

प्रकीर्णन के माप

Ex 13.1

प्रश्न 1. चतुर्थक विचलन गुणांक का सूत्र लिखिए।

हल : चतुर्थक विचलन गुणांक = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

प्रश्न 2. किसी चर श्रेणी का $Q_1 = 61$ व $Q_3 = 121$ है, तो उसका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : चतुर्थक विचलन

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \\ &= \frac{121 - 61}{2} = \frac{60}{2} = 30 \end{aligned}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित आँकड़ों के चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
3, 8, 11, 13, 17, 19, 20, 22, 23, 27, 31

हल : यहाँ कुल पद = 11

श्रेणी का प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \frac{1+1}{4} = 3\text{rd पद} = 11$

श्रेणी का तृतीय चतुर्थक $Q_3 = \frac{3(11+1)}{4} = 9\text{th पद} = 23$
इसलिए चतुर्थक विचलन

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{23 - 11}{2} = \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

चतुर्थक विचलन गुणांक

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \\ &= \frac{23 - 11}{23 + 11} = \frac{12}{34} = 0.352 \end{aligned}$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित सारणी में परास एवं परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

x	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
f	4	5	6	3	2	1	3	5

हल : यहाँ निम्न सीमा = 4.5 = L

अतः न्यूनतम मान (L) = 4.5

तथा ऊपरी सीमा = 11.5

अतः अधिकतम मूल्य (H) = 11.5

∴ परास R = H - L = 11.5 - 4.5 = 7

$$\begin{aligned} \text{तथा परास गुणांक} &= \frac{H-L}{H+L} \\ &= \frac{11.5-4.5}{11.5+4.5} \\ &= \frac{7}{16} = 0.44 \end{aligned}$$

प्रश्न 5. निम्न श्रेणी के अन्तर-चतुर्थक परास एवं इसके गुणांक की गणना कीजिए

x	1	3	5	7
f	10	15	3	2

हल :

दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

x	f	c.f
1	10	10
3	15	25
5	3	28
7	2	30

यहाँ N = 30

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 30}{4} = 22.5$$

चतुर्थक परास की गणना

$Q_3 = 22.5$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता से सम्बन्धित

$$x = 3$$

$$\text{पुनः } \frac{N}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

$$\text{अतः } Q_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{अन्तर-चतुर्थक परास} &= Q_3 - Q_1 \\ &= 3 - 1 = 2 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अन्तर-चतुर्थक परास गुणांक} &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \\ &= \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

प्रश्न 6. निम्न आँकड़ों से परास गुणांक ज्ञात कीजिए

आकार	10-15	15-20	20-25	25-30
बारम्बारता	2	4	6	8

हल :

यहाँ छोटा वर्ग 10-15 की निम्न सीमा 10 है।

अतः न्यूनतम मूल्य (L) = 10

तथा बड़े वर्ग 25-30 की ऊपरी सीमा = 30

अतः अधिकतम मूल्य (H) = 30

परास गुणांक (C.R.)

$$\begin{aligned} &= \frac{H - L}{H + L} \\ &= \frac{30 - 10}{30 + 10} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= 0.5$$

प्रश्न 7. निम्न आँकड़ों के आधार पर दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f	3	9	8	5	7	5	7	6

हल :

दिये गये आँकड़ों से अग्र तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल x	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c.f)
0-10	3	3
10-20	9	12
20-30	8	20
30-40	5	25
40-50	7	32
50-60	5	37
60-70	7	44
70-80	6	50

दशमक परास की गणना :

$$\frac{9N}{10} = \frac{9 \times 50}{10} = 45$$

45 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 50 है। जिसके संगत वर्ग 70-80 है

$$\therefore l = 70, f = 6, F = 44, h = 10$$

अतः

$$D_9 = \frac{\frac{9N}{10} - F}{f} \times h$$
$$= 70 + \frac{45 - 44}{6} \times 10$$
$$= 70 + \frac{10}{6}$$

$$= 70 + 1.667 = 71.667$$

पुनः $\frac{1N}{10} = \frac{50}{10} = 5$

पुनः 5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 12 है जिसके संगत वर्ग 10-20 है।

$$\therefore l = 10, F = 3, f = 9, h = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore D_1 &= 10 + \frac{\frac{1 \times 50}{10} - 3}{9} \times 10 \\ &= 10 + \frac{5 - 3}{9} \times 10 \\ &= 10 + \frac{20}{9}\end{aligned}$$

$$= 10 + 2.222 = 12.222$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{दशमक परास} &= 71.667 - 12.222 \\ &= 59.445\end{aligned}$$

शतमक परास की गणना-

$$\frac{90N}{100} = \frac{90 \times 50}{100} = 45$$

45 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग 70-80 है।

$$\therefore l = 70, f = 6, F = 44, h = 10$$

$$\begin{aligned}\text{अतः } P_{90} &= 70 + \frac{\frac{90 \times 50}{100} - 44}{6} \times 10 \\ &= 70 + \frac{45 - 44}{6} \times 10 \\ &= 70 + \frac{10}{6} = 71.667\end{aligned}$$

पुनः $\frac{10N}{100} = \frac{10 \times 50}{100} = 5$

5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 12 है जिसके संगत वर्ग 10-20 है।

$$\therefore l = 10, F = 3, f = 9, h = 10$$

$$\begin{aligned} P_{10} &= 10 + \frac{\frac{10 \times 50}{100} - 3}{9} \times 10 \\ &= 10 + \frac{5 - 3}{9} \times 10 \\ &= 10 + \frac{20}{9} = 12.222 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{शतमक परास} = P_{90} - P_{10}$$

$$= 71.667 - 12.222$$

$$= 59.445$$

प्रश्न 8. निम्न बारम्बारता बंटन में दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता (f)	5	8	20	14	3

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल (x)	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c.f.)
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	20	33
30-40	14	47
40-50	3	50

दशमक परास की गणना

$$\frac{9N}{10} = \frac{9 \times 50}{10} = 45$$

45 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 47 है,

जिसके संगत वर्ग 30-40 है

$$l = 30, f = 14, F = 33, h = 10$$

$$\begin{aligned}\text{अतः} \quad D_9 &= l + \frac{\frac{9N}{10} - F}{f} \times h \\ &= 30 + \frac{45 - 33}{14} \times 10 \\ &= 30 + \frac{12}{14} \times 10 \\ &= 38.571\end{aligned}$$

$$\text{पुनः} \quad \frac{1N}{10} = \frac{50}{10} = 5.0$$

5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 13 है जिसके संगत वर्ग 10-20 है।

$$\therefore l = 10, F = 5, f = 8, h = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad D_1 &= 10 + \frac{\frac{1 \times 50}{10} - 5}{8} \times 10 \\ &= 10 + \frac{5 - 5}{8} \times 10 \\ &= 10 + 0 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \text{दशमक परास} &= D_9 - D_1 \\ &= 38.571 - 10 \\ &= 28.571\end{aligned}$$

शतमक परास की गणना

$$\frac{90N}{100} = \frac{90 \times 50}{100} = 45$$

45 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 47 है जिसके संगत वर्ग 30-40 है।

$$\therefore l = 30, f = 14, F = 33, h = 10$$

अतः

$$P_{90} = 30 + \frac{\frac{90 \times 50}{100} - 33}{14} \times 10$$

$$= 30 + \frac{45 - 33}{14} \times 10$$

$$= 30 + \frac{12}{14} \times 10 = 38.571$$

पुनः

$$\frac{10N}{100} = \frac{10 \times 50}{100} = 5$$

5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 13 है जिसके संगत वर्ग 10-20 है।

$$\therefore l = 10, F = 5, f = 8, h = 10$$

$$\therefore P_{10} = 10 + \frac{5-5}{8} \times 10$$

$$= 10$$

$$\therefore \text{शतमक परास} = P_{90} - P_{10}$$

$$= 38.571 - 10$$

$$= 28.571$$

Ex 13.2

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आंकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

हल-

दिये गये आँकड़ों का माध्य (\bar{x})

$$= \frac{4+7+8+9+10+12+13+17}{8}$$

$$= \frac{80}{8} = 10$$

S.No.	x_i	$ x_i - \bar{x} = x_i - 10 $
1.	4	$ 4 - 10 = 6$
2.	7	$ 7 - 10 = 3$
3.	8	$ 8 - 10 = 2$
4.	9	$ 9 - 10 = 1$
5.	10	$ 10 - 10 = 0$
6.	12	$ 12 - 10 = 2$
7.	13	$ 13 - 10 = 3$
8.	17	$ 17 - 10 = 7$
	$\Sigma x_i = 80$	$\Sigma x_i - \bar{x} = 24$

$$\therefore \text{माध्य विचलन } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

प्रश्न 2. 28, 60, 38, 30, 32, 45, 53, 36, 44, 34

हल-

दिये गये आँकड़ों का माध्य (\bar{x})

$$= \frac{28 + 60 + 38 + 30 + 32 + 45 + 53 + 36 + 44 + 34}{10}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{400}{10} = 40$$

x_i	$ x_i - \bar{x} = x_i - 40 $
28	$ 28 - 40 = 12$
60	$ 60 - 40 = 20$
38	$ 38 - 40 = 2$
30	$ 30 - 40 = 10$
32	$ 32 - 40 = 8$
45	$ 45 - 40 = 5$
53	$ 53 - 40 = 13$
36	$ 36 - 40 = 4$
44	$ 44 - 40 = 4$
34	$ 34 - 40 = 6$
$\Sigma x_i = 400$	$\Sigma x_i - 40 = 84$

$$\therefore \text{माध्य विचलन } (\bar{x}) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})}{n}$$

$$= \frac{84}{10} = 8.4$$

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. 13, 10, 12, 13, 15, 18, 17, 11, 14, 16, 12

हल-

आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर चर के मान होंगे-

10, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 18

यहाँ $n = 11$

$$\text{इसलिए माधिका} = \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{th पद}$$

$$\therefore M = 13$$

अब दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं—

x_i	$ x_i - M = x_i - 13 $
10	$ 10 - 13 = 3$
11	$ 11 - 13 = 2$
12	$ 12 - 13 = 1$
12	$ 12 - 13 = 1$
13	$ 13 - 13 = 0$
13	$ 13 - 13 = 0$
14	$ 14 - 13 = 1$
15	$ 15 - 13 = 2$
16	$ 16 - 13 = 3$
17	$ 17 - 13 = 4$
18	$ 18 - 13 = 5$
$n = 11$	$\sum x_i - M = 22$

$$\text{माध्यिका से माध्य विचलन} = \frac{\sum |x_i - 13|}{n} = \frac{22}{11} = 2$$

प्रश्न 4. 26, 32, 35, 39, 41, 62, 36, 50, 43

हल-

आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर चर के मान होंगे-
26, 32, 35, 36, 39, 41, 43, 50, 62

यहाँ $n = 9$

इसलिए माध्यिका = $\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2}$ वाँ पद = 5 वाँ पद = 39

$M = 39$

अब दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

x_i	$ x_i - M = x_i - 39 $
26	$ 26 - 39 = 13$
32	$ 32 - 39 = 7$
35	$ 35 - 39 = 4$
36	$ 36 - 39 = 3$
39	$ 39 - 39 = 0$
41	$ 41 - 39 = 2$
43	$ 43 - 39 = 4$
50	$ 50 - 39 = 11$
62	$ 62 - 39 = 23$
	$\Sigma x_i - M = 67$

$$\text{माधिका से माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \Sigma|x_i - 39| = \frac{1}{9} \times 67 = 7.44$$

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. 2, 4, 6, 4, 8, 6, 4, 10, 4, 8

हल- दिए गए आँकड़ों में 4 सर्वाधिक 4 बार आया है। अतः बहुलक $Z = 4$

चर x	$ x - Z = x_1 - 4 $
2	2
4	0
6	2
4	0
8	4
6	2
4	0
10	6
4	0
8	4
$n = 10$	$\Sigma x_i - 4 = 20$

$$\begin{aligned} \text{बहुलक से माध्य विचलन (Z)} &= \frac{1}{n} \Sigma|x_i - Z| \\ &= \frac{1}{10} \times 20 = 2 \end{aligned}$$

प्रश्न 6. 2.2, 2.5, 2.1, 2.5, 2.9, 2.8, 2.5, 2.3

हल- दिए गए आँकड़ों में 2.5 सर्वाधिक 3 बार आया है। अतः बहुलक $Z = 2.5$

यहाँ $n = 8$

चर x_i	$ x_i - Z = x_i - 2.5 $
2.2	$ 2.2 - 2.5 = 0.3$
2.5	$ 2.5 - 2.5 = 0.0$
2.1	$ 2.1 - 2.5 = 0.4$
2.5	$ 2.5 - 2.5 = 0.0$
2.9	$ 2.9 - 2.5 = 0.4$
2.8	$ 2.8 - 2.5 = 0.3$
2.5	$ 2.5 - 2.5 = 0.0$
2.3	$ 2.3 - 2.5 = 0.2$
	$\Sigma x_i - 2.5 = 1.6$

$$\begin{aligned}\text{बहुलक से माध्य विचलन} &= \frac{1}{n} \times \Sigma|x_i - Z| \\ &= \frac{1}{8} \times 1.6 = 0.2\end{aligned}$$

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

हल- दिये गये आँकड़ों के अनुसार

S.No.	x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
1.	5	7	35	9	63
2.	10	4	40	4	16
3.	15	6	90	1	6
4.	20	3	60	6	18
5.	25	5	125	11	55
		$\Sigma f_i = N$ = 25	$\Sigma f_i x_i$ = 350		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} $ = 158

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i = N} = \frac{350}{25} = 14$$

$$\therefore \text{माध्य विचलन M.D. } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{158}{25} = 6.32$$

प्रश्न 8.

x_i	20	40	60	80	100
f_i	2	12	14	8	4

हल- दिये गये आँकड़ों के अनुसार

S.No.	x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
1.	20	2	40	$ 20 - 60 = 40$	80
2.	40	12	480	$ 40 - 60 = 20$	240
3.	60	14	840	$ 60 - 60 = 0$	0
4.	80	8	640	$ 80 - 60 = 20$	160
5.	100	4	400	$ 100 - 60 = 40$	160
		Σf_i = 40	$\Sigma f_i x_i$ = 2400		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} $ = 640

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2400}{40} = 60$$

$$\therefore \text{माध्य विचलन M.D. } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$$

$$= \frac{640}{40} = 16$$

प्रश्न 9 व 10 के आँकड़ों के लिए माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

हल-

S.No.	x_i	f_i	cf	$ x_i - M = x_i - 7 $	$f_i x_i - M $ $= f_i x_i - 7 $
1.	5	8	8	$ 5 - 7 = 2$	16
2.	7	6	14	$ 7 - 7 = 0$	0
3.	9	2	16	$ 9 - 7 = 2$	4
4.	10	2	18	$ 10 - 7 = 3$	6
5.	12	2	20	$ 12 - 7 = 5$	10
6.	15	6	26	$ 15 - 7 = 8$	48
		Σf_i $= 26$			$\Sigma f_i x_i - M $ $= 84$

$$\therefore \Sigma f_i = N = 26$$

यहाँ पर $N = 26$ जो सम संख्या है। माधिका पद 13वीं व 14वीं प्रेक्षणों का माध्य है। संचयी बारम्बारती 14 के लिए $x_i = 7$.

$$\therefore \text{माधिका } M = 7$$

\therefore माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन

$$\text{M.D. } (M) = \frac{\Sigma f_i |x_i - M|}{\Sigma f_i} = \frac{84}{26} = 3.23$$

प्रश्न 10.

x_i	10	16	22	25	30
f_i	3	5	6	7	8

हल-

S.No.	x_i	f_i	cf	$ x_i - M = x_i - 25 $	$f_i x_i - M $
1.	10	3	3	$ 10 - 25 = 15$	45
2.	16	5	8	$ 16 - 25 = 9$	45
3.	22	6	14	$ 22 - 25 = 3$	18
4.	25	7	21	$ 25 - 25 = 0$	0
5.	30	8	29	$ 30 - 25 = 5$	40
		Σf_i = 29			$\Sigma f_i x_i - M $ = 148

$$\therefore \Sigma f_i = 29$$

$\therefore N = 29$ जो कि विषम संख्या है।

$\frac{N}{2} = \frac{29}{2} = 14.5$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 21 है। जिसके संगत चर का मान 25 है।

\therefore माधिका $M = 25$

\therefore माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन

$$\text{M.D. (M)} = \frac{\Sigma f_i |x_i - M|}{\Sigma f_i} = \frac{148}{29} = 5.10$$

प्रश्न 11 व 12 के आँकड़ों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11.

x_i	3	4	5	6	7	8
f_i	2	4	6	3	2	1

हल-

यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता वाला चर 5 है अतः बहुलक (Z) = 5

S.No.	x_i	f_i	$ x_i - Z = x_i - 5 $	$f_i x_i - 5 $
1.	3	2	$ 3 - 5 = 2$	4
2.	4	4	$ 4 - 5 = 1$	4
3.	5	6	$ 5 - 5 = 0$	0
4.	6	3	$ 6 - 5 = 1$	3
5.	7	2	$ 7 - 5 = 2$	4
6.	8	1	$ 8 - 5 = 3$	3
		Σf_i = 18		$\Sigma f_i x_i - 5 $ = 18

अतः बहुलक 5 से माध्य विचलन

$$\text{M.D. (Z)} = \frac{\Sigma f_i |x_i - Z|}{\Sigma f_i} = \frac{18}{18} = 1$$

प्रश्न 12.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
f_i	2	8	16	26	20	16	7	5

हल- यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता वाला चर 40 है

अतः बहुलक (Z) = 40

S.No.	x_i	f_i	$ x_i - Z = x_i - 40 $	$f_i x_i - Z $
1.	10	2	$ 10 - 40 = 30$	60
2.	20	8	$ 20 - 40 = 20$	160
3.	30	16	$ 30 - 40 = 10$	160
4.	40	26	$ 40 - 40 = 0$	0
5.	50	20	$ 50 - 40 = 10$	200
6.	60	16	$ 60 - 40 = 20$	320
7.	70	7	$ 70 - 40 = 30$	210
8.	80	5	$ 80 - 40 = 40$	200
		Σf_i = 100		$\Sigma f_i x_i - Z $ = 1310

अतः बहुलक 40 से माध्य विचलन

$$\begin{aligned} \text{M.D. (Z)} &= \frac{\sum f_i |x_i - Z|}{\sum f_i} \\ &= \frac{1310}{100} = 13.10 \end{aligned}$$

प्रश्न 13 व 14 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 13.

आय (प्रतिदिन)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

हल-

दिए गए आँकड़ों के अनुसार माना कल्पित माध्य $a = 35$ है एवं $h = 10$

S.No.	वर्ग	x_i	f_i	$d_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i d_i$	$ x_i - \bar{x} = x_i - 35.8 $	$f_i x_i - \bar{x} $
1.	0-10	5	4	-3	-12	30.8	123.2
2.	10-20	15	8	-2	-16	20.8	166.4
3.	20-30	25	9	-1	-9	10.8	97.2
4.	30-40	35	10	0	0	0.8	8.0
5.	40-50	45	7	1	7	9.2	64.4
6.	50-60	55	5	2	10	19.2	96
7.	60-70	65	4	3	12	29.2	116.8
8.	70-80	75	3	4	12	39.2	117.6
			$\sum f_i = 50$		$\sum f_i d_i = 4$		$\sum f_i x_i - \bar{x} = 789.6$

$$\therefore \text{माध्य} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times h = 35 + \frac{4}{50} \times 10 = 35.8$$

$$\therefore \text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{789.6}{50} = 15.792$$

प्रश्न 14.

ऊँचाई (सेमी. में)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
लड़कों की संख्या	9	13	26	30	12	10

हल-

दिए गए आँकड़ों के अनुसार माना कल्पित माध्य $a = 120$ है एवं $h = 10$

S. No.	ऊँचाई (सेमी. में)	लड़कों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$d_i = \frac{x_i - 120}{10}$	$f_i d_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
1.	95-105	9	100	- 2	- 18	25.3	227.7
2.	105-115	13	110	- 1	- 13	15.3	198.9
3.	115-125	26	120	0	0	5.3	137.8
4.	125-135	30	130	1	30	4.7	141.0
5.	135-145	12	140	2	24	14.7	176.4
6.	145-155	10	150	3	30	24.7	247.0
		$N = \sum f_i$ = 100			$\sum f_i d_i$ = 53		$\sum f_i x_i - \bar{x} $ = 1128.8

अब
$$\bar{x} = a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i \times h = 120 + \frac{53}{100} \times 10 = 120 + 5.3 = 125.3$$

अतः
$$\text{M.D.} (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1128.8}{100} = 11.288 = 11.29$$

प्रश्न 15 व 16 के आँकड़ों के लिए माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15.

अंक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
संख्या	3	4	7	8	2	1

हल-

दिए गए आँकड़ों के अनुसार

S.No.	प्राप्तांक	x_i	f_i	cf	$ x_i - M $	$f_i x_i - M $
1.	10-20	15	3	3	$ 15 - 37.86 = 22.86$	68.58
2.	20-30	25	4	7	$ 25 - 37.86 = 12.86$	51.44
3.	30-40	35	7	14	$ 35 - 37.86 = 2.86$	20.02
4.	40-50	45	8	22	$ 45 - 37.86 = 7.14$	57.12
5.	50-60	55	2	24	$ 55 - 37.86 = 17.14$	34.28
6.	60-70	65	1	25	$ 65 - 37.86 = 27.14$	27.14
			$\sum f_i = 25$			$\sum f_i x_i - M = 258.58$

यहाँ
$$N = \sum f_i = 25$$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

∴ माधिका वर्ग = 12.5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता का वर्ग = 30-40
 l = माधिका वर्ग की निम्न सीमा = 30

h = वर्ग अन्तराल = 10

f = माधिका वर्ग की बारम्बारता = 7

C या F = माधिका वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता = 7

$$\begin{aligned} \therefore \text{माधिका} &= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - C\right)}{f} \times h = 30 + \frac{(12.5 - 7)}{7} \times 10 \\ &= 30 + \frac{5.5}{7} \times 10 = 30 + 7.857 = 37.857 = 37.86 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{माध्य विचलन (माधिका)} = \text{M.D. (M)} = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{\sum f_i} = \frac{258.58}{25} = 10.34$$

प्रश्न 16.

आयु	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

हल-

S.No.	आयु	f_i	cf	x_i	$ x_i - M $	$f_i x_i - M $
1.	15.5-20.5	5	5	18	$ 18 - 38 = 20$	100
2.	20.5-25.5	6	11	23	$ 23 - 38 = 15$	90
3.	25.5-30.5	12	23	28	$ 28 - 38 = 10$	120
4.	30.5-35.5	14	37	33	$ 33 - 38 = 5$	70
5.	35.5-40.5	26	63	38	$ 38 - 38 = 0$	0
6.	40.5-45.5	12	75	43	$ 43 - 38 = 5$	60
7.	45.5-50.5	16	91	48	$ 48 - 38 = 10$	160
8.	50.5-55.5	9	100	53	$ 53 - 38 = 15$	135
		$\Sigma f_i = 100$				$\Sigma f_i x_i - M = 735$

$$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50 \therefore \text{माधिका वर्ग} = 35.5-40.5$$

$$\therefore \text{माधिका} = l + \frac{h}{f} \left(\frac{N}{2} - C \right)$$

$$= 35.5 + \frac{5}{26} (50 - 37)$$

$$= 35.5 + \frac{5}{26} \times 13 = 38$$

$$\therefore \text{M.D. (M)} = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{\sum f_i} = \frac{735}{100} = 7.35$$

प्रश्न 17 व 18 के बंटन के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 17.

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
संख्या	8	24	42	20	6

हल-

S. No.	वर्ग	मध्यमान x_i	बारम्बारता f_i	$ x_i - Z $	$f_i x_i - Z $
1.	20-30	25	8	$ 25 - 44.5 = 19.5$	156
2.	30-40	35	24	$ 35 - 44.5 = 9.5$	228
3.	40-50	45	42	$ 45 - 44.5 = 0.5$	21
4.	50-60	55	20	$ 55 - 44.5 = 10.5$	210
5.	60-70	65	6	$ 65 - 44.5 = 20.5$	123
			N = 100		$\sum f_i x_i - Z $ = 738

यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 42 है, जिसके संगत वर्ग अन्तराल 40-45 है। अतः यह बहुलक वर्ग है।

f_0 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता = 42

f_1 = बहुलक वर्ग से पूर्व के वर्ग की बारम्बारता = 24

f_2 = बहुलक वर्ग के पश्चात् के वर्ग की बारम्बारता = 20

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 40

$h = \text{वर्ग अन्तराल} = 10$

$$\begin{aligned}\therefore \text{बहुलक (Z)} &= l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h \\ &= 40 + \frac{42 - 24}{2 \times 42 - 24 - 20} \times 10 \\ &= 40 + \frac{18}{84 - 44} \times 10 \\ &= 40 + \frac{180}{40} \\ &= 40 + 4.5\end{aligned}$$

$$\text{M.D. (Z)} = 44.5$$

$$\begin{aligned}\text{बहुलक से माध्य विचलन} &= \frac{1}{N} \sum f_i |x_i - Z| \\ &= \frac{1}{100} \times 738 \\ &= 7.38\end{aligned}$$

प्रश्न 18.

ऊँचाई (इंच में)	52-55	55-58	58-61	61-64
छात्र संख्या	10	20	35	10

हल-

यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 35 है जिसके संगत वर्ग अन्तराल 58-61 है।
अतः यह बहुलक वर्ग है। यहाँ

$f_0 = \text{बहुलक वर्ग की बारम्बारता} = 35$

$f_1 = \text{बहुलक वर्ग से पूर्व के वर्ग की बारम्बारता} = 20$

$f_2 = \text{बहुलक वर्ग के पश्चात् के वर्ग की बारम्बारता} = 10$

$l = \text{बहुलक वर्ग की निम्न सीमा} = 58$

$h = \text{वर्ग अन्तराल} = 3$

$$\begin{aligned} \therefore \text{बहुलक (Z)} &= l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h \\ &= 58 + \frac{35 - 20}{2 \times 35 - 20 - 10} \times 3 \\ &= 58 + \frac{15 \times 3}{70 - 30} \\ &= 58 + \frac{45}{40} \\ &= 58 + 1.125 = 59.125 \end{aligned}$$

S. No.	वर्ग	मध्यमान x_i	बारम्बारता f_i	$ x_i - Z $	$f_i x_i - Z $
1.	52-55	53.5	10	$ 53.5 - 59.125 = 5.625$	56.25
2.	55-58	56.5	20	$ 56.5 - 59.125 = 2.625$	52.5
3.	58-61	59.5	35	$ 59.5 - 59.125 = 0.375$	13.125
4.	61-64	62.5	10	$ 62.5 - 59.125 = 3.375$	33.75
			N = 75		$\Sigma f_i x_i - Z = 155.625$

बहुलक से माध्य विचलन

$$\begin{aligned} \text{M.D. (Z)} &= \frac{1}{N} \Sigma f_i|x_i - Z| = \frac{1}{75} \times 155.625 \\ &= 2.075 \end{aligned}$$

Ex 13.3

प्रश्न 1 व 2 के आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

हल-

S.No.	x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
1.	6	2	12	-13	169	338
2.	10	4	40	-9	81	324
3.	14	7	98	-5	25	175
4.	18	12	216	-1	1	12
5.	24	8	192	5	25	200
6.	28	4	112	9	81	324
7.	30	3	90	11	121	363
		Σf_i = 40	$\Sigma f_i x_i$ = 760			$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$ = 1736

यहाँ पर $N = 40$, $\Sigma f_i x_i = 760$, $\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1736$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{760}{40} = 19$$

$$\text{तथा प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{1736}{40} = 43.4$$

प्रश्न 2.

x_i	82	83	87	88	92	94	99
f_i	3	2	3	2	6	3	3

हल- माना कल्पित मध्य $a = 88$

$$y_i = x_i - 88$$

S.No.	x_i	f_i	$y_i = (x_i - 88)$	$f_i y_i$	y_i^2	$f_i \cdot y_i^2$
1.	82	3	-6	-18	36	108
2.	83	2	-5	-10	25	50
3.	87	3	-1	-3	1	3
4.	88	2	0	0	0	0
5.	92	6	4	24	16	96
6.	94	3	6	18	36	108
7.	94	3	11	33	121	363
		Σf_i = 22		$\Sigma f_i y_i$ = 44		$\Sigma f_i y_i^2$ = 728

$$\begin{aligned}\text{माध्य } (\bar{x}) &= a + \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} \\ &= 88 + \frac{44}{22} \\ &= 88 + 2 = 90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा प्रसरण } (\sigma^2) &= \frac{1}{N^2} [N\sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2] \\ &= \frac{1}{(22)^2} [22 \times 728 - (44)^2] \\ &= \frac{1}{(22)^2} [22 \times 728 - 2 \times 22 \times 44] \\ &= \frac{22}{(22)^2} [728 - 88] \\ &= \frac{640}{22} = \frac{320}{11} = 29.09\end{aligned}$$

प्रश्न 3. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	70	71	72	73	74	75	76	77	78
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

हल- माना कल्पित माध्य $a = 74$

x_i	f_i	$y_i = x_i - a$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
70	2	-4	16	-8	32
71	1	-3	9	-3	9
72	12	-2	4	-24	48
73	29	-1	1	-29	29
74	25	0	0	0	0
75	12	1	1	12	12
76	10	2	4	20	40
77	4	3	9	12	36
78	5	4	16	20	80
	$\sum f_i$ = 100			$\sum f_i y_i$ = 0	$\sum f_i y_i^2$ = 286

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्य } (\bar{x}) &= a + \frac{\sum f_i y_i}{N} \\ &= 74 + \frac{0}{100} = 74\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा मानक विचलन (S.D.)} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{100} \times 286 - \left(\frac{0}{100} \right)^2} \\ &= \sqrt{2.86} = 1.69\end{aligned}$$

प्रश्न 4 व 5 में दिये गये बारम्बारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारम्बारता	2	3	5	10	3	5	2

हल-

S.No.	वर्ग	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - 105}{30}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
1.	0-30	2	15	-3	-6	18
2.	30-60	3	45	-2	-6	12
3.	60-90	5	75	-1	-5	5
4.	90-120	10	105 (A)	0	0	0
5.	120-150	3	135	1	3	3
6.	150-180	5	165	2	10	20
7.	180-210	2	195	3	6	18
		N = 30		$\sum f_i d_i = 2$		$\sum f_i d_i^2 = 76$

माना कि कल्पित माध्य (A) = 105

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्य } (\bar{x}) &= A + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times h \\ &= 105 + \frac{2}{30} \times 30 \\ &= 105 + 2 = 107 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा प्रसरण } (\sigma^2) &= h^2 \left[\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N} \right)^2 \right] \\ &= (30)^2 \left[\frac{76}{30} - \left(\frac{2}{30} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$= 900 [2.5333 - 0.0044]$$

$$= 900 [2.5289]$$

$$= 2276$$

प्रश्न 5.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	5	8	15	16	6

हल-

S.No.	वर्ग	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
1.	0-10	5	5	-2	-10	20
2.	10-20	8	15	-1	-8	8
3.	20-30	15	25 (A)	0	0	0
4.	30-40	16	35	1	15	16
5.	40-50	6	45	2	12	24
		N = 50			$\sum f_i d_i$ = 10	$\sum f_i d_i^2$ = 68

माना कि कल्पित माध्य (A) = 25

$$\begin{aligned} \therefore \text{माध्य } (\bar{x}) &= A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times h \\ &= 25 + \frac{10}{50} \times 10 = 25 + 2 = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रसरण } (\sigma^2) &= h^2 \left[\frac{\sum f_i d_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \right)^2 \right] \\ &= (10)^2 \left[\frac{68}{50} - \left(\frac{10}{50} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= 100 [1.36 - 0.4]$$

$$= 100 \times 1.32$$

$$= 132$$

प्रश्न 6. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी. में)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95
बच्चों की संख्या	3	4	7	7	15
ऊँचाई (सेमी. में)	95-100	100-105	105-110	110-115	
बच्चों की संख्या	9	6	6	3	

हल-

S.No.	ऊँचाई	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
1.	70 - 75	3	72.5	- 4	- 12	48
2.	75 - 80	4	77.5	- 3	- 12	36
3.	80 - 85	7	82.5	- 2	- 14	28
4.	85 - 90	7	87.5	- 1	- 7	7
5.	90 - 95	15	92.5 (A)	0	0	0
6.	95 - 100	9	97.5	1	9	9
7.	100 - 105	6	102.5	2	12	24
8.	105 - 110	6	107.5	3	18	54
9.	110 - 115	3	112.5	4	12	48
		N = 60			$\sum f_i d_i$ = 6	$\sum f_i d_i^2$ = 254

माना कि कल्पित माध्य (A) = 92.5

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्य } (\bar{x}) &= A + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times h \\ &= 92.5 + \frac{6}{60} \times 5 = 92.5 + \frac{1}{2} \\ &= 93 \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रसरण } (\sigma^2) &= h^2 \left[\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N} \right)^2 \right] \\ &= (5)^2 \left[\frac{254}{60} - \left(\frac{6}{60} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$= 25 [4.2333 - 0.1]$$

$$= 25 \times 4.2233$$

$$= 105.5825$$

$$\begin{aligned}\text{इसलिए मानक विचलन} &= \sqrt{\text{प्रसरण}} \\ &= \sqrt{105.5825} \\ &= 10.275\end{aligned}$$

प्रश्न 7. नीचे दी गई तालिका में वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

व्यास (मिमी. में)	43-46	47-50	51-54	55-58	59-62
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

हल-

दिए गए असतत आँकड़ों को सतत बारम्बारता बंटन में बदलने पर अन्तराल निम्नानुसार होंगे-
42.5 - 46.5, 46.5 - 50.5, 50.5 - 54.5, 54.5 - 58.5, 58.5 - 62.5

S.No.	व्यास	f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
1.	42.5-46.5	15	44.5	-2	-30	60
2.	46.5-50.5	17	48.5	-1	-17	17
3.	50.5-54.5	21	a = 52.5	0	0	0
4.	54.5-58.5	22	56.5	1	22	22
5.	58.5-62.5	25	60.5	2	50	100
		N = 100			$\sum f_i d_i$ = 25	$\sum f_i d_i^2$ = 199

माना कि कल्पित माध्य (a) = 52.5

$$\begin{aligned} \therefore \text{माध्य } (\bar{x}) &= a + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times h \\ &= 52.5 + \frac{25 \times 4}{100} \\ &= 52.5 + 1 \\ &= 53.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा मानक विचलन (S.D.)} &= h \left[\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N} \right)^2 \right] \\ &= 4 \left[\frac{199}{100} - \left(\frac{25}{100} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4[1.99 - 0.0625] \\ &= 4 \times 1.388 \\ &= 5.552 \\ &= 5.55 \end{aligned}$$

प्रश्न 8. दिए गए आँकड़ों से मानक विचलन, मानक विचलन गुणांक तथा विचरण गुणांक की गणना कीजिए।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारम्बारता	2	5	15	7	1

हल- माना कल्पित माध्य (a) = 50 है, जो वर्ग 40-60 का मध्यमान है।

वर्ग	मध्यमान	बारम्बारता	$y_i = \frac{x_i - 50}{20}$	y_i^2	$f y_i$	$f y_i^2$
0-20	10	2	-2	4	-4	8
20-40	30	5	-1	1	-5	5
40-60	50	15	0	0	0	0
60-80	70	7	1	1	7	7
80-100	90	1	2	4	2	4
		N = 30			$\Sigma f y_i$ = 0	$\Sigma f y_i^2$ = 24

$$\begin{aligned} \text{माध्य } \bar{x} &= a + h \times \frac{\Sigma f_i y_i}{N} \\ &= 50 + 20 \times \frac{0}{30} \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मानक विचलन } (\sigma) &= h \times \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f_i y_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i y_i \right)^2} \\ &= 20 \times \sqrt{\frac{1}{30} \times 24 - \left(\frac{0}{30} \right)^2} \\ &= 20 \times \sqrt{\frac{4}{5}} \\ &= 20 \times 0.894 \\ &= 17.88 \end{aligned}$$

मानक विचलन गुणांक

$$(\text{C.S.D.}) = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{17.88}{50} = 0.3576$$

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = 35.76$$

प्रश्न 9. निम्नलिखित बंटन का कल्पित माध्य 35 से मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

35, 25, 33, 50, 37, 35, 33, 37, 30

हल- यहाँ माध्य $\bar{x} = 35$ (दिया है)

S.No.	x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})$ $= x_i - 35$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
1.	25	1	-10	100	100
2.	30	1	-5	25	25
3.	33	2	-2	4	8
4.	35	2	0	0	0
5.	37	2	2	4	8
6.	50	1	15	225	225
		N = 9			$\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2$ = 366

$$\begin{aligned} \text{मानक विचलन (S.D.)} &= \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \times 366} \\ &= 6.376 \end{aligned}$$

प्रश्न 10. निम्न श्रेणी में माध्य, माधिका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं गुणांक ज्ञात कीजिए।

मासिक किराया (रुपयों में)	किरायेदारों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	8
30 से कम	16
40 से कम	26
50 से कम	37
60 से कम	50
70 से कम	56
80 से कम	60

हल-

सर्वप्रथम हम दिए गए आँकड़ों को संगत वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के रूप में लिखते हैं और फिर माध्य, माधिका एवं बहुलक ज्ञात करते हैं।

वर्ग अन्तराल	मध्यमान	f_i	$f_i x_i$	c.f.
0-10	5	3	15	3
10-20	15	5	75	8
20-30	25	8	200	16
30-40	35	10	350	26
40-50	45	11	495	37
50-60	55	13	715	50
60-70	65	6	390	56
70-80	75	4	300	60
		Σf_i = 60	$\Sigma f_i x_i$ = 2540	

$$\text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = 42.33$$

यहाँ $N = \Sigma f_i = 60$, इसलिए $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 37 है, अतः माध्यिका वर्ग 40-50 है। अतः

$$\text{माध्यिका (M)} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

यहाँ $l = 40$, $N = 60$, $C = 26$, $f = 11$, $h = 10$

$$\therefore M = 40 + \frac{\frac{60}{2} - 26}{11} \times 10$$

$$= 40 + \frac{(30 - 26)}{11} \times 10$$

$$= 40 + \frac{40}{11} = \frac{440 + 40}{11} = 43.64$$

यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 13 है जिसके संगत वर्ग 50-60 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः बहुलक (Z)} &= l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h \\ &= 50 + \left(\frac{13 - 11}{2 \times 13 - 11 - 6} \right) \times 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 50 + \frac{2}{26-17} \times 10 \\
&= 50 + \frac{20}{9} \\
&= \frac{450+20}{9} \\
&= 52.22
\end{aligned}$$

अथ

x_i	$ x_i - \bar{x} = x_i - 42.33 $	$ x_i - M = x_i - 43.64 $	$ x_i - Z = x_i - 52.22 $	f_i	$f_i x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - M $	$f_i x_i - Z $
5	37.33	38.64	47.22	3	111.99	115.92	141.66
15	27.33	28.64	37.22	5	136.65	143.2	186.1
25	17.33	18.64	27.22	8	138.64	149.12	217.76
35	7.33	8.64	17.22	10	73.3	86.4	172.2
45	2.67	1.36	7.22	11	29.37	14.96	79.42
55	12.67	11.36	2.78	13	164.71	147.68	36.14
65	22.67	21.36	12.78	6	136.02	128.16	76.68
75	32.67	31.36	22.78	4	130.68	125.44	91.12
				$\Sigma f_i = 60$	921.36	910.88	1001.08

$$\begin{aligned}
\text{समान्तर माध्य से माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} \\
&= \frac{921.36}{60} = 15.36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{माधिका से माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - M|}{\sum f_i} \\
&= \frac{910.88}{60} = 15.18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{बहुलक से माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - Z|}{\sum f_i} \\
&= \frac{1001.08}{60} = 16.68
\end{aligned}$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{15.36}{42.33} = 0.363$$

$$\text{माधिका से विचलन गुणांक} = \frac{15.18}{43.64} = 0.348$$

$$\text{बहुलक से विचलन गुणांक} = \frac{16.68}{52.22} = 0.319$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. पाँच छात्रों के गणित में प्राप्तांक 20, 25, 15, 35 और 30 हैं तो इसका परास होगा σ_x

- (A) 15
- (B) 20
- (C) 25
- (D) 30

हल : (B)

प्रश्न 2. अन्तर चतुर्थक परास का सूत्र है

- (A) $Q_3 + Q_1$
- (B) $Q_3 - Q_1$
- (C) $Q_3 - Q_2$
- (D) $Q_3 - Q_4$

हल : (B)

प्रश्न 3. किसी वस्तु का अधिकतम मूल्य 500 रु. तथा न्यूनतम मूल्य 75 रु. होने पर परोस गुणांक होगा

- (A) 0.739
- (B) 0.937
- (C) 7.39
- (D) 73.9

हल : (A)

प्रश्न 4. चर श्रेणी 10, 20, 30, 40, 50, 60 का पैरास गुणांक है

- (A) $3/2$
- (B) $5/6$
- (C) $7/5$
- (D) $5/7$

हल : (D)

प्रश्न 5. माध्य विचलन सबसे कम होता है

- (A) माध्य से
- (B) माधिका से
- (C) बहुलक से
- (D) मूल बिन्दु से

हल : (B)

प्रश्न 6. चार विद्यार्थियों के प्राप्तांक 25, 35, 45 व 55 हैं, इनका माध्य विचलन है

- (A) 10
- (B) 1
- (C) 0
- (D) 40

हल : (A)

प्रश्न 7. बंटन 2, 4, 5, 3, 8, 7, 8 का माधिका से लिया गया माध्य विचलन है

- (A) 13/7
- (B) 1/2
- (C) 11/7
- (D) 2

हल : (D)

प्रश्न 8. किसी चर श्रेणी का माध्य $\bar{x} = 773$ तथा माध्य विचलन 64.4 है, तो उसका माध्य विचलन गुणांक है

- (A) 0.065
- (B) 12.003
- (C) 0.083
- (D) 0.073

हल : (C)

प्रश्न 9. आँकड़ों 6, 10, 4, 7, 4, 5 का मानक विचलन है

- (A) $\sqrt{13/3}$
- (B) $13/3$
- (C) $\sqrt{26}$
- (D) $\sqrt{26/6}$

हल : (A)

प्रश्न 10. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांकों का मानक विचलन 1.4 है तो बंटन का प्रसरण होगा

- (A) 1.2
- (B) 0.38
- (C) 1.96
- (D) 1.4

हल : (C)

प्रश्न 11. यदि प्रसरण

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{k} - \left(\frac{\sum fd}{30}\right)^2}$$

है तो k का मान है

- (A) 10
- (B) 20
- (C) 30
- (D) 60

हल : (C)

प्रश्न 12. एक श्रेणी का विचरण गुणांक 30% है तथा मानक विचलन 15 है, तो उसका माध्य है

- (A) 0.5
- (B) 5
- (C) 2
- (D) 50

हल : (D)

प्रश्न 13. किसी श्रेणी में $\sum x^2 = 100$, $n = 5$ तथा $\sum x = 20$ हो, तो मानक विचलन है

- (A) 16
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 8

हल : (B)

प्रश्न 14. एक नगर में सात दिनों का तापक्रम 18, 12, 6, -7, -12, 5, -4 सेन्टीग्रेड में दिया गया है तो परास मान सेन्टीग्रेड में होगा

- (A) 6
- (B) 30
- (C) 22
- (D) 14

हल : (B)

प्रश्न 15. यदि $N = 10$, $\Sigma x = 120$ तथा $\sigma_x = 60$ हो तो विचरण गुणांक

- (A) 5
- (B) 50
- (C) 500
- (D) 0.5

हल : (C)

प्रश्न 16. माध्य से लिए विचलनों का बीजगणितीय योग होता है

- (A) ऋणात्मक
- (B) धनात्मक
- (C) प्रत्येक में अलग-अलग
- (D) शून्य

हल : (D)

प्रश्न 17. यदि $\bar{x} = 6$, $\Sigma x = 60$ तथा $\Sigma x^2 = 1000$ हो, तो σ_x का मान है

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 64
- (D) 10

हल : (B)

प्रश्न 18. परास गुणांक परिभाषित किया जा सकता है

(A) $\frac{H-L}{2}$

(B) $\frac{H+L}{2}$

(C) $\frac{H-L}{H+L}$

(D) $\frac{H+L}{H-L}$

हल : (C)

प्रश्न 19. यदि किसी श्रृंखला के सभी पदों का मूल्य एक समान हो, तो प्रकीर्णन का मान ज्ञात कीजिए।

हल- 0

प्रश्न 20. व्यक्तिगत श्रृंखला में मानक विचलन ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

हल- मानक विचलन (σ)

$$= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

प्रश्न 21. किसी बंटन का मानक विचलन 20.5 तथा समान्तर माध्य 60 हो, तो उसका मानक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- मानक विचलन गुणांक

$$= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समान्तर माध्य}} = \frac{20.5}{60} = 0.34$$

प्रश्न 22. निम्न बारम्बारता बंटन के अन्तरचतुर्थक परास, अन्तरचतुर्थक परास गुणांक, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

अंक से अधिक	0	15	30	45	60	75	90	105
छात्रों की संख्या	150	140	100	80	70	30	14	0

हल- दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता f	संचयी बारम्बारता
0-15	150 - 140 = 10	10
15-30	140 - 100 = 40	50
30-45	100 - 80 = 20	70
45-60	80 - 70 = 10	80
60-75	70 - 30 = 40	120
75-90	30 - 14 = 16	136
90-105	14 - 0 = 14	150

अन्तर चतुर्थक परास की गणना—

$$Q_3 = l + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - F}{f} \times h = 60 + \left[\frac{3\left(\frac{150}{4}\right) - 80}{40} \right] \times 15$$

{ \because यहाँ चतुर्थक वर्ग 60-75 है }

$$= 60 + \left(\frac{3(37.5) - 80}{40} \right) \times 15$$

$$= 60 + \left(\frac{112.5 - 80}{40} \right) \times 15$$

$$= 60 + \frac{32.5 \times 15}{40} = 72.1875$$

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4}\right) - F}{f} \times h = 15 + \left[\frac{\left(\frac{150}{4}\right) - 10}{40} \right] \times 15$$

$$= 15 + \frac{37.5 - 10}{40} \times 15$$

$$= 15 + \frac{27.5}{40} \times 15 = 25.3125$$

अन्तर चतुर्थक परास = $Q_3 - Q_1$

$$= 72.1875 - 25.3125$$

$$= 46.875$$

अन्तर चतुर्थक परास गुणांक

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{72.1875 - 25.3125}{72.1875 + 25.3125} \\ &= \frac{46.875}{97.5} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

चतुर्थक विचलन की गणना—

$$\frac{N+1}{4} = \frac{150+1}{4} = \frac{151}{4} = 37.75 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + \frac{\left(\frac{N+1}{4}\right) - F}{f} \times h \\ &= 15 + \frac{37.75 - 10}{40} \times 15 \\ &= 15 + \frac{27.75}{40} \times 15 \\ &= 15 + 10.40625 \\ &= 25.40625 \end{aligned}$$

$$\frac{3(N+1)}{4} = 3 \times 37.75 = 113.35 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= l + \frac{3\left(\frac{N+1}{4}\right) - F}{f} \times h \\ &= 60 + \frac{113.35 - 80}{40} \times 15 \\ &= 72.50625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चतुर्थक विचलन} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{72.50625 - 25.40625}{2} \\ &= \frac{47.1}{2} = 23.53 \end{aligned}$$

चतुर्थक विचलन गुणांक

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{47.1}{97.9125} = 0.48$$

प्रश्न 23. पद विचलन विधि से निम्न आवृत्ति बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
बारम्बारता	5	7	18	25	20	4	1

हल- माना कल्पित माध्य (a) = 18

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x_i	बारम्बारता f_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	u_i^2	$f_i u_i^2$	$f_i u_i$
0.5-5.5	3	5	-3	9	45	-15
5.5-10.5	8	7	-2	4	28	-14
10.5-15.5	13	18	-1	1	18	-18
15.5-20.5	18	25	0	0	0	0
20.5-25.5	23	20	1	1	20	20
25.5-30.5	28	4	2	4	16	8
30.5-35.5	33	1	3	9	9	3
		$\Sigma f_i =$ N = 80			$\Sigma f_i u_i^2 =$ 136	$\Sigma f_i u_i =$ -16

$$\begin{aligned} \text{माध्य } (\bar{x}) &= a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h \\ &= 18 + \frac{(-16)}{80} \times 5 \\ &= 18 - \frac{80}{80} \\ &= 17 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma_x) = h \sqrt{\frac{\Sigma f_i u_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{N}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \times \sqrt{\frac{136}{80} - \left(\frac{-16}{80}\right)^2} \\
&= 5 \times \sqrt{1.7 - (0.2)^2} \\
&= 5 \times \sqrt{1.7 - 0.04} \\
&= 5 \times \sqrt{1.66} \\
&= 5 \times 1.288 = 6.44
\end{aligned}$$

प्रश्न 24. निम्न आँकड़ों के बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए तथा इसका गुणांक निकालिए।

केन्द्रीय आकार	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	3	6	9	13	8	5	4

हल- यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता 13 है जो चर 9 की है। अतः बहुलक $Z = 9$ है, अतः

x_i	f_i	$ x_i - Z $ $= x_i - 9 $	$f_i x_i - Z $
6	3	3	9
7	6	2	12
8	9	1	9
9	13	0	0
10	8	1	8
11	5	2	10
12	4	3	12
	$N = \sum f_i$ $= 48$		$\sum f_i x_i - Z $ $= 60$

$$\text{बहुलक से माध्य विचलन M.D. (Z)} = \frac{1}{N} \times \sum f_i|x_i - Z|$$

$$= \frac{1}{48} \times 60$$

$$= 1.25$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{Z} = \frac{1.25}{9} = 0.139$$

प्रश्न 25. निम्न आँकड़ों से प्रसरण ज्ञात कीजिए

केन्द्रीय आकार	32-38	38-44	44-50	50-56	56-62	62-68
छात्रों की संख्या	3	6	9	13	8	5

हल- माना कल्पित माध्य = 53 जो कि वर्ग 50-56 का माध्य बिन्दु है।

तथा
$$u_i = \frac{x_i - a}{h}, h = 6$$

वर्ग	मध्यमान x_i	बारम्बारता f_i	$u_i = \frac{x_i - 53}{6}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
32-38	35	3	-3	-9	9	27
38-44	41	6	-2	-12	4	24
44-50	47	9	-1	-9	1	9
50-56	53	13	0	0	0	0
56-62	59	8	1	8	1	8
62-68	65	5	2	10	4	20
		N = 44		$\Sigma f_i u_i$ = -12		$\Sigma f_i u_i^2$ = 88

$$\begin{aligned} \text{प्रसरण } (\sigma^2) &= h^2 \left[\frac{1}{N} \Sigma f_i u_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i u_i \right)^2 \right] \\ &= 6^2 \left[\frac{1}{44} \times 88 - \left(\frac{1}{44} \times (-12) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= 36[2 - 0.07838]$$

$$= 36 \times 1.92162$$

$$= 69.17832$$