P5R7U8

അധ്യായം 11

വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങൾ (CONIC SECTIONS)

❖അറിവും യഥാർഥ ജീവിതവുമായുള്ള ബന്ധം നിങ്ങളുടെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് വെളിപ്പെടട്ടെ. അറിവിലൂടെ ഉണ്ടാകുന്ന പരിണാമം അവർ മനസ്സിലാക്കട്ടെ – ബെർട്രൻഡ് റസൽ ❖

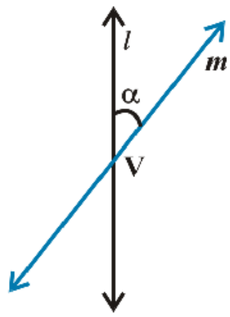
11.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളും പ്രത്യേകതകളും മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ. ഇവിടെ വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങളും അവയുടെ സമവാക്യങ്ങളും ചില പ്രത്യേകതകളും ചർച്ച ചെയ്യാം. ഏറെ പരിചിതമായ വൃത്തവും, കൂടാതെ സമവക്രം, ന്യൂനവക്രം, അധിവക്രം തുടങ്ങിയ വക്രങ്ങളും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളുമാണ് ചർച്ചചെയ്യാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. സമവക്രം, അധിവക്രം എന്നിവയ്ക്ക് പേര് നൽകിയത് അപ്പലോണിയസ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. യഥാർഥത്തിൽ ഈ നാല് രൂപങ്ങളും ഒരു ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പരിച്ഛേദങ്ങളാണ്. ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്തോടെ ഇത് മനസ്സിലാക്കാം. 1604 ൽ ഗലീലിയോ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ, ഒരു വസ്തു മുകളിലേക്ക് എറിഞ്ഞാൽ അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത സമവക്രമായിരിക്കും എന്ന് വിശദീകരിക്കുകയുണ്ടായി. കൂടാതെ വാഹനങ്ങളിലും മറ്റും ഉപയോഗിക്കുന്ന റിഫ്ളക്ടറുകൾ, ടെലിസ്കോപ്പിലെ കണ്ണാടികൾ, റഡാർ, ഡിഷ് ആന്റിനകൾ എന്നിവയിലൊക്കെ സമവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. 1609 ൽ കെപ്ലർ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഗ്രഹങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപാത ന്യൂനവക്രമാണെന്നും സൂര്യൻ അതിന്റെ ഒരു ഫോക്കസിൽ ആയിരിക്കും എന്നും തെളിയിക്കുകയുണ്ടായി. കൂടാതെ പല ധൂമകേതുക്കളുടെ പാതയും ഇത്തരം വക്രങ്ങളിൽ കൂടിയാണ് എന്ന് കണ്ടെത്തി. പാലങ്ങളുടെ നിർമ്മാണം, ആർച്ചുകളുടെ നിർമ്മാണം, വൃക്കയിലെ കല്ലുകൾ നീക്കം ചെയ്യുന്ന ചികിൽസാ രീതികൾ എന്നിവയിൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആറ്റത്തിന്റെ ന്യൂക്ലിയസിലുള്ള ഇലക്ട്രിക് ഫീൽഡിലൂടെയുള്ള α (ആൽഫ) കണത്തിന്റെ സഞ്ചാരം നിർണയിക്കുന്നതിലും ബാലിസ്റ്റിക്സിലും (പ്രക്ഷേപണ ശാസ്ത്രം) അധിവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

അപ്പലോണിയസ്
(ക്രിമു 190 - 262)

11.2 വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഛേദകം

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വിശദമാക്കാം. l ഒരു ലംബവരയാണ്, m എന്നത് l എന്ന വരയെ V എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുകയും α കോണളവ് നിർണയിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന മറ്റൊരു വരയാണ്. m എന്ന വരയെ V എന്ന ബിന്ദു ആധാരമാക്കി α കോണളവിൽ തന്നെ കറക്കിയാൽ നമുക്ക് ഒരു ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കും V എന്നത് ഇവയുടെ പൊതു ശീർഷവും ആയിരിക്കും. m എന്ന വരയെ ഈ സ്തൂപികയുടെ ജനറേറ്റർ (generator) എന്നു വിളിക്കാം. ഇനി, ഈ സ്തൂപികയെ ഒരു തലം കൊണ്ട് ഛേദിക്കാം. 'l' എന്ന ലംബവരയുമായി തലം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് β എന്നു വിചാരിക്കുക. β യുടെ അളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ തലം സ്തൂപികയെ പല രീതിയിൽ ഛേദിക്കുകയും പല വക്രങ്ങൾ ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്യും. അവ എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.



ചിത്രം 11.1

സാധ്യത 1 തലം V എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലെങ്കിൽ

(i) $\beta = 90°$ ആയാൽ വൃത്തം

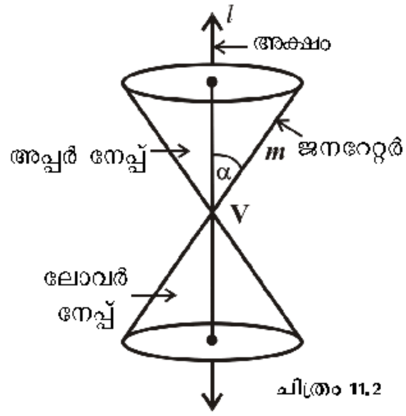
(ii) $\alpha < \beta < 90°$ ആയാൽ ന്യൂനവക്രം (എലിപ്സ്)

(iii) $\beta = \alpha$ ആയാൽ സമവക്രം (പരാബൊള)

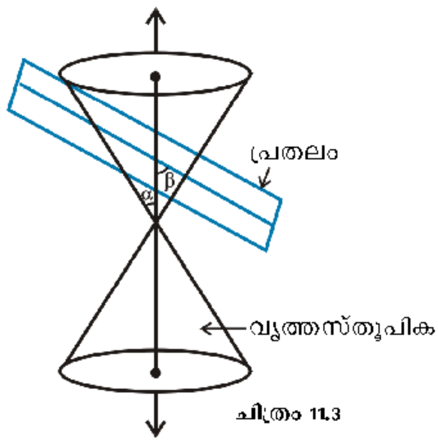
(iv) $0 \leq \beta < \alpha$ ആയാൽ അധിവക്രം ലഭിക്കും (ഹൈപ്പർബൊള)

ജിയോജിബ്ര വഴി പരിശോധിക്കുമല്ലോ.

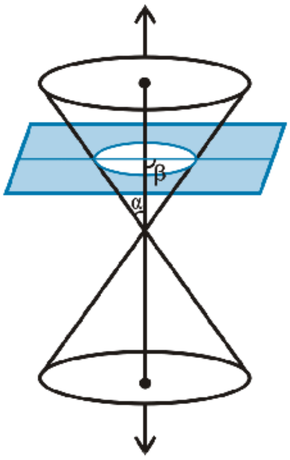
> ഇൻപുട്ട് കമാന്റ് നൽകി A(2, 0, 3), B(-2, 0, -3), C(0, 0, -4), D(0, 0, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക segment ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB, CD എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. (AB യുടെ പേര് f എന്നും CD യുടെ പേര് g എന്നുമാവും – Algebra view നോക്കുക). ഒരു angle slider α നിർമ്മിക്കുക., Rotate (f, α, g) എന്ന കമാന്റ് നൽകുമ്പോൾ f' എന്ന പേരിൽ പുതിയ ഒരു വര ലഭിക്കും. ഇതിൽ Right click ചെയ്ത് Trace നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് ആനിമേഷൻ നൽകി നോക്കൂ.



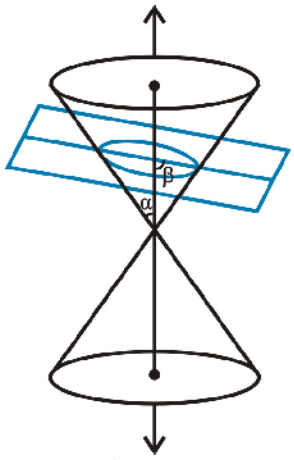
ചിത്രം 11.2



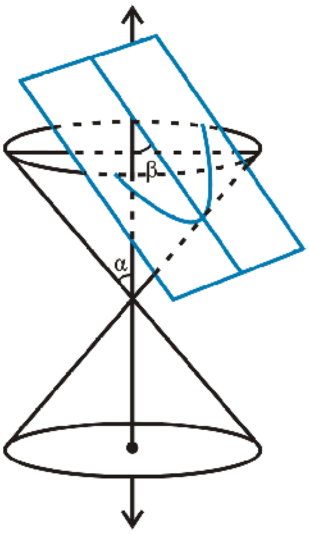
ചിത്രം 11.3



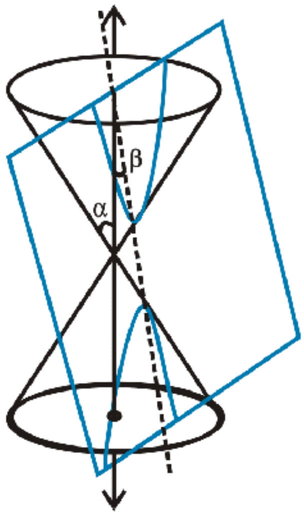
ചിത്രം 11. 4



ചിത്രം 11. 5



ചിത്രം 11. 6



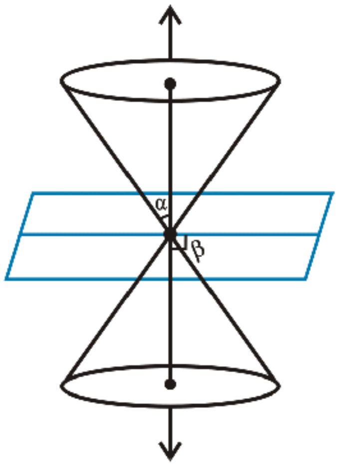
ചിത്രം 11. 7

സാധ്യത 2 തലം V എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോയാൽ

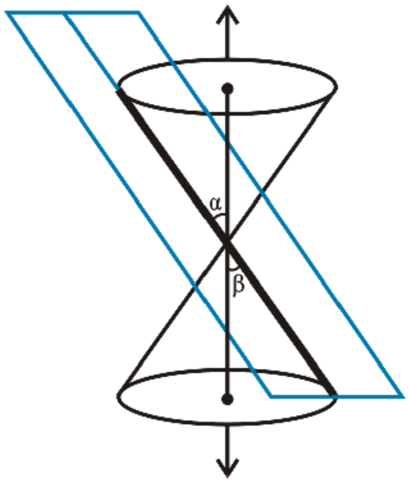
(i) $\alpha < \beta \le 90^\circ$, ആയാൽ ഒരു ബിന്ദു മാത്രം (ചിത്രം 11.8)

(ii) $\beta = \alpha$, ആയാൽ നേർവര (സമവക്രം ലോപിച്ച്) (ചിത്രം 11.9)

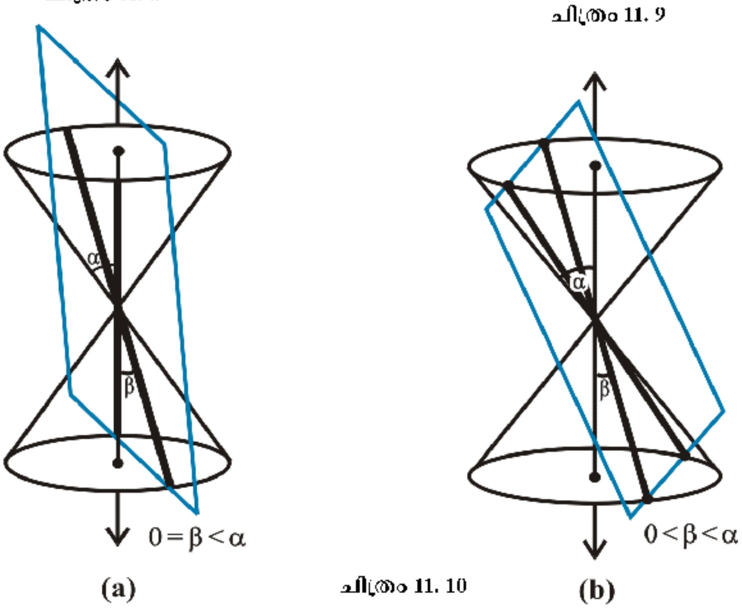
(iii) $0 \le \beta < \alpha$, നേർവര ജോടികൾ (അധിവക്രം ലോപിച്ച്) (ചിത്രം 11.10)



ചിത്രം 11. 8



ചിത്രം 11. 9

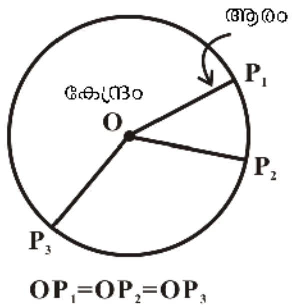


ചിത്രം 11. 10

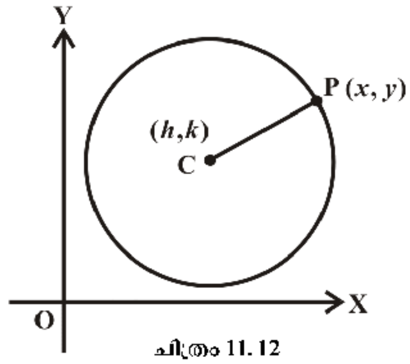
വൃത്തസ്തൂപികയിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന വക്രങ്ങളായതു കൊണ്ടാണ് ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികാപരിച്ഛേദങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഇനി ഇവയെ ഒരു കാർട്ടീഷൻ തലത്തിലേക്ക് മാറ്റി ചിന്തിക്കാം. ഇത്തരം വക്രങ്ങൾ എല്ലാം പ്രത്യേക നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

11.3 വൃത്തം (Circle)

നിർവചനം: ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽനിന്നും നിശ്ചിത അകലത്തിൽ അതേ തലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു സഞ്ചരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പാതയാണ് വൃത്തം. നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ വൃത്തകേന്ദ്രം എന്നും നിശ്ചിത അകലത്തെ ആരം എന്നും വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11. 11



ചിത്രം 11. 12

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം വളരെ എളുപ്പം കണ്ടുപിടിക്കാം. വൃത്തകേന്ദ്രം (h, k) യും ആരം 'r' ഉം ആയാൽ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $|CP| = r$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

അനുപ്രമാണം:

കേന്ദ്രം $(0,0)$, ആരം r എന്നിവ ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = r^2$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

കേന്ദ്രം $(-3, 2)$ ഉം ആരം 7 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $(h, k) = (-3, 2)$, $r = 7$ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 7^2$, അതായത്, $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$ ആയിരിക്കും വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $2x - y = 3$ എന്ന വരയിലാണ്. കൂടാതെ ആ വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് $(5, 5)$, $(6, 4)$ എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ A = (5, 5), B = (6, 4) എന്നിരിക്കട്ടെ (h, k) എന്ന ബിന്ദു $2x - y = 3$ എന്ന വരയിലായതു കൊണ്ട് $2h - k = 3$ ----(1)

കൂടാതെ, CA = CB = ആരം.

$$\sqrt{(h-5)^2 + (k-5)^2} = \sqrt{(h-6)^2 + (k-4)^2}$$

$-2h + 2k = -2$ -------- (2)

അതുകൊണ്ട് $k = 1, h = 2$

കേന്ദ്രം = (2, 1), ആരം = 5

സമവാക്യം $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Circle with centre and radius ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തം വരയ്ക്കാം. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ആരം നൽകിയാൽ മതി. ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം algebra view വിൽ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 3

$x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$
$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$
$$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 49$$
$$\{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 7^2$$

കേന്ദ്രം (– 4, –5), ആരം = 7 യൂണിറ്റ്

ഉദാഹരണം : 4

(2, – 2), (3,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്നതും കേന്ദ്രം $x + y = 2$ എന്ന വരയിലും ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഈ വൃത്തം (2, – 2), (3,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ,

$(2-h)^2 + (-2-k)^2 = r^2$ ... (1)

$(3-h)^2 + (4-k)^2 = r^2$ ... (2)

വൃത്തകേന്ദ്രം $x + y = 2$ എന്ന വരയിലായതിനാൽ,

$h + k = 2$ ... (3)

(1), (2), (3) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്താൽ

$h = 0.7, \quad k = 1.3, \quad r^2 = 12.58$

$2x - y = 3$ എന്ന വര വരയ്ക്കുക. (5, 5), (6, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വര വരച്ച് അതിന്റെ ലംബ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് കേന്ദ്രമായി ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

അതുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58.$$

ഉദാഹരണം : 5

$3x+2y=11$, $2x+3y=4$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്നതും കേന്ദ്രം $(2, -3)$ ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

> ഉദാഹരണം മൂന്നിലെ വൃത്തം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

പരിഹാരം

വരകളുടെ സംഗമബിന്ദു കാണാൻ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ.

$3x + 2y = 11$ -------(1)

$2x + 3y = 4$ -------(2)

$x = 5, y = -2$

ആരം $r = \sqrt{(2-5)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{10}$

ആരം $= \sqrt{10}$

അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$,

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0.$

ഉദാഹരണം : 6

C_1, C_2 എന്നിവ ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളാണ്. C_2 വിന്റെ പരപ്പളവ് C_1 ന്റെ പരപ്പളവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. C_1 ന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ ആയാൽ C_2 വിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

C_1 എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$

ഇതിന്റെ പദങ്ങളെ പൂർണ്ണവർഗമായി ക്രമീകരിച്ചാൽ,

$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 8 + 1^2 + 2^2$

അതുകൊണ്ട്, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

ആരം $= \sqrt{13}$, കേന്ദ്രം $(1, -2)$ ആകുന്നു.

C_1 ന്റെ പരപ്പളവ് $= 13\pi$, C_2 ന്റെ പരപ്പളവ് $= 26\pi$

അതുകൊണ്ട് C_2 വിന്റെ ആരം = $\sqrt{26}$

C_2 വിന്റെ സമവാക്യം $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$

അതായത്, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 21$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.1

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

1. കേന്ദ്രം (0, 2), ആരം 2
2. കേന്ദ്രം (–2, 3), ആരം 4
3. കേന്ദ്രം $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ആരം $\frac{1}{12}$
4. കേന്ദ്രം (1,1), ആരം $\sqrt{2}$
5. കേന്ദ്രം $(-a, -b)$, ആരം $\sqrt{a^2 - b^2}$

6 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ വൃത്തകേന്ദ്രവും ആരവും കാണുക.

6. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$
7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$
9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$
10. കേന്ദ്രം $4x + y = 16$ എന്ന വരയിലും, (4,1), (6,5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
11. കേന്ദ്രം $x - 3y - 11 = 0$ എന്ന രേഖയിലും (2,3), (–1,1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
12. കേന്ദ്രം x അക്ഷത്തിലും, (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകുന്നതും, ആരം 5 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
13. (0,0) എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നതും, അക്ഷങ്ങളുമായുള്ള ഇടയകലങ്ങൾ a യൂണിറ്റും b യൂണിറ്റും ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10, 11 ചോദ്യങ്ങളിലെ വൃത്തങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരച്ച് സമവാക്യമെന്താണെന്ന് നോക്കുക.

(2, 3) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി 5 യൂണിറ്റ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയക്കുക. ഇത് X അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളായി (2, 3) ൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് സമവാക്യം കാണുക.

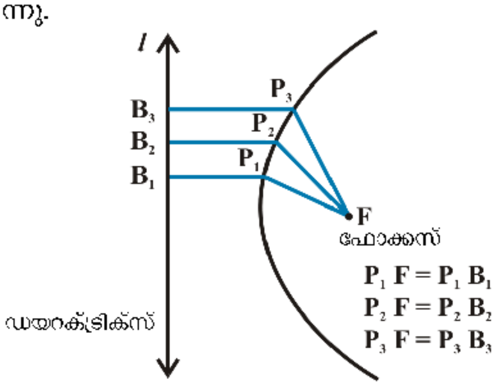
ചോദ്യം 14 ലെ വൃത്തം ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരയ്ക്കുക. സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

14. വൃത്തകേന്ദ്രം (2, 2), കടന്നു പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (4, 5) എന്നിവ ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

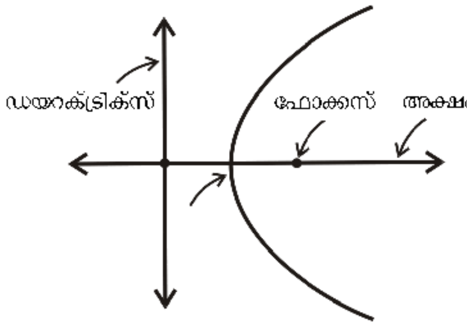
15. (–2.5, 3.5) എന്ന ബിന്ദു $x^2 + y^2 = 25$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തോ ബഹിർഭാഗത്തോ വൃത്തത്തിലോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

11.4 സമവക്രം (Parabola)

നിർവചനം: തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത വരയിൽ നിന്നും സമദൂരത്തിൽ അതേ തലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു സഞ്ചരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പാതയാണ് സമവക്രം (നിശ്ചിത ബിന്ദു നിശ്ചിത വരയിൽ ആകുന്നില്ല) നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ ഫോക്കസ് എന്നും നിശ്ചിത വരയെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നും വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11. 13

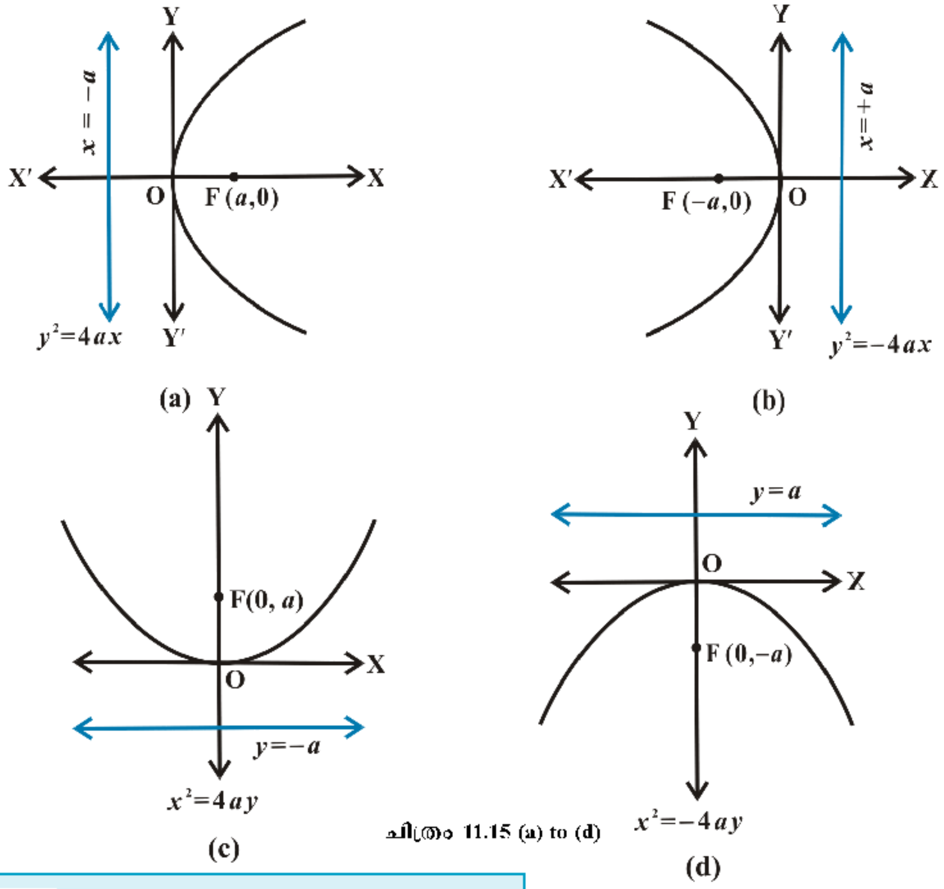


ചിത്രം 11.14

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് സമവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യാം.

കുറിപ്പ്:

1. ഡയറക്ട്രിക്സിന് ലംബമായി ഫോക്കസിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയാണ് സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷം.
2. സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷവും സമവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ശീർഷം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
3. അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി പോകുന്നതുമായ വരയുടെ നീളത്തെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
4. ഈ പാഠഭാഗത്ത് ശീർഷം (0, 0) ആയതും അക്ഷം x ആയതുമായ നാല് രീതിയിലുള്ള സമവക്രങ്ങൾ മാത്രമേ പ്രതിപാദിക്കുന്നുള്ളൂ.



ചിത്രം 11.15 (a) to (d)

Input കമാന്റ് ഉപയോഗിച്ച് സമവക്രം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് (2, 0) എന്ന ബിന്ദു ഫോക്കസും $x + 2 = 0$ എന്ന വര ഡയറക്ട്രിക്സും ആയ സമവക്രം വരയ്ക്കാൻ parabola ((2, 0), $x + 2 = 0$) എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ മതി. a എന്ന ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് parabola ((a, 0), $x + a = 0$) എന്ന കമാന്റ് നൽകി സമവക്രം വരയ്ക്കുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വക്രത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റം നിരീക്ഷിക്കൂ.

ഇതേ സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് ഫോക്കസ് ($-a$, 0) ആയ സമവക്രം വരയ്ക്കണമെങ്കിൽ നൽകേണ്ട കമാന്റെന്താണ്?

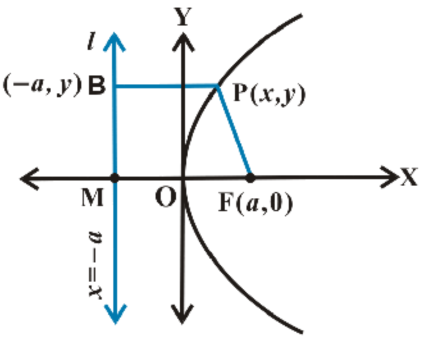
Y അക്ഷത്തിന് സമമിതമായ സമവക്രങ്ങളും വരച്ചു നോക്കൂ.

സമവാക്യങ്ങൾ Input ആയി നൽകിയും സമവക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് y^2 = 4a*x എന്ന നൽകി നോക്കൂ. a യുടെ വില മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് സമവക്രത്തിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത്. Y അക്ഷത്തിന് സമമിതമായ വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ നൽകേണ്ട Input എന്താണ്?

11.4.1 സമവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

ഇവിടെ സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷം (0, 0), അക്ഷം x അക്ഷവും ആണ്. സമവക്രത്തിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച് OF = OM ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x = -a$ എന്നായിരിക്കും. ബിന്ദു P സമവക്രത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട്.



ചിത്രം 11.16

PF = PB ആകുന്നു.

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

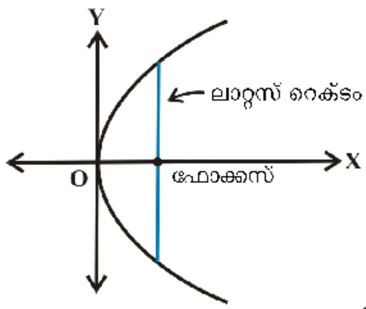
$$PF = PB$$

$$\sqrt{(x \quad a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

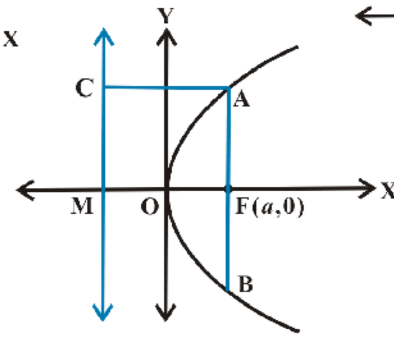
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$y^2 = 4ax \ (a > 0)$$

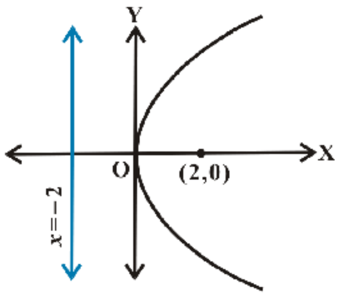
നിരീക്ഷണങ്ങൾ



ചിത്രം 11.17



ം 11.18



ചിത്രം 11.19

1. (x, y) എന്നത് $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിലെ ബിന്ദുവായാൽ $(x, -y)$ യും അതേ സമവക്രത്തിലായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് സമവക്രം x അക്ഷത്തിന് സമമിതമായിരിക്കും.
2. ശീർഷവും ഫോക്കസും തമ്മിലുള്ള ദൂരം a ആയിരിക്കും. ഇതിനെ ഫോക്കൽ നീളം (Focal length) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

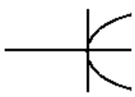
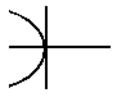
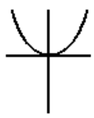
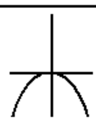
പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 11.2 ലെ ചോദ്യങ്ങളിലെ സമവക്രങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കുക.

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ (A, B ഇവ) അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0, Max = 10 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം a ആകുന്ന ഒരു വൃത്തവും B കേന്ദ്രമായി ആരം 10 - a ആകുന്ന മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി Trace നൽകുക (Right click - Trace) ഇവയുടെ പാത എന്താണ്? സ്ലൈഡറിന്റെ increment 0.001 എന്ന് കൊടുത്താൽ കുറച്ചു കൂടി വ്യക്തമായ ചിത്രം ലഭിയ്ക്കും.

3. ഫോക്കസിൽ കൂടി അക്ഷത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഞാണാണ് (Chord) ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചുവല്ലോ. ഇതിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ സമവക്രത്തിലായിരിക്കും. ഇതിന്റെ സമവാക്യം $x - a$ എന്നാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് $y^2 - 4a^2 : y - 2a$, അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(a, 2a)$, $(a, -2a)$ ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ, ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $4a$ ആയിരിക്കും.

4. a > 0 ആയാൽ $y^2 - -4ax$ ന് x ന്റെ വില നെഗറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം മാത്രമായിരിക്കും. അത് കൊണ്ട് സമവക്രം x അക്ഷത്തിന് സമമിതവും ഇടത്തോട്ട് തിരിഞ്ഞുമിരിക്കും (ചിത്രം കാണുക).

5. സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷം y അക്ഷമാക്കിയാൽ സമവാക്യം $x^2 - 4ay$ എന്നാകുന്നു. സമവക്രം മുകളിലേക്ക് തുറന്നിരിക്കും. അതുപോലെ $x^2 - -4ay$ എന്ന സമവക്രം താഴേക്ക് തുറന്നിരിക്കും. ലഭിച്ച അറിവുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ക്രോഡീകരിക്കാം.

ചിത്രം				
സമവാക്യം	$y^2 - 4ax$	$y^2 - -4ax$	$x^2 - 4ay$	$x^2 - -4ay$
ശീർഷം	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
ഫോക്കസ്	(a, 0)	(–a, 0)	(0, a)	(0, –a)
ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം	x = –a	x = +a	y = –a	y = +a
അക്ഷം	x-അക്ഷം	x-അക്ഷം	y-അക്ഷം	y-അക്ഷം
ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	4a	4a	4a	4a

ഉദാഹരണം : 7

ഫോക്കസ് (5, 0) ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x = -5$ ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസ് (5, 0), ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = -5$ ആയതുകൊണ്ട് അക്ഷം x ആണ്. കൂടാതെ ശീർഷം, (5, 0), (–5, 0) എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുവും ആണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $y^2 = 4ax$

ഇവിടെ $\quad y^2 = 4 \times 5x$

$y^2 = 20x$

ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= 4a$

$= 4 \times 5$

$= 20$

ഉദാഹരണം : 8

ശീർഷം (0, 0), അക്ഷം y അക്ഷം, കടന്നു പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (2, –3) ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

പരിഹാരം

ശീർഷം (0, 0) അക്ഷം y, കടന്നു പോകുന്ന ബിന്ദു (2, –3). അതുകൊണ്ട് സമവക്രം നാലാം ചതുർഥാംശത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു.

സമവാക്യം $x^2 = -4ay$ രൂപത്തിലാണ്.

$x = 2, y = -3$ ആയാൽ $4 = 12a$

$$a = \frac{1}{3} \text{ ആയിരിക്കും.}$$

സമവാക്യം $x^2 = -\frac{4}{3}y$, $3x^2 = -4y$, ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{4}{3}$ ആയിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസ്, അക്ഷം, ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

1. $y^2 = 12x$ 2. $x^2 = 6y$ 3. $y^2 = -8x$

4. $x^2 = -16y$ 5. $y^2 = 10x$ 6. $x^2 = -9y$

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

7. ഫോക്കസ് (6, 0), ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = -6$

8. ഫോക്കസ് (0, –3), ഡയറക്ട്രിക്സ് $y = 3$

9. ശീർഷം (0, 0) ഫോക്കസ് (3, 0)

10. ശീർഷം (0, 0) ഫോക്കസ് (–2, 0)

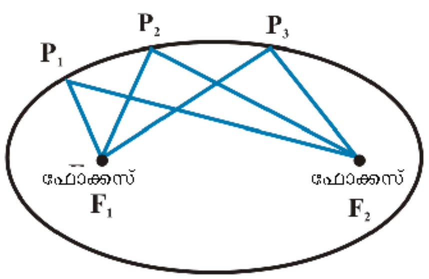
11. ശീർഷം (0, 0), കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (2, 3), അക്ഷം x അക്ഷം

12. ശീർഷം (0, 0) കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (5, 2) y അക്ഷത്തിന് സമമിതം

11.5 ന്യൂനവക്രം (Ellipse)

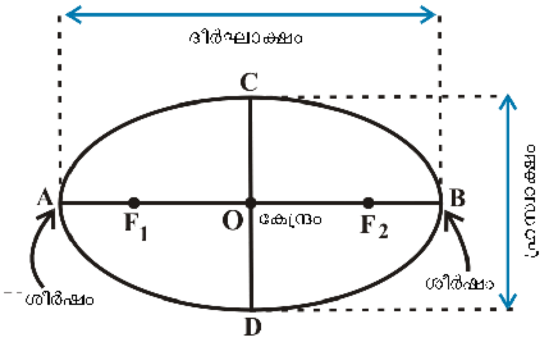
നിർവചനം: ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും അതേ തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ തുക ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയായാൽ ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയാണ് ന്യൂനവക്രം. നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളെ ഫോക്കസുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ന്യൂനവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യാം.

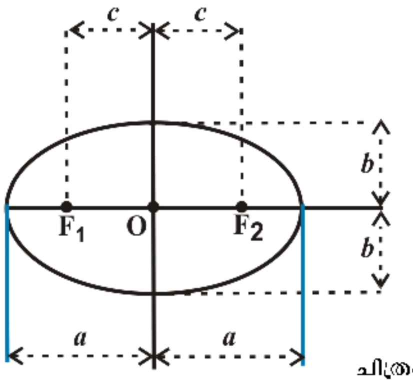


$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

ചിത്രം 11.20



ചിത്രം 11.21



ചിത്രം 11.22

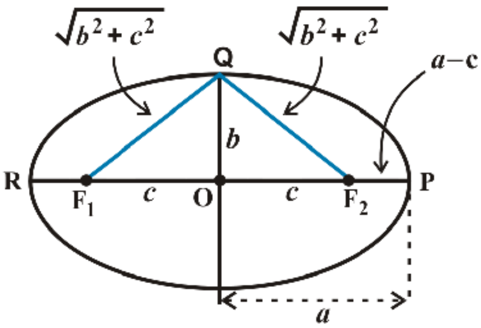
കുറിപ്പ്

1. രണ്ട് ഫോക്കസുകളുടെയും മധ്യബിന്ദുവാണ് ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രം.
2. ഫോക്കസുകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വരയാണ് ദീർഘാക്ഷം.
3. ദീർഘ അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയാണ് ഹ്രസ്വാക്ഷം (മൈനർ അക്ഷം).
4. ദീർഘ അക്ഷവും ന്യൂനവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് ശീർഷങ്ങൾ (ദീർഘ അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ)
5. ദീർഘാക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടിയുള്ളതുമായ വരയുടെ നീളമാണ് ലാറ്റസ്റെക്ടം.
6. ഈ അധ്യായത്തിൽ ദീർഘാക്ഷം x അക്ഷത്തിലും, y അക്ഷത്തിലും വരുന്ന രണ്ട് രീതിയിലുള്ള ന്യൂനവക്രം മാത്രമെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.

11.5.1 നിരീക്ഷണം

1. ചിത്രത്തിൽ F_1, F_2 ഫോക്കസുകളും P ശീർഷങ്ങളുമാണല്ലോ.

$$F_1P + F_2P = (F_1O + OP) + F_2P$$
$$= (c + a) + (a - c)$$
$$= 2a$$



ചിത്രം 11.23

ഹ്രസ്വഅക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു Q എടുത്താൽ

$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}$$
$$= 2\sqrt{b^2+c^2}$$

ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്

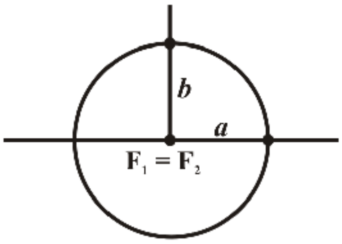
$$F_1P + F_2P = F_1Q + F_2Q$$

അതായത് $2a = 2\sqrt{b^2 + c^2}$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

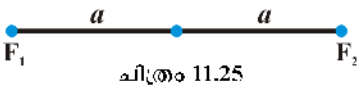
$$a^2 = b^2 + c^2$$

അതായത് $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



ചിത്രം 11.24

11.5.2 ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് a യുടെ വില സ്ഥിരമാക്കിക്കൊണ്ട് c യുടെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് a യിലേക്ക് മാറ്റിയാൽ എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.



ചിത്രം 11.25

11.5.3. ഉൾകേന്ദ്രത (Eccentricity)

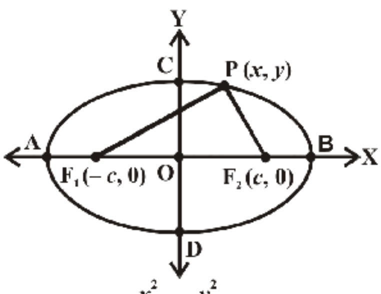
ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള അകലങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെ ഉൾകേന്ദ്രത എന്നു വിളിക്കുന്നു.

$$c = \frac{c}{a}$$

ഇവിടെ $c < a$ ആയതുകൊണ്ട് e യുടെ വില $0 < c < 1$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. $c = 0$ ആകുമ്പോൾ ന്യൂനവക്രത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കും എന്നു നിരീക്ഷിക്കുക.

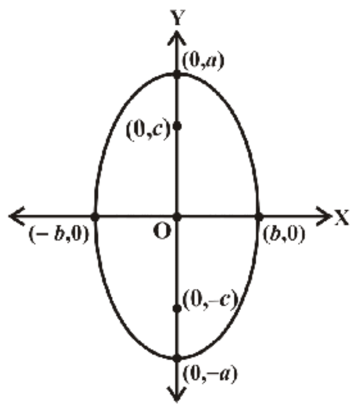
ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

F_1 (c, 0) യും F_2 (–c, 0) യും ആണല്ലോ. കൂടാതെ, ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച് $F_1P + F_2P = 2a$ ആയിരിക്കും.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

ചിത്രം 11.26

അകലസൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച്

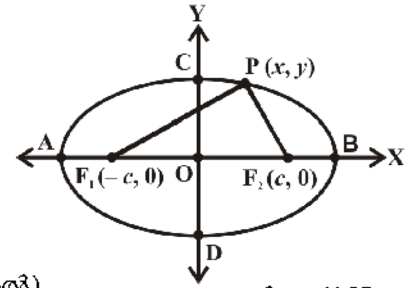
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$



ചിത്രം 11.27

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ കാരണം $c^2=a^2-b^2$ ആയതിനാൽ)

P (x, y) എന്ന ബിന്ദു $0 < c < a$. അനുസരിച്ചാൽ

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)} \quad \text{(since } b^2 = a^2 - c^2\text{)}$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}=a+\frac{c}{a}x$$

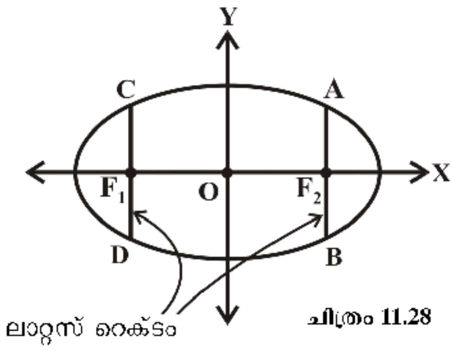
$$PF_2 = a-\frac{c}{a}x$$

$$PF_1 + PF_2 = a+\frac{c}{a}x+a-\frac{c}{a}x=2a \qquad \dots (3)$$

അതുകൊണ്ട് ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും ദീർഘാക്ഷം x അക്ഷവും ആയ ന്യൂന വക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ആയിരിക്കും.

11.5.4 നിരീക്ഷണം

1. (x, y) എന്ന ബിന്ദു ന്യൂനവക്രത്തിൽ ആയാൽ $(x, -y)$, $(-x, y)$ $(-x, -y)$ എന്നിവ അതേ ന്യൂനവക്രത്തിലായിരിക്കുമല്ലോ. അതുകൊണ്ടു ന്യൂനവക്രം രണ്ട് അക്ഷത്തിനും സമമിതമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു തന്നെ ന്യൂനവക്രത്തിന് രണ്ട് ഫോക്കസുകൾ, രണ്ട് ശീർഷങ്ങൾ, രണ്ട് ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവ ഉണ്ടായിരിക്കും.
2. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(\pm a, 0)$ ആയാൽ ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(0, \pm b)$ ആയിരിക്കും.
3. ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലാണെങ്കിൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 11.28

4. ലാറ്റസ് റെക്ടങ്ങളുടെ സമവാക്യം $x = \pm c$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. $x = \pm c$ ആയാൽ

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

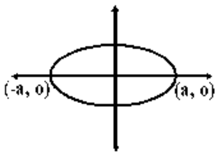
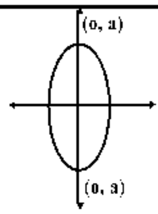
$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \frac{+b^2}{a}$$ ആയിരിക്കും

> 9x^2 + 25y^2 = 225 എന്ന input നൽകി ന്യൂനവക്രം വരയ്ക്കുക. c എന്ന പേരിൽ ഇതിന്റെ സമവാക്യം Algebra view ൽ കാണാം. focus (c) എന്ന input നൽകിയാൽ ഇതിന്റെ ഫോക്കസ് കാണാൻ കഴിയും.

$x - c$ എന്ന ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $\left(c, \frac{b^2}{a}\right), \left(c, \frac{-b^2}{a}\right)$ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ ക്രോഡീകരിച്ച് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ചിത്രം		
സമവാക്യം	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 - b^2$
കേന്ദ്രം	(0, 0)	(0, 0)
ഫോക്കസുകൾ	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
ശീർഷങ്ങൾ	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം	2a	2b
ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം	2b	2b
ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
ഉൾകേന്ദ്രത	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$

ഉദാഹരണം : 9

$9x^2 + 25y^2 = 225$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസുകളുടെയും ശീർഷങ്ങളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത എന്നിവയും ദീർഘാക്ഷം, ഹ്രസ്വാക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$$

ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ രണ്ട് ഫോക്കസും ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളവും അറിഞ്ഞാൽ കമാന്റ് ഉപയോഗിച്ച് വക്രം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഫോക്കസ് ആയുള്ള, ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 6 ആയ എലിപ്സ് വരയ്ക്കാൻ ellipse ((-2, 0), (2, 0), 3) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. (ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ് നൽകേണ്ടത്).
a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിച്ച് ellipse ((-a, 0), (a, 0), 3) എന്ന കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുക. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. എലിപ്സിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത്? a യുടെ വില പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ എലിപ്സിന് എന്തു സംഭവിക്കും? മൂന്നിനോടടുക്കുമ്പോഴോ?

$25 > 9$ ആയതുകൊണ്ട് $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16$$

$$c = 4$$

ഫോക്കസുകൾ $= (\pm c, 0) = (\pm 4, 0)$

ശീർഷങ്ങൾ $= (\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

ഉൾകേന്ദ്രത $= e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 10$

ഹ്രസ്വക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 8$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$

> സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചും എലിപ്സ് വരയ്ക്കാം. a, b എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമ്മിക്കുക. x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 എന്ന കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുക. a, b ഇവയുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. a > b, a = b, a < b എന്നീ സന്ദർഭങ്ങളിൽ എലിപ്സിനു വരുന്ന മാറ്റമെന്താണ്?

ഉദാഹരണം : 10

$9x^2 + 4y^2 = 36$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസുകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ, ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം, ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം, ഉൾകേന്ദ്രത എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

ഇവിടെ $\frac{y^2}{9}$ എന്ന പദത്തിന്റെ ഛേദം $\frac{x^2}{4}$ എന്ന പദത്തിന്റെ ഛേദത്തേക്കാൾ വലുതായതിനാൽ, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ എന്ന സാമാന്യരൂപവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ $b = 2$, $a = 3$.

$$c = \sqrt{a^2 \quad b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

അതുകൊണ്ട്, ഫോക്കസുകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, എന്നിവയും. ശീർഷങ്ങൾ $(0, 3)$, $(0, -3)$ എന്നിവയും ആണ്.

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 2 \times 3 = 6$

ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 2 \times 2 = 4$

ഉൾകേന്ദ്രത $= \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ഉദാഹരണം : 11

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 13)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$ ആയ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ ആയിരിക്കും. ദീർഘ അക്ഷം y അക്ഷത്തിലാണ്.

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm a) = (0, \pm 13)$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$a = 13$

ഫോക്കസുകൾ $= (0, \pm c) = (0, \pm 5)$

ആയതിനാൽ, $c = 5$

$c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 5^2$

അതുകൊണ്ട്, $b^2 = 144$

അതായത്, സമവാക്യം $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$ ആണ്

ഉദാഹരണം : 12

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 20 യൂണിറ്റും, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$ ആയതുമായ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസുകൾ y അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലൂടെയായിരിക്കും.

ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ആയിരിക്കും.

$$2a = 20,\ a = 10.$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 5^2 = 10^2 - b^2$$

$$\therefore b^2 = 75$$

അതുകൊണ്ട്, ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 13

ദീർഘ, ഹ്രസ്വാക്ഷങ്ങൾ യഥാക്രമം x അക്ഷത്തിലും y അക്ഷത്തിലും ആയ ന്യൂനവക്രത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (4, 3), (–1, 4). ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

(4, 3), (–1, 4) ഇവ രണ്ടും ന്യൂനവക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതുകൊണ്ട്

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \text{ ---------- } (1)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \text{ ---------- } (2)$$ ആയിരിക്കും

ഇവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ $a^2=\frac{247}{7}$, $b^2=\frac{247}{15}$ എന്ന് ലഭിക്കും. ഇവ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ സാമാന്യരൂപം $7x^2 + 15y^2 = 247$ എന്നു കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 14

കേന്ദ്രം (0, 0) വും ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലുമായ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{4}{\sqrt{3}}$ യും ഉൾകേന്ദ്രത $\frac{1}{\sqrt{3}}$ യും ആയാൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലായതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ആയിരിക്കാം.

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow b^2 = \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ ----------(1)}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$c^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$a^2 - b^2 = \frac{a^2}{3} \text{ ------------(2)}$$

$$b^2 = \frac{2a^2}{3}$$

സമവാക്യം (1), (2) ഇവയിൽ നിന്നും $a=\sqrt{3}$ എന്നും $b=\sqrt{2}$ എന്നും ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത സമവാക്യം $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ ആകുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.3

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ന്യൂനവക്രങ്ങളുടെ ശീർഷങ്ങളുടെയും ഫോക്കസുകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷം, ഹ്രസ്വാക്ഷം, ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$
2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$
3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$
5. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$
6. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$
7. $36x^2 + 4y^2 = 144$
8. $16x^2 + y^2 = 16$
9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് യോജിക്കുന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

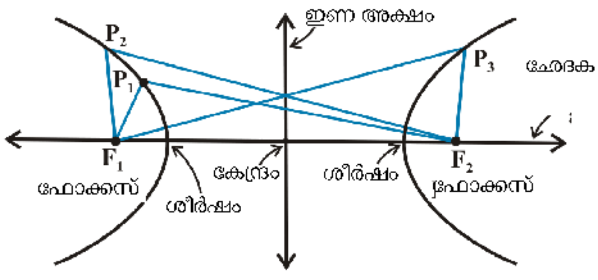
> പരിശീല പ്രശ്നങ്ങൾ 11.3 ലെ ഒന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിലെ എലിപ്സുകൾ വരച്ച് ഫോക്കസ് കണ്ടുപിടിക്കുക. രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിലെ നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന എലിപ്സുകൾ വരച്ച് സമവാക്യം കാണുക.

10. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 5, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$
11. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 13)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$
12. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 6, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$
13. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെയും ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെയും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$
14. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(0, \pm\sqrt{5})$, ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(\pm 1, 0)$
15. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 26, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 5, 0)$
16. ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 16, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 6)$.
17. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$
18. $b = 3$, $c = 4$, കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവിൽ, ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ
19. കേന്ദ്രം $(0, 0)$, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിൽ, $(3, 2)$, $(1, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ന്യൂനവക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ.
20. ദീർഘാക്ഷം x - അക്ഷത്തിൽ, ന്യൂനവക്രം $(4, 3)$, $(6, 2)$ ഇവയിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു.

11.6 അധിവക്രം (Hyperbola)

നിർവചനം

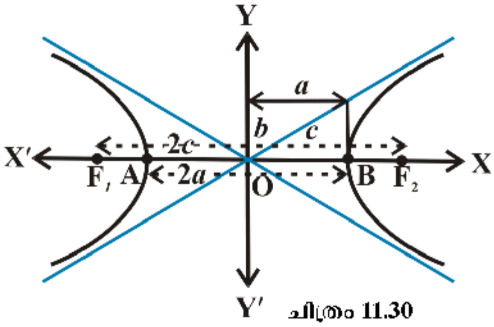
ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും അതേ തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയായാൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദു നിർണയിക്കുന്ന പാതയാണ് അധിവക്രം. നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളെ



$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$

ചിത്രം 11.29

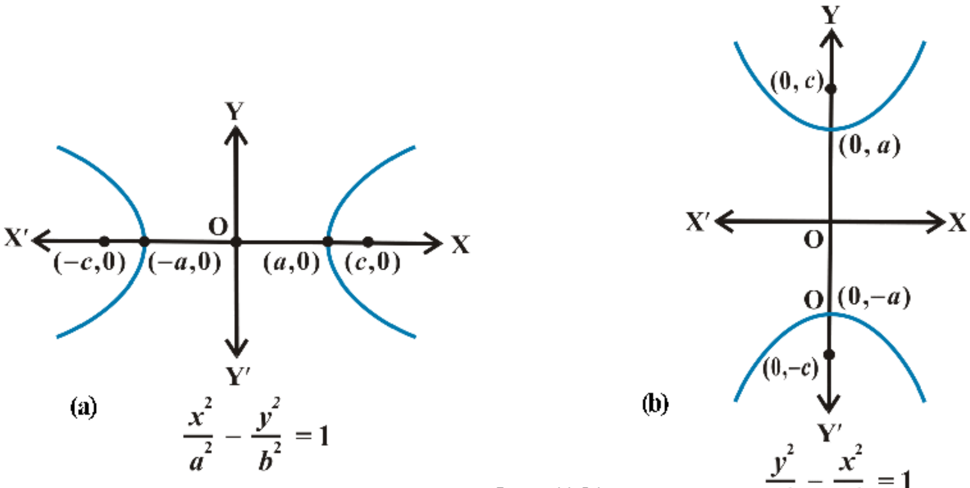
ഫോക്കസുകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. (ഇവിടെ ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുത് കുറക്കണം) ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് അധിവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യുക.



ചിത്രം 11.30

☛ കുറിപ്പ്:

1. രണ്ട് ഫോക്കസുകളുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് അധിവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രം.
2. ഫോക്കസുകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രേഖയാണ് ഛേദക അക്ഷം.
3. ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും കേന്ദ്രത്തിൽകൂടി പോകുന്നതുമായ രേഖയാണ് ഇണ അക്ഷം.
4. ഛേദക അക്ഷവും അധിവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് ശീർഷങ്ങൾ (അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ)
5. ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടിയുള്ള രേഖാഖണ്ഡമാണ് ലാറ്റസ്റെക്ടം.
6. ഈ അധ്യായത്തിൽ ന്യൂനവക്രത്തിലേതുപോലെ ഛേദക അക്ഷം x അക്ഷത്തിലും y അക്ഷത്തിലും വരുന്ന രണ്ട് രീതിയിലുള്ള അധിവക്രം മാത്രമെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.



(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ചിത്രം 11.31

നിരീക്ഷണം

A, B എന്നിവ ശീർഷങ്ങളും F_1, F_2 എന്നിവ ഫോക്കസുകളുമാണ്. ഇവ x അക്ഷത്തിലായതുകൊണ്ട് ഇവയെ (–a, 0), (a, 0), (–c, 0), (c, 0) എന്ന് എടുക്കാം.

$F_1F_2 = 2c$

AB = 2a ആണല്ലോ.

$b^2 = c^2 - a^2$ എന്ന് നിർവചിക്കാം, (0, ± b), (0, – b) ഇവ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുവായി എടുക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ $c^2 = a^2 + b^2$ ആയിരിക്കും.

Input കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുന്നതുപോലെ ഹൈപ്പർബോളയും വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് Hyperbola ((-2, 0), (2, 0), 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഫോക്കസും ട്രാൻസ്‌വേഴ്സ് അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 6 ഉം ആയ ഹൈപ്പർബോളലഭിക്കും.
Hyperbola ((-2, 0), (2, 0), 3)) എന്ന് നൽകിയാൽ ഫോക്കസ് (-2, 0), (2, 0) ആയതും യിൽ (2, 3) കൂടി കടന്നു പോകുന്നതുമായ ഹൈപ്പർ ബോള ലഭിയ്ക്കും.

ഇവിടെ $a \to 0$ ആകുമ്പോൾ അധിവക്രത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കും എന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

11.6.1 ഉൾകേന്ദ്രത (Eccentricity)

ന്യൂനവക്രത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഫോക്കസിലേക്കും ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയാണ് ഉൾകേന്ദ്രത എന്നു പറയുന്നത്. $e = \frac{c}{a}$ ഇവിടെ c > 1 ആയിരിക്കുമല്ലോ.

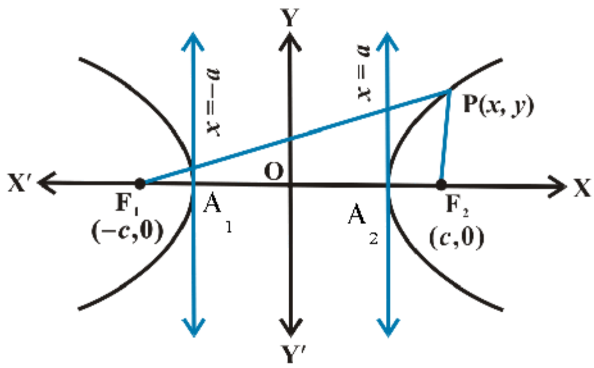
11.6.2 അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

F_1, F_2 എന്നിവ ഫോക്കസുകളും O രേഖഖണ്ഡം F_1F_2 ന്റെ മധ്യബിന്ദു വുമാണ്. F_1F_2 വിനെ X അക്ഷവും F_1F_2 വിന് ലംബമായ വര Y അക്ഷവുമായി എടുക്കുന്നു.

F_1, F_2 വിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (–c, 0), (c, 0) എന്നിരിക്കട്ടെ.

P(x, y) എന്നത് അധിവക്രത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവായതുകൊണ്ട്

$PF_1 - PF_2 = 2a$



ചിത്രം 11.32

= (c + a) - (c - a) = 2a ആയിരിക്കും.

അതായത്,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x\quad c)^2 + y^2}$$

വർഗമെടുത്താൽ, $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ------------(1)}$$ ആണ്.

നേരെ മറിച്ച്, **P**(x, y) എന്ന ബിന്ദു (1) പാലിക്കുകയാണെങ്കിൽ $(0 < a < c)$,

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

$$PF_1 = + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= + \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

$$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

$c > a; x > a$, എന്നിവ ആയതുകൊണ്ട്, $\frac{c}{a}x > a$.

$a - \frac{c}{a}x$ എന്നതു ന്യൂന സംഖ്യയാകും

$$\mathbf{PF}_2 = \frac{c}{a}x - a.$$

$$PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$$

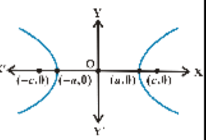
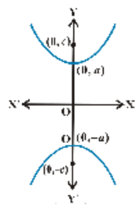
ആയതിനാൽ ഏതൊരു ബിന്ദു **P**(x, y) യും $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന സമവാക്യം പാലിക്കുന്നു.

അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ആയിരിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. (x, y) എന്ന ബിന്ദു $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന അധിവക്രത്തിൽ ആയാൽ $(-x, y)$, $(x_1, -y)$, $(-x, -y)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളും അതേ അധിവക്രത്തിൽ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് x അക്ഷത്തിനും y അക്ഷത്തിനും സമമിതമായിരിക്കും. അതിനാൽ അധിവക്രത്തിന് രണ്ടു ഫോക്കസും, രണ്ടു ശീർഷങ്ങളും, രണ്ടു ലാറ്റസ് റെക്ടവും ഉണ്ടാകും.
2. ഛേദക അക്ഷം y അക്ഷമായി എടുത്താൽ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ എന്നായിരിക്കും.
3. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം ന്യൂനവക്രത്തിലേതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങളെ ക്രോഡീകരിച്ചാൽ

ചിത്രം		
സമവാക്യം	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
കേന്ദ്രം	$(0, 0)$	$(0, 0)$
ഫോക്കസുകൾ ശീർഷങ്ങൾ	$(\pm c, 0)$ $(\pm a, 0)$	$(0, \pm c)$ $(0, \pm a)$
ഛേദക അക്ഷത്തിന്റെ നീളം	$2a$	$2a$
ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം	$2b$	$2b$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
ഉൾകേന്ദ്രത	$c = \frac{c}{a}$	$c = \frac{c}{a}$

ഉദാഹരണം : 16

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 12)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 36 ആയതുമായ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 12)$ ആയതുകൊണ്ട് $c = 12$.

$$\text{ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം} = \frac{2b^2}{a} = 36 \quad \therefore \quad b^2 = 18a$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$144 = a^2 + 18a$$

$$a^2 + 18a - 144 = 0$$

$$a = -24, 6.$$

a ന്യൂനസംഖ്യയാകാത്തതിനാൽ, $a = 6$ ആയിരിക്കും

$$\therefore \; b^2 = 108$$

അതുകൊണ്ട് അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$

$3y^2 - x^2 = 108$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 16

$16x^2 - 9y^2 = 144$ എന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസുകൾ എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത, കൂടാതെ ഛേദക അക്ഷം, ഇണ അക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

അതിവക്രത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 25$$
$$c = 5$$

ശീർഷങ്ങൾ $= (\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$

ഫോക്കസുകൾ $(\pm c, 0) = (\pm 5, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

ഛേദക അക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 6$

ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 8$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{32}{3}$

ഉദാഹരണം : 17

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 5)$ ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 7)$ ആയ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

ശീർഷം $= (0, \pm a) = (0, \pm 5), \quad a = 5$

ഫോക്കസ് $= (0, \pm c) = (0, \pm 7), \quad c = 7$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 7^2 - 5^2$$

$b^2 = 24$ ആരോപിച്ചാൽ

സമവാക്യം, $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{24} = 1$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 11.4

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം അതിൽ നിന്നും അവയുടെ ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസുകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത കൂടാതെ ഛേദകഅക്ഷം, ഇണഅക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം ഇവയുടെ നീളം എന്നിവ കാണുക.

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 2. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ 3. $9y^2 - 4x^2 = 36$

4. $16x^2 - 9y^2 = 576$ 5. $5y^2 - 9x^2 = 36$ 6. $49y^2 - 16x^2 = 784$.

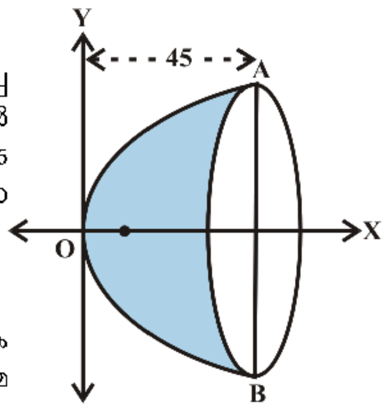
താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 2, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3, 0)$
8. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 5)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 8)$
9. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 3)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$
10. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 5, 0)$, ഛേദകഅക്ഷത്തിന്റെ നീളം 8.
11. ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 13)$, ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 24.
12. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 8.
13. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 12
14. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 7,0)$, $e = \frac{4}{3}$.
15. ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm\sqrt{10})$, അധിവക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു $(2, 3)$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 18

ചിത്രം 11.32 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവക്ര ദർപ്പണത്തിന്റെ ഫോക്കസ് അതിന്റെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 5 സെ.മീ. അകലത്തിലാണ്. കണ്ണാടിക്ക് 45 സെ.മീ. ആഴമുണ്ടെങ്കിൽ AB യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 11.33

പരിഹാരം

ഫോക്കസിന് ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 5 സെ.മീ. അകലമുള്ളത് കൊണ്ട് നമുക്ക് $a = 5$ എന്ന് എടുക്കാമ

ല്ലോ, ശീർഷം (0, 0) ആയി എടുക്കുകയും അക്ഷം x അക്ഷവുമായി എടുത്താൽ സമവാക്യം $y^2 = 4ax$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

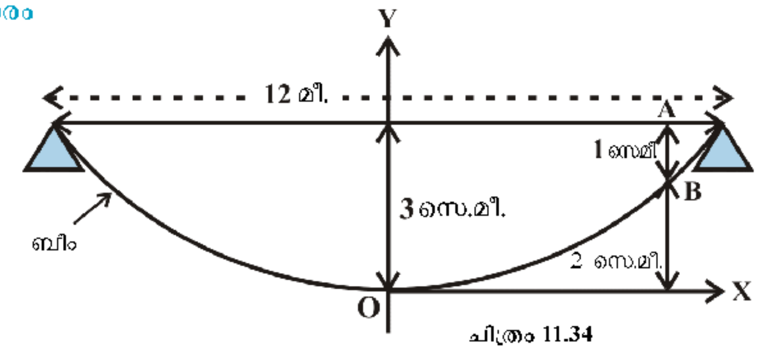
$$y^2 = 4\ (5)\ x$$
$$y^2 = 20\ x$$
$x = 45$ ആയാൽ
$$y^2 = 900$$
$$y = \pm 30$$

അതുകൊണ്ട്, AB = $2y = 2 \times 30 = 60$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു ബീമിനെ താങ്ങിനിർത്തുന്ന രണ്ടു തൂണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 12 മീറ്ററാണ്. ഭാരം മധ്യഭാഗത്ത് കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് കൊണ്ട് ബീമിന്റെ മധ്യഭാഗം 3 സെ.മീ. താഴോട്ട് വളഞ്ഞിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ വളഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബീമിന് സമവക്രത്തിന്റെ (Parabola) ആകൃതിയുണ്ട്. (ചിത്രം 11.34 നോക്കുക). എങ്കിൽ ബീമിന് താഴോട്ട് 1 സെ.മീ. വളവുള്ളത് മധ്യഭാഗത്ത് നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലാണ് കാണുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 11.34

വളഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബീമിന്റെ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ഭാഗം ശീർഷമായി പരിഗണിക്കുകയും അക്ഷം y അക്ഷമായി പരിഗണിച്ചാൽ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 = 4ay$ ആയിരിക്കും.

$\left(6, \frac{3}{100}\right)$ എന്ന ബിന്ദു സമവക്രത്തിലായതുകൊണ്ട്

$$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$$

അതുകൊണ്ട്, $a = \frac{36 \times 100}{12} = 300$ മീറ്റർ

AB എന്നത് ബീമിന് 1 സെ.മീ. വളഞ്ഞ ഭാഗമായാൽ. AB = $\frac{1}{100}$ മീറ്റർ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\left(x, \frac{2}{100}\right)$ എന്ന ബിന്ദുസമവക്രത്തിലായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $$x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

അതുകൊണ്ട് ബീമിന് താഴോട്ട് സെ.മീ. വളവുള്ളത് മധ്യ ഭാഗത്തു നിന്നും $2\sqrt{6}$ മീറ്റർ അകലത്തിലായിരിക്കും.

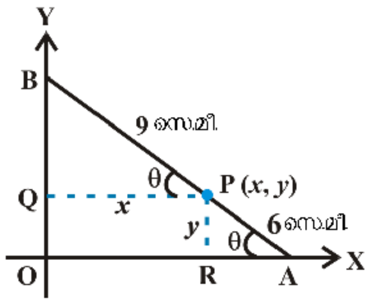
ഉദാഹരണം : 20

15 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ A എന്ന അഗ്രം x അക്ഷത്തിലും B എന്ന അഗ്രം y അക്ഷത്തിലുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ P(x, y) എന്ന ബിന്ദു ദണ്ഡിലുള്ള ബിന്ദുവാണ്. കൂടാതെ AP = 6 സെ.മീ. ആണ് (ചിത്രം കാണുക). ദണ്ഡിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളെ ഉരസിനീങ്ങുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാര പാത ന്യൂനവക്രം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

PB = 9 സെ.മീ. ആയിരിക്കും.

P യിൽ നിന്നും PQ, PR എന്നി ലംബങ്ങൾ യഥാക്രമം y അക്ഷത്തിലേക്കും x അക്ഷത്തിലേക്കും വരക്കുക.



ചിത്രം 11.35

Δ PBQ യിൽ നിന്നും $\cos\theta = \frac{x}{9}$

Δ PRA യിൽ നിന്നും $\sin\theta = \frac{y}{6}$

അതുകൊണ്ട് $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

അതായത്, $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ ആണ് ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ്.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമവക്ര റിഫ്ളക്ടറിന്റെ വ്യാസം 20 സെ. മീ. യും ആഴം 5 സെ. മീ. യും ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഫോക്കസ് കാണുക.

2. ഒരു ആർച്ചിന്റെ ആകൃതി സമവക്രമാണ്, അക്ഷം y അക്ഷമാണ്. ആർച്ചിന്റെ ഉയരം 10 മീറ്ററും അടിഭാഗത്തെ വീതി 5 മീറ്ററുമാണ്. എങ്കിൽ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 2 മീറ്റർ താഴെ ആർച്ചിനുള്ള വീതി കണക്കാക്കുക.

3. ഒരു തൂക്കുപാലം നിർമിച്ചിരിക്കുന്നത് സമവക്രാകൃതിയിലുള്ള രണ്ട് കേബിളുകളിൽ കുത്തനെയുള്ള കമ്പികൾ ഉപയോഗിച്ച് തിരശ്ചീനമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിട്ടാണ്. പാലത്തിന്റെ നീളം 100 മീറ്ററാണ്. കുത്തനെയുള്ള കമ്പികളിൽ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ കമ്പി 30 മീറ്ററും ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ കമ്പി 6 മീറ്ററുമാണ്. പാലത്തിന്റെ നടുക്ക് നിന്ന് 18 മീറ്റർ അകലത്തിൽ പാലത്തെ ബന്ധിപ്പിച്ച കുത്തനെയുള്ള കമ്പിയുടെ നീളം കാണുക.

4. ഒരു അർദ്ധ ന്യൂനവക്ര ആകൃതിയിലുള്ള ആർച്ചിന്റെ ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 8 മീറ്ററും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം 2 മീറ്ററും ആയാൽ ഒരു ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 1.5 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ആർച്ചിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

5. 12 മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി തറയിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. തറയിലെ അഗ്രത്ത് നിന്നും 3 മീറ്റർ അകലെ കമ്പിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് $P(x, y)$. കമ്പി, തറയിലൂടെ തെന്നി നീങ്ങുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്തായിരിക്കും? സമവാക്യം കാണുക.

6. $x^2 = 12y$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷവും, ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരു ഓട്ടക്കാരൻ തന്റെ ഓട്ടത്തിനിടയിൽ രണ്ടു കൊടിമരങ്ങൾ കാണുന്നു. അയാളിൽ നിന്നും കൊടിമരങ്ങളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും 10 മീറ്റർ ആണ്. കൊടിമരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 8 മീറ്റർ ആണ്. അയാൾ ഓടിയ പാതയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

8. $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണം അന്തർലേഖനം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷം സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷത്തിലാണ്. എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

സംഗ്രഹം

- ഒരു തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ നിന്നും നിശ്ചിത അകലത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും കൂട്ടമാണ് വൃത്തം.
- കേന്ദ്രം (h, k) യും ആരം r ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

- ഒരു തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത രേഖയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഹിതിചെയ്യുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും കൂട്ടമാണ് സമവക്രം.
- ഫോക്കസ് $(a, 0)$, $a > 0$ യും ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = -a$ യും ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപമാണ് $y^2 = 4ax$.
- സമവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നത് സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ സമവക്രത്തിലുമായ രേഖഖണ്ഡമാണ്.
- $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $4a$ ആയിരിക്കും.
- ഒരു തലത്തിലെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ തുക എല്ലായിപ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായി വരുന്ന മുഴുവൻ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്നാൽ ലഭിക്കുന്ന സംവൃതരൂപമാണ് ന്യൂനവക്രം.
- ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ വരുന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ആകുന്നു.
- ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടം ദീർഘാക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ ന്യൂനവക്രത്തിലുമായ രേഖാഖണ്ഡമാണ്.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കും.

- ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമാണ് ആ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത.
- ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായി വരുന്ന മുഴുവൻ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്ന രൂപമാണ് അധിവക്രം.
- ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ വരുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപമാണ്

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- അധിവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നത് അതിന്റെ ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രങ്ങൾ അധിവക്രത്തിൽ വരുന്നതുമായ രേഖാഖണ്ഡമാണ്.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കാം.
- ഒരു അധിവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമാണ് ആ അതിവക്രത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഏറെ പഴക്കമുള്ള പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു വിഭാഗമാണ് ജ്യാമിതി. ഗ്രീക്ക് ജ്യാമിതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ വിവിധതരം വക്രങ്ങളുടെ സൈദ്ധാന്തികവും പ്രായോഗികകവുമായ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് പഠനം നടത്തിയിട്ടുണ്ട്. യൂക്ലിഡ് ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്നത് ബി.സി. 300ൽ ആണ്. അദ്ദേഹമാണ് പ്രായോഗികതലങ്ങളിൽ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളും ആശയങ്ങളും ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്. ബീജഗണിതമില്ലാതെ ആദ്യമായി ജ്യാമിതീയ പഠനങ്ങൾ നടത്തിയത് പ്രാചീന ഭാരതീയരും ഗ്രീസുകാരുമാണ്. ജ്യാമിതിക്ക് ഒരു സംയോജനസമീപനം ആദ്യമായി നടപ്പിലാക്കിയത് യൂക്ലിഡും സുൽബസൂത്രയിലുമാ

ണ്, ഇത് 1300 വർഷത്തോളം കാര്യമായ മാറ്റമില്ലാതെ തുടർന്നുവന്നു. ബി.സി. 200 ൽ അപ്പലോണിസ് 'ദ കോണിക്' എന്ന ഗ്രന്ഥമെഴുതി വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങളിലെ ധാരാളം കണ്ടെത്തലുകൾ ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഉണ്ടായിരുന്നു. 18–ാം നൂറ്റാണ്ടോളം ഇതിനെ വെല്ലാൻ മറ്റൊരു പുസ്തകവും ഇല്ലായിരുന്നു.

1637 ൽ റെനെ ദെക്കാർത്തെ (1596 – 1650) പ്രസിദ്ധീകരിച്ച 'La Geometrie' എന്ന ഗ്രന്ഥത്തോടെ ആധുനിക ജ്യാമിതിയെ "കാർട്ടിഷൻ ജ്യാമിതി" എന്ന പേരിലാണ് ഇപ്പോൾ അറിയപ്പെടുന്നത്. പക്ഷെ ജ്യാമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങളും രീതികളും കണ്ടെത്തിയത് പിയർ ദ് ഫെർമ (1601 – 1665) ൽ ആയിരുന്നു. നിർഭാഗ്യവശാൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ കണ്ടുപിടുത്തമായ 'Introduction to Plane and Solid Loci' അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാനന്തരം 1679 ൽ മാത്രമാണ് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചത് അതുകൊണ്ട് ദെക്കാർത്തെയെയാണ് അനലറ്റിക് ജ്യാമിതിയുടെ പിതാവായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നത്.

ഐെസക് ബാരോ കാർട്ടീഷൻ രീതി ഒഴിവാക്കിയിരുന്നു. ന്യൂട്ടൻ, നിർണയിക്കാൻ കഴിയാത്ത ഗുണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നിർണയിച്ചത്. കൂടാതെ അദ്ദേഹം പോളാർ, ബൈപോളാർ തുടങ്ങിയ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

ലൈബ്നിറ്റ്സ് ആദ്യമായി അബ്സിസ, ഓർഡിനേറ്റ്, കോർഡിനേറ്റ് തുടങ്ങിയ പദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു. ലോസ്പിറ്റൽ 1700 ൽ അനലറ്റിക് ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചൊരു പ്രധാനപ്പെട്ട ഗ്രന്ഥമെഴുതി.

ക്ലേറു 1729 ൽ ആദ്യമായി 'ദൂര സമവാക്യം' അവതരിപ്പിച്ചു. കൂടാതെ ഇട അകലരൂപത്തെക്കുറിച്ചും അദ്ദേഹം സമവാക്യം അവതരിപ്പിച്ചു. 1750 കാർമർ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(y - a)^2 + (b - x)^2 = r$ എന്ന രൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിച്ചു. മോംഗെ 1781 ൽ ബിന്ദു – ചരിവ് രീതി $y - y' = a(x - x')$ എന്നതും, പരസ്പരം ലംബമാകുന്ന നിബന്ധന $aa' + 1 = 0$ എന്ന രൂപത്തിലും അവതരിപ്പിക്കുകയുണ്ടായി. S.F. ലാക്രോയിക്സ് (1765–1843) 'two-point' സമവാക്യത്തെ

$y - \beta = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$ എന്ന രൂപത്തിലും (α, β) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും

$y = ax + b$ എന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള ദൂരത്തെ $\dfrac{(\beta - a - b)}{\sqrt{1 + a^2}}$ എന്ന രൂപത്തിലും

അവതരിപ്പിച്ചു. കൂടാതെ രണ്ട് രേഖകൾ തമ്മിൽ നിർണ്ണയിക്കുന്ന കോണളവ്

θ ആയാൽ $\tan\theta = \left(\dfrac{a'-a}{1+aa'}\right)$ ആയിരിക്കുമെന്നും എഴുതുകയുണ്ടായി. പിന്നീട്

150 വർഷത്തോളം കഴിഞ്ഞതിന് ശേഷമാണ് 1818 ൽ സി. ലയിം എന്ന സിവിൽ എഞ്ചിനിയർ $mE + m'E' = 0$ എന്നതാണ് $E = 0, E' = 0$ എന്നീ 'ലോസി'യിൽ കൂടി യുള്ള വക്രത്തിന്റെ നിബന്ധന എന്ന് തെളിയിക്കുകയുണ്ടായത്.

ഗണിതത്തിലും ശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള പലകണ്ടുപിടുത്തങ്ങളും വൃത്തസ്തൂപികാ പരിഛേദത്തെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയുണ്ടായി. എങ്കിലും ആർക്കിമിഡീസും അപ്പ ലോണിസും അവരുടെ കാലത്ത് കണ്ടെത്തിയ പ്രത്യേകതകളും ബന്ധങ്ങളും ഈ കാലഘട്ടത്തിലും പലമേഖലകളിലെ പുതിയ പുതിയ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളിൽ ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു.