1. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $x^2 + 3x + 2$**

➥ $y = x^2 + 3x + 2$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2x + 3)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

2. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : x^{20}**

➥ $y = x^{20}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{20})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 20x^{19}$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(20x^{19}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 20 \times 19 \times x^{18}$$

$$= 380\, x^{18}$$

3. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $x \cdot \cos x$**

➥ $y = x \cos x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cos x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x(-\sin x) + \cos x(1)$$

$$= -x \sin x + \cos x$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-x \sin x + \cos x)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -x \cos x - \sin x - \sin x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -(x \cos x + 2\sin x)$$

4. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $\log x$**

➡ $y = \log x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

5. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $x^3 \log x$**

➡ $y = x^3 \log x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \log x)$$

$$= x^3 \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 \log x$$

$$= x^2 + 3x^2 \log x$$

$$= x^2 (1 + 3 \log x)$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 (1 + 3\log x)\right)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2x(1 + 3\log x) + x^2\left(0 + 3 \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x + 6x \log x + 3x$$

$$= 5x + 6x \log x$$

$$= x (5 + 6 \log x)$$

6. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $e^x \sin 5x$**

➡ $y = e^x \sin 5x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin 5x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\sin 5x) + \sin 5x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x \cdot \cos 5x \cdot 5 + \sin 5x \cdot e^x$$

$$= e^x [5 \cos 5x + \sin 5x]$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[e^x (5\cos 5x + \sin 5x)\right]$$

$$= e^x \cdot \frac{d}{dx}(5\cos 5x + \sin 5x) + (5\cos 5x + \sin 5x)\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$= e^x (-25 \sin 5x + 5 \cos 5x) + (5 \cos 5x + \sin 5x)\, e^x$$

$$= e^x [-25 \sin 5x + 5 \cos 5x + 5 \cos 5x + \sin 5x]$$

$$= e^x [10 \cos 5x - 24 \sin 5x]$$

$$= 2\, e^x [5 \cos 5x - 12 \sin 5x]$$

7. વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $e^{6x}\cos 3x$

➡ $y = e^{6x}\cos 3x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{6x}\cos 3x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{6x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x\frac{d}{dx}(e^{6x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{6x}(-3\sin 3x) + \cos 3x \cdot 6e^{6x}$$

$$= 6 \cdot e^{6x} \cdot \cos 3x - 3e^{6x}\sin 3x$$

$$= 3e^{6x}[2\cos 3x - \sin 3x]$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(3e^{6x}(2\cos 3x - \sin 3x)\right)$$

$$= 3e^{6x}\frac{d}{dx}(2\cos 3x - \sin 3x) + (2\cos 3x - \sin 3x)\cdot\frac{d}{dx}\left(3e^{6x}\right)$$

$$= 3e^{6x}(-6\sin 3x - 3\cos 3x) + (2\cos 3x - \sin 3x)\ 18\,e^{6x}$$

$$= 3e^{6x}[-6\sin 3x - 3\cos 3x + 12\cos 3x - 6\sin 3x]$$

$$= 3e^{6x}[9\cos 3x - 12\sin 3x]$$

$$= 9e^{6x}[3\cos 3x - 4\sin 3x]$$

8. વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $\tan^{-1} x$

➡ $y = \tan^{-1} x$

x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[(1+x^2)^{-1}\right]$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

9. વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : $\log(\log x)$

➡ $y = \log(\log x)$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\log(\log x)\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\log x\,\frac{d}{dx}(1) - 1\,\frac{d}{dx}(x\log x)}{(x\log x)^2}$$

$$= \frac{0 - \left[x\cdot\frac{1}{x} + \log x\right]}{(x\log x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

10. **વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો : sin (log x)**

➡ $y = \sin(\log x)$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\log x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(\log x)}{x}\right)$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{d}{dx}\cos(\log x) - \cos(\log x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$= \frac{-x\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} - \cos(\log x)}{x^2}$

$= \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$

11. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : e^{ax}**

➡ $a^2 e^{ax}$

12. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $x^3 + \tan x$**

➡ $6x + 2\sec^2 x \tan x$

13. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $\sin^2 x$**

➡ $2\cos 2x$

14. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $\tan^{-1} 3x$**

➡ $\frac{-54x}{(1+9x^2)^2}$

15. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $\log e^{x^{x^x}}$**

➡ $-\frac{1}{x^2}$

16. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $3\sin 4x - 4\sin^3 4x$**

➡ $-144\sin(12x)$

17. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $e^{-2\log x}$**

➡ $\frac{6}{x^4}$

18. **વિધેયોનાં દ્વિતીય કક્ષાનાં વિકલન મેળવો : $\sin(x^2 + 5)$**

➡ $2\cos(x^2+5) - 4x^2\sin(x^2+5)$

19. જો $y = 5\cos x - 3\sin x$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

➡ $y = 5\cos x - 3\sin x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = -5\sin x - 3\cos x$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\cos x + 3\sin x$

$= -(5\cos x - 3\sin x)$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

20. **જો $y = \cos^{-1} x$ તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ માત્ર yના પદ સ્વરૂપે મેળવો.**

➡ $y = \cos^{-1}x \;\Rightarrow\; \cos y = x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \dfrac{d}{dx}\left(-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x)$

$= \dfrac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{-\cos y}{(1-\cos^2 y)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad (\because\; x = \cos y)$

$= \dfrac{-\cos y}{\sin^3 y}$

$= -\cot y \cdot \operatorname{cosec}^2 y$

બીજી રીત :

➡ $y = \cos^{-1} x \Rightarrow x = \cos y$

y પ્રત્યે વિકલન કરતાં, $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin y} = -\operatorname{cosec} y$ ....(i)

y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} y)$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dy}(-\operatorname{cosec} y) \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$= \operatorname{cosec} y \cdot \cot y \cdot (-\operatorname{cosec} y)$ ((i) ઉપરથી)

$= -\cot y \cdot \operatorname{cosec}^2 y$

21. **જો $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.**

➡ $y = y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$

$y_1 = \dfrac{dy}{dx} = -3\sin(\log x) \cdot \dfrac{1}{x} + 4\cos(\log x) \cdot \dfrac{1}{x}$

$\therefore y_1 = \dfrac{-3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)}{x}$

$\therefore\ xy_1 = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$xy_2 + y_1 = -3\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - 4\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ xy_2 + y_1 = \frac{-3\cos(\log x) - 4\sin(\log x)}{x}$$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 = -(3\cos(\log x) + 4\sin(\log x))$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 = -y$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

22. જો $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$.

➡ $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = Ame^{mx} + Bne^{nx} \quad \text{........(i)}$$

x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx} + Bn^2\cdot e^{nx}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} &= Am^2e^{mx} + Bn^2e^{nx} - mny + mny\\ &= Am^2e^{mx} + Bn^2e^{nx} + Amne^{mx} + Bmne^{nx} - mny\\ &= m(Ame^{mx} + Bne^{nx}) + n(Ame^{mx} + Bne^{nx}) - mny\\ &= m\frac{dy}{dx} + n\frac{dy}{dx} - mny \qquad \text{((i) પરથી)}\\ &= (m+n)\frac{dy}{dx} - mny\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$$

23. જો $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = 49\,y$.

➡ $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 500\times 7e^{7x} - 600\times 7\times e^{-7x}$$

x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 500\times 49\,e^{7x} + 600\times 49\,e^{-7x}\\ &= 49\,[500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}]\\ &= 49\,y\end{aligned}$$

24. જો $e^y(x+1) = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

➡ $e^y(x+1) = 1$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}\left[e^y(x+1)\right] = 1$$

$$(x+1)\frac{d}{dx}(e^y) + e^y\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\therefore\ (x+1)\,e^y\cdot\frac{dy}{dx} + e^y = 0$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)}$ ....(i)

ફરીથી x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)(0)-(-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ($\because$ (i) પરથી)

25. **જો $y = (\tan^{-1}x)^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$.**

➡ $y = (\tan^{-1}x)^2$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = y_1 = 2\tan^{-1}x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore (1+x^2)\, y_1 = 2\tan^{-1}x$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$(1+x^2)^2\, y_1^2 = 4\,(\tan^{-1}x)^2$

$\therefore (1+x^2)^2 \cdot y_1^2 = 4y$

x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં,

$(1+x^2)^2 \cdot 2y_1y_2 + 2(1+x^2)\, 2x \cdot y_1^2 = 4y_1$

$\therefore (1+x^2)^2\, y_2 + 2x\,(1+x^2)\, y_1 = 2$

($\because 2y_1 \neq 0$ વડે ભાગતાં)

26. **$y = \sin^{-1}x$ હોય તો સાબિત કરો કે, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

27. **$y = e^{\tan x}$ હોય તો સાબિત કરો કે, $(\cot^2 x)\frac{d^2y}{dx^2} = (1+\sin 2x)\frac{dy}{dx} = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

28. **$y = \sin(\sin x)$ હોય તો સાબિત કરો કે, $\frac{d^2y}{dx^2} + (\tan x)\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

29. **જો $x^m \cdot y^n = (x+y)^{m+n}$ હોય તો સાબિત કરો કે, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

30. **જો $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ હોય તો સાબિત કરો કે, $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

31. **જો $y = e^{ax}\sin bx$ હોય તો સાબિત કરો કે, $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)\, y = 0$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

32. **જો $y = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^m$ તો સાબિત કરો કે, $(x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2y$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને

33. **$2x = y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}}$ $(n \geq 1)$ તો સાબિત કરો કે, $(x^2-1)\, y_2 + xy_1 = m^2y$.**

➡ સ્વપ્રયત્ને