰੇ ਕਲਮਦਾਨ ਵਿੱਚ ਲੱਕੜੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.16)।



ਚਿੱਤਰ 13.16

5. ਇੱਕ ਬਰਤਨ ਇੱਕ ਉਲਟੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਉੱਚਾਈ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ (ਜੋ ਖੁਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 cm ਹੈ। ਇਹ ਉੱਪਰ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਸ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਗੋਲੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ 0.5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਗੋਲਾ ਹੈ, ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਭਰੇ ਹੋਏ ਪਾਣੀ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਭਾਗ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

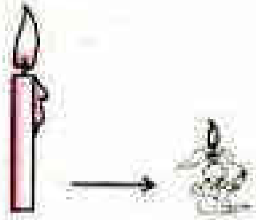
6. ਉੱਚਾਈ 220 cm ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਵਿਆਸ 24 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵੇਲਨ ਜਿਸ ਤੇ ਉੱਚਾਈ 60 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 8 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵੇਲਨ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਨਾਲ ਲੋਹੇ ਦਾ ਇੱਕ ਖੰਬਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਖੰਬੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੈ 1 cm^3 ਲੋਹੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) 8 g ਹੁੰਦਾ ਹੈ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।

7. ਇੱਕ ਠੋਸ ਵਿੱਚ, ਉੱਚਾਈ 120 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜੋ 60 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ 'ਤੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਠੋਸ ਨੂੰ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਿੱਧਾ ਪਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰੇ। ਜੇਕਰ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 180 cm ਹੈ ਤਾਂ ਬੇਲਣ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕੱਚ ਦੇ ਬਰਤਨ ਦੀ ਇੱਕ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਗਰਦਨ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਆਸ 2 cm ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਗੋਲਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਵਿਆਸ 8.5 cm ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਮਾਪ ਕੇ, ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਨੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇਸ ਬਰਤਨ ਦਾ ਆਇਤਨ 345 cm^3 ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਬੱਚੇ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਪਣ ਅੰਦਰੂਨੀ ਮਾਪਣ ਹੈ ਅਤੇ $\pi = 3.14$ ।

13.4 ਇੱਕ ਠੋਸ ਦਾ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰ

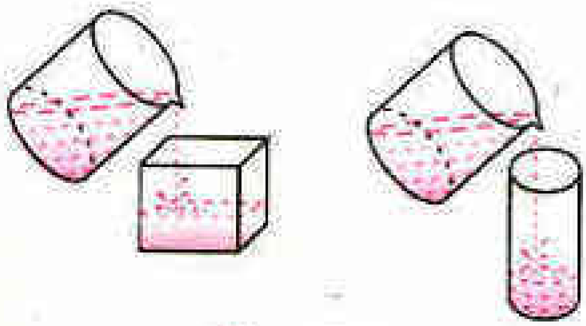
ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ, ਤੁਸੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰ ਦੇਖੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ, ਇਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਪਸ਼ੂਆਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵੀ ਕੁੱਝ ਮੋਮਬੱਤੀਆਂ ਵੀ ਦੇਖੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.17)।



ਚਿੱਤਰ 13.17

ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਧਾਤੂ ਦੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਮੋਮ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਗਰਮ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਵ ਵਿੱਚ ਨਾ ਬਦਲ ਜਾਵੇ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅਜਿਹੇ ਬਰਤਨ ਜਾਂ ਭਾਂਡੇ ਵਿੱਚ (ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ) ਪਾਵਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਉਹੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸ ਆਕਾਰ ਦੀ ਤੁਸੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਲਓ, ਇਸ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾਓ ਅਤੇ ਪਿਘਲੀ ਹੋਈ ਪੂਰੀ ਮੋਮ ਨੂੰ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਪਾਓ। ਠੰਡਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਨਵੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਹੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਪਹਿਲੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਦਾ ਸੀ। ਇਹੀ ਗੱਲ ਸਾਨੂੰ ਉਦੋਂ ਵੀ ਯਾਦ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਠੋਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਠੋਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਦ੍ਰਵ ਪਦਾਰਥ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਦੇ ਬਰਤਨ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 13.18 ਵਿੱਚ ਦੇਖਦੇ ਹੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.18

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਮਿੱਟੀ ਨਾਲ ਉੱਚਾਈ 24 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਕ ਬੱਚੇ ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ। ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 \text{ cm}^3$

ਜੇਕਰ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਿੱਟੀ ਦੇ ਆਇਤਨ ਬਰਾਬਰ ਹੈ,

ਭਾਵ $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

ਭਾਵ $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

ਇਸ ਲਈ $r = 3 \times 2 = 6$

ਇਸ ਲਈ, ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਸਿਲਵੀ ਦੇ ਘਰ ਦੀ ਛੱਤ 'ਤੇ ਬੇਲਨ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਹੈ। ਇਸ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਪਾਣੀ ਨੂੰ ਪੰਪ ਦੁਆਰਾ ਪਹੁੰਚਾ ਕੇ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੇ ਪਸਾਰ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm ਹਨ। ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 95 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਈ ਸੀ, ਤਾਂ ਉਸ ਨਾਲ ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਕਿੰਨੀ ਉੱਚਾਈ ਤੱਕ ਰਹਿ ਜਾਵੇਗਾ? ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਦਾ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਤੁਲਣਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)

ਹੱਲ : ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਤੋਂ ਕੱਢੇ ਗਏ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਹੁਣ, ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ (ਵੇਲਣ) ਦਾ ਆਇਤਨ = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ m}^3$$

ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਣ ਤੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ m}^3$

ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]\text{m}^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)\text{m}^3$

ਇਸ ਲਈ, ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ = $\dfrac{\text{ਉਸ ਵਿੱਚ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ}}{l \times b}$

$$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44} \text{ m}$$

$$= 0.475 \text{ m} = 47.5 \text{cm}.$$

ਨਾਲ ਹੀ, $\dfrac{\text{ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ}}{\text{ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ}} = \dfrac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \dfrac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਦੀ ਅੱਧੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : 1 cm ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ 8 cm ਲੰਬੀ ਤਾਂਬੇ ਦੀ ਇੱਕ ਛੜ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ 18 m ਲੰਬੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ (ਬਦਲਿਆ ਜਾਂਦਾ) ਹੈ। ਤਾਰ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਛੜ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \text{ cm}^3 = 2\pi \text{cm}^3$

ਬਰਾਬਰ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 18 m = 1800 cm

ਜੇਕਰ ਤਾਰ ਦੇ ਦੁਸਾਰ ਕਾਟ (cross-section) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ, ਤਾਂ ਤਾਰ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \pi \times r^2 \times 1800 \text{ cm}^3$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

ਭਾਵ $\qquad r^2 = \frac{1}{900}$

ਭਾਵ $\qquad r = \frac{1}{30}$ cm

ਇਸ ਲਈ, ਤਾਰ ਦੇ ਦੁਸਾਰ ਕਾਟ ਦਾ ਵਿਆਸ, ਤਾਰ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $\frac{1}{15}$ cm ਭਾਵ 0.67 mm (ਲਗਭਗ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਦੁਆਰਾ $3\frac{4}{7}$ ਲੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 m ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਅੱਧੀ ਖਾਲੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{3}{2}$ m

ਇਸ ਲਈ, ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ m}^3 = \frac{99}{14} \text{m}^3$

ਉਸ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ m}^3$$

$$= \frac{99}{28} \times 1000 = \frac{99000}{28} \text{ ਲਿਟਰ}$$

ਹੁਣ, $\frac{25}{7}$ ਲਿਟਰ ਪਾਣੀ ਖਾਲੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ 1 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਲਈ $\frac{99000}{28}$ ਲਿਟਰ ਪਾਣੀ ਖਾਲੀ ਹੋਵੇਗਾ $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਭਾਵ 16.5 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.3

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

1. ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4.2 cm ਵਾਲੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾ ਕੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਬੇਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਢਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬੇਲਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 6 cm, 8 cm ਅਤੇ 10 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਠੋਸ ਗੋਲਿਆਂ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵਿਆਸ 7 m ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਖੂਹ 20 m ਡੂੰਘਾ ਪੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪੁੱਟਣ ਨਾਲ ਨਿਕਲੀ ਹੋਈ ਮਿੱਟੀ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫੈਲਾ ਕੇ 22 m × 14 m ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚਬੂਤਰਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਚਬੂਤਰੇ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. 3 m ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਖੂਹ 14 m ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ (ਡੂੰਘਾਈ) ਤੱਕ ਪੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲੀ ਹੋਈ ਮਿੱਟੀ ਨੂੰ ਖੂਹ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ 4 m ਚੌੜੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਬੂਤਰਾ (ring) ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਫੈਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਬੰਨ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬੰਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. 12 cm ਵਿਆਸ ਅਤੇ 15 cm ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਨ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਬਰਤਨ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਆਇਸਕ੍ਰੀਮ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 12 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 6 cm ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਉਪਰੀ ਸਿਰਾ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਇਸ ਆਇਸਕ੍ਰੀਮ ਨਾਲ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।
6. 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm ਪਸਾਰਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 1.75 cm ਵਿਆਸ ਅਤੇ 2 mm ਮੋਟਾਈ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ (coins) ਨੂੰ ਪਿਘਲਾਉਣਾ ਪਏਗਾ?
7. 32 cm ਉੱਚੀ ਅਤੇ 18 cm ਆਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਬਾਲਟੀ ਰੇਤ ਨਾਲ ਭਰੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਨੂੰ ਭੂਮੀ 'ਤੇ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਰੇਤ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਢੇਰੀ ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਢੇਰੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 24 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਢੇਰੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. 6 cm ਚੌੜੀ ਅਤੇ 1.5 cm ਗਹਿਰੀ (ਡੂੰਘੀ) ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ 10 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਵਹਿ (ਚੱਲ) ਰਿਹਾ ਹੈ। 30 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਨਹਿਰ ਕਿੰਨੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸਿੰਚਾਈ ਕਰ ਸਕੇਗੀ, ਜਦਕਿ ਸਿੰਚਾਈ ਦੇ ਲਈ 8 cm ਡੂੰਘੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
9. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਆਪਣੇ ਖੇਤ ਵਿੱਚ ਬਣੀ 10 m ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਅਤੇ 2 m ਡੂੰਘੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ 20 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਨਾਲ ਜੋੜਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਇਪ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ 3 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲ ਵਹਿ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਟੈਂਕੀ ਪੂਰੀ ਭਰ ਜਾਵੇਗੀ?

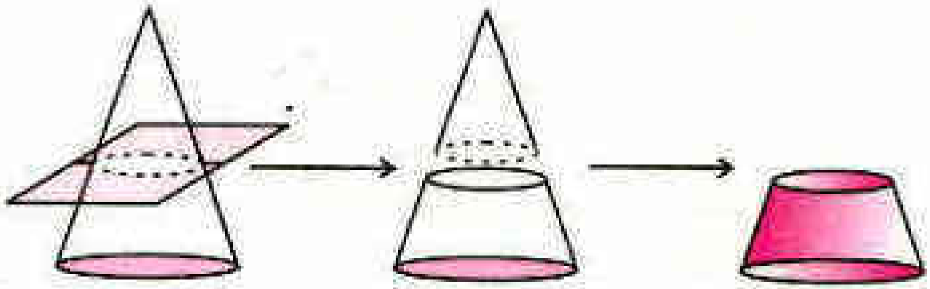
13.5 ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (Frustum)

ਭਾਗ 13.2 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖਿਆ ਜੋ ਦੋ ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਨਾਲ ਕੁੱਝ ਅਲੱਗ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਲਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹਟਾ ਦੇਵਾਂਗੇ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਿਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਹੈ ਉਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਅਲੱਗ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਾਣੀ ਪੀਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਗਿਲਾਸ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.19)।

ਚਿੱਤਰ 13.19

ਕਿਰਿਆ 1 : ਕੁੱਝ ਮਿੱਟੀ ਜਾਂ ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਕੋਈ ਪਦਾਰਥ (ਜਿਵੇਂ ਪਲਾਸਟਿਕ, ਕਲੇ ਆਦਿ) ਲਓ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਓ। ਇਸ ਨੂੰ ਚਾਕੂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕੱਟੋ। ਛੋਟੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਓ। ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ? ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ *ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (frustum of a cone)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕਿਸੇ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.20) ਅਤੇ ਇਸ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਬਣੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਤਲ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਬਚੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਭਾਗ ਨੂੰ **ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (frustum)*** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

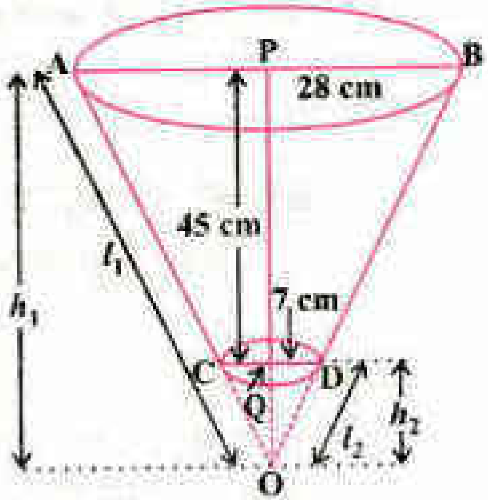


ਚਿੱਤਰ 13.20

ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਆਓ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੀਏ।

* 'Frustum' ਇੱਕ ਲੈਟਿਨ ਸ਼ਬਦ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ, 'ਕੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਟੁਕੜਾ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਬਹੁ ਵਚਨ ਹੈ 'Frusta'

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ, ਜੋ 45 *cm* ਉੱਚਾ ਹੈ, ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 28 *cm* ਅਤੇ 7 *cm* ਹਨ। ਇਸਦਾ ਆਇਤਨ, ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)



ਚਿੱਤਰ 13.21

ਹੱਲ : ਇਸ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਦੋ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂਆਂ OAB ਅਤੇ OCD ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.21)। ਮੰਨ ਲਓ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੰਕੂ OAB ਦੀ ਉੱਚਾਈ h_1 ਹੈ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l_1 ਹੈ, ਭਾਵ $OP = h_1$ ਅਤੇ $OA = OB = l_1$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦੀ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਉੱਚਾਈ h_2 ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l_2 ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ $r_1 = 28\ cm$, $r_2 = 7\ cm$, ਅਤੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $(h) = 45\ cm$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ
$$h_1 = 45 + h_2 \qquad (1)$$

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸ਼ੰਕੂਆਂ OAB ਅਤੇ OCD ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ h_1 ਅਤੇ h_2 ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OPB ਅਤੇ OQD ਸਮਰੂਪ ਹੈ (ਕਿਉਂ?) ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $h_2 = 15$ ਅਤੇ $h_1 = 60$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

ਹੁਣ, ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ

= ਸ਼ੰਕੂ OAB ਦਾ ਆਇਤਨ – ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right]\text{cm}^3 = 48510\ \text{cm}^3$$

ਸ਼ੰਕੂ OAB ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦੀਆਂ ਤਿਰਛੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ l_1 ਅਤੇ l_2 ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55\ \text{cm (ਲਗਭਗ)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20\ \text{cm}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

ਹੁਣ, ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $+ \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(28)^2 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + 2464 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ h ਹੈ, ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r_1 ਅਤੇ r_2 $(r_1 > r_2)$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਆਇਤਨ, **ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** ਅਤੇ **ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ* $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ* $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

(iii) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ* $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$,

ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਦਾਹਰਣ 12 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

(i) ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 \cdot \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right] \text{cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

(ii) ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2}$ cm

$$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65 \text{ cm}$$

ਇਸ ਲਈ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi(r_1 + r_2)\, l = \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

(iii) ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right]\text{cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ।

ਚਿੱਤਰ 13.22

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਧਰਮਿੰਦਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਪਤਨੀ ਰੇਖਾ ਗੰਨੇ ਦੇ ਰਸ ਨਾਲ ਗੁੜ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਗੰਨੇ ਦੇ ਰਸ ਨੂੰ ਗਰਮ ਕਰਕੇ ਸੀਰਾ ਬਣਾ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਾਂਚਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰੀ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30 cm ਅਤੇ 35 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਚੇ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ 14 cm ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.22)। ਜੇਕਰ 1 cm^3 ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਲਗਭਗ 1.2 g ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਂਚਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$,

ਜਿਥੇ r_1 ਵੱਡੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ ਅਤੇ r_2 ਛੋਟੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right]\text{cm}^3 = 11641.7 \text{ cm}^3$$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ 1 cm^3 ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ 1.2 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ। ਅੰਤ ਹਰੇਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਭਾਰ ਦ੍ਰਵਮਾਨ $= (11641.7 \times 1.2)$ g

$$= 13970.04\text{g} = 13.97 \text{ kg} = 14 \text{ kg (ਲਗਭਗ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਧਾਤੂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਇੱਕ ਖੁਲੀ ਬਾਲਟੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਉਸੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਬਣੇ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਬੇਲਨਾਕਾਰ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.23)। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਆਸ 45 cm ਅਤੇ 25 cm ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ 40 cm ਅਤੇ ਬੇਲਨਾਕਾਰ ਆਧਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬਾਲਟੀ ਦੇ ਹੱਥੇ ਨੂੰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਨਾਲ ਹੀ, ਉਸ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਧਾਰਨ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਚਿੱਤਰ 13.23

ਹੱਲ : ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉੱਚਾਈ = 40 cm ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਧਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $(40 - 6)$ cm = 34 cm ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ਜਿੱਥੇ $r_1 = 22.5$ cm, $r_2 = 12.5$ cm ਅਤੇ $h = 34$ cm

ਇਸ ਲਈ
$$l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}\ \text{cm}$$
$$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44\ \text{cm}$$

ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਵੇਲਨ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6]\ \text{cm}^2$$
$$= \frac{22}{7}[1240.4 + 156.25 + 150]\ \text{cm}^2$$
$$= 4860.9\ \text{cm}^2$$

ਹੁਣ, ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਆ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]\,\text{cm}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48\ \text{cm}^3$$

= 33.62 ਲਿਟਰ (ਲਗਭਗ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.4

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

1. ਪਾਣੀ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ 14 cm ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਆਸ 4 cm ਅਤੇ 2 cm ਹਨ। ਇਸ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 13.24

2. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 4 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਚੱਕਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ (ਘੇਰਾ) 18 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ। ਇਸ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਤੁਰਕੀ ਟੋਪੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.24) ਜੇਕਰ ਇਸਦੇ ਖੁੱਲੇ ਸਿਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ, ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4 cm ਹੈ ਅਤੇ ਟੋਪੀ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 15 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੇ ਪਦਾਰਥ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਖੁਲਿਆ ਇੱਕ ਬਰਤਨ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਉੱਚਾਈ 16 cm ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਅਤੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 20 cm ਹਨ। ₹ 20 ਪ੍ਰਤਿ ਲਿਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ, ਇਸ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਭਰ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਦੁੱਧ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਸ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 8 ਪ੍ਰਤਿ 100 cm^2 ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ)
5. 20 cm ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਕੋਣ (vertical angle) 60° ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੇ ਇੱਕ ਤਲ ਨਾਲ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਲ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਵਿਆਸ $\frac{1}{16}$ cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.5 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

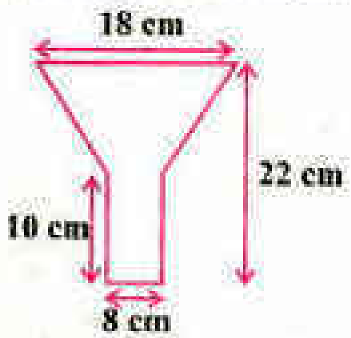
1. 3 mm ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਤਾਂਬੇ ਦੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਨੂੰ 12 cm ਲੰਬੇ ਅਤੇ 10 cm ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵੇਲਣ 'ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਪੇਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਵਕਰ ਤਲ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਤਾਂਬੇ ਘਣਤਾ 8.88 g ਪ੍ਰਤਿ cm^3 ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm ਅਤੇ 4 cm ਹਨ (ਕਰਣ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ), ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਕਰਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋਹਰੇ ਸ਼ੰਕੂ (double cone) ਦੇ ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। (π ਦਾ ਮੁੱਲ ਜੋ ਠੀਕ ਲੱਗੇ ਲੈ ਲਵੋ)।

3. ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਜਿਸਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਮਾਪ 150 cm × 120 cm × 110 cm ਹਨ, ਵਿੱਚ 129600 cm^3 ਪਾਣੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਛੇਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਇੱਟਾਂ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਪਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਪੂਰੀ ਉੱਪਰ ਤੱਕ ਭਰ ਨਾ ਜਾਵੇ। ਹਰੇਕ ਇੱਟ ਆਪਣੇ ਆਇਤਨ ਦਾ $\frac{1}{17}$ ਪਾਣੀ ਸੋਖ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਇੱਟ ਦਾ ਮਾਪ 22.5 cm × 7.5 cm× 6.5 cm ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇੱਟਾਂ ਪਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੇ ਉਸ ਤੋਂ ਪਾਣੀ ਬਾਹਰ ਨਾ ਆਵੇ?

4. ਕਿਸੇ ਮਹੀਨੇ ਦੇ 15 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੀ ਘਾਟੀ ਵਿੱਚ 10 cm ਵਰਖਾ ਹੋਈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਘਾਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 7280 km^2 ਹੈ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਕੁੱਲ ਵਰਖਾ ਲਗਭਗ ਤਿੰਨ ਨਦੀਆਂ ਦੇ ਆਮ ਪਾਣੀ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੀ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਨਦੀ 1072 km ਲੰਬੀ, 75 m ਚੌੜੀ ਅਤੇ 3 m ਡੂੰਘੀ ਹੈ।

5. ਟੀਨ ਦੀ ਬਣੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਤੇਲ ਦੀ ਕੁੱਪੀ 10 cm ਲੰਬੇ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਬਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉੱਚਾਈ 22 cm ਹੈ, ਬੇਲਨਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਵਿਆਸ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਪੀ ਦੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 18 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਲੱਗੀ ਟੀਨ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.25)।



ਚਿੱਤਰ 13.25

6. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਵਕਰ ਤਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜੋ ਭਾਗ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

7. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਇਤਨ ਦਾ ਉਹ ਸੂਤਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜੋ ਭਾਗ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

13.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਘਣਾਵ, ਵੇਲਣ, ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ) ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨਾ।
2. ਠੋਸਾਂ ਘਣਾਵ, ਵੇਲਣ, ਸ਼ੰਕੂ, ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।
3. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕਿਸੇ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਸ਼ੰਕੂ ਹਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ ਠੋਸ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
4. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

   (i) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

   (ii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi l(r_1 + r_2)$ ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

   (iii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

   ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ, h = ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ, l = ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ r_1 ਅਤੇ r_2 ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹਨ।

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ 14

There are lies, damned lies and statistics
(ਇਥੇ ਝੂਠ, ਸਫੈਦ ਝੂਠ ਅਤੇ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਹੈ।)

— Disraeli

14.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ (ਕੱਚੇ) ਅਤੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਛੜ ਚਿੱਤਰ, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ [ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅ-ਸਮਾਨ (ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ) ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਨ] ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਆਦਿ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ। ਸੱਚ ਤਾਂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ (numerical representatives) ਪਤਾ ਕਰ ਕੇ ਇੱਕ ਕਦਮ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਵਧ ਗਏ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧੀਆਂ ਨੂੰ *ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (measures of central tendency)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪਾਂ ਭਾਵ *ਮੱਧਮਾਨ (mean)*, *ਮੱਧਿਕਾ (median)* ਅਤੇ *ਬਹੁਲਕ (mode)* ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਮਾਪਾਂ ਭਾਵ ਮੱਧਮਾਨ, ਮੱਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cumulative frequency) ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ (cumulative frequency curves), ਜੋ *ਤੋਰਣ (ogives)* ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

14.2 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ (ਜਾਂ ਔਸਤ) ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ

ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ x_1, f_1 ਵਾਰੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੇਖਣ x_2, f_2 ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ।

ਹੁਣ, ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \quad + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \quad + f_n}$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਅੱਖਰ Σ [ਵੱਡਾ ਸਿਗਮਾ (capital sigma)] ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅੱਖਰ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ *ਜੋੜਨਾ* (*summation*) ਭਾਵ

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਸਮਝਦੇ ਹੋਏ ਕਿ i ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ n ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੇ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇੱਕ ਪੇਪਰ ਵਿੱਚ 100 ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ਹੱਲ: ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰੇਕ x_i ਨਾਲ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.1 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਤੰਭ (column) ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.1

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (x_i)	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

ਹੁਣ
$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਮੱਧਮਾਨ 59.3 ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਕੜੇ ਇੰਨੇ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਥਪੂਰਨ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕੇ (ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਕੇ) ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੇ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਚੌੜਾਈ, ਮੰਨ ਲਓ 15 ਦੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਬਣਾ ਕੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲੀਏ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖਦੇ ਸਮੇਂ ਕਿਸੇ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰੇਖਣ (ਮੁੱਲ) ਅਗਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅੰਕ 40 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ 4 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 25-40 ਵਿੱਚ ਨਾ ਲੈ ਕੇ ਅੰਤਰਾਲ 40-55 ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪਰੰਪਰਾ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈਏ। (ਦੇਖੋ ਸਾਰਣੀ 14.2)।

ਸਾਰਣੀ 14.2

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	3	7	6	6	6

ਹੁਣ, ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ (ਮੁੱਲ) ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ, ਜੋ ਪੂਰੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਕਰੇ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (mid-point) [ਜਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (class mark)] ਨੂੰ ਉਸ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿੱਧ (representative) ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (ਜਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ) ਉਸ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਔਸਤ ਕੱਢ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$\text{ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ} = \frac{\text{ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ} + \text{ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ}}{2}$$

ਸਾਰਣੀ 14.2 ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਵਰਗ 10–25 ਦਾ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ $\frac{10+25}{2}$, ਭਾਵ 17.5 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ x_i ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ x_i ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ,ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.3

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

ਅਖੀਰਲੇ ਸਤੰਭ (column) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $\Sigma f_i x_i$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਇਸ ਨਵੀਂ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ (direct method)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 14.1 ਅਤੇ 14.3 ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਵਾਸਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਣਾਮ (ਮੱਧਮਾਨ) ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਿਆਦਾ ਸਹੀ ਹੈ? ਦੋਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਮੰਨੇ ਹੋਏ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਕਲਪਨਾ ਦੀ ਵਜ੍ਹਾ ਨਾਲ ਹੈ। 59.3 ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 62 ਇੱਕ ਨੇੜਲਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ।

ਕਦੇ-ਕਦੇ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕੱਢਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਵੀ ਬਹੁਤ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਸੋਚੀਏ।

ਅਸੀਂ f_i ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ, ਹਰੇਕ x_i ਨੂੰ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਸੌਖੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਰੇਕ x_i ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉਣ ਬਾਰੇ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਵਿਚਾਰ ਹੈ? ਆਓ ਇਹ ਵਿਧੀ ਅਪਨਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਪਗ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ x_i ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ x_i ਨੂੰ *ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ (assumed mean)* ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 'a' ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰੀਏ। ਨਾਲ ਹੀ ਆਪਣੀ ਗਣਨਾ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ 'a' ਨੂੰ ਅਜਿਹਾ x_i ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਆਉਂਦਾ ਹੋਵੇ। ਅਸੀਂ $a = 47.5$ ਜਾਂ $a = 62.5$ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਆਓ $a = 47.5$ ਲਈਏ।

ਅਗਲਾ ਪਗ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ ਹਰੇਕ x_i ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅੰਤਰ d_i ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ x_i ਦਾ 'a' ਤੋਂ *ਵਿਚਲਨ (deviation)* ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।

ਭਾਵ
$$d_i = x_i - a$$
$$= x_i - 47.5$$

ਤੀਜੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ d_i ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਗਤ f_i ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਸਾਰੇ $f_i d_i$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਇਹ ਗਣਨਾ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.4

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਤੋਂ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਆਉ ਹੁਣ $\bar{d}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਕਿਉਂਕਿ d_i ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹਰੇਕ x_i ਵਿੱਚੋਂ a ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $\bar{d}$ ਵਿੱਚ a ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਇਸ ਲਈ $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

ਇਸ ਲਈ $\quad \bar{x} = a + \bar{d}$

ਭਾਵ $\quad \bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਹੁਣ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਵਿੱਚ a, $\Sigma f_i d_i$ ਅਤੇ Σf_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

ਇਸ ਲਈ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 62 ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ **ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ (assumed mean method)** ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ 1 : ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ x_i (17.5, 32.5, ਆਦਿ) ਨੂੰ 'a' ਮੰਨ ਕੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਵੇਖਦੇ ਹੋ । ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਭਾਵ 62 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੱਧਮਾਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ 'a' ਦੇ ਮੁੱਲ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਦੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 15 ਦੇ ਗੁਣਜ (multiples) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਤੰਭ (Column) 4 ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ 15 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ f_i ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਣਗੀਆਂ [ਇੱਥੇ 15, ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਵਰਗ ਮਾਪ (ਸਾਈਜ਼) ਹੈ।]

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧ ਹੈ ਅਤੇ h ਵਰਗਮਾਪ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ u_i ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ (ਭਾਵ f_iu_i ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ Σf_iu_i ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।) ਆਓ $h = 15$ ਲੈ ਕੇ ਸਾਰਣੀ 14.5 ਬਣਾਈਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.5

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_iu_i = 29$

ਮੰਨ ਲਓ $\bar{u} = \dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ $\bar{u}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$
$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

ਜਾਂ $h\bar{u} = \bar{x} - a$

ਭਾਵ $\bar{x} = a + h\bar{u}$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

ਹੁਣ ਸਾਰਣੀ 14.5 ਤੋਂ $a, h, \Sigma f_i u_i$ ਅਤੇ Σf_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$
$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕ 62 ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ **ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ (step deviation method)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ

- ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੋਵੇਗੀ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ d_i ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ।
- ਤਿੰਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੱਧਮਾਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦੇ ਹੀ ਸਰਲ ਰੂਪ ਹਨ।

- ਸੂਤਰ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ ਦਾ ਉਦੋਂ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ a ਅਤੇ h ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾ ਹੋਣ, ਪਰੰਤੂ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ਹੋਵੇ।

ਆਉ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-2 ਰਾਜਾਂ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸ਼ਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ (union territories) ਦੇ ਪੇਂਡੂ ਇਲਾਕਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਥਾਪਿਤ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਤਿੰਨੇ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	11	7	4	4	2	1

(ਸਰੋਤ:ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੱਤਵਾਂ ਅਖਿਲ ਭਾਰਤੀਯ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਸਰਵੇ)

ਹੱਲ : ਆਉ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ x_i ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਤੰਭ (ਕਾਲਮ) ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ (ਦੇਖੋ ਸਾਰਣੀ 14.6)।

ਸਾਰਣੀ 14.6

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸ਼ਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $a = 50$, $h = 10$, ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਦ $d_i = x_i - 50$ ਅਤੇ $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ d_i ਅਤੇ u_i ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.7 ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.7

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
ਜੋੜ	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$, $\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

ਇਸ ਲਈ, ਪੇਂਡੂ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ 39.71 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਧੀ ਚੁਣਨਾ ਇਸ ਗੱਲ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਛੋਟੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਵਧੀਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਜੇਕਰ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵੱਡੇ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਜਾਂ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਵਰਗ ਮਾਪ ਅਸਮਾਨ ਹਨ ਅਤੇ x_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵੱਡੇ ਹਨ ਤਾਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ d_i ਦਾ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ h ਲੈ ਕੇ, ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ, ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਚੁਣਦੇ ਹੋਏ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ? ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ ਕੀ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ?

ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	5	16	12	2	3

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਵਰਗਮਾਪ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ ਅਤੇ x_i ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਡੇ ਹਨ। ਆਉ $a = 200$ ਅਤੇ $h = 20$ ਲੈ ਕੇ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

ਸਾਰਣੀ 14.8

ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
ਜੋੜ	45				–106

ਇਸ ਲਈ $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$ ਹੈ।

ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਦਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ 45 ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ 152.89 ਦੀ ਔਸਤ ਨਾਲ ਵਿਕਟ ਲਏ ਹਨ।

ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਕਿਰਿਆ 2 :

ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕੇ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਲਈ ਕਹੋ :

1. ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਹਾਲ ਵਿੱਚ ਹੀ (ਹੁਣੇ) ਲਈ ਗਈ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ, ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।
2. ਆਪਣੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ 30 ਦਿਨਾਂ ਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਾਪਮਾਨ ਇਕੱਠਾ ਕਰੋ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰੋ।
3. ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ (cm ਵਿੱਚ) ਮਾਪੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ।

ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਬਣਾ ਲਓ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਜੋ ਚਾਹੁਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.1

1. ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੇ ਵਾਤਾਵਰਨ ਚੇਤਨਾ ਅਭਿਆਨ ਦੇ ਅਧੀਨ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 20 ਘਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਪੌਦਿਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ। ਪ੍ਰਤਿ ਘਰ ਮੱਧਮਾਨ (ਔਸਤ) ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ਘਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	2	1	5	6	2	3

ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕਿਉਂ?

2. ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 50 ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	14	8	6	10

ਇੱਕ ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਸ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਮੱਧਮਾਨ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿਤੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦਾ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੇਬ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਜੇਬ ਖਰਚਾ ₹ 18 ਹੈ। ਅਗਿਆਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੇਬ ਖਰਚਾ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	6	9	13	f	5	4

4. ਕਿਸੇ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਡਾਕਟਰ ਦੁਆਰਾ 30 ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ (heart beat) ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਨੋਟ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਨਾਲ ਲਿਖੀ ਗਈ। ਇੱਕ ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਮੱਧਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਸੰਖਿਆ	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	4	3	8	7	4	2

5. ਕਿਸੇ ਬਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ, ਫ਼ਲ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ, ਪੇਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਅੰਬ ਵੇਚ ਰਹੇ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਪੇਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੀ। ਪੇਟੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਨੁਸਾਰ, ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸੀ:

ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
ਪੇਟੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	110	135	115	25

ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਮੱਧਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ?

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 25 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੇ ਭੋਜਨ ਉੱਪਰ ਹੋਏ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਖਰਚ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	5	12	2	2

ਇੱਕ ਉਚਿਤ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਭੋਜਨ ਉੱਪਰ ਹੋਏ ਖਰਚ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਸਲਫਰ ਡਾਈਆਕਸਾਈਡ (SO_2) ਦੀ ਮਾਤਰਾ (concentration) (ਭਾਗ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿਲਿਅਨ ਵਿੱਚ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਇਲਾਕੇ ਦੇ 30 ਮੁਹੱਲਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ:

SO_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

ਹਵਾ ਵਿੱਚ SO_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਦੀ ਅਧਿਆਪਕਾ ਨੇ ਪੂਰੇ ਸਾਲ ਦੌਰਾਨ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗੈਰਹਾਜ਼ਰੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿੰਨੇ ਦਿਨ ਗੈਰਹਾਜ਼ਿਰ ਰਿਹਾ ਉਸ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	11	10	7	4	4	3	1

9. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 35 ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ (ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ) ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ (% ਵਿੱਚ)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	3	10	[illegible]	8	3

14.3 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਕਿ ਬਹੁਲਕ (mode) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੋ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਸ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਬਹੁਲਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੋਵੇ। ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ *ਬਹੁ-ਬਹੁਲਕ (multi-modal)* ਅੰਕੜੇ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ ਵੀ ਬਹੁ-ਬਹੁਲਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਬਹੁਲਕ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

ਆਓ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਕਿਸੇ ਗੇਂਦਬਾਜ਼ ਦੁਆਰਾ 10 ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈਏ ਜਿਵੇਂ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:

ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0	1	2	3	4	5	6
ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	1	3	2	1	1	1

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦਬਾਜ਼ ਨੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੈਚਾਂ (3) ਵਿੱਚ 2 ਵਿਕਟਾਂ ਲਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ 2 ਹੈ।

ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹ ਵਰਗ (class) ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ। ਇਸ ਵਰਗ ਨੂੰ **ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ (modal class)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਹੁਲਕ ਇਸ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ਜਿੱਥੇ l = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ

h = ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ (ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

f_1 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

f_0 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਤੇ

f_2 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਲਈ ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 20 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਉੱਪਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ :

ਪਰਿਵਾਰ ਮਾਪ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	8	2	2	1

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਧਿਕਤਮ ਵਰਗ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 8 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਸੰਗਤ ਵਰਗ 3 - 5 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ 3-5 ਹੈ।

ਹੁਣ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ = 3 - 5, ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ $(l) = 3$ ਅਤੇ ਵਰਗ ਮਾਪ $(h) = 2$ ਹੈ।

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_1) = 8$

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_0) = 7$ ਅਤੇ

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_2) = 2$ ਹੈ।

ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

ਇਸ ਲਈ, ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ 3.286 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (7) ਵਾਲਾ ਅੰਤਰਾਲ 40-55 ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ 40-55 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ $(l) = 40$ ਹੈ,

ਵਰਗ ਮਾਪ $(h) = 15$ ਹੈ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_1) = 7$ ਹੈ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_0) = 3$ ਹੈ,

ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_2) = 6$ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਅੰਕ 52 ਹੈ।

ਹੁਣ, ਉਦਾਹਰਣ 1 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕ 62 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਅੰਕ 52 ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 62 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਉਦਾਹਰਣ 6 ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ, ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਡਾ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2. ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਮੰਗ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਔਸਤ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਔਸਤ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਕਿਰਿਆ 3 : ਕਿਰਿਆ 2 ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਸਮੂਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਮੱਧਮਾਨ ਨਾਲ ਕਰਨ ਲਈ ਵੀ ਕਹੋ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਵਾਸਤੇ ਵੀ ਕਹੋ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸਮਾਨ ਵਰਗ ਵਾਲੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਵੀ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਹੋਏ ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	11	21	23	14	5

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ, 225 ਬਿਜਲੀ ਉਪਕਰਨਾਂ ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ:

ਜੀਵਨਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	10	35	52	61	38	29

ਉਪਕਰਨਾਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਜੀਵਨਕਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ 200 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਘਰੇਲੂ ਖਰਚ ਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਮੱਧਮਾਨ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਖਰਚ (₹ ਵਿੱਚ)	ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਭਾਰਤ ਦੇ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਰਾਜਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅਧਿਆਪਕ-ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋਨਾਂ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਪੂਰੀ ਅਧਿਆਪਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਰਾਜ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਕੁਝ ਵਧੀਆ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਅੰਤਰਰਾਸ਼ਟਰੀ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10,000	1
10,000 - 11,000	1

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਇੱਕ ਸੜਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ ਉੱਪਰ ਖੜ੍ਹੇ ਹੋ ਕੇ ਉਥੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੋਟ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ। ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ 3 ਮਿੰਟ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਇਹੋ ਜਿਹੇ 100 ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰੇਖਣ ਲਏ ਗਏ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ (Median)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ, *ਮੱਧਿਕਾ (median)* ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮਾਪ ਹੈ ਜੋ ਕਿਸੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਜਦੋਂ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ n ਜਿਸਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\frac{n}{2}$ ਵੇਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਔਸਤ (ਮੱਧਮਾਨ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਲ 50 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	20	29	28	33	42	38	43	25
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	28	24	15	2	4	1	20

ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਵਧਦਾ ਕ੍ਰਮ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਾਉ।

ਸਾਰਣੀ 14.9

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
ਜੋੜ	**100**

ਇੱਥੇ $n = 100$ ਹੈ ਜੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰੇਖਣ $\frac{n}{2}$ ਵੇਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਔਸਤ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ 50ਵੇਂ ਅਤੇ 51ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾ ਦਾ ਔਸਤ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.10

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
20	6
25 ਤੱਕ	6 + 20 = 26
28 ਤੱਕ	26 + 24 = 50
29 ਤੱਕ	50 + 28 = 78
33 ਤੱਕ	78 + 15 = 93
38 ਤੱਕ	93 + 4 = 97
42 ਤੱਕ	97 + 2 = 99
43 ਤੱਕ	99 + 1 = 100

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਸਤੰਭ (ਕਾਲਮ) ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਨਾਮ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.11

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

50ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 28 ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)

51ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 29 ਹੈ

ਇਸ ਲਈ, ਮੱਧਿਕਾ $= \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰਣੀ 14.11 ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਤੰਭ 1 ਅਤੇ 3 ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਅੰਕ 28.5 ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਲਗਭਗ 50 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 28.5 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 50 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 28.5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹਿਕ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 100 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 53 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹਿਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਰਣੀ 14.12

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ? ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉੱਤਰ 5 ਹੈ।

ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਵਰਗ 0 - 10 ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਵਰਗ 10 - 20 ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ

ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 5 + 3 ਭਾਵ 8 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗ 10 - 20 ਦੀ *ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cumulative frequency)* 8 ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 30 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ..., 100 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਸਾਰਣੀ 14.13

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ)
10 ਤੋਂ ਘੱਟ	5
20 ਤੋਂ ਘੱਟ	5 + 3 = 8
30 ਤੋਂ ਘੱਟ	8 + 4 = 12
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	12 + 3 = 15
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	15 + 3 = 18
60 ਤੋਂ ਘੱਟ	18 + 4 = 22
70 ਤੋਂ ਘੱਟ	22 + 7 = 29
80 ਤੋਂ ਘੱਟ	29 + 9 = 38
90 ਤੋਂ ਘੱਟ	38 + 7 = 45
100 ਤੋਂ ਘੱਟ	45 + 8 = 53

ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ **ਘਟਦੀ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ 10, 20, 30, . . . 100, ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, 20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਰਣੀ 14.12 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ 53 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਤਰਾਲ 0 - 10 ਵਿੱਚ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ 53 – 5 = 48 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ 20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ 48 – 3 = 45, 30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ 45 – 4 = 41, ਆਦਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.14

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ)
0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	53
10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	53 – 5 = 48
20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	48 – 3 = 45
30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	45 – 4 = 41
40 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	41 – 3 = 38
50 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	38 – 3 = 35
60 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	35 – 4 = 31
70 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	31 – 7 = 24
80 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	24 – 9 = 15
90 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	15 – 7 = 8

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਜਾਂ ਵੰਡ **ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ** ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਥੇ 0, 10, 20, . . ., 90 ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਨਵੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.15 ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ:

ਸਾਰਣੀ 14.15

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f)	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇਖ ਕੇ ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਮੱਧ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਉਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ, ਜੋ ਅੰਕੜਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਕਿਹੜਾ ਹੈ?

ਇਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰਿਆਂ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਅਤੇ $\frac{n}{2}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{n}{2}$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਹੋ। ਇਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ *ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ (median class)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ ਵਿੱਚ, $n = 53$ ਹੈ ਭਾਵ, $\frac{n}{2} = 26.5$ ਹੈ। ਹੁਣ 60 - 70 ਹੀ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 29, $\frac{n}{2}$ ਭਾਵ 26.5 ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 60 - 70 **ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ** ਹੈ।

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

ਇੱਥੇ $l =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ

$n =$ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ

$\text{cf} =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

$f =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

$h =$ ਵਰਗ ਮਾਪ (ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਵਰਗ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹਨ)

ਹੁਣ $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $\text{cf} = 22$, $f = 7$, $h = 10$

ਨੂੰ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਭਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10 = 60 + \frac{45}{7}$$
$$= 66.4$$

ਇਸ ਲਈ, ਲਗਭਗ ਅੱਧੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 66.4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਅੱਧੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 66.4 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਦਸਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੀਆਂ 51 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ :

ਉੱਚਾਈ (cm) ਵਿੱਚ	ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	4
145 ਤੋਂ ਘੱਟ	11
150 ਤੋਂ ਘੱਟ	29
155 ਤੋਂ ਘੱਟ	40
160 ਤੋਂ ਘੱਟ	46
165 ਤੋਂ ਘੱਟ	51

ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ 140, 145, 150, ...165 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ, 140-145, 145-150,.....160-165 ਹਨ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਭਾਵ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 4 ਹੈ। ਹੁਣ 145 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੀਆਂ 11 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ 140 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੀਆਂ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 - 145 ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 11 – 4 = 7 ਹੋਵੇਗੀ ਭਾਵ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 - 145 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 7 ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 145 – 150 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 29 – 11 = 18 ਹੈ, 150 - 155 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 40 – 29 = 11 ਹੈ, ਆਦਿ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਡੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਰਗੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.16

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

ਹੁਣ $n = 51$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅੰਤਰਾਲ 145 - 150 ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ,

l (ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ) = 145,

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ 145 - 150 ਦੇ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cf) = 11,

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ 145 – 150 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $f = 18$ ਅਤੇ ਵਰਗ ਮਾਪ $h = 5$ ਹੈ।

ਸੂਤਰ, ਮੱਧਿਕਾ $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ 149.03 ਸੈ.ਮੀ. ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਲੱਗਭਗ 50% ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 149.03 cm ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 50% ਦੀ ਉੱਚਾਈ 149.03 cm ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ 525 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 100 ਹੈ, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ਹੱਲ :

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $n = 100$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $76 + x + y = 100$ ਭਾਵ $x + y = 24$ (1)

ਮੱਧਿਕਾ 525 ਹੈ ਜੋ ਵਰਗ 500-600 ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$ ਹੈ।

ਸੂਤਰ ਮੱਧਿਕਾ $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) h$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

ਜਾਂ $$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

ਜਾਂ $$25 = 70 - 5x$$

ਜਾਂ $$5x = 70 - 25 = 45$$

ਇਸ ਲਈ $$x = 9$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $$9 + y = 24$$

ਭਾਵ $y = 15$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਜਰੂਰਤ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹੜਾ ਮਾਪ ਵੱਧ ਉੱਚਿਤ ਹੈ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮਾਪ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਉੱਪਰ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਖਰਲੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਾਲ਼ੋਂ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੰਡ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਕੂਲਾਂ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਸਕੂਲ ਦਾ ਪਰਦਰਸ਼ਨ ਵਧੀਆ ਰਿਹਾ।

ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸਿਖਰ ਮੁੱਲ ਮੱਧਮਾਨ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਗਭਗ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇਕ ਵਧੀਆ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਮੰਨ ਲਉ 2 ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ 20, 25, 20, 21 ਅਤੇ 18 ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਪ੍ਰਦਾਨ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਲਈ, ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿੱਥੇ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਪ੍ਰੇਖਣ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ 'ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ' (typical) ਪ੍ਰੇਖਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ ਵੱਧ ਉਪਯੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਉਤਪਾਦਕਤਾਂ ਦਰ, ਔਸਤ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਮਾਪਕ ਹੈ। ਇਹ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਖਰਲੇ (ਭਾਵ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੇ) ਮੁੱਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਮੱਧਿਕਾ ਲੈਂਦੇ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਜਿਥੇ ਜਿਆਦਾਤਰ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਮੁੱਲ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਸੰਦੀਦਾ ਵਸਤੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਬਹੁਲਕ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਵਿਕਲਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੇਖਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਪਸੰਦੀਦਾ ਟੀ.ਵੀ. ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਉਸ ਉਪਭੋਗਤਾ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਜਿਸ ਦੀ ਮੰਗ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਲੋਕਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਾਹਨਾਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਰੰਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ :

1. ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਕਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

$$3 \text{ ਮੱਧਿਕਾ} = \text{ਬਹੁਲਕ} + 2 \text{ ਮੱਧਮਾਨ}$$

2. ਅ-ਸਮਾਨ ਵਰਗ ਮਾਪਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.3

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 68 ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਦੀ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਮਹੀਨੇਵਾਰ ਖਪਤ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ, ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੀ ਕਰੋ।

ਮਹੀਨੇ ਵਾਰ ਖਪਤ	ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ 28.5 ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
ਜੋੜ	60

3. ਇੱਕ ਜੀਵਨ ਬੀਮਾ ਏਜੰਟ 100 ਪਾਲਿਸੀ ਧਾਰਕਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੀ ਵੰਡ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਪਾਲਿਸੀ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 18 ਸਾਲ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੋਵੇ, ਪਰੰਤੂ 60 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)	ਪਾਲਿਸੀ ਧਾਰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
20 ਤੋਂ ਘੱਟ	2
25 ਤੋਂ ਘੱਟ	6
30 ਤੋਂ ਘੱਟ	24
35 ਤੋਂ ਘੱਟ	45
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	78
45 ਤੋਂ ਘੱਟ	89
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	92
55 ਤੋਂ ਘੱਟ	98
60 ਤੋਂ ਘੱਟ	100

4. ਇੱਕ ਪੌਦੇ ਦੀਆਂ 40 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਲਗਭਗ ਮਿਲੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਲੰਬਾਈ (mm) ਵਿੱਚ	ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸੰਕੇਤ : ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਪਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਮੰਨੀ ਗਈ ਹੈ। ਤਦ ਇਹ ਵਰਗ 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . .,171.5 - 180.5 ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

5. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 400 ਨਿਊਨ ਲੈਂਪਾਂ (lamp) ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ (life time) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਜੀਵਨ ਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੈਂਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਜੀਵਨ ਕਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਟੈਲੀਫੋਨ ਡਾਇਰੈਕਟਰੀ ਤੋਂ 100 ਉੱਪ ਨਾਮ (surnames) ਦੀ ਸੂਚੀ ਲਈ ਗਈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਗਏ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ:

ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 29
ਉੱਪ-ਨਾਮ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	30	40	16	4	4

ਉੱਪ-ਨਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉੱਪ-ਨਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ, ਉਪਨਾਮ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਵਜ਼ਨ (ਭਾਰ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਭਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

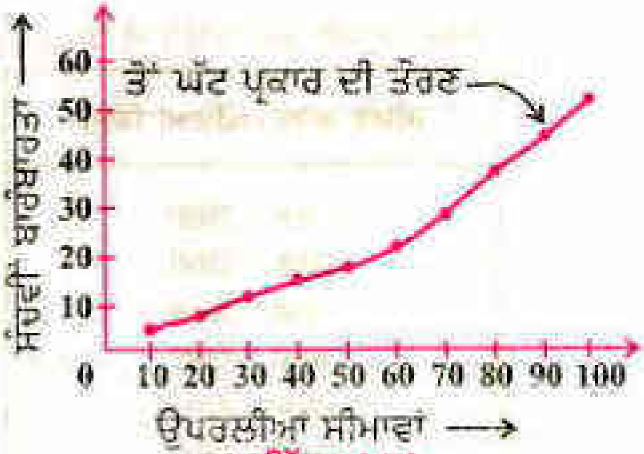
ਵਜ਼ਨ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	3	8	6	6	3	2

14.5 ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ (ਨਿਰੂਪਣ)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ, ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲੋਂ ਜਿਆਦਾ ਵਧੀਆਂ ਭਾਸ਼ਾ ਬੋਲਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਛੜ ਚਿੱਤਰਾਂ, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਚਿੱਤਰਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਆਉ ਹੁਣ ਇੱਕ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਉ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੁੱਲ 10, 20, 30, ..., 100 ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ (x-ਧੁਰੇ) ਉੱਤੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ, ਇੱਕ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਪੈਮਾਨਾ (scale) ਲੈ ਕੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ (y-ਧੁਰੇ) ਉਤੇ ਉਹੀ ਜਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ ਦੋਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਹੀ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ (ਉੱਪਰੀ ਸੀਮਾ, ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ (free hand smooth curve) ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਈਏ। ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਵਕਰ, **ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ** *(cumulative frequency curve)* ਜਾਂ ਤੋਰਣ *(ogive)* ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14. 1)।

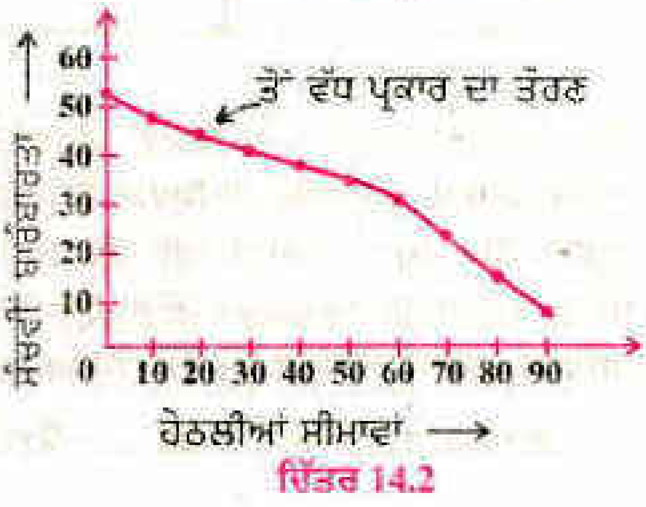


ਚਿੱਤਰ 14.1

> ਅੰਗਰੇਜੀ ਦੇ ਸ਼ਬਦ 'ogive' ਨੂੰ 'ogeev' (ਔਜੀਵ) ਬੋਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਸ਼ਬਦ 'ogee' ਤੋਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਉੱਤਲ ਵਕਰ (convex curve) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਹਿਰਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਅਵਤਲ ਵਕਰ (concave curve) ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਵਕਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ; ਭਾਵ ਇਹ ਵਕਰ S ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਰੇ ਲੰਬਾਤਮਕ(vertical) ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। 14ਵੀਂ ਅਤੇ 15ਵੀਂ ਸਤਾਬਦੀ ਦੇ ਗੋਥਿਕ ਢੰਗ (Gothic style) ਦੀ ਵਾਸਤੂਕਲਾ ਵਿੱਚ, ogee ਆਕਾਰ ਦਾ ਵਕਰ ਉਸ ਕਲਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.14 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ (ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ) ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਇੱਥੇ 0, 10, 20, ...90 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। 'ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ 'ਦੇ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉੱਚਿਤ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਉਤੇ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ (ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ, ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ (0, 53), (10, 48), (20, 45),



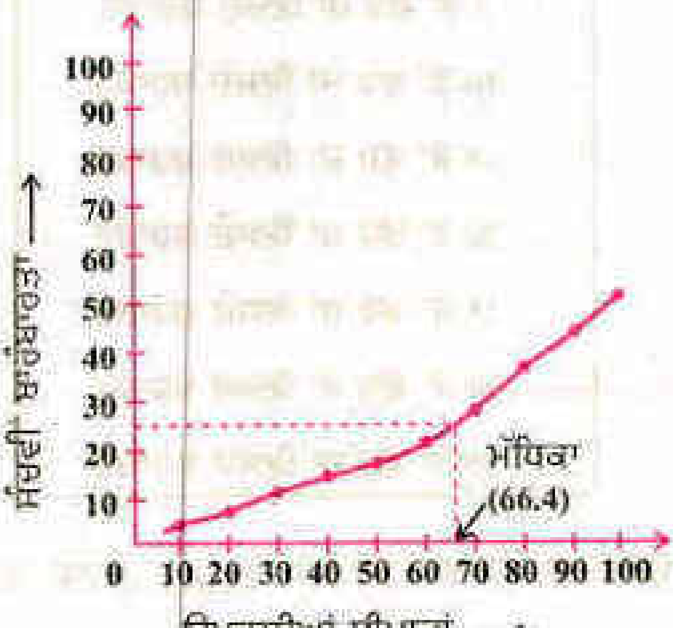
ਚਿੱਤਰ 14.2

(30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31) (70, 24), (80, 15), (90, 8), ਅਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਜੋ ਵਕਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ 'ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਪ੍ਰਕਾਰ' ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ ਜਾਂ ਤੋਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.2)

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ (ਚਿੱਤਰ 14.1 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 14.2) ਬਰਾਬਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹਨ ਜੋ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੋਰਣ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ? ਕੀ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਪਰਖ (ਜਾਂਚ) ਕਰੀਏ।

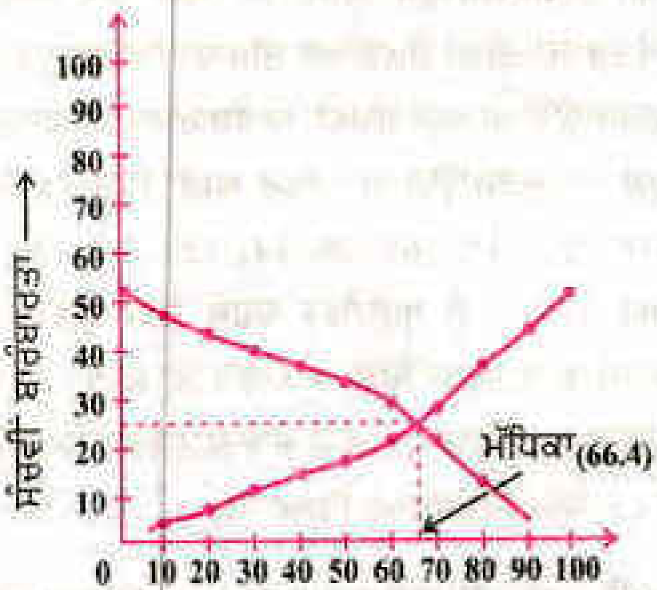
ਇੱਕ ਸਪਸ਼ਟ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ, $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.3)। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ, ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਵਕਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਇਸ ਲੰਬ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.3)।



ਚਿੱਤਰ 14.3

ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ (ਭਾਵ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਤੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ) ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ। ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਲੰਬ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਜਿਥੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.4)।



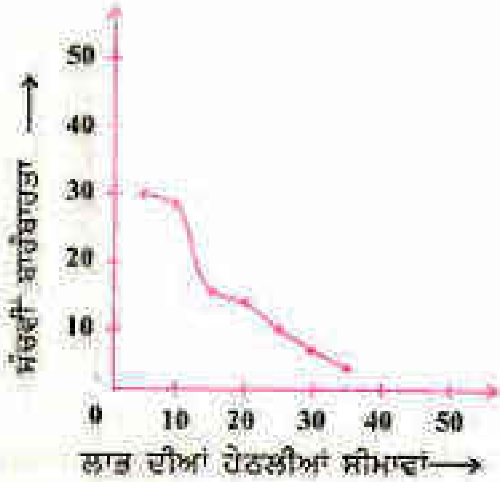
ਚਿੱਤਰ 14.4

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ੋਪਿੰਗ ਕੰਪਲੈਕਸ (shopping complex) ਦੀਆਂ 30 ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਮਾਏ ਗਏ ਸਾਲਾਨਾਂ ਲਾਭਾਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਲਾਭ (ਲੱਖ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	30
10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	28
15 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	16
20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	14
25 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	10
30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	7
35 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	3

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਉੱਪਰ ਖਿਤਿਜ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) ਅਤੇ (35, 3) ਨੂੰ ਅਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 'ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ' ਤੋਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 14.5 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



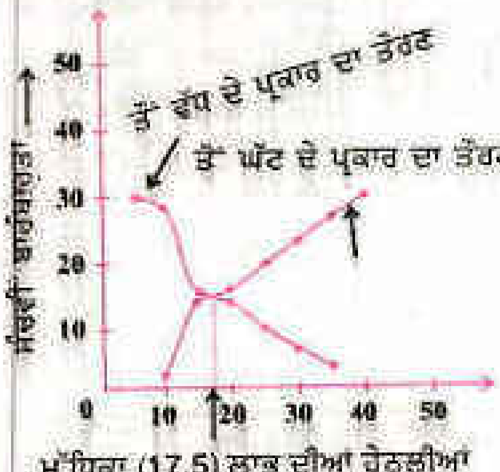
ਚਿੱਤਰ 14.5

ਆਉ ਹੁਣ, ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ, ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੀਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.17

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	12	2	4	3	4	3
ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	2	14	16	20	23	27	30

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 14.5 ਵਾਲੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਕੇ 'ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ' ਤੋਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 14.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ (ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ) ਤੋਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਖਿਚਣ 'ਤੇ ਜੋ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਕਾਟਵਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੱਧਿਕਾ ₹ 17.5 ਲੱਖ ਹੈ।)



ਚਿੱਤਰ 14.6

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuous) ਵਾਲੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। (ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਵੀ ਦੇਖੋ।)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.4

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਵੰਡ ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 50 ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੀ ਰੋਜਾਨਾਂ ਆਮਦਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	14	8	6	10

'ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ' ਦੇ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

2. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਦੇ 35 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਮੈਡੀਕਲ ਜਾਂਚ ਸਮੇਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਕੀਤਾ ਗਿਆ :

ਭਾਰ (ਕਿ. ਗ੍ਰਾ. ਵਿੱਚ)	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
38 ਤੋਂ ਘੱਟ	0
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	3
42 ਤੋਂ ਘੱਟ	5
44 ਤੋਂ ਘੱਟ	9
46 ਤੋਂ ਘੱਟ	14
48 ਤੋਂ ਘੱਟ	28
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	32
52 ਤੋਂ ਘੱਟ	35

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਭਾਰ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ 100 ਫਾਰਮਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਕਣਕ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਤਪਾਦਨ (kg/ha)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
ਫਾਰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	8	12	24	38	16

ਇਸ ਵੰਡ ਨੂੰ 'ਵੱਧ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵੰਡ' ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

14.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

   (i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

   (ii) ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

   (iii) ਪਗ-ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ: $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

   ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ, ਭਾਵ ਵਰਗ ਚਿੰਨ ਉੱਪਰ ਆਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ਜਿਥੇ ਸੰਕੇਤ ਆਪਣਾ ਸੁਭਾਵਿਕ ਅਰਥ ਰੱਖਦੇ ਹਨ।

3. ਕਿਸੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸ ਵਰਗ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

4. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

ਜਿਥੇ ਸੰਕੇਤ ਆਪਣਾ ਸੁਭਾਵਿਕ ਅਰਥ ਰਖਦੇ ਹਨ।

5. ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰਾਂ ਜਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਜਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ, ਤੋਰਣ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਣ।

6. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਤੋਰਨਾਂ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਖਿੱਚੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਣ ਲਈ, ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਵੀ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੋਰਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉੱਚਿਤ ਪੈਮਾਨਾ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸੰਭਾਵਨਾ 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

(ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਅਤੇ ਤਰੁੱਟੀਆਂ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਹੁਣ ਅਤਿ ਗਣਿਤਿਕ ਰੁਚੀ ਦਾ ਅਤੇ ਅਤਿ ਵਿਵਹਾਰਕ ਮਹੱਤਵ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਾਲ ਸਮੂਹ ਸਥਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।)

– *R.S. Woodward*

15.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ (experimental) [ਜਾਂ ਤਜਰਬੱਈ (empirical)] ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 1000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (outcomes) ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਨ :

ਚਿੱਤ (Head) : 455   ਪਟ (Tail) : 545

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{455}{1000}$, ਭਾਵ 0.455 ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ (empirical) ਸੰਭਾਵਨਾ 0.545 ਹੈ। (ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਅਧਿਆਇ 15 ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵੀ ਦੇਖੋ।) ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 1000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹਨ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ, ਇਹ ਤਜਰਬੱਈ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਾਪਰਨ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕਰਨ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ, ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਸਿਰਫ਼ 'ਅਨੁਮਾਨ' (estimates) ਹੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਹੋਰ 1000 ਵਾਰ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲ ਕੇ ਕਰੀਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੇ

ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਨਾਲੋਂ ਵੱਖਰੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਅਨੁਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਇਆ (ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਅਧਿਆਇ 15 ਦੀ ਕਿਰਿਆ 1 ਅਤੇ 2 ਨੂੰ ਦੇਖੋ)। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧਦੀ ਗਈ, ਉਵੇਂ ਉਵੇਂ ਇੱਕ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦੀ ਰਹੀ। ਤੁਸੀਂ ਹੀ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਪੂਰੇ ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੇ ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਠਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਜੀਵ-ਵਿਗਿਆਨੀ ਕੋਮਟੇ ਡੀ. ਬੁਫਾਨ Comte De Buffon) ਨੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 4040 ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਅਤੇ 2048 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2048}{4040}$ ਭਾਵ 0.507 ਸੀ। ਬ੍ਰਿਟੇਨ ਦੇ ਜੇ.ਈ. ਕੈਰਿਚ (J.E. Kerrich) ਨੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 10000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਵਿੱਚ 5067 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ ਸੀ। ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ (Karl Pearson) ਨੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਧੇਰੇ ਸਮਾਂ ਲਗਾ ਕੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 24000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ। ਉਸ ਨੇ 12012 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੇ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.5005 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਮਿਲੀਅਨ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ 10 ਮਿਲੀਅਨ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਤੁਸੀਂ ਆਮ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਆਧਾਰ ਉੱਤੇ ਇਹ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਉਵੇਂ ਉਵੇਂ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 0.5, ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਨੇੜੇ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤ (ਪਟ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ *(theoretical probability)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ [ਜਿਸਨੂੰ ਪਰੰਪਰਾਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (classical probability) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ] ਨਾਲ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਕਰਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਸਰਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

15.2 ਸੰਭਾਵਨਾ — ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ

ਆਓ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਥਿਤੀ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ:

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਅਚਨਚੇਤ (Random) ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਉਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਨਿਆਂ ਸੰਗਤ (fair) ਹੈ। ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਮਿਤਈ (symmetrical) ਹੈ, ਤਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਕਾਰਣ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ, ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਡਿੱਗੇ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਬਿਨਾ ਪੱਖਪਾਤੀ *(unbiased)* ਹੋਣਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। 'ਅਚਨਚੇਤ ਉਛਾਲ' (random toss) ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਬਿਨਾ ਕਿਸੇ ਪੱਖਪਾਤ *(bias)* ਜਾਂ ਰੁਕਾਵਟ ਦੇ ਸੁਤੰਤਰਤਾਪੂਰਵਕ ਡਿੱਗਣ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਸੰਭਵ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਡਿੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ – ਜਾਂ ਤਾਂ ਚਿੱਤ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਫਿਰ ਪਟ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ [ਅਸੀਂ ਸਿੱਕੇ ਦੇ, ਉਸਦੇ ਕਿਨਾਰੇ (edge) ਦੀ ਖੜੇ ਦੀਆਂ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਰੱਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਦੋਂ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਿੱਕਾ ਰੇਤ ਉੱਤੇ ਡਿੱਗੇ]। ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਰਕਸੰਗਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ, ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਪਟ, ਦਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ ਉਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨਾ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਣਾਮ ਚਿੱਤ ਅਤੇ ਪਟ ਸਮਸੰਭਾਵੀ *(equally likely)* ਵਾਲੇ ਹਨ। ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ *(dice)* ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਨ। ਸਾਡੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਨਿਆਂਸੰਗਤ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਕੀ ਹਨ? ਇਹ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਉੱਪਰ ਆਉਣ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ।

ਕੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਵੇਖੀਏ।

ਮੰਨ ਲਊ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 1 ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਥੈਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੁਝ ਵੇਖੇ, ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੇ ਹੋ। ਇਸਦੇ ਕੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ? ਕੀ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ? ਕਿਉਂਕਿ ਇਥੇ 4 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜਰੂਰ ਹੀ ਮੰਨੋਗੇ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਜਾਂ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ) ਸਮਸੰਭਾਵੀ(ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਸਮਾਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਾਂਗੇ ਕਿ **ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।**

ਜਮਾਤ **IX** ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਘਟਨਾ E ਦੀ **ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਾਂ ਤਜਰਬੱਈ** ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ:

$$P(E) = \frac{\text{ਯਤਨਾਂ (ਕੋਸ਼ਿਸ਼) ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਘਟੀ ਹੈ}}{\text{ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ ਵਿਆਖਿਆ ਦਾ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਚ ਵਾਲਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਇਹ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੀ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਜਾਂ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਕਠਿਨਾਈ ਨਹੀਂ ਹੋਈ। ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਉਪਗ੍ਰਹਿ (satellite) ਛੱਡਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਇਹ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਵਾਰ ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਕਿ ਛੱਡਣ ਸਮੇਂ ਉਸਦੀ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਕੀ ਹਨ, ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭੂਚਾਲ ਦੇ ਕਾਰਣ ਕੋਈ ਬਹੁਮੰਜ਼ਲੀ ਇਮਾਰਤ ਨਸ਼ਟ ਹੋਵੇਗੀ ਜਾ ਨਹੀਂ, ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਭੂਚਾਲ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਾਪਰਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਮੰਨਣ ਲਈ ਤਿਆਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਦੁਹਰਾਓ ਤੋਂ ਬੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੋਣ (ਸਮਸੰਭਾਵੀ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ (ਜਿਹੜੀਆਂ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਮੰਨਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਅਤੇ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ) ਇਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ***ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ (theoretical probability)*** [ਜਿਸਨੂੰ **ਪਰੰਪਰਾਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (classical probability)** ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ] P(E) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ:

$$P(E) = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ)ਹਨ

ਅਸੀਂ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ 'ਸੰਭਾਵਨਾ' ਹੀ ਕਹਾਂਗੇ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1795 ਵਿੱਚ ਪੀਅਰ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ (Pierre- Simon Laplace) ਨੇ ਦਿੱਤੀ ਸੀ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ 16ਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਈ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਇਤਾਲਵੀ ਭੌਤਿਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਜੇ ਕਾਰਡਨ ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ ਲਿਖੀ, ਜਿਸਦਾ ਨਾਮ ਸੀ: **The Book on Games of Chance** ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਬਦੌਲਤ ਹੀ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੇ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦਾ ਧਿਆਨ ਆਪਣੇ ਵੱਲ ਖਿੱਚਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜੇਮਜ਼ ਬਰਨੂਲੀ (1654-1705), ਏ.ਡੀ. ਮੋਇਵਰੇ (1667-1754) ਅਤੇ ਪੀਅਰੇ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ ਅਜਿਹੇ ਲੋਕ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਰਥਕ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਲਾਪਲਾਸ ਦੁਆਰਾ 1812 ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਗਈ ਪੁਸਤਕ *(Theorie Analytiquedes Probabilities)* ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕੱਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਯੋਗਦਾਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹਾਲ ਦੇ ਕੁਲ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਨੇਕ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੈਵਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਵੰਸ਼ ਸੰਬੰਧੀ ਸ਼ਾਸਤਰ (genetics), ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਸਮਾਜ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਭਰਪੂਰ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਪੀਅਰੇ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ (1749 – 1827)

ਆਓ ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਈਏ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (equally likely) ਹੋਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਯੋਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ – ਚਿੱਤ (H) ਅਤੇ ਪਟ (T)। ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ। ਤਦ, E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ (ਭਾਵ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨੁਕੂਲ) ਪਰਿਣਾਮ 1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ :

$$P(E) = P\,(\text{ਚਿੱਤ}) = \frac{E \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}} = \frac{1}{2}$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਜੇਕਰ ਘਟਨਾ F ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$P(F) = P(\text{ਪਟ}) = \frac{1}{2} \quad (\text{ਕਿਉਂ?})$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਕ੍ਰਿਤਕਾ ਬਿਨਾ ਥੈਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਵੇਖੇ, ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ

ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ

(i) ਪੀਲੀ ਹੋਵੇਗੀ? (ii) ਲਾਲ ਹੋਵੇਗੀ? (iii) ਨੀਲੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਕ੍ਰਿਤਕਾ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਬਿਨ੍ਹਾ ਵੇਖੇ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੋਈ ਵੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ 'ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ Y ਹੈ, 'ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ R ਅਤੇ 'ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ B ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3 ਹੈ।

(i) ਘਟਨਾ Y ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 1

ਇਸ ਲਈ $P(Y) = \frac{1}{3}$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, $P(R) = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{1}{3}$

ਟਿੱਪਣੀ :

(1) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਉਹ ਘਟਨਾ ਜਿਸਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹੋਵੇ ***ਮੁੱਢਲੀ ਘਟਨਾ*** *(elementary event)* ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ Y, R ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਮੁੱਢਲੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।

(2) ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(E) + P(F) = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(Y) + P(B) + P(R) = 1$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ **ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੈ। ਇਹ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।**

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ।(i) 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ? (ii) 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਘਟਨਾ E ਹੈ। ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਛੇ ਹਨ, ਇਹ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$P(E) = P(4 \text{ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਓ '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਘਟਨਾ F ਹੈ।

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ = 6 ਹਨ।

ਘਟਨਾ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3 ਅਤੇ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾ E ਅਤੇ F ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ? ਨਹੀਂ, ਇਹ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ 2 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ ਅਤੇ ਘਟਨਾ F ਦੇ 4 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

ਜਿਥੇ ਘਟਨਾ E 'ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ ਅਤੇ ਘਟਨਾ F 'ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦੇ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

ਜਿਥੇ ਘਟਨਾ E '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ F '4 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਘੱਟ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਉਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਇਹੀ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ, ਕੀ ਘਟਨਾ 'F', 'E ਨਹੀਂ' (not E) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰਾਂ ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ $\bar{E}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰਾਂ, P(E) + P(E ਨਹੀਂ) = 1

ਭਾਵ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਘਟਨਾ $\bar{E}$, ਘਟਨਾ E ਦੀ ***ਪੂਰਕ*** *(complement)* ਘਟਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ E ਅਤੇ $\bar{E}$ ਪਰਸਪਰ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਅੱਗੇ ਵੱਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ:

(i) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆ 8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

(ii) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਆਓ (i) ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਈਏ:

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਨਾਲ ਕੇਵਲ ਛੇ ਹੀ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ। ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਾਸੇ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਫਲਕ ਉੱਤੇ 8 ਅੰਕਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 8 ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ ਅਜਿਹੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਨਾਲ, ਸੰਖਿਆ 8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਅਸੰਭਵ *(impossible)* ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(8 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ}) = \frac{0}{6} = 0$

ਭਾਵ ਉਹ ਘਟਨਾ, ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ, ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0 ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ **ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ (impossible event)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ (ii) ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਈਏ:

ਕਿਉਂਕਿ ਪਾਸੇ ਦੀ ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖੀ ਹੈ ਜੋ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਾਸੇ ਦੇ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੋ 6 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$P(E) = P(7 \text{ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ}) = \frac{6}{6} = 1$$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਉਹ ਘਟਨਾ, **ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ** *(sure)* ਹੈ, ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 1 ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ **ਨਿਸ਼ਚਿਤ** *(sure)* ਜਾਂ **ਨਿਰਧਾਰਿਤ** *(certain)* ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਸ਼ (ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ) ਹਮੇਸ਼ਾ ਹਰ (ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ) ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ,

$$0 \le P(E) \le 1$$

ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ, ਤਾਸ਼ (playing cards) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਲਈਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵੇਖੀ ਹੈ? ਇਸਦੇ 52 ਪੱਤੇ (cards) ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ 4 ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 13 ਪੱਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ 4 ਸਮੂਹ ਹੁਕਮ (spades) (♠), ਪਾਨ (hearts) (♥), ਇੱਟ(diamonds) (♦) ਅਤੇ ਚਿੜੀ (clubs) (♣) ਹਨ। ਚਿੜੀ ਅਤੇ ਹੁਕਮ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ

ਪਾਨ ਅਤੇ ਇੱਟ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਪੱਤੇ : ਇੱਕਾ/ਯੱਕਾ (ace), ਬਾਦਸ਼ਾਹ (king), ਬੇਗਮ (queen), ਗੁਲਾਮ (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਦਸ਼ਾਹ, ਬੇਗਮ, ਗੁਲਾਮ ਵਾਲੇ ਪੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਪੱਤੇ (*face cards*) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਗਈ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪੱਤਾ:

(i) ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਗੁੱਟੀ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟਣ ਨਾਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (*equally likely*) ਹੋਣਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ 4 ਇੱਕੇ (ਯੱਕੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਣਾ' ਹੈ।

E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 4

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ F 'ਇੱਕ (ਯੱਕਾ) ਨਹੀਂ' ਹੈ।

ਮੰਨਿਆ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52 − 4 = 48 (ਕਿਉਂ?)

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ F ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ $\bar{E}$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ P(F) ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ: $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦੋ ਖਿਡਾਰੀ ਸੰਗੀਤਾ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ਮਾ ਟੈਨਿਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੈਚ ਖੇਡਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗੀਤਾ ਦੁਆਰਾ ਮੈਚ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.62 ਹੈ। ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ S ਅਤੇ R ਕ੍ਰਮਵਾਰ: ਸੰਗੀਤਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸੰਗੀਤਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = P(S) = 0.62 (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = P(R) = 1 − P(S)

[ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ R ਅਤੇ S ਪੂਰਕ ਹਨ]

= 1 − 0.62 = 0.38

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸਵਿਤਾ ਅਤੇ ਹਮੀਦਾ ਦੋ ਸਹੇਲੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵਾਂ (i) ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋਣ? (ii) ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇ? [ਲੀਪ ਦੇ ਸਾਲ (Leap year) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ]

ਹੱਲ : ਦੋਵਾਂ ਸਹੇਲੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ, ਮੰਨ ਲਓ, ਸਵਿਤਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਾਲ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦੂਸਰੀ ਲੜਕੀ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਵੀ ਸਾਲ ਦੇ 365 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਦਿਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਜੇਕਰ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਵਿਤਾ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $365 - 1 = 364$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਵਿਤਾ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(ਸਵਿਤਾ ਅਤੇ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇ)

$= 1 -$ P (ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਭਿੰਨ ਹੈ)

$= 1 - \frac{364}{365}$ [$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਤੋਂ]

$= \frac{1}{365}$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਵਿੱਚ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 25 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ 15 ਲੜਕੇ ਹਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ ਮੋਨੀਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੁਣਨਾ ਹੈ। ਉਹ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਨਾਮ ਅਲੱਗ ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲਿਖਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਾਰਡ ਇੱਕੋ ਵਰਗੇ ਹੀ ਹਨ। ਫਿਰ ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਹਿਲਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲਿਖਿਆ ਨਾਮ (i) ਲੜਕੀ ਦਾ ਹੈ? (ii) ਲੜਕੇ ਦਾ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਨਾਂ ਦਾ ਕਾਰਡ ਚੁਣਨਾ ਹੈ।

(i) ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 40

ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 25 (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ P (ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੈ) = P(ਲੜਕੀ) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੇ ਦਾ ਨਾਮ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 15 (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ P(ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੈ) = P(ਲੜਕਾ) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ P(ਲੜਕਾ) ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

$$P(\text{ਲੜਕਾ}) = 1 - P(\text{ਲੜਕਾ ਨਹੀਂ}) = 1 - P(\text{ਲੜਕੀ}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ 3 ਨੀਲੇ, 2 ਚਿੱਟੇ ਅਤੇ 4 ਲਾਲ ਬੰਟੇ (marbles) ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਇਹ ਬੰਟਾ

(i) ਚਿੱਟਾ ਹੈ? (ii) ਨੀਲਾ ਹੈ? (iii) ਲਾਲ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਕਿ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਹਿਣ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ (ਸਮਸੰਭਾਵੀ) ਹਨ। ਇਸ ਕਰਕੇ

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 3 + 2 + 4 = 9$ (ਕਿਉਂ?)

ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ W 'ਬੰਟਾ ਸਫੇਦ ਹੈ' ਨੂੰ, ਘਟਨਾ B 'ਬੰਟਾ ਨੀਲਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਅਤੇ ਘਟਨਾ R 'ਬੰਟਾ ਲਾਲ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਘਟਨਾ W ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(W) = \frac{2}{9}$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $P(W) + P(B) + P(R) = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ (ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ₹ 1 ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਸਿੱਕਾ ₹ 2 ਦਾ ਹੈ)। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਘੱਟ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 'ਚਿੱਤ' ਦੇ ਲਈ H ਅਤੇ 'ਪਟ' ਦੇ ਲਈ T ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਜਦ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਸਾਰੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ। ਇਥੇ (H, H) ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ (ਮੰਨ ਲਓ ₹ 1 ਦੇ ਸਿੱਕੇ) ਉੱਤੇ 'ਚਿੱਤ' ਆਏਗਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਿੱਕੇ (₹ 2 ਦੇ ਸਿੱਕੇ) ਉੱਤੇ ਵੀ ਚਿੱਤ ਆਏਗਾ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (H, T) ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਉੱਤੇ 'ਚਿੱਤ' ਆਏਗਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਿੱਕੇ ਉੱਤੇ 'ਪੱਟ' ਆਏਗਾ, ਆਦਿ

ਘਟਨਾ E 'ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਏਗਾ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ (H, H), (H, T) ਅਤੇ

(T, H) ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3

ਇਸ ਲਈ $P(E) = \frac{3}{4}$

ਭਾਵ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਦੁਆਰਾ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ P(E) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ:

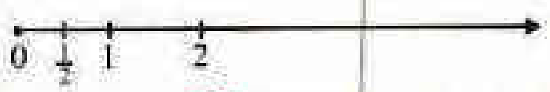
$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{ਕਿਉਂਕਿ } P(\bar{E}) = P(\text{ਕੋਈ ਚਿੱਤ ਨਹੀਂ}) = \frac{1}{4}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹੁਣ ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਹੁਣ ਉਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲਓ।

ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਜਿਹੇ ਹਨ, ਜਿਥੇ ਪਰਿਣਾਮ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਜਾਂ ਆਇਤ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਣਗਿਣਤ (ਅਨੇਕਾਂ) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਇਹ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਅਣਗਿਣਤ (ਅਨੇਕ) ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸੇ ਕਰਕੇ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਪੜ੍ਹੀ ਗਈ (ਸਿਧਾਂਤਕ) ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਥੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਫਿਰ ਹੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਇਸਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10*: ਇੱਕ ਮਿਊਜ਼ੀਕਲ ਕੁਰਸੀ (musical chair) ਖੇਡ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜੀ ਔਰਤ ਸੰਗੀਤ ਵਜਾ ਰਹੀ ਸੀ, ਨੂੰ ਇਹ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕਿ ਉਹ ਸੰਗੀਤ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ 2 ਮਿੰਟ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਦੇ ਵੀ ਸੰਗੀਤ ਬੰਦ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗੀਤ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਅੱਧੇ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?

ਹੱਲ : ਇਥੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ 0 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦਾ 0 ਤੋਂ 2 ਤੱਕ ਦਾ ਭਾਗ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.1)।



ਚਿੱਤਰ 15.1

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

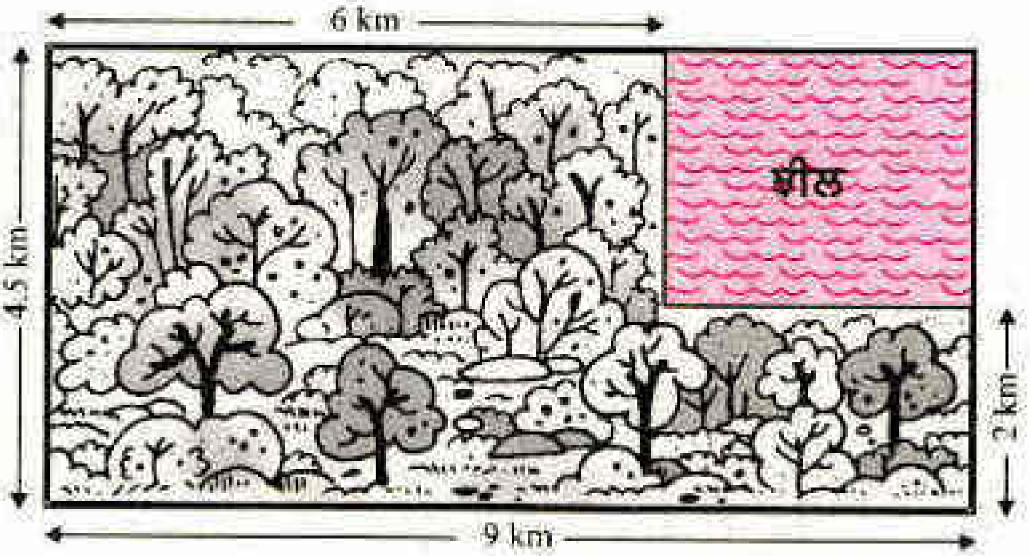
ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਸੰਗੀਤ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪਹਿਲੇ ਅੱਧੇ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ 0 ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਰਕ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ ਦੂਰੀ 2 ਵਿੱਚੋਂ $\frac{1}{2}$ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(E) = \dfrac{\text{ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਦੂਰੀ}}{\text{ਪੂਰੀ ਦੂਰੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮ ਸਥਿਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 10 ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਉਸਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11* : ਇੱਕ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਗੁੰਮ ਹੋਣ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੂਚਨਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚਿੱਤਰ 15.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਡਿੱਗ ਪਿਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 15.2

ਹੱਲ : ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਵੀ ਡਿੱਗਣਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹੈ।

ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਜਿੱਥੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਡਿੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ

$= (4.5 \times 9)\ km^2 = 40.5\ km^2$

ਝੀਲ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਖੇਤਰਫਲ $= (2.5 \times 3)\ km^2 = 7.5\ km^2$

ਇਸ ਕਰਕੇ, P (ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਿਆ ਹੈ) $= \dfrac{7.5}{40.5} = \dfrac{75}{405} = \dfrac{5}{27}$ ਹੈ।

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 100 ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 88 ਠੀਕ ਹਨ ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਥੋੜੀ ਜਿਹੀ ਖਰਾਬੀ ਹੈ ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਾਬੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਪਾਰੀ ਜਿੰਮੀ ਉਹ ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਹੀ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਠੀਕ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਪਾਰੀ ਸੁਜਾਤਾ ਉਹਨਾਂ ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਨਕਾਰਦੀ ਹੈ ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਾਬੀ ਹੈ। ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਮੀਜ਼ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਮੀਜ਼

(i) ਜਿੰਮੀ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਵੇ? (ii) ਸੁਜਾਤਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਵੇ?

ਹੱਲ : 100 ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਦੇ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਮੀਜ਼ ਪੱਖਪਾਤ ਰਹਿਤ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ 100 ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

(i) ਜਿੰਮੀ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ (ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ) ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 88 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਕਮੀਜ਼ ਜਿੰਮੀ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੈ) $= \frac{88}{100} = 0.88$

(ii) ਸੁਜਾਤਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 88 + 8 = 96$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਕਮੀਜ਼ ਸੁਜਾਤਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੈ) $= \frac{96}{100} = 0.96$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

(i) 8 ਹੈ। (ii) 13 ਹੈ। (iii) 12 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ ਲਾਲ ਪਾਸਾ '1' ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1,2,3,4,5,6, ਵਿਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਤਦ ਵੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ '2', '3','4','5', ਜਾਂ '6' ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜੇ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਲੇਟੀ

ਲਾਲ

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ਚਿੱਤਰ 15.3

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੋੜਾ (1, 4) ਜੋੜਾ (4, 1) ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $6 \times 6 = 36$ ਹੈ।

(i) E ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਘਟਨਾ 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) ਅਤੇ (6, 2) ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.3)।

ਭਾਵ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ = 5

ਇਸ ਲਈ $$P(E) = \frac{5}{36}$$

(ii) ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਤੋਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਘਟਨਾ F, 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 13 ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਘਟਨਾ G 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≤ 12 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ:
   (i) ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ + ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = _______ ਹੈ।
   (ii) ਉਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜੋ ਵਾਪਰ ਨਹੀਂ ਸਕਦੀ _______ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ _______ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।
   (iii) ਉਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ _______ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ _______ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।
   (iv) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ _______ ਹੈ।
   (v) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ _______ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ _______ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ? ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਇੱਕ ਡਰਾਈਵਰ ਕਾਰ ਚਲਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਾਰ ਚੱਲਣੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਕਾਰ ਚੱਲਣੀ ਸ਼ੁਰੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

(ii) ਇੱਕ ਖਿਡਾਰੀ ਬਾਸਕਟਬਾਲ ਨੂੰ ਬਾਸਕਟ ਵਿੱਚ ਪਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਬਾਸਕਟ ਵਿੱਚ ਗੇਂਦ ਪਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਪਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iii) ਇੱਕ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ, ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਗਲਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦਾ ਜਨਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੈ।

3. ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਖੇਡ ਨੂੰ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਲੈਣ ਲਈ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਟੀਮ ਪਹਿਲਾਂ ਗੇਂਦ ਲਵੇਗੀ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣਾ ਇੱਕ ਨਿਆਂਸੰਗਤ ਵਿਧੀ ਕਿਉਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. ਜੇਕਰ $P(E) = 0.05$ ਹੈ, ਤਾਂ 'E ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

6. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਨਿੰਬੂ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀਆਂ ਮਿੱਠੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਹਨ। ਮਾਲਿਨੀ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਦੇਖੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕੱਢੀ ਗਈ ਗੋਲੀ

(i) ਸੰਤਰੇ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀ ਹੈ?

(ii) ਨਿੰਬੂ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀ ਹੈ?

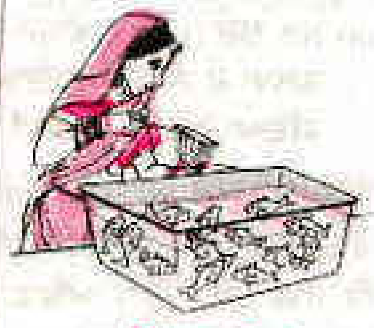
7. ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 2 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਨਾ-ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.992 ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ 2 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਹੋਵੇ?

8. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ ਗੇਂਦ (i) ਲਾਲ ਹੋਵੇ? (ii) ਲਾਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇ?

9. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਬੰਟੇ, 8 ਚਿੱਟੇ ਬੰਟੇ ਅਤੇ 4 ਹਰੇ ਬੰਟੇ ਹਨ। ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਬੰਟਾ
(i) ਲਾਲ ਹੈ? (ii) ਚਿੱਟਾ ਹੈ? (iii) ਹਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ?

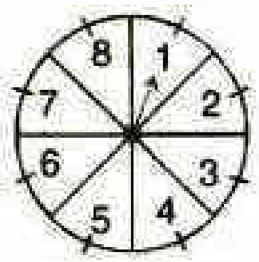
10. ਇੱਕ ਪਿੱਗੀ ਬੈਂਕ (piggy bank) ਵਿੱਚ, 50 ਪੈਸੇ ਦੇ ਸੌ ਸਿੱਕੇ ਹਨ, ₹ 1 ਦੇ ਪੰਜਾਹ ਸਿੱਕੇ ਹਨ, ₹ 2 ਦੇ ਵੀਹ ਸਿੱਕੇ ਅਤੇ ₹ 5 ਦੇ ਦਸ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਿੱਗੀ ਬੈਂਕ ਨੂੰ ਹਿਲਾ ਕੇ ਉਲਟਾ ਕਰਨ ਤੇ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਬਾਹਰ ਡਿੱਗਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡਿੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ (i) 50 ਪੈਸੇ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ (ii) ₹ 5 ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ?

11. ਗੋਪੀ ਆਪਣੇ ਜਲ-ਜੀਵ-ਕੁੰਡ (aquarium) ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਤੋਂ ਮੱਛੀਆਂ ਖਰੀਦਦੀ ਹੈ। ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 5 ਨਰ ਮੱਛੀਆਂ ਅਤੇ 8 ਮਾਦਾ ਮੱਛੀਆਂ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮੱਛੀ ਪੱਖਪਾਤ ਰਹਿਤ ਉਸਨੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.4)। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਮੱਛੀ ਨਰ ਮੱਛੀ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 15.4

12. ਸੰਯੋਗ (chance) ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਤੀਰ ਨੂੰ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਵਿਰਾਮ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵੱਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.5)। ਜੇਕਰ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਤੀਰ ਸੰਕੇਤ
   (i) 8 ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
   (ii) ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
   (iii) 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
   (iv) 9 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?



ਚਿੱਤਰ 15.5

13. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ:
   (i) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (ii) 2 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ (iii) ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ

14. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਫੈਂਟੀ ਗਈ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ:
   (i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ (ii) ਇੱਕ ਤਸਵੀਰ ਵਾਲਾ ਪੱਤਾ
   (iii) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਤਸਵੀਰ ਵਾਲਾ ਪੱਤਾ (iv) ਪਾਨ ਦਾ ਗੁਲਾਮ
   (v) ਹੁਕਮ ਦਾ ਪੱਤਾ (vi) ਇੱਕ ਇੱਟ ਦੀ ਬੇਗਮ

15. ਤਾਸ਼ ਦੇ ਪੰਜ ਪੱਤਿਆਂ-ਇੱਟ ਦਾ ਦਹਿਲਾ, ਗੁਲਾਮ, ਬੇਗਮ, ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਯੱਕੇ-ਨੂੰ ਪਲਟ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
   (i) ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪੱਤਾ ਇੱਕ ਬੇਗਮ ਹੈ?
   (ii) ਜੇਕਰ ਬੇਗਮ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ, ਉਸਨੂੰ ਅਲੱਗ ਰੱਖ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ (a) ਇੱਕ ਯੱਕਾ ਹੈ? (b) ਇੱਕ ਬੇਗਮ ਹੈ?

16. ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ 12 ਖਰਾਬ ਪੈੱਨ 132 ਚੰਗੇ ਪੈੱਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਗਏ ਹਨ। ਕੇਵਲ ਵੇਖ ਕੇ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿ ਕੋਈ ਪੈੱਨ ਖਰਾਬ ਹੈ ਜਾਂ ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚੋਂ, ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਹਰ ਕੱਢੇ ਗਏ ਪੈੱਨ ਦੇ ਠੀਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. (i) 20 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹਨ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬਲਬ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹੋਵੇਗਾ?
   (ii) ਮੰਨ ਲਓ (i) ਵਿੱਚ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਬਲਬਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬਲਬ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ?

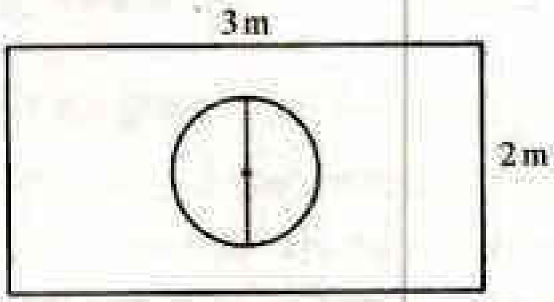
18. ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 90 ਪਲੇਟਾਂ (discs) ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਉੱਤੇ 1 ਤੋਂ 90 ਤੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਲੇਟ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਪਲੇਟ ਉੱਤੇ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇਗੀ: (i) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ii) ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ (iii) 5 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ।

19. ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਪਾਸਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਫਲਕਾਂ ਉੱਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੱਖਰ ਅੰਕਿਤ ਹਨ:

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{A}$

ਇਸ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ (i) A ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ? (ii) D ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ?

20.* ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 15.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅਚਾਨਕ ਸੁੱਟਦੇ ਹੋ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪਾਸਾ 1m ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਡਿੱਗੇਗਾ?



ਚਿੱਤਰ 15.6

21. 144 ਬਾਲ ਪੈੱਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 20 ਬਾਲ ਪੈੱਨ ਖਰਾਬ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਠੀਕ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਉਹੀ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੋਗੇ ਜਿਹੜਾ ਠੀਕ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਖਰਾਬ ਪੈੱਨ ਤੁਸੀਂ ਖਰੀਦਣਾ ਨਹੀਂ ਚਾਹੋਗੇ। ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਇਹਨਾਂ ਪੈੱਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਕੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ
   (i) ਤੁਸੀਂ ਉਹ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦੋਗੇ?
   (ii) ਤੁਸੀਂ ਉਹ ਪੈੱਨ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦੋਗੇ?

22. ਉਦਾਹਰਣ 13 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। (i) ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ:

ਘਟਨਾ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਤਰਕ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਇਥੇ ਕੁੱਲ 11 ਪਰਿਣਾਮ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ਅਤੇ 12 ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{11}$ ਹੈ।' ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰਕ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

23. ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੁਪਏ ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮ ਲਿਖ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨੋ, ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤੇ, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਹਨੀਫ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤ ਜਾਏਗਾ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਹਾਰ ਜਾਏਗਾ। ਹਨੀਫ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਹਾਰ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

24. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ

(i) 5 ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਰ ਨਹੀਂ ਆਏਗਾ? (ii) 5 ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ ਆਏਗਾ?

[**ਸੰਕੇਤ:** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣਾ ਅਤੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣਾ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।]

25. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਤਰਕ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਤਰਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ.

(i) ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ-ਦੋ ਚਿੱਤ, ਦੋ ਪੱਟ ਜਾਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{3}$ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ - ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.2 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਦੋ ਗ੍ਰਾਹਕ ਸ਼ਾਮ ਅਤੇ ਏਕਤਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ (ਮੰਗਲਵਾਰ ਤੋਂ ਸ਼ਨੀਵਾਰ ਤੱਕ)। ਹਰੇਕ ਦੁਆਰਾ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦਿਨ ਜਾਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਉਸ ਦੁਕਾਨ ਤੇ (i) ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਜਾਣਗੇ? (ii) ਕ੍ਰਮਵਾਰ (ਨਾਲ-ਨਾਲ ਵਾਲੇ) ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਣਗੇ? (iii) ਭਿੰਨ ਭਿੰਨ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਣਗੇ?

2. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਉੱਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 2, 3, 3 ਅਤੇ 6 ਲਿਖੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨੋ ਵਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਨੇ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਤੋਂ ਬਾਦ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਭਾਵਿਤ ਮੁੱਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਇਸ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਮੁੱਲ

ਦੂਸਰੀ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਮੁੱਲ	+	1	2	2	3	3	6
	1	2	3	3	4	4	7
	2	3	4	4	5	5	8
	2					5	
	3						
	3			5			9
	6	7	8	8	9	9	12

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ ਜੋੜ

(i) ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ? (ii) 6 ਹੈ? (iii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 6 ਹੈ?

3. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 12 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇਸ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹੋਰ ਪਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਹਿਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਾਲੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 24 ਬੰਟੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਹਰੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਨੀਲੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਬੰਟੇ ਦੇ ਹਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{3}$ ਹੈ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਨੀਲੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਪ੍ਰਯੋਗੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਅਤੇ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ

2. ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ (ਜਾਂ ਪਰੰਪਰਾਗਤ) ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$P(E) = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਯਤਨਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

3. ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਜਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ) ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 1 ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

4. ਇੱਕ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0 ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

5. ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ P(E) ਹੈ ਕਿ

$$0 \le P(E) \le 1$$

6. ਉਹ ਘਟਨਾ ਜਿਸਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹੋਵੇ ਇੱਕ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਲਈ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\bar{E}$ ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। E ਅਤੇ $\bar{E}$ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਾਂ ਅਨੁਭਾਵਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਇਹ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਘਟਨਾ ਘਟੇਗੀ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ, ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਅਤੇ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦੀ ਉਮੀਦ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ A1

A1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਪਸ਼ਟ ਚਿੰਤਨ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰਾਜਨੇਤਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਫ ਸੁਥਰੀ ਸਰਕਾਰ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਵੋਟਾਂ ਦੇਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।' ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਤੁਹਾਡੇ ਅੰਦਰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਪੈਦਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਵੋਟਾਂ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਾਫ ਸੁਥਰੀ ਸਰਕਾਰ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਸਕਦੀ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਸ਼ਤਿਹਾਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਬੁੱਧੀਮਾਨ ਵਿਅਕਤੀ XYZ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬੂਟ ਪਹਿਨਦਾ ਹੈ' ਤਾਂ ਕੰਪਨੀ ਤੁਹਾਡੇ ਅੰਦਰ ਇਹ ਗੱਲ ਪੈਦਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ XYZ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਬੂਟ ਨਹੀਂ ਪਹਿਣਦੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਬੁੱਧੀਮਾਨ ਵਿਅਕਤੀ ਨਹੀਂ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਖੁਦ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਆਮ ਜਨਤਾ ਨੂੰ ਭਰਮ ਵਿੱਚ ਪਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਹੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝੀਏ ਤਾਂ ਅਣਜਾਣੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਜਾਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਫਸ ਸਕਦੇ।

ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਸਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਾਰ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਵਿੱਚ। ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਬੂਤਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਥਨਾ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਵੀ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਗਣਿਤਕ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਸਬੂਤ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਨਾਲ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਤੋਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (axiom) ਤੋਂ ਜਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਤਰਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਨਿਗਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਸਬੂਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਸਾਡਾ ਮੁੱਖ ਸਾਧਣ **ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕਣ** ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਕਥਨ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਗਮਨਿਕ

(deductive) ਤਰਕਣ ਦੇਣ ਦੇ ਕੁਸ਼ਲ ਦੇ ਵੱਲ ਵਧ ਕਾਬਲ ਬਨਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਖੰਡਣ (negative) ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਵੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਮੇਯਾ (ਥਿਊਰਮਾਂ) ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਕੇ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ (ingredients) ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਅਤੇ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਨੇਕ ਹੋਰ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

A1.2 ਗਣਿਤਕ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪੁਨਰ-ਨਿਰੀਖਣ

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ 'ਕਥਨ' ਇਕ ਅਰਥਪੂਰਣ ਵਾਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਨਾਂ ਤਾਂ ਆਦੇਸ਼ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਨਾ ਹੀ ਵਿਸਮਿਕਬੋਧਿਕ (exclamation) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 'ਵਰਲਡ ਕੱਪ ਦੇ ਫਾਈਨਲ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਟੀਮਾਂ ਖੇਡ ਰਹੀਆਂ ਹਨ? ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਜਾਉ ਅਤੇ ਆਪਣਾ ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰੋ' ਇੱਕ ਅਦੇਸ਼ ਹੈ, ਇੱਥ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਕਿੰਨਾ ਹੀ ਵਧੀਆ ਗੋਲ ਹੈ !' ਇੱਕ ਵਿਸਮਿਕ ਬੋਧਿਕ ਹੈ, ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਾਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕੋ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ:

- ਸੱਚ
- ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ)
- ਸ਼ੱਕੀ

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ, **ਕਥਨ ਕੇਵਲ ਉਸ ਵੇਲੇ ਸਵੀਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਜਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ (ਸੱਚ ਨਾਂ) ਝੂਠ ਹੋਵੇ।** ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੱਕੀ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ (Mathematical) ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਆਪਣੇ ਗਿਆਨ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ, ਕਥਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) ਸੂਰਜ ਧਰਤੀ ਦੁਆਲੇ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ।

(ii) ਵਾਹਨ ਦੇ ਚਾਰ ਪਹੀਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਗਤੀ ਲਗਭਗ 3×10^5 km/s ਹੈ।

(iv) ਨਵੰਬਰ ਤੋਂ ਮਾਰਚ ਤੱਕ ਕਲਕੱਤਾ ਦੀ ਸੜਕ ਬੰਦ ਰਹੇਗੀ।

(v) ਸਾਰੇ ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਧਰਤੀ ਸੂਰਜ ਦੁਆਲੇ ਘੁੰਮਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਸ਼ੱਕੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਾਹਨ ਕਿਹੜਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਹਨ 2, 3, 4, 6, 10, ਆਦਿ ਪਹੀਆਂ ਵਾਲਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਸ਼ਕੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਥੇ ਕਿਸ ਸੜਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਨੇ ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਮਰਨਾ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) ਸਾਰੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਕੁਝ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਭੁਜੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਸਾਰੇ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(v) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(vi) ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(vii) ਕਿਸੇ ਦੋ ਪਰਿਮੇਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਅਧਾਰ ਕੋਣ 60 ਦੇ ਹਨ, ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਇਸਦੇ ਵਿਰੁੱਧ (ਉਲਟ) ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ p ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ ਅਤੇ $q = 1$, ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ। (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $3 = \frac{3}{1}$)

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ

p, q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ q, p ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ (ਵੰਡਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ), ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $\frac{3}{2}$)

(vi) ਇਹ ਵਾਕ ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ (ਵਰਗਾ) ਹੈ ਕਿ 'ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(vii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿੱਚ $\frac{r+s}{2}$ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਜੇਕਰ $x<4$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।

(ii) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।

(iii) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਕਿ $x < 4$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲਗਾ ਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ।

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ ਹੋਰ ਤਰਾਂ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ (iii) ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ, ਜਿਥੇ p ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਧਨ ਸਪੂੰਰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.1

1. ਜਦੋਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਕਥਨ ਹਨ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਰੋਚਿਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (ii) ਧਰਤੀ ਤੋਂ ਸੂਰਜ ਦੀ ਦੂਰੀ ਲਗਭਗ 1.5×10^8 km. ਹੈ।
   (iii) ਸਾਰੇ ਮਨੁੱਖ ਬੁੱਢੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।
   (iv) ਉੱਤਰਕਾਸ਼ੀ ਤੋਂ ਹਰਸਿਲ ਤੱਕ ਕੀਤੀ ਗਈ ਯਾਤਰਾ ਥੱਕਾਵਟ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਸੀ।
   (v) ਇਸਤਰੀ ਨੇ ਬਾਇਨੋਕੂਲਰ ਜੋੜੇ (ਦੂਰਬੀਨ) ਨਾਲ ਇੱਕ ਹਾਥੀ ਦੇਖਿਆ।
2. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂੱਠ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਸਾਰੇ ਛੇ ਭੁਜ, ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (ii) ਕੁਝ ਬਹੁਭੁਜ, ਪੰਜ ਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (iv) ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (v) ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
3. ਮੰਨ ਲਉ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ $ab \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) a ਅਤੇ b ਜਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸਿਫਰ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। (ii) a ਅਤੇ b ਲਾਜਮੀ (ਜਰੂਰੀ) ਸਿਫਰ ਨਾ ਹੋਣ
   (iii) ਜਾਂ ਤਾਂ a ਅਤੇ ਜਾਂ b ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ।
4. ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ।
   (i) ਜੇਕਰ $a^2 > b^2$, ਤਾਂ $a > b$
   (ii) ਜੇਕਰ $x^2 = y^2$, ਤਾਂ $x = y$
   (iii) ਜੇਕਰ $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, ਤਾਂ $x = 0$
   (iv) ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

A1.3 ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning)

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ, ਸੱਚ ਮੰਨੇ ਗਏ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਸਿੱਟੇ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਜਾਂ ਅਧਾਰ ਵਾਕ (Hypotheses ਜਾਂ Premises) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਬੀਜਾਪੁਰ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸ਼ਬਾਨਾ ਬੀਜਾਪੁਰ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਸ਼ਬਾਨਾ ਕਿਸ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਇਥੇ ਦੋ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) ਬੀਜਾਪੁਰ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਹੈ। (ii) ਸ਼ਬਾਨਾ ਬੀਜਾਪੁਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਕਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ (deduce) ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸ਼ਬਾਨਾ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

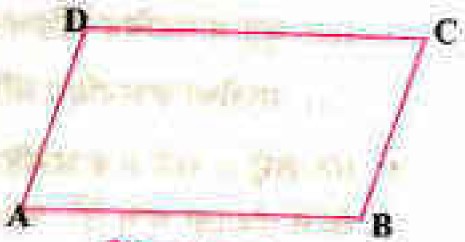
ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਰੌਚਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ। ਜੋ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ ਉਸਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਹੱਲ : ਦੋਵਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $y = -6x + 5$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = 3$ ਹੈ, y ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਦੋਨਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $y = -6(3) + 5 = -13$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ AD = 5 cm, AB = 7 cm (ਚਿੱਤਰ A1.1 ਦੇਖੋ)। DC ਅਤੇ BC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ A1.1

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਜੋ ਇੱਕ ਸਮਾਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ABCD ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ AD = 5 cm, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ BC = 5 cm ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ DC = 7 cm ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਵਿੱਚ ਛੁਪੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਅਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਪੈਂਦੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਓ 19423 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $\sqrt{19423}$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{19423}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰੀ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਫਿਰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) 9 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉਦਾਹਰਣ 9 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਕਿ 19423 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਆਪਣੀ ਤਰਕ (ਦਲੀਲ) ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਥੇ ਇਹ ਗੱਲ ਮਹਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Reasoning) ਸਹੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਗਲਤ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਗਲਤ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਵੀ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.2

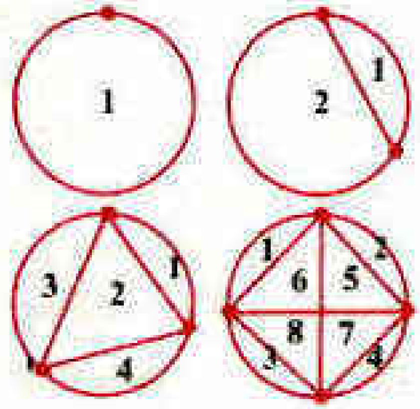
1. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਓ A ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। A ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?
2. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਓ a ਅਤੇ b ਪਰਿਮੇਯ ਹਨ ਤਾਂ ab ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?
3. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ (ਪ੍ਰਸਾਰ) ਅਸਾਂਤ (non-terminating) ਅਤੇ ਅਣਆਵਰਤੀ (non-recurring) ਹੈ ਅਤੇ $\sqrt{17}$ ਇਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $\sqrt{17}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
4. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = x^2 + 6$ ਅਤੇ $x = -1$ ਤਾਂ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?
5. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ $\angle B = 80^\circ$ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਕੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

6. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ PQRS ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

7. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 3721 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\sqrt{3721}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਕਿਉਂ ਜਾਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ?

A1.4 ਕੰਜੈਕਚਰ (conjectures), ਪ੍ਰਮੇਯ, ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀਆਂ

ਚਿੱਤਰ A1.2 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਪਹਿਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹਨ, ਤੀਸਰੇ ਤੇ ਤਿੰਨ ਆਦਿ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ A1.2

ਰੇਖਾਵਾਂ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਿਸਿਆਂ ਵਿੱਚ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਭਾਗ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ) ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਿਆਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:

ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਹਿਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਖੇਤਰ)
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

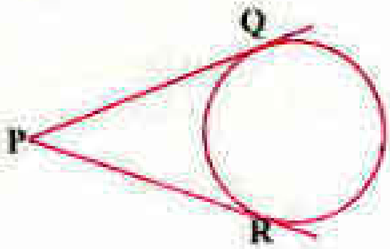
ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਲੋਕ ਇਸ ਨਤੀਜੇ (ਸੂਤਰ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੇ ਹੋਣਗੇ ਜਿਸਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਖੇਤਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਬੁੱਧੀਮਤ ਪੂਰਣ ਅਨੁਮਾਨ ਨੂੰ 'ਕੰਜੈਕਚਰ' ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਹਾਡੇ ਕੰਜੈਕਚਰ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਤੇ 'n ' ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ 2^{n-1} ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅੱਲਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਅਨੁਮਾਨ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $n = 5$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 16 ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 5 ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ n ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ 2^{n-1} ਖੇਤਰ ਹੋਣਗੇ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪੁਛੇ ਕਿ ਤੁਸੀਂ $n = 25$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਯਕੀਨ ਨਾਲ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਤੁਹਾਡੀ ਪ੍ਰਤੀਕ੍ਰਿਆ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਕਿਸੇ (ਕੁਝ) 'n ' ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚ ਧੀਰਜ ਹੈ ਅਤੇ $n = 6$ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋਗੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ $n = 6$ ਲਈ 31 ਖੇਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $n = 7$ ਲਈ 57 ਖੇਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦੇ ਕੰਜੈਕਚਰ ਦਾ $n = 6$ ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ Counter example ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਨੂੰ ਪਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ ਕਿ ਕਿਸੇ **ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਬਹੁਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।**

ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ $n = 1, 2, 3, 4$ ਅਤੇ 5 ਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਵੀ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਤੇ ਜੋਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ (ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਜਾਣੂੰ ਹੋਵੋਗੇ : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ਇਸਦੀ ਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $n = 1, 2, 3$, ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੱਚਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 'n' ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਿਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਸੱਚ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ $n = 6$ ਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੇ। ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਸਬੂਤ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ A1.3 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇਥੇ PQ ਅਤੇ PR ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ (ਥਿਊਰਮ 10.2 ਵਿੱਚ) ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $PQ = PR$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਸੰਗਤ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੁਆਰਾ ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੋਏ ਸੀ।



ਚਿੱਤਰ A1.3

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੈ ਕਿ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਕੀ-ਕੀ ਸੀ? ਇਹ ਕਥਨਾਂ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਤਰਕ/ਦਲੀਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਦੇ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ (sequence) ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਸੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ, ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਜਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਜਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਨੂੰ ਕਥਨ PQ = PR ਨਾਲ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹੋ ਭਾਵ ਉਸ ਕਥਨ ਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।

ਸਬੂਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਹੀ ਵਿਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਅਤੇ ਥਿਊਰਮਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲੇਗੀ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਬੂਤ ਦੀ ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਾਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ (deductive) ਵਿਧੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਥਨ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। **ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।** ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਤਰਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਹੈ [ਭਾਵ ਇੱਕ ਯੋਗ ਤਰਕ ਹੈ] ਤਾਂ ਇਸ ਨਾਲ ਸਹੀ ਸਿੱਟਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਉ x ਅਤੇ y ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ x ਅਤੇ y ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਹਨ।
2.	ਮੰਨ ਲਉ , $x = \frac{m}{n}, n \neq 0$ ਅਤੇ , $y = \frac{p}{q}$ $q \neq 0$ ਜਿਥੇ m, n, p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ।
3.	ਇਸ ਲਈ, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $x + y$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

4.	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $mq + np$ ਅਤੇ nq ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
5.	ਕਿਉਂਕਿ $n \neq 0$ ਅਤੇ $q \neq 0$, ਇਸ ਲਈ $nq \neq 0$.	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
6.	ਇਸ ਲਈ, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਜਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

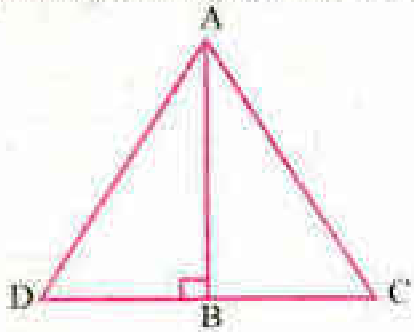
ਉਦਾਹਰਣ 11 : 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $6k + 1$ ਜਾਂ $6k + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਸਪੂੰਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਉ p, 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਸਬੰਧ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਾਂਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
2.	p ਨੂੰ 6 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਦਾ ਰੂਪ $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, ਜਾਂ $6k + 5$ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ।	ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਵਿਭਾਜਨ (ਵੰਡ) ਪ੍ਰਮੇਜਿਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
3.	ਪ੍ਰੰਤੂ $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ ਅਤੇ $6k + 3 = 3(2k + 1)$ ਭਾਵ ਇਹ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।	ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।
4.	ਇਸ ਲਈ p ਲਾਜ਼ਮੀ ਰੂਪ! $6k + 1$ ਜਾਂ $6k + 5$ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਕਲਪਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਸੱਖਣਾਉਣ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (proof by exhaustion) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ A1.1 (ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ) : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A1.4

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਓ ΔABC ਪਰਿਕਲਪਨਾ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।	ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
2.	AB ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ BD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਿ $BD = BC$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ A ਨੂੰ D ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ।	ਇਹ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਵਾਲਾ ਪਗ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਸਾਨੂੰ ਥਿਊਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਕਸਰ (ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ) ਹੋਵੇਗੀ।
3.	ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ΔABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $AD^2 = AB^2 + BD^2$	ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।
4.	ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $BD = BC$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deduction)
5.	ਇਸ ਲਈ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ
6.	ਕਿਉਂਕਿ AC ਅਤੇ AD ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $AC = AD$	ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ

7.	ਹੁਣ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ ਕਿ AC = AD ਅਤੇ ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ BC = BD ਅਤੇ AB ਸਾਂਝਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ SSS ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ।
8.	ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, ਇਸ ਲਈ $\angle ABC = \angle ABD$ ਜੋ ਇਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ	ਪਹਿਲਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਤੱਥ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਲੜੀਬੱਧ ਪਗਾਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਹੈ। ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਪਗ ਪਿਛਲੇ ਪਗਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.9 ਵੀ ਦੇਖੋ)।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ ਪੱਗ ਦੱਸੋ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਗ (ਚਰਣ) ਦਾ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਉ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਵਿੱਚ 6 ਜੋੜ ਦਿਉ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਸਦਾ (ਹਮੇਸ਼ਾਂ) ਹੀ 8 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $p \geq 5$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $p^2 + 2$, ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   [**ਸੰਕੇਤ** : ਉਦਾਹਰਣ 11 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।]
4. ਮੰਨ ਲਉ x ਅਤੇ y ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ xy ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ।
5. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾ ਹਨ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, ਜਿਥੇ q ਇੱਕ ਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ HCF (a, b) = HCF (b, r)
   [**ਸੰਕੇਤ** : ਮੰਨ ਲਉ HCF$(b, r) = h$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b = k_1h$ ਅਤੇ $r = k_2h$, ਜਿਥੇ k_1 ਅਤੇ k_2 ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹੈ।]
6. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.3 ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ (Negation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਨ ਦਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ; ਪ੍ਰੰਤੂ ਚਰਚਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਸੰਕੇਤਾਂ (ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ) ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾ

ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਨਾਮ ਦੇ ਦੇਈਏ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕਥਨ '1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ' ਨੂੰ p ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

p: 1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।

ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਲਿਖ ਲਈਏ

q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।

r: ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।

s: $2 + 2 = 4$.

t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਥਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ **ਮਿਸ਼ਰਿਤ (Compound)** ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਤੋਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੂਲ ਕਥਨ	ਨਵਾਂ ਕਥਨ
p: 1 ਸਤੰਬਰ 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।	$\sim p$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ 1 ਸਿਤੰਬਰ 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।
q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।	$\sim q$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।
r: ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।	$\sim r$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।
s: $2 + 2 = 4$	$\sim s$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ $2 + 2 = 4$
t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।	$\sim t$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹਰ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਕਥਨ ਸੰਗਤ ਪੁਰਾਣੇ ਕਥਨ ਦਾ *ਖੰਡਣ* (negation) ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ ਅਤੇ $\sim t$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਥਨਾਂ p, q, r, s ਅਤੇ t ਦੇ ਖੰਡਣ ਹਨ। ਇਥੇ $\sim p$ ਨੂੰ ਨਹੀਂ p

(not p) ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਥਨ $\sim p$, ਉਸ ਪੁਸ਼ਟੀ (assertion) ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਕਥਨ p ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਆਪਣੀ ਸੁਭਾਵਿਕ ਗੱਲਬਾਤ ਵਿੱਚ $\sim p$ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ '1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਸੀ'। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਨੂੰ ਸਾਵਧਾਨੀ ਵਰਤਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਯੋਗ ਥਾਂ ਤੇ ਕੇਵਲ ਸ਼ਬਦ 'ਨਹੀਂ' ਲਗਾ ਦੇਣ ਨਾਲ ਹੀ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਕਿਰਿਆ 'p' ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਲਾਗੂ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਉਸ ਵੇਲੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਡਾ ਕਥਨ ਸ਼ਬਦ 'ਸਾਰਿਆਂ' ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ $\sim q$: ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਕਥਨ ਦੇ ਵਰਗਾ ਹੈ ਕਿ 'ਕੁਝ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ'। ਆਉ ਹੁਣ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ q ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਨਹੀਂ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ' ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ' ਕਿ ' ਨਹੀਂ ਹਨ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ''। ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ ਲੋਕ ਭੁਲੇਖੇ ਵਿੱਚ ਪੈ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਨਾਲ ਇਹ ਅਰਥ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ (ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ 'ਸਾਰੇ' ਤੇ ਜੋਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ) ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ q ਦਾ ਖੰਡਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ $\sim q$ ਦਾ ਅਰਥ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਕ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇਸਤਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਲਿਖਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਵਧਾਨੀ ਵਰਤਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਿਵੇਂ ਕਰੀਏ ਕਿ ਜੋ ਖੰਡਣ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਹ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਸੌਟੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਅਤੇ $\sim p$ ਇਸਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ। ਤਾਂ $\sim p$ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਦੇ p ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ p ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਥਨਾਂ s ਅਤੇ t ਦੇ ਖੰਡਣ ਇਹ ਹਨ:

$s: 2 + 2 = 4$; ਖੰਡਣ $\sim s: 2 + 2 \neq 4$

t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ, $\sim t$: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\sim(\sim s)$ ਕੀ ਹੈ? ਇਹ $2 + 2 = 4$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ s ਹੈ ਅਤੇ $\sim(\sim t)$ ਕੀ ਹੈ? ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ ਭਾਵ t ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਕਥਨ p ਹੈ ਤਾਂ $\sim(\sim p)$ ਖੁਦ ਕਥਨ ਦੁਬਾਰਾ p ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਖੰਡਣ ਲਿਖੋ:

(i) ਮਾਈਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

(iv) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(v) ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(vi) ਕੁਝ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(vii) ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ $x^2 = -1$

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ "ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀ ਹਨ।"

(iii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਭਾਵ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਭਾਵ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਨਹੀਂ ਹਨ ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ।

(vi) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਹਨ।

(vii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $x^2 = -1$ ਭਾਵ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x^2 = -1$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ **ਕਾਰਜ-ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨਿਯਮ** (working rule) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) ਪਹਿਲਾਂ "ਨਹੀਂ" ਨਾਲ ਕਥਨ ਲਿਖੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸੋਧ (modification) ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 'ਸਾਰਿਆਂ' ਜਾਂ 'ਕੁਝ' ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਥਨਾਂ ਤੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਖੰਡਣ ਲਿਖੋ:

   (i) ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ (mortal) ਹੈ।

   (ii) ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀਆਂ ਹਨ (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਂਵਾਂ ਹਨ।
(v) ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ। (vi) ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਲਸੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(vii) ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
(viii) ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $\sqrt{x} = -1$
(ix) ਸੰਖਿਆ 2, ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ। (x) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕਥਨ ਹਨ। ਦਸੋ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਕਥਨ ਪਹਿਲੇ ਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) ਮੁਮਤਾਜ ਭੁੱਖੀ ਹੈ,
ਮੁਮਤਾਜ ਭੁੱਖੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ,
ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਭੂਰੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਸਾਰੇ ਹਾਥੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਹਨ।
ਇੱਕ ਹਾਥੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੇ ਅੱਗ ਬਝਾਉ ਯੰਤਰ ਲਾਲ ਹਨ,
ਸਾਰੇ ਅੱਗ ਬਝਾਉ ਯੰਤਰ ਲਾਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(v) ਕੁਝ ਆਦਮੀ ਗਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
ਕੁਝ ਆਦਮੀ ਗਾਂ ਹਨ।

A1.6 ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ (ਵਿਲੋਮ)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੀ ਧਾਰਣਾ (notion) ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਵਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ (compound) ਕਥਨ ਦਾ ਭਾਵ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਵੱਧ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਜੁੜ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੈਸੇ ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਬਨਾਉਣ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਕੇਂਦਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਸ਼ਬਦ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ ਵਰਖਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਇਕਲ 'ਤੇ ਜਾਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ।' ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

p: ਵਰਖਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ।

q: ਸਾਇਕਲ ਤੇ ਜਾਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ।

ਪਹਿਲਾਂ ਦਸੇ ਗਏ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ: ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 'p ਤੋਂ ਮਤਲਬ q ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $p \Rightarrow q$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਥਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ ਪਾਣੀ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਕਾਲੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ'। ਇਹ $p \Rightarrow q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ ਪਰਿਕਲਪਨਾ p ਹੈ (ਪਾਣੀ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਕਾਲੀ ਹੈ) ਅਤੇ ਸਿੱਟਾ q ਹੈ (ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ)। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਅਦਲ ਬਦਲ (Interchange) ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਸਾਨੂੰ $q \Rightarrow p$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਟੈਂਕੀ ਜਰੂਰ ਕਾਲੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ $p \Rightarrow q$ ਦਾ **ਉਲਟ** (converse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ **ਉਲਟ** $q \Rightarrow p$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ p ਅਤੇ q ਕਥਨ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਅਤੇ $q \Rightarrow p$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਲਿਖੋ:

(i) ਜੇਕਰ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ 17 ਅਗਸਤ ਨੂੰ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ 17 ਅਗਸਤ ਨੂੰ ਐਤਵਾਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰਾਣੀ ਗੁੱਸੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਚਿਹਰਾ ਲਾਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕੋਲ ਸਿੱਖਿਆ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰੈਜੂਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਵਾਇਰਲ ਸੰਕਰਮਣ (infection) ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਤੇਜ ਬੁਖਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(vi) ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(viii) ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸਾਂਤ (non-terminating) ਅਣ-ਅਵਰਤੀ (non-recurring) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ix) ਜੇਕਰ $x - a$ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ, ਤਾਂ $p(a) = 0$.

ਹੱਲ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਅਸੀਂ p ਅਤੇ q ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ $q \Rightarrow p$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(i) p: ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ q: 17 ਅਗਸਤ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ 17 ਅਗਸਤ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ।

(ii) ਇਹ (i) ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਉੱਪਰ (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਕਥਨ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰਾਣੀ ਦਾ ਚਿਹਰਾ ਲਾਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਗੁਸੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਕੋਲ ਸਿੱਖਿਆ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰੈਜੂਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬੁਖਾਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਾਇਰਲ ਸੰਕਰਮਣ ਹੈ।

(vi) ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਮੁਬੰਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

(viii) ਜੇਕਰ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸਾਂਤ ਅਣ-ਅਵਰਤੀ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ix) ਜੇਕਰ $p(a) = 0$, ਤਾਂ $x - a$ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਿੰਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦਾ ਕੇਵਲ ਉਲਟ ਲਿਖ ਦਿਤਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਲਈਏ। ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੀ ਹੋਵੇ ਉਹ ਭਾਰਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਥੇ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਉਲਟ $q \Rightarrow p$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਉਲਟ ਦੱਸੋ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ।

(i) ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $2n + 1$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ (transversal) ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ $2n + 1$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸੱਚਾ ਨਹੀਂ (ਝੂਠਾ) ਕਥਨ ਹੈ (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $15 = 2(7) + 1$ ਅਤੇ 7 ਟਾਂਕ ਹੈ।)

(ii) 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।' ਇਹ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਵਰਤੀ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iii) ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ'। ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.4 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(iv) 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ (ਥਿਉਰਮ 8.1, ਜਮਾਤ IX)

(v) 'ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ' ਉਲਟ ਹੈ। ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਡੇ ਉਪਰ ਛੱਡ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਲਈ ਕੋਈ ਯੋਗ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਲੱਭੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ) ਲਿਖੋ

(i) ਜੇਕਰ ਟੋਕੀਉ ਵਿੱਚ ਗਰਮੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸ਼ਰਨ ਦੇ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਪਸੀਨਾ (ਮੁੜਕਾ) ਨਿਕਲਣ ਲਗਦਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਸ਼ਾਲਿਨੀ ਭੁੱਖੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਢਿੱਡ ਕੁੜਕੜਾਉਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਯਸ਼ਵੰਤ ਨੂੰ ਵਜ਼ੀਫਾ ਮਿਲਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਿਲ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਪੌਦੇ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਲਗੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ (ਜਿਉਂਦਾ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਜਾਨਵਰ ਇੱਕ ਬਿੱਲੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਪੂਛ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ) ਲਿਖੋ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਵਿਲੋਮ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ:

(i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅਧਾਰ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ (ਬਿਖਮ) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ $x^2 = 1$, ਤਾਂ $x = 1$

(iv) ਜੇਕਰ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(v) ਜੇਕਰ a, b ਅਤੇ c ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $x + y$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

A1.7 ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (Proof by contradiction)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (proof by contradiction) ਨਾਮ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਅਧਿਆਇਆਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਇਸ ਧਾਰਣਾ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਵਾਂਗੇ।

ਅੱਗੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਕੀ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਰੋਧ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਕਥਨ p ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਖੰਡਣ $\sim p$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$p: x=\frac{a}{b}$ ਜਿਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

q: ਸੰਖਿਆ 2 'a' ਅਤੇ 'b' ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾ ਸਕੀਏ ਕਿ q ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ q ਦਾ ਇਹ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ p ਦੇ ਖੰਡਣ ਸੱਚ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੇਕਰ ਇਹ ਯਾਦ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਹ ਘਟਨਾ ਉਸ ਵੇਲੇ ਘਟੀ ਸੀ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਅਧਿਆਇ 1)।

ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ? ਆਉ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਉ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ:

ਸਾਰੀਆ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। A ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਨਾਲ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

- ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਥਨ p ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ (ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p : 'ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ' ਸੱਚ ਹੈ)
- ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਦਾ ਖੰਡਣ ਸੱਚ ਹੈ (ਭਾਵ ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ)
- ਫਿਰ ਅਸੀਂ p ਦੇ ਖੰਡਣ ਦੀ ਸਚਾਈ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਅਨੇਕ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deductions) ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਕਿਉਂਕਿ 'ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨ ' 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ' ਦਾ ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ।)
- ਜੇਕਰ ਇਸ ਨਾਲ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ (contradiction) ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਕਰਕੇ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੋਸ਼ ਪੂਰਣ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਹੈ ਕਿ 'p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਦੇ ਕਾਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਖੰਡਣ ਕਿ 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ' ਸੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਇਸ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲੇ ਸੀ ਕਿ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।)।
- ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੀ ਕਲਪਨਾ ਗਲਤ ਹੈ ਭਾਵ p ਨੂੰ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਹੀ ਹੈ (ਇਸ ਲਈ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ।)

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ (non zero) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ r ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ, $r=\frac{m}{n}$ ਜਿਥੇ m, n ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $m \neq 0, n \neq 0$ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ rx ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	
ਮੰਨ ਲਉ rx ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਉਸ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਮੰਨ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।
ਤਾਂ, $rx=\frac{p}{q}, q \neq 0$, ਜਿਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਇਹ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
ਸਮੀਕਰਣ $rx=\frac{p}{q}, q \neq 0$, ਅਤੇ $r=\frac{m}{n}$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{mq}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	
ਕਿਉਂਕਿ np ਅਤੇ mq ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $mq \neq 0$, ਇਸ ਲਈ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ।
ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ x ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲੱਭ ਰਹੇ ਸੀ।
ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਇਸ ਦੋਸ਼ਪੂਰਣ ਕਲਪਨਾ ਕਿ rx ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ

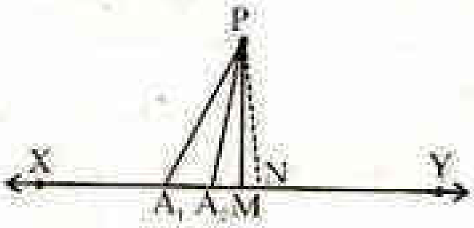
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 11 ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਪਰਿਣਾਮ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤਰਕ ਦੇਣ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $p > 3$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਥੇ n ਇਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਦੇ ਕਥਨ ਦੇ ਖੰਡਣ ਹੈ।
6 ਦੇ ਭਾਗ ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਥਿਉਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਥ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਕਿ p, $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ $p = 6n$ ਜਾਂ $6n + 2$ ਜਾਂ $6n + 3$ ਜਾਂ $6n + 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
ਇਸ ਲਈ p ਜਾਂ ਤਾਂ 2 ਜਾਂ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੈ	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ
ਇਸ ਲਈ p ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ
ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ (contradiction) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p ਅਭਾਜ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਇਹੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।
ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ(contradiction)ਇਸ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂ ਕਿ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲੇ ਸੀ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $p > 3$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।	
ਸਿੱਟੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ।	ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਮੇਯ A1.2 : *ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਤੇ ਜੋ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ :



ਚਿੱਤਰ A1.5

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿਪਣੀ
ਮੰਨ ਲਉ XY ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਹੈ, P ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਜੋ XY ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ PM, PA_1, PA_2, . . . ਆਦਿ, ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਰੇਖਾ XY ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੱਕ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ PM ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.5 ਦੇਖੋ)	ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ PM, PA_1, PA_2, . . ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ XY ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।
ਮੰਨ ਲਉ PM, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ।
ਰੇਖਾ XY ਤੇ PN ਲੰਬ ਖਿਚੋ ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ A1.5 ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਦਾਰ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।	ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ PM, PN, PA_1, PA_2, . . ਆਦਿ ਵਿੱਚ PN ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $PN < PM$	ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਰਣ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗੁਣ।
ਇਹ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ PM ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਇਹ ਹੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।
ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾਖੰਡ PM, XY ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.6

1. ਮੰਨ ਲਓ $a+b=c+d$, ਅਤੇ $a<c$, ਤਾਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $b>d$

2. ਮੰਨ ਲਓ r ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $r+x$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ a^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ a ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   [**ਸੰਕੇਤ :** ਮੰਨ ਲਓ a ਜਿਸਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ ਇਹ $2n+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਗੇ ਵਧੋ।]

4. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ a ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ a ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ।

5. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ n ਦਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਜਿਸਦੇ ਲਈ 6^n ਦਾ ਅਖੀਰਲਾ ਅੰਕ ਜ਼ਿਫਰ ਹੋਵੇ।

6. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਟ ਨਹੀਂ ਸਕਦੀਆ ਹਨ।

A1.8 ਸਾਰ

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਸ਼ (ingredients) ਅਤੇ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਗਏ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਕਲਪ।
2. ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ।
3. ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ)।
4. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ Mathematical Modelling A2

A2.1 ਭੂਮਿਕਾ

- ਇੱਕ ਬਾਲਗ ਮਨੁੱਖੀ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ 1,50,000 ਕਿ.ਮੀ. ਲੰਬੀਆਂ ਧਮਨੀਆਂ ਅਤੇ ਸ਼ਿਰਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਖੂਨ ਚਲਦਾ ਹੈ।
- ਮਨੁੱਖ ਦਾ ਦਿਲ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ 60 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਤੋਂ 6 ਲਿਟਰ ਤੱਕ ਖੂਨ ਪੰਪ ਕਰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।
- ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਲਗਭੱਗ 6000° C ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕੇ ਹੈਰਾਨੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸਾਡੇ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਇਹਨਾਂ ਸਿੱਟਿਆ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰ ਸਕੇ ਹਨ? ਕੀ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕੁਝ ਬਾਲਗਾਂ ਦੇ ਮ੍ਰਿਤਕ ਸਰੀਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਧਮਨੀਆਂ ਅਤੇ ਸ਼ਿਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਾਪੀ ਹੈ? ਕੀ ਦਿਲ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸੈਕਿੰਡ ਪੰਪ ਕੀਤੇ ਗਏ ਖੂਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਰੀਰ ਤੋਂ ਖੂਨ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਹੈ? ਕੀ ਸੂਰਜ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਨਾਲ ਥਰਮਾਮੀਟਰ ਲੈ ਕੇ ਸੂਰਜ ਤੱਕ ਦੀ ਯਾਤਰਾ ਕੀਤੀ ਹੈ? ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ **ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ** (Mathematical Modelling) ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਕਿਸੇ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਵਿਵਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਤੁੱਲ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰ ਦੇਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਅਸਲ ਜਗਤ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਅਰਥਪੂਰਣ ਹੈ, ਜੋ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ (Validating) ਦਾ ਇੱਕ ਪਗ ਹੈ। ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਜਿਥੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ:

(i) ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਨਦੀ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਜਿਥੇ ਪਹੁੰਚਿਆ ਨਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

(ii) ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਗ੍ਰਹਿਆਂ ਦੇ ਭਾਰ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(iii) ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਗ੍ਰਹਿ ਦੀ ਵਿੱਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(iv) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਮਾਨਸੂਨ ਆਉਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(v) ਸਟਾਕ ਮਾਰਕੀਟ ਦੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ (Trend) ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(vi) ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਅੰਦਾਜਨ ਖੂਨ (ਲਹੂ) ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(vii) 10 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ (ਨਗਰ) ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(viii) ਕਿਸੇ ਦਰੱਖਤ ਦੀਆਂ ਪੱਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਾਰੇ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(ix) ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੇ ਵਾਯੂਮੰਡਲ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਕਾ ਦਾ ppm ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(x) ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(xi) ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੀ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਦੀ ਫਿਰ ਤੋਂ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਸ ਪਾਸ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲਵਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਪਗਾਂ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਵਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.4 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਾਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਥੇ ਇਹ ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਸਾਡਾ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਉਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਗਰੂਕ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਅਸਲ ਜਿੰਦਗੀ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁਝ ਹੋਰ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਣਗੇ।

A2.2 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਪਗ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਕੁਝ ਸੂਖਮ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁੱਖ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਪਗ 1 (ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ) ਅਸਲ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਮਸਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿੰਨਾ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਕੁਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਾਰਕਾਂ (factors) ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਬੰਧ ਯੋਗ ਬਣਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਇੱਕ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਹੈ। ਇਥੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਮੱਛੀ ਨੂੰ ਫੜ ਕੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ (sample) ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਝੀਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਗ 2 (ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ ਅਤੇ ਸੂਤਰੀਕਰਣ) (Mathematical description and formulation): ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਗਣਿਤਿਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰੋ। ਲੱਛਣਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਦੀ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਇਹ ਹਨ:

- ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ
- ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (inequalities) ਲਿਖੋ
- ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠੇ ਕਰੋ
- ਆਲੇਖ (ਗ੍ਰਾਫ) ਬਣਾਉ
- ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ (probabilities) ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਲੈ ਕੇ ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਅਸੀਂ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਈਆਂ ਗਈਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨੀਆਂ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣ ਲਈ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਦੁਬਾਰਾ ਝੀਲ ਵਿੱਚੋਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਮੂਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਨਵੇਂ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲੱਗੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਹਨ। ਫਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਲਈ, ਆਉ ਝੀਲ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ

20 ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਲਈਏ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਪਰ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲਗਾਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਛੱਡ ਦੇਈਏ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਉਹ ਝੀਲ ਦੀ ਬਾਕੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਜਾਣ। ਫਿਰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਮੂਨਾ (ਮੰਨ ਲਊ 50 ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਨਮੂਨਾ) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਨਵੇਂ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੋ ਨਮੂਨਾ ਅਸੀਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਉਹ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਹੈ।

ਪਗ 3 (ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨਾ): ਫਿਰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸਰਲ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਊ ਪਗ 2 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ 5 ਮੱਛੀਆਂ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ $\frac{5}{50}$ ਭਾਵ $\frac{1}{10}$ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਜਨਸੰਖਿਆ (ਗਿਣਤੀ) ਦਾ $\frac{1}{10} = 20$.

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਜਨਸੰਖਿਆ (ਗਿਣਤੀ) $= 20 \times 10 = 200$.

ਪਗ 4 (ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ): ਪਿਛਲੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕੀਤੀ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਗ 3 ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ 200 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ।

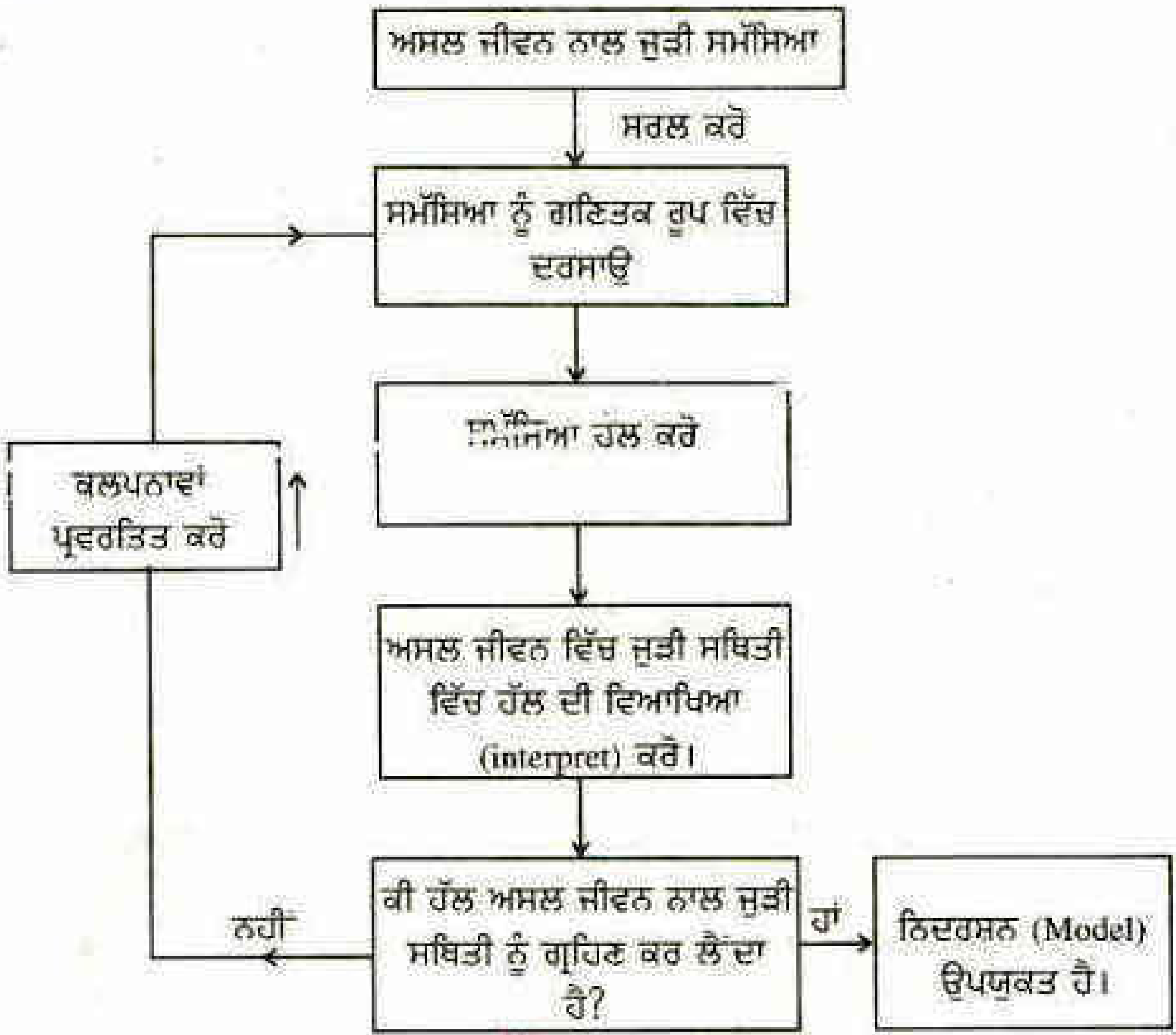
ਪਗ 5 ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ (Validating the model) : ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮ ਸਾਰਥਿਕ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਸਾਰਥਿਕ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (model) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਨਵੀਂ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਦੇ ਕਦੇ ਸਰਲੀਕਰਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਗਣਿਤਕ ਬਿਉਰਾ ਦੇਂਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪਹਿਲੂਆਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਂਝੇ ਰਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਅਸਲੀਅਤ ਤੋਂ ਹੱਟ ਕੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਨਹੀਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸੀ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਬਣਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਗ 3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਦਾਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ

ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਗ 2 ਅਤੇ 3 ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਉਤੱਮ ਅੰਦਾਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਨਾਲ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉੱਤਮ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਕਾਰਜ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਚਿੱਤਰ A2.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A2.1

ਹੱਲ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਬਣਾਈ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਦਰਸ਼ਕ ਸਰਲੀਕਰਣ ਅਤੇ ਸ਼ੁਧੱਤਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਤੁਲਨ ਬਣਾ ਕੇ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਲੱਗਭੱਗ ਅਸਲੀਅਤ ਦੇ ਇੰਨੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੋਣ ਕਿ ਕੁਝ ਪ੍ਰਗਤੀ ਹੋ ਸਕੇ। ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਤਮ ਪਰਿਣਾਮ ਉਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ਕਿ ਅੱਗੇ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਆਮ ਸ਼ੁੱਧਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਦੁਆਰਾ

ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨਾਲ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਪੂਰਨ (Perfect) ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਕੁਝ ਉੱਤਮ ਜਾਂ ਕੁਝ ਇਸ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.1

1. *ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।*

   ਤੇਹਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਲਿਉਨਾਰਡ ਫਿਬੋਨਸੀ (Leonardo Fibonacci) *ਨੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਕਿ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਖਰਗੋਸ਼ ਹੋ ਜਾਣਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਇਥੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਖਰਗੋਸ਼ ਹਰ ਮਹੀਨੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਰਗੋਸ਼ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਆਪਣਾ ਪਹਿਲਾ ਬੱਚਾ ਦੋ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮਹੀਨਾ ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨਾ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਪਿਛਲੇ ਦੋ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਮਹੀਨਾ	ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ਠੀਕ 16 ਮਹੀਨਿਆਂ ਬਾਦ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਲੱਗਭੱਗ 1600 ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਪਗਾਂ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਥਨ ਲਿਖੋ।

A2.3 ਕੁਝ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 **(ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣਾ)**: ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੀ ਅਧਿਆਪਿਕਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਖੇਡ ਦੀ ਚੁਣੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੇਗੀ। ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੇ ਜਾਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਣ 'ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਅੰਕ ਮਿਲਣਗੇ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਹੋਣ ਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋ ਅੰਕ ਕੱਟੇ ਜਾਣਗੇ। ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਅਨੁਮਾਨ ਹੋਣਗੀਆਂ?

ਹੱਲ:

ਪਗ 1 **(ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ)** : ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਉਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 2 **(ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ) (Mathematical description)** : ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਭਵ ਜੋੜਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲ) ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ 36 ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ 'ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ 'ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 3 **(ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ)**: ਉੱਪਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ਅਤੇ 12 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮੰਨ

ਕੇ ਕਿ ਸਾਰੇ 36 ਜੋੜੇ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ (equally likely) ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਅਸੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ਇੱਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ 7 ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{6}$ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਪਗ 4 **(ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ)** (Interpreting the solution) ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜ 7 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਸੱਤ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ (ਅੰਦਾਜਾ) ਵਾਰ ਵਾਰ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 5 **(ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ)** (Validating the model) ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਕਈ ਵਾਰ ਸੁੱਟ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ। ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਾਲ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਾਸੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਇੱਕ ਪਾਸੜ (biased) ਹੋਣਗੇ। ਫਿਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਇੱਕ ਪਾਸੜ (biased) ਹਨ।

ਅਗਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਪਿਛੋਕੜ (background) ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਲੋਕਾਂ ਦਾ ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਨੁਭਵ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪੈਸੇ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਸੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਰੋਜਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਜਰੂਰੀ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਜਾਂ ਅਰਾਮ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪੈਸਿਆਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਕੂਟਰ, ਫਰਿਜ, ਟੈਲੀਵੀਜਨ, ਕਾਰ ਆਦਿ ਵਰਗੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਪੂੰਜੀ ਵਾਲੇ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਉਪਾਰੀਆਂ ਨੇ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਨਾਲ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਚਲਾਈ ਹੈ।

ਕਦੇ ਕਦੇ ਇਹਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਲੁਭਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ(ਅੰਤਰਗਤ) ਵਸਤੂ ਖਰੀਦਣ ਸਮੇਂ ਉਸਨੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ (ਹਿੱਸੇ) ਦਾ ਹੀ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਮਹੀਨਾਵਾਰ, ਤਿਮਾਹੀ, ਛਿਮਾਹੀ ਜਾਂ ਸਾਲਾਨਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਹਾਂ, ਇੱਕ ਗੱਲ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ ਖਰੀਦਦਾਰ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ

ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਅਦ ਦੀਆਂ ਤਰੀਕਾਂ ਵਿੱਚ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਮੁਲਤਵੀ ਭੁਗਤਾਨ (deferred payment) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਵਿਕਰੇਤਾ ਕੁਝ ਵਿਆਜ ਵਸੂਲ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝਣ ਨਾਲ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝ ਲਈਏ।

ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੀ ਨਗਦ ਕੀਮਤ ਉਹ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਗ੍ਰਾਹਕ ਨੂੰ ਵਸਤੂ ਖਰੀਦਣ ਸਮੇਂ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਜੇਕਰ ਭੁਗਤਾਨ ਯੋਜਨਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬਾਕੀ ਧਨਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪੂਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਦਰ-ਅੰਦਰ ਹੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਕਾਇਆ ਭੁਗਤਾਨ (ਮੁਲਤਵੀ ਭੁਗਤਾਨ) 'ਤੇ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੁਰਾਣੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਰਜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਈ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਚੰਗਾ ਨਹੀਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਤੱਕ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਰਨਾ ਮਨਾਹੀ ਸੀ। ਵਿਆਜ ਦੇ ਭੁਗਤਾਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਾਨੂੰਨ ਤੋਂ ਬਚਣ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਸੀ ਕਿ ਕਰਜਾ ਇੱਕ ਮੁਦਰਾ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਅਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਦੂਸਰੀ ਮੁਦਰਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ ਵਿਆਜ ਵਿਨਿਯਮ ਦਰ ਲੁੱਕ ਜਾਂਦਾ ਸੀ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧਿਤ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਸਮੱਸਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਜੂਹੀ ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਸਦੇ ਲਈ ਉਹ ਬਾਜ਼ਾਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੇਖਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜੋ ਸਾਇਕਲ ਉਹ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਸਦੀ ਕੀਮਤ ₹1800 ਹੈ। ਜੂਹੀ ਕੋਲ ₹600 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਨੂੰ ਇਹ ਦਸੱਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਸ ਸਮੇਂ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦ ਸਕੇ। ਥੋੜਾ ਬਹੁਤਾ ਹਿਸਾਬ ਲਗਾਉਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਉਹ ਜੂਹੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ₹ 600 ਨਗਦ ਦੇ ਕੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦੀਆਂ ₹ 610 ਦੀ ਦੋ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਦੇ ਕੇ ਉਹ ਸਾਈਕਲ ਖਰੀਦ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੂਹੀ ਦੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਬਚੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਕਿਸਤ ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਵੇ ਜਾਂ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈ ਕੇ ਜੋ ਕਿ 10% ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਪਲਬਧ ਹੈ, ਨਗਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰ ਦੇਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਆਰਥਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਨਾਲ ਕਿਹੜਾ ਵਿਕਲਪ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 (ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ): ਜੂਹੀ ਨੇ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਕਲਪ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਵੇ ਜਾਂ ਨਾ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਵਿਆਜ ਦਰਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋ ਜਾਵੇ, ਇੱਕ ਤਾਂ ਉਹ ਜੋ ਕਿ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਉਹ ਜੋ ਵਿਆਜ ਬੈਂਕ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਭਾਵ 10%)।

ਪਗ 2 **ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ (Mathematical description) :** ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਜਾਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਲਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਨੂੰ ਦੇਖਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ ਕਿਉਂਕਿ ਪੂਰੀ ਧਨਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਦਰ-ਅੰਦਰ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਹੀ ਦੇਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਇਕਲ ਦੀ ਨਗਦ ਕੀਮਤ = ₹ 1800

ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ = ₹ 600

ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਕੀਮਤ ਜਿਸਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ਮੰਨ ਲਉ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ r % ਹੈ।

ਹਰ ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤ ਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ = ₹ 610

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਿਆਜ = ₹1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

ਕਿਉਂਕਿ ਜੂਹੀ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ₹1200 ਆਪਣੇ ਕੋਲ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ = ₹ 1200

ਦੂਸਰੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

ਦੂਸਰੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ ਦੀ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 590 + ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਵਿਆਜ ₹ 20 = ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤ ₹ 610 = ਦੂਸਰੀ ਕਿਸ਼ਤ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੂਲਧਨ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

ਹੁਣ
$$\text{ਵਿਆਜ} = ₹\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \qquad (2)$$

ਪਗ 3: **(ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨਾ) :** (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

ਜਾਂ
$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਪਗ 4: **(ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ) (Interpreting the solution) :** ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਲਗਾਏ ਗਏ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ = 13.14 %.

ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਵਿਆਜ ਦਰ = 10%

ਇਸ ਲਈ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈਣਾ ਵੱਧ ਪਸੰਦ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਆਰਥਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਹ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੈ।

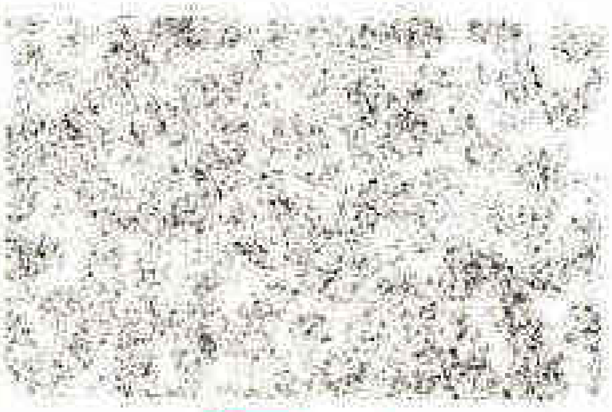
ਪਗ 5 **(ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ) (Validating the model)** ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪਗ ਦਾ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਟੈਂਪ ਪੇਪਰ ਦੀ ਲਾਗਤ ਵਰਗੀਆਂ ਉਪਚਾਰਿਕਤਾਵਾਂ ਨਿਭਾਉਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਵਿਆਜ ਦਰ, ਜੇਕਰ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਣੀ ਰਾਇ ਬਦਲ ਵੀ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਹੁਣ ਵੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਦਾ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਆਪਣੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ ਵਿੱਤੀ ਬਾਜ਼ਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸ਼ਤ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਅਲਗ-ਅਲਗ ਵਿਆਜ ਦਰ ਨਿਗਮਿਤ (incorporated) ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.2

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹਰ ਇਕ ਸਮਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਵਸਥਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

1. ਇੱਕ ਆਰਨਿਥਉਲੋਜਿਸਟ (ornithologist) ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਤੋਤਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਨੂੰ ਫੜਨ ਲਈ ਉਹ ਜਾਲ ਵਿਛਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ 32 ਤੋਤੇ ਫੜ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਉਹ ਛੱਲੇ ਪਾ ਕੇ ਅਜਾਦ ਛੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਅਗਲੇ ਹਫਤੇ ਉਹ 40 ਤੋਤਿਆਂ ਲਈ ਜਾਲ ਵਿਛਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 8 ਛੱਲੇ ਵਾਲੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (i) ਉਸਦੀ ਦੂਸਰੀ ਪਕੜ ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਭਾਗ ਛੱਲੇ ਵਾਲਾ ਹੈ?
   (ii) ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਤੋਤਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਦਾਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਜੰਗਲ ਦੇ ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ ਨਾਲ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਫੋਟੋ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਵਾਤਾਵਰਣ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ (ਹਿੱਸੇ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਰਸਤੇ 'ਤੇ ਦੱਰਖਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A2.2

3. ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਜਾਂ ਤਾਂ ₹ 24000 ਨਗਦ ਦੇ ਕੇ ਜਾਂ ₹ 8000 ਨਗਦ ਅਤੇ ₹ 2800 ਦੀਆਂ ਛੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਦੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਕੇ ਖਰੀਦਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਅਲੀ ਬਾਜ਼ਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸ ਕੋਲ ₹ 8000 ਹਨ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਉਸ ਕੋਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਕ ਵਿਕਲਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਟੀ.ਵੀ. ਖਰੀਦੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਵਿਕਲਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਿੱਤੀ ਸੁਸਾਇਟੀ ਤੋਂ ਕਰਜ਼ਾ ਲੈ ਕੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਕੇ ਟੀ. ਵੀ. ਖਰੀਦੇ। ਸੁਸਾਇਟੀ 18% ਦੀ ਸਲਾਨਾ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ ਲਗਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਲੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹੜਾ ਵਿਕਲਪ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੈ?

A2.4 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਕਿਉਂ ਹੈ?

ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਸ਼ਾ (interdisciplinary) ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵਿਸ਼ਾ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਮਾਹਿਰ ਵਰਤਮਾਨ ਉਤਪਾਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਲਿਆਉਣ, ਉੱਤਮ ਉਤਪਾਦ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਜਾਂ ਕੁਝ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਸਹਿਯੋਗ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵੈਸੇ ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਾਰਣ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਕਾਰਨਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

- *ਸਮਝਦਾਰੀ ਵਧਾਉਣਾ :* ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੋਵੇ ਜੋ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਤੰਤਰ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਵਿਵਹਾਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (model) ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਤੰਤਰ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੰਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਕ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹਨ ਅਤੇ ਤੰਤਰ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਹਿਲੂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।
- *ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਜਾਂ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਜਾਂ ਅਨੁਕਰਣ ਕਰਨਾ :* ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੇ ਤੰਤਰ ਦਾ ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਕੀ ਮਹੱਤਵ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਤੰਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਖਰਚੀਲਾ, ਅਵਿਹਾਰਕ ਜਾਂ ਅਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮੌਸਮ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਦੇ ਲਈ, ਮਨੁੱਖ ਵਿੱਚ ਦਵਾਈ-ਦਸ਼ਤਾ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ, ਇੱਕ ਨਿਊਕਲੀਅਰ ਰਿਐਕਟਰ ਦਾ ਡਿਜ਼ਾਇਨ (ਨਮੂਨਾ) ਪਤਾ ਕਰਨ, ਆਦਿ-ਆਦਿ।

ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਗਠਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਭਾਵੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਨੂੰ ਨਿਗਮਿਤ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ:

- ਬਜ਼ਾਰੀ ਵਿਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਮੰਗ ਦੇ ਵਿਸ਼ਵਾਸਯੋਗ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਵਿਕਰੀ ਸੰਬੰਧੀ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

- ਸਕੂਲ ਬੋਰਡ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜ਼ਿਲ੍ਹਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਕੂਲ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਰਹੇ ਵਾਧੇ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਕਿ ਕਿੱਥੇ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਨਵੇਂ ਸਕੂਲ ਖੋਲੇ ਜਾ ਸਕਣ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਭਵਿੱਖ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਵਾਉਣ ਵਾਲੇ ਪਿਛਲੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਤਾਂ ਉਸ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਇਸਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰ ਸਕਣ। ਫਿਰ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੂਲ ਭੂਤ ਰਣਨੀਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿਆਦਾਤਰ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇਸ ਕਲਪਨਾ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਰਹੇਗਾ।

- *ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ :* ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਵੱਡੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਜੰਗਲ ਵਿੱਚ ਰੁੱਖਾਂ, ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਆਦਿ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਉਦਾਹਰਣ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਚੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲੈਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪਾਰਟੀਆਂ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਪਾਰਟੀ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾ ਦੇ ਚੋਣ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਲੋਕ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪਾਰਟੀ ਨੂੰ ਵੋਟ ਪਾਉਣਗੇ। ਆਪਣੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਪਣਾ ਚੋਣ ਅਭਿਆਨ ਦੀ ਰਣਨੀਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਨਿਰਣਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪਾਰਟੀ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੀਟਾਂ ਮਿਲਣਗੀਆਂ ਇਸਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਰਗਮ ਮਤਅਨੁਮਾਨ (exit polls) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.3

1. ਪਿਛਲੇ ਪੰਜ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ ਦਸਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੇ ਬੋਰਡ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਔਸਤ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉ।

A2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਬਿਉਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

2. ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Modelling) ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗ ਲਾਗੂ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ: ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ, ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਵਿਆਖਿਆ (interpret) ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਤਿ ਮਹੱਤਵਪੂਣ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ (Validating the model)
3. ਕੁਝ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨਾ।
4. ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਮਹੱਤਵ।

ਉੱਤਰ/ਸੰਕੇਤ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
2. ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q$, $6q+1$, $6q+2$, $6q+3$, $6q+4$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
3. 8 ਸਤੰਭ
5. ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $9q$, $9q+1$, $9q+2$, $9q+3$, . . . , ਜਾਂ $9q+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) ਲ.ਸ.ਵ. = 182; ਮ.ਸ.ਵ. = 13 (ii) ਲ.ਸ.ਵ. = 23460; ਮ.ਸ.ਵ. = 2 (iii) ਲ.ਸ.ਵ. = 3024; ਮ.ਸ.ਵ. = 6
3. (i) ਲ.ਸ.ਵ. = 420; ਮ.ਸ.ਵ. = 3 (ii) ਲ.ਸ.ਵ. = 11339; ਮ.ਸ.ਵ. = 1 (iii) ਲ.ਸ.ਵ. = 1800; ਮ.ਸ.ਵ. = 1
4. 22338
7. 36 ਮਿੰਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. (i) ਸ਼ਾਂਤ (ii) ਸ਼ਾਂਤ
   (iii) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (iv) ਸ਼ਾਂਤ
   (v) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (vi) ਸ਼ਾਂਤ
   (vii) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (viii) ਸ਼ਾਂਤ
   (ix) ਸ਼ਾਂਤ (x) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ
2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
   (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7
3. (i) ਪਰਿਮੇਯ; q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਜਾਂ 5 ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਹੋਣਗੇ।
   (ii) ਅਪਰਿਮੇਯ
   (iii) ਪਰਿਮੇਯ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਜਾਂ 5 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

1. (i) ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ (ਮੂਲ) ਨਹੀਂ (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.3

1. (i) ਭਾਗਫਲ $= x - 3$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= 7x - 9$

(ii) ਭਾਗਫਲ $= x^2 + x - 3$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= 8$

(iii) ਭਾਗਫਲ $= -x^2 - 2$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= -5x + 10$

2. (i) ਹਾਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਨਹੀਂ **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

(i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ ਅਤੇ $a = -5$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.1

1. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $x - 7y + 42 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

2. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹਨ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ (ਗ੍ਰਾਫ) ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।

3. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੇਬ ਅਤੇ ਅੰਗੂਰ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁ: ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ: ਗ੍ਰਾਮ) ਹਨ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾ ਦੋਹਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.2

1. (i) ਰੇਖੀ ਸਮੀਰਕਣਾਂ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ:

$x + y = 10$; $x - y = 4$, ਜਿੱਥੇ x ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ y ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ (ਆਲੇਖ) ਖਿਚੋ:

ਲੜਕੀਆਂ = 7, ਲੜਕੇ = 3.

(ii) ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ:

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਪੈਂਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਲਮ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਹਨ।

ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ (ਆਲੇਖ) ਖਿਚੋ:

ਇੱਕ ਪੈਂਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ = 3 ਰੁ: , ਇੱਕ ਕਲਮ ਦਾ ਮੁੱਲ = 5 ਰੁ:

2. (i) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। (ii) ਸੰਪਾਤੀ (iii) ਸਮਾਂਤਰ

3. (i) ਸੰਗਤ (ii) ਅਸੰਗਤ (iii) ਸੰਗਤ

(iv) ਸੰਗਤ (v) ਸੰਗਤ

4. (i) ਸੰਗਤ (ii) ਅਸੰਗਤ (iii) ਸੰਗਤ (iv) ਅਸੰਗਤ

ਉਪਰੋਕਤ (i) ਦਾ ਹੱਲ, $y = 5 - x$ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ x ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ (iii) ਦਾ ਹੱਲ $x = 2$, $y = 2$ ਹੈ। ਭਾਵ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

5. ਲੰਬਾਈ = 20 m ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ = 16 m

6. ਤਿੰਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਲਈ ਇਕ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹੱਲ ਹੈ :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ $(-1, 0)$, $(4, 0)$ ਅਤੇ $(2, 3)$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.3

1. (i) $x = 9$, $y = 5$ (ii) $s = 9$, $t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

ਇੱਥੇ x ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

(iv) $x = 2$, $y = 3$ (v) $x = 0$, $y = 0$ (vi) $x = 2$, $y = 3$

2. $x = -2$, $y = 5$; $m = -1$.

3. (i) $x - y = 26$, $x = 3y$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y $(x > y)$ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ; $x = 39$, $y = 13$.

(ii) $x - y = 18$, $x + y = 180$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਅੰਸ਼ਾਂ (degree) ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਹੈ; $x = 99$, $y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹਨ; $x = 500$, $y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$, ਜਿਥੇ x (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਭਾੜਾ (ਕਿਰਾਇਆ) ਹੈ ਅਤੇ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਪ੍ਰਤੀ ਕਿ.ਮੀ. ਭਾੜਾ (ਕਿਰਾਇਆ) ਹੈ;

$x = 5$, $y = 10$; 255 ਰੁ.।

(v) $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{7}{9}$ $(x = 7, y = 9)$।

(vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੈਕਬ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਪੁੱਤਰ ਦੀ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਉਮਰ ਹੈ; $x = 40$, $y = 10$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}$, $y = -\frac{5}{13}$,

(iv) $x = 2$, $y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਨੂਰੀ ਅਤੇ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਹੈ। ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ $(x) = 50$, ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ $(y) = 20$.

(iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦਹਾਈ ਅਤੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਹਨ; 18.

(iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 100 ਦੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ;

$x = 10$, $y = 15$.

(v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, ਜਿਥੇ x ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹੈ ਅਤੇ y ਅਲੱਗ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਹੈ; $x = 15$, $y = 3$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.5

1. (i) ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ (ii) ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ; $x = 2$, $y = 1$

(iii) ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ (iv) ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ; $x = 4$, $y = -1$

2. (i) $a = 5$, $b = 1$ (ii) $k = 2$ 3. $x = -2$, $y = 5$

4. (i) $x + 20y = 1000$, $x + 26y = 1180$, ਜਿਥੇ x (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) ਹੈ ਅਤੇ y (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਭੋਜਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਖਰਚ ਹੈ; $x = 400$, $y = 30$.

(ii) $3x - y - 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਭਿੰਨ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{5}{12}$.

(iii) $3x - y = 40$, $2x - y = 25$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਹੀ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ; 20.

(iv) $u - v = 20$, $u + v = 100$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h* ਵਿੱਚ) ਦੋਹਾਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 60$, $v = 40$.

(v) $3x - 5y - 6 = 0$, $2x + 3y - 61 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y (ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹੈ; ਲੰਬਾਈ $(x) = 17$, ਚੌੜਾਈ $(y) = 9$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4,\ y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5}, y = -2$

(iv) $x = 4,\ y = 5$ (v) $x = 1,\ y = 1$ (vi) $x = 1,\ y = 2$

(vii) $x = 3,\ y = 2$ (viii) $x = 1,\ y = 1$

2. (i) $u + v = 10$, $u - v = 2$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h*) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਤਰਨ ਦੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 6$, $v = 4$.

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}, \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, ਜਿਥੇ n ਅਤੇ m ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਸੀਦੇ ਦਾ ਕੰਮ ਖਤਮ ਕਰਨ ਦੀ ਲਈ ਇੱਕ ਔਰਤ (ਇਸਤਰੀ) ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੁਰਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਲਏ ਗਏ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ; $n = 18$, $m = 36$.

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4, \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h*) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਲ ਗੱਡੀ ਅਤੇ ਬੱਸ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 60$, $v = 80$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.7 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 19 ਸਾਲ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 16 ਸਾਲ ਹੈ ਜਾਂ ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 21 ਸਾਲ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 24 ਸਾਲ ਹੈ।

2. 40 ਰੁ:, 170 ਰੁ: । ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਕੋਲ x (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਸੰਪਤੀ (ਪੈਸੇ) ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅਕਤੀ ਕੋਲ y (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਸੰਪਤੀ ਹਨ। ਤਾਂ

$x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 km **4.** 36 **5.** $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 120°$

6. ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 0), (0, –3), (0, –5) ਹਨ।

7. (i) $x = 1,\ y = -1$ (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}, y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a,\ y = b$ (iv) $x = a + b,\ y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2,\ y = 1$

8. $\angle A = 120°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 110°$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1

1. (i) ਹਾਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ

(v) ਹਾਂ (vi) ਨਹੀਂ (vii) ਨਹੀਂ (viii) ਹਾਂ

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, ਜਿਥੇ x (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ) ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਚੌੜ੍ਹਾਈ ਹੈ।
(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, ਜਿਥੇ x ਛੋਟੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, ਜਿਥੇ x (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਰੋਹਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਹੈ।
(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, ਜਿਥੇ u (km/h ਵਿੱਚ) ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$
(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$
2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30
3. ਸੰਖਿਆਵਾਂ 13 ਅਤੇ 14 ਹਨ। 4. ਧਨਤਾਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ 13 ਅਤੇ 14 ਹਨ।
5. 5 cm ਅਤੇ 12 cm 6. ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 6, ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 15

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iv) ਹੋਂਦ (ਅਸਤਿਤਵ) ਨਹੀਂ ਹੈ।
2. ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਹੈ। 3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2 4. 7 ਸਾਲ
5. ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 12, ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 18;
ਜਾਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 13, ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 17
6. 120 m, 90 m 7. 18, 12 ਜਾਂ 18, −12
8. 40 km/h 9. 15 ਘੰਟੇ, 25 ਘੰਟੇ
10. ਸਵਾਰੀ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) = 33 km/h, ਤੇਜ (ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ) ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ = 44 km/h
11. 18 m, 12 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.4

1. (i) ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਿਫ਼ਰਾਂ(ਮੂਲਾਂ)ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ii) ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
(iii) ਅਲੱਗ ਮੂਲ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. ਹਾਂ ; 40 m , 20 m 4. ਨਹੀਂ 5. ਹਾਂ, 20 m , 20 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.1

1. (i) ਹਾਂ, 15, 23, 31, . . . ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਅਗਲਾ ਪਦ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 8 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਨਹੀਂ, ਆਇਤਨ $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \ldots$ ਹੈ। (iii) ਹਾਂ, 150, 200, 250, . . . ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

(iv) ਨਹੀਂ, ਰਾਸ਼ੀਆਂ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \ldots$ ਹਨ।

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$ (iii) $4, 1, -2, -5$

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.0$

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ, $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) ਹਾਂ, $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) ਹਾਂ, $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) ਹਾਂ, $d = \sqrt{2};\ 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) ਨਹੀਂ

(vii) ਹਾਂ, $d = -4;\ -16, -20, -24$ (viii) ਹਾਂ, $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) ਨਹੀਂ (x) ਹਾਂ, $d = a;\ 5a, 6a, 7a$

(xi) ਨਹੀਂ (xii) ਹਾਂ, $d = \sqrt{2};\ \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) ਨਹੀਂ (xiv) ਨਹੀਂ (xv) ਹਾਂ, $d = 24;\ 97, 121, 145$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ (v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4. 16ਵਾਂ ਪਦ **5.** (i) 34 (ii) 27

6. ਨਹੀਂ **7.** 178 **8.** 64

9. 5ਵਾਂ ਪਦ **10.** 1 **11.** 65ਵਾਂ ਪਦ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. ਅਖੀਰਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 20ਵਾਂ ਪਦ 158 ਹੈ।

18. –13, –8, –3 **19.** 11ਵਾਂ ਸਾਲ **20.** 10

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16$, $S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$ (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$

(iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5$, $a_n = 34$

(vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7$, $a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. ਸੂਤਰ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ਵਿੱਚ $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮੂਲ $n = -\frac{53}{4}, 12$ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਮੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਮੂਲ 12 ਹੀ ਠੀਕ ਹੈ।

5. $n = 16$, $d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, $S = 6973$ **7.** ਜੋੜ = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3$, $S_2 = 4$; $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$,
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$; $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$.

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. ਇਨਾਮਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 ਹੈ।

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 ਪੰਗਤੀਆਂ, 5 ਲਾਠੀਆਂ (ਡੰਡੀਆਂ) ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। $S = 200$, $a = 20$, $d = -1$ ਸੂਤਰ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $41n - n^2 = 400$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਨਾਲ $n = 16, 25$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪੰਗਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 16 ਜਾਂ 25 ਹੈ। ਹੁਣ $a_{25} = a + 24d = -$

4 ਭਾਵ 25 ਵੀਂ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ –4 ਹੈ ਜੋ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n = 25$ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। $n = 16$ ਦੇ ਲਈ, $a_{16} = 5$, ਡੰਡੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 16 ਪੰਗਤੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਵਾਲੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 5 ਡੰਡੇ ਹਨ।

20. 370 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.4 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 32ਵਾਂ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 cm

4. 35 **5.** 750 m^3

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.1

1. (i) ਸਮਰੂਪ (ii) ਸਮਰੂਪ (iii) ਸਮਭੁਜੀ

(iv) ਬਰਾਬਰ, ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ **3.** ਨਹੀਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ

9. ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ DC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ AD ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.3

1. (i) ਹਾਂ, AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) ਹਾਂ, SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ, SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) ਨਹੀਂ (vi) ਹਾਂ, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. AD ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ E ਤੱਕ ਵਧਾਉ ਤਾਂ ਕਿ AD = DE ਅਤੇ PM ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ N ਤੱਕ ਵਧਾਉ ਤਾਂ ਕਿ PM = MN ਹੋਵੇ। EC ਅਤੇ NR ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ

15. 42 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.4

1. 11.2 cm **2.** 4 : 1 **5.** 1 : 4 **8.** C **9.** D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.5

1. (i) ਹਾਂ, 25 cm (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ, 13 cm

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6 m **10.** $6\sqrt{7}$ m **11.** $300\sqrt{61}$ km

12. 13 m **17.** C

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.6 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. R ਤੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ SP ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਰੇਖਾ QP ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ T 'ਤੇ ਕੱਟੇ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ PT = PR ਹਾਂ।

6. ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਦੇ Q.5 (iii) ਦਾ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।   7. 3 m 2.79 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km   3. ਨਹੀਂ   4. ਹਾਂ   5. ਸੁੱਖੀ ਸਹੀ ਹੈ।

6. (i) ਵਰਗ   (ii) ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।   (iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ

7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$ 9. ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ m; 5ਵੀਂ ਪੰਗਤੀ 22.5 m ਦੂਰੀ 'ਤੇ   4. 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 6. $x = 6,\ y = 3$ 7. $(3, -10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ 9. $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ 10. 24 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ   (ii) 32 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ   2. (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$

3. 1 ਵਰਗ ਇਕਾਈ; 1 : 4   4. 28 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.4 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 2 : 9   2. $x + 3y - 7 = 0$ 3. $(3, -2)$ 4. $(1, 0), (1, 4)$

5. (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5); AD ਅਤੇ AB ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3); CB ਅਤੇ CD ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ।

$\frac{9}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ, $\frac{9}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ, ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

6. $\frac{15}{32}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ 1 : 16

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R ਇੱਕ ਹੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

(v) $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 8. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 3. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ 4. $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ 8. ਹਾਂ

9. (i) 1 (ii) 0 10. $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (ii) ਸੱਚ (ਸਹੀ) (iii) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (iv) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (v) ਝੂਠ (ਗਲਤ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C 3. $\angle A = 45°, \angle B = 15°$

4. (i) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (ii) ਸੱਚ (ਸਹੀ) (iii) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (iv) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (v) ਸੱਚ (ਸਹੀ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$ 5. $\angle A = 22°$ 7. $\cos 23° + \sin 15°$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1
4. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 9.1

1. 10 m
2. $8\sqrt{3}$ m
3. 3 m, $2\sqrt{3}$ m
4. $10\sqrt{3}$ m
5. $40\sqrt{3}$ m
6. $19\sqrt{3}$ m
7. $20(\sqrt{3}-1)$ m
8. $0.8(\sqrt{3}+1)$ m
9. $16\frac{2}{3}$ m
10. $20\sqrt{3}$ m, 20 m, 60 m
11. $10\sqrt{3}$ m, 10 m
12. $7(\sqrt{3}+1)$ m
13. $75(\sqrt{3}-1)$ m
14. $58\sqrt{3}$ m
15. 3 ਸੈਕਿੰਡ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.1

1. ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ
2. (i) ਇੱਕ (ii) ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ (iii) ਦੋ (iv) ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ
3. D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.2

1. A
2. B
3. A
6. 3 cm
7. 8 cm
12. AB = 15 cm, AC = 13 cm

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.1

1. 28 cm
2. 10 cm
3. Pink: 346.5 cm^2; Red: 1039.5 cm^2; Grey: 1732.5 cm^2; Black: 2425.5 cm^2; White: 3118.5 cm^2
4. 4375
5. A

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.2

1. $\frac{132}{7}\text{cm}^2$ 2. $\frac{77}{8}\text{cm}^2$ 3. $\frac{154}{3}\text{cm}^2$
4. (i) 28.5 cm^2 (ii) 235.5 cm^2
5. (i) 22 cm (ii) 231 cm^2 (iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2$
6. 20.4375 cm^2 ; 686.0625 cm^2 7. 88.44 cm^2
8. (i) 19.625 m^2 (ii) 58.875 cm^2 9. (i) 285 mm (ii) $\frac{385}{4} \text{ mm}^2$
10. $\frac{22275}{28} \text{ cm}^2$ 11. $\frac{158125}{126} \text{ cm}^2$ 12. 189.97 km^2
13. 162.68 ਰੁ: 14. D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.3

1. $\frac{4523}{28}\text{cm}^2$ 2. $\frac{154}{3}\text{cm}^2$ 3. 42 cm^2
4. $\left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right) \text{cm}^2$ 5. $\frac{68}{7} \text{ cm}^2$ 6. $\left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right) \text{cm}^2$
7. 42 cm^2 8. (i) $\frac{2804}{7}$ m (ii) 4320 m^2
9. 66.5 cm^2 10. 1620.5 cm^2 11. 378 cm^2
12. (i) $\frac{77}{8} \text{ cm}^2$ (ii) $\frac{49}{8} \text{ cm}^2$ 13. 228 cm^2
14. $\frac{308}{3} \text{ cm}^2$ 15. 98 cm^2 16. $\frac{256}{7} \text{ cm}^2$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.1

1. 160 cm^2 2. 572 cm^2 3. 214.5 cm^2
4. ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਵਿਆਸ = 7 cm ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 332.5 cm^2
5. $\frac{1}{4}l^2 (\pi + 24)$ 6. 220 m.^2 7. 44 m.^2, 22000 ਰੁ:
8. 18 cm^2 9. 374 cm^2

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.2

1. π cm^3
2. 66 cm^3. ਮਾਡਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ (ਸ਼ੰਕੂ + ਬੇਲਣ + ਸ਼ੰਕੂ)

$= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, ਜਿਥੇ r ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਬੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ, h_1 ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ h_2 ਬੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ (ਲੰਬਾਈ) ਹੈ।

ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$.

3. 338 cm^3
4. 523.53 cm^3
5. 100
6. 892.26 kg
7. 1.131 m^3 (ਲਗਭਗ)
8. ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ 346.51 cm^3 ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.3

1. 2.74 cm
2. 12 cm
3. 2.5 m
4. 1.125 m
5. 10
6. 400
7. 36 cm; $12\sqrt{13}$ cm
8. 562500 m^2 ਜਾਂ 56.25 ਹੈਕਟੇਅਰ
9. 100 ਮਿੰਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ cm^3
2. 48 cm^2
3. $710\frac{2}{7}$ cm^2
4. ਦੁੱਧ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 209 ਅਤੇ ਧਾਤੂ ਸ਼ੀਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 156.75 ਹੈ।
5. 7964.4 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.5 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 1256 cm, 788 gm (ਲਗਭਗ)
2. 30.14 cm^3, 52.75 cm^2
3. 1792
4. $782\frac{4}{7}$ cm^2

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.1

1. 8.1 ਪੌਦੇ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਘੱਟ ਹਨ।
2. ₹ 145.20
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. ₹ 211
7. 0.099 ppm
8. 12.38 ਦਿਨ
9. 69.43 %

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.2

1. ਬਹੁਲਕ = 36.8 ਸਾਲ, ਮੱਧਮਾਨ = 35.37 ਸਾਲ। ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਰੋਗੀ 36.8 ਸਾਲ ਉਮਰ (ਲਗਭਗ) ਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਔਸਤਨ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਕੀਤੇ ਗਏ ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ 35.57 ਸਾਲ ਹੈ।
2. 65.625 ਘੰਟੇ
3. ਬਹੁਲਕ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ = ₹ 1847.83, ਮੱਧਮਾਨ ਮਾਸਿਕ ਖਰਚ = ₹ 2662.5
4. ਬਹੁਲਕ : 30.6, ਮੱਧਮਾਨ = 29.2. ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਰਾਜਾਂ/U.T. ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 30.6 ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤਨ ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ 29.2 ਹੈ।
5. ਬਹੁਲਕ = 4608.7 ਰਨ (ਦੌੜਾਂ)   6. ਬਹੁਲਕ = 44.7 ਕਾਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.3

1. ਮੱਧਿਕਾ = 137 ਇਕਾਈ, ਮੱਧਮਾਨ = 137.05 ਇਕਾਈ, ਬਹੁਲਕ = 135.76 ਇਕਾਈ

   ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਿੰਨੇ ਮਾਪਕ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
2. $x = 8, y = 7$ 3. ਮੱਧਮਾਨ ਉਮਰ = 35.76 ਸਾਲ
4. ਮੱਧਮਾਨ ਲੰਬਾਈ = 146.75 mm   5. ਮੱਧਮਾਨ ਜੀਵਨ = 3406.98 ਘੰਟੇ
6. ਮੱਧਮਾਨ = 8.05, ਮੱਧਮਾਨ = 8.32, ਬਹੁਲਕ = 7.88
7. ਬਹੁਲਕ ਭਾਰ = 56.67 kg

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.4

1.

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
120 ਤੋਂ ਘੱਟ	12
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	26
160 ਤੋਂ ਘੱਟ	34
180 ਤੋਂ ਘੱਟ	40
200 ਤੋਂ ਘੱਟ	50

ਬਿੰਦੂਆਂ (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) ਅਤੇ (200, 50) ਨੂੰ ਆਲਿਖਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

2. ਬਿੰਦੂਆਂ : (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) ਅਤੇ (52, 35) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ। ਇੱਥੇ $\frac{n}{2} = 17.5$. ਤੋਰਣ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ ਜਿਸਦੀ ਕੋਟੀ 17.5 ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਮੱਧਿਕਾ ਹੋਵੇਗਾ।

3.

ਉਤਪਾਦਨ (kg/ha)	ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
50 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	100
55 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	98
60 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	90
65 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	78
70 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	54
75 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	16

ਬਿੰਦੂਆਂ : (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) ਅਤੇ (75, 16) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ (iii) 1, ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ
(iv) 1 (v) 0, 1

2. ਪ੍ਰਯੋਗ (iii) ਅਤੇ (iv) ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

3. ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਦੇ (ਸੁੱਟਦੇ) ਹਾਂ ਤਾਂ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਆਉਣ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਨਾਲ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਿੱਟੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ।

4. B 5. 0.95 6. (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 8. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ 10. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ 12. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 0 16. $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ 18. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ਨਹੀਂ, ਇਹ 11 ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

23. $\frac{3}{4}$; ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਹਨ: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, ਇਥੇ THH ਦਾ ਭਾਵ ਪਹਿਲੇ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਪਟ, ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ ਚਿਤ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਚਿਤ ਆਦਿ ਹੈ।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਹਾਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ 'ਤੇ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ 'ਤੇ ਚਿਤ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਪਟ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ 'ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ 'ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਚਿਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੋਹਾਂ 'ਤੇ ਚਿਤ (ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ 'ਤੇ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੈ।

(ii) ਸਹੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.2 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10　　4. $\frac{x}{12}$, $x = 3$　　5. 8

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.1

1. (i) ਸ਼ੱਕੀ　(ii) ਸੱਚ　(iii) ਸੱਚ　(iv) ਸ਼ੱਕੀ
   (v) ਸ਼ੱਕੀ
2. (i) ਸੱਚ　(ii) ਸੱਚ　(iii) ਝੂਠ　(iv) ਸੱਚ　(v) ਸੱਚ
3. ਕੇਵਲ (ii) ਹੀ ਸੱਚ ਹੈ।
4. (i) ਜੇਕਰ $a > 0$ ਅਤੇ $a^2 > b^2$, ਤਾਂ $a > b$.
   (ii) ਜੇਕਰ $xy \geq 0$ ਅਤੇ $x^2 = y^2$, ਤਾਂ $x = y$.
   (iii) ਜੇਕਰ $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ਅਤੇ $y \neq 0$, ਤਾਂ $x = 0$.
   (iv) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.2

1. A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ।　2. ab ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. $\sqrt{17}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਅਣ ਅਵਰਤੀ ਹੈ।
4. $y = 7$　5. $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 180°$
6. PQRS ਇਕ ਆਇਤ ਹੈ।
7. ਹਾਂ, ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ। ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $\sqrt{3721} = 61$ ਹੈ ਜੋ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਗਲਤ ਸੀ ਇਸ ਲਈ ਸਿੱਟਾ ਝੂਠ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.3

1. ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $2n + 1$ ਅਤੇ $2n + 3$ ਲਓ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.4

1. (i) ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (ii) ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (iii) ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (v) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (vi) ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੁਸਤ ਹਨ।
   (vii) ਸਾਰੀਆਂ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ।
   (viii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $\sqrt{x} = -1$.

(ix) ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ 2 ਨਹੀਂ ਵੰਡਦਾ (ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ)

(x) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹਨ।

2. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਨਹੀਂ (v) ਹਾਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.5

1. (i) ਜੇਕਰ ਸ਼ਰਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਪਸੀਨਾ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਟੋਕੀਉ ਵਿੱਚ ਗਰਮੀ ਹੈ।
   (ii) ਜੇਕਰ ਸ਼ਾਲਿਨੀ ਦਾ ਢਿੱਡ ਗੁੜਗੁੜਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭੁੱਖੀ ਹੈ।
   (iii) ਜੇਕਰ ਜਸਵੰਤ ਡਿਗਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਵਜ਼ੀਫਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ।
   (iv) ਜੇਕਰ ਪੌਦਾ ਜਿਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਹਨ।
   (v) ਜੇਕਰ ਜਾਨਵਰ ਦੀ ਪੂਛ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਬਿੱਲੀ ਹੈ।

2. (i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਸੱਚ
   (ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਸੱਚ
   (iii) ਜੇਕਰ $x = 1$, ਤਾਂ $x^2 = 1$. ਸੱਚ
   (iv) ਜੇਕਰ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਸੱਚ
   (v) ਜੇਕਰ $a + (b + c) = (a + b) + c$, ਤਾਂ a, b ਅਤੇ c ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਝੂਠ
   (vi) ਜੇਕਰ $x + y$ ਇਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਝੂਠ
   (vii) ਜੇਕਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਸਿਖਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਸੱਚ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.6

1. $b \leq d$ ਦੇ ਉਲਟ ਮੁੱਲ ਲਉ।

3. ਅਧਿਆਇ 1 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 10 ਨੂੰ ਵੇਖੋ।

6. IX ਜਮਾਤ ਦੀ ਗਣਿਤ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 5.1 ਵੇਖੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.1

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 cm^2 ਖੇਤਰਫਲ ਲਉ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਗਿਣੋ। ਕੁੱਲ ਦਰਖਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ (cm^2 ਵਿੱਚ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇਗਾ।

3. ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਅਧੀਨ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 17.74% ਹੈ ਜੋ 18% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.2

1. ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਪਣੇ ਆਪ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ।