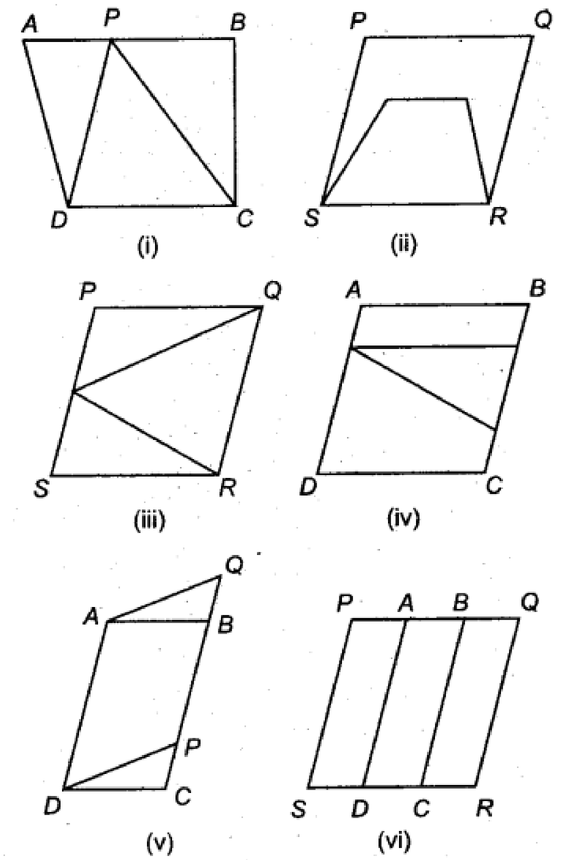
त्रिभुजों तथा चतुर्भुजों के क्षेत्रफल

Exercise 10.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित आकृतियों में कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित है? ऐसी स्थिति में उभयनिष्ठ आधार और समान्तर रेखायुग्म लिखिए।



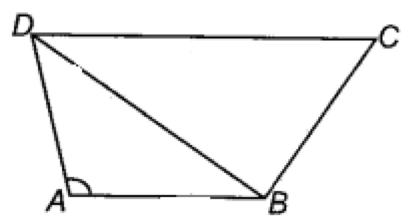
हल:

(i) त्रिभुज PCD तथा समलम्ब ABCD एक ही आधार तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित है।
उभयनिष्ठ आधार = CD, तथा समान्तर रेखायुग्म = CD तथा AB
(ii) समान्तर चतुर्भुज PQRS तथा समलम्ब चतुर्भुज का एक ही आधार SR है। परन्तु वे एक ही समान्तर रेखायुग्म के मध्य स्थित नहीं हैं।
(iii) त्रिभुज तथा समान्तर चतुर्भुज PQRS एक ही आधार पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं।
उभयनिष्ठ आधार = QR,
तथा समान्तर रेखायुग्म = QR तथा PS
(iv) त्रिभुज तथा समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही समान्तर रेखाओं के बीच में स्थित है परन्तु दोनों का आधार एक नहीं है।

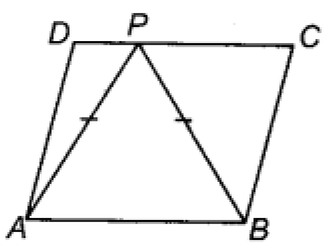
(v) समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा ADPQ एक ही आधार AD तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं।
अत: उभयनिष्ठ आधार = AD,
तथा समान्तर रेखायुग्म = AD तथा QC
(vi) समान्तर चतुर्भुज ADSP, ABCD तथा BQRC का आधार एक नहीं है तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्ये स्थित है।

प्रश्न 2. एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य निम्न आकृतियाँ अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए-
(i) एक अधिककोण त्रिभुज और एक समलम्ब चतुर्भुज
(ii) एक समान्तर चतुर्भुज और एक समद्विबाहु त्रिभुज
(iii) एक वर्ग और एक समान्तर चतुर्भुज
(iv) एक आयत और एक समचतुर्भुज ।
(v) एक समचतुर्भुज और एक समान्तर चतुर्भुज

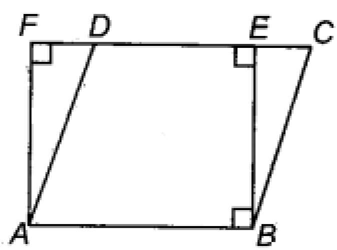
हल: (i) अधिककोण त्रिभुज ABD तथा समलम्ब ABCD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा CD के मध्य स्थित हैं।



(ii) समद्विबाहु त्रिभुज DP PAB तथा समन्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB और CD के मध्य स्थित है।

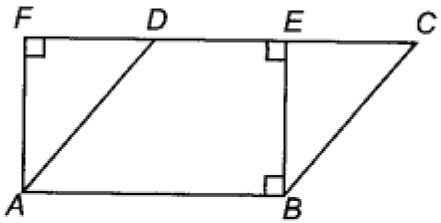


(iii) वर्ग ABEF तथा F D समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा FC के मध्य स्थित हैं।

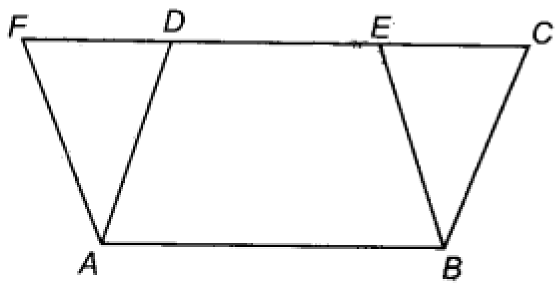


(iv) आयत ABEF तथा समचतुर्भुज ABCD एक ही A आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा

CF के मध्य स्थित हैं।

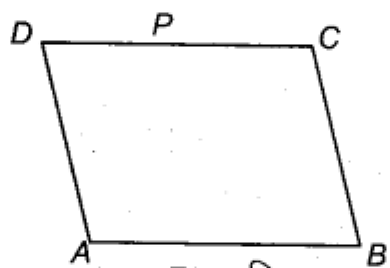


(v) समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा समचतुर्भुज ABEF एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB और CF के मध्य स्थित हैं।

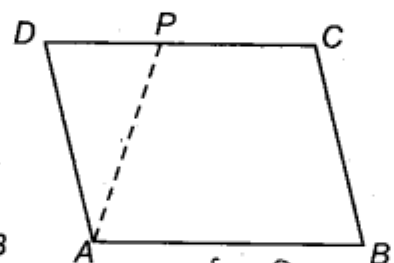


क्रिया कलाप 10.2

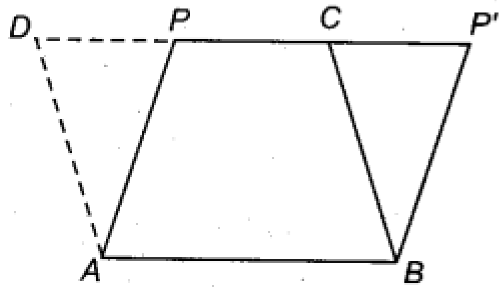
चरण 1: तीन सफेद कागजों के मध्य कार्बन रखकर कार्बन प्रति सहित एक ही समान्तर चतुर्भुज की दो प्रतियाँ बनाइए और ABCD द्वारा चारों शीर्षों को नामांकित भी कीजिए, जिसकी भुजा CD पर एक बिन्दु P इतने दबाव के साथ लगाइए कि वह कार्बन प्रति पर भी आ जाए।



मूल प्रति



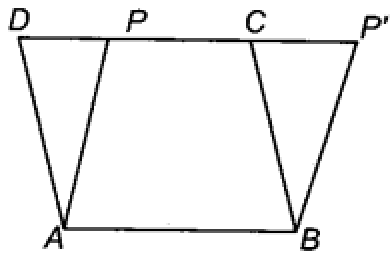
कार्बन प्रति



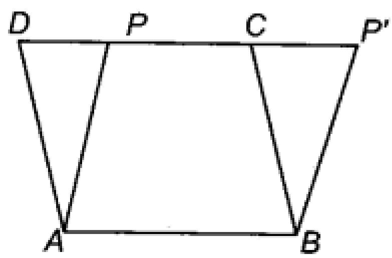
ΔAPD को काटकर दूसरी ओर चिपकाने के बाद की प्रति

चरण 2 : (i) मूल प्रति को काटकर अपनी अभ्यास पुस्तिका के एक पृष्ठ पर चिपकाइए।
(ii) कार्बन प्रति पर अंकित P को A से मिलाने के बाद बने APD को काटिए। ΔAPD को कार्बन प्रति के दूसरी ओर इस प्रकार चिपकाएँ कि कटे हुए त्रिभुज की भुजा AD कटने के बाद प्राप्त समलम्ब ABCP की भुजा BC को सम्पाती करे। ध्यान रहे बिन्दु A, B पर व D,C पर रहना चाहिए।
इस प्रकार हमें दो नये समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABPP प्राप्त हो रहे हैं। दोनों प्राप्त नये चतुर्भुजों को अभ्यास पुस्तिका के पृष्ठ पर चिपका दीजिए।

चरण 3 : दूसरे नये समान्तर ABPP को मूल प्रति पर इस प्रकार चिपकाएं कि दोनों समान्तर चतुर्भुजों की भुजा AB सम्पाती हो जाए। इस प्रकार एक नई आकृति में दो समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABPP एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य बने है।



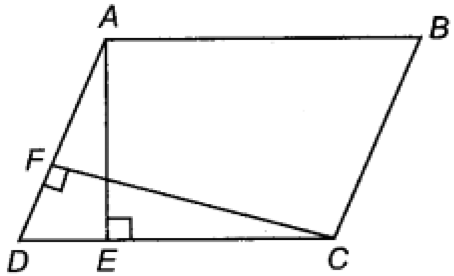
प्रश्न 3. क्या आप कह सकते हैं कि समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABP’P क्षेत्रफल में बराबर हैं?



हल: चूंकि ΔAPD = ΔBPC (ΔAPD को ही काटकर चिपकाया है)
अतः ar (APD) = ar (BP’C)
दोनों ओर ar (ABCP) जोड़ने पर
ar (APD) + ar (ABCP) = ar (ABCP)+ ar (BP’C)
या ar (ABCD) = ar (ABP’P)
अर्थात् दोनों समान्तर चतुर्भुज, जो एक ही उभयनिष्ठ भुजा AB
तथा AB || DP’ (समान्तर युग्म) के मध्य बने हैं, क्षेत्रफल में बराबर हैं।

Exercise 10.2

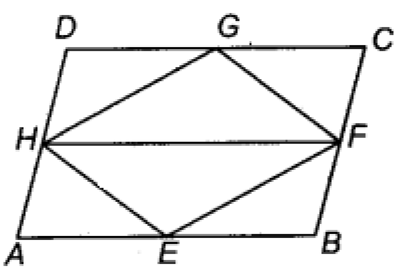
प्रश्न 1. दिए गए चित्र में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसमें AE ⊥ DC और CF ⊥ AD है। यदि AB = 16 सेमी, AE = 8 सेमी और CF = 10 सेमी है, तो AD ज्ञात कीजिए।



हल: समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AB = 16 सेमी, AE = 8 सेमी और CF = 10 सेमी, CD = AB = 10 सेमी

(समान्तर चतुर्भुज ABCD की. सम्मुख भुजाएँ।)
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = CD × AE = 16 × 8 = 128 वर्ग सेमी
पुनः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = AD × CF
⇒ 128 = AD × 10
⇒ AD = 12.8 सेमी

प्रश्न 2. यदि E, F, G और H क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि ar (EPGH) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) है।



हल: H, F को मिलाया।
H और F क्रमशः AD तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
AH = $\frac{1}{2}$ AD
तथा BF = $\frac{1}{2}$ BC
⇒ ABFH एक समान्तर चतुर्भुज है।
चूँकि समान्तर चतुर्भुज ABFH तथा त्रिभुज FHE एक ही आधार FH पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा FH के मध्य स्थित हैं।
ar (ΔFHE) = $\frac{1}{2}$ ar(समान्तर चतुर्भुज ABFH) …..(1)

इसी प्रकार त्रिभुज GFH तथा समान्तर चतुर्भुज CFHD एक ही आधारे HF तथा एक ही समान्तर रेखाओं CD तथा HF के मध्य स्थित हैं।

ar (ΔGFH) = $\frac{1}{2}$ ar (CFHD)….(2)

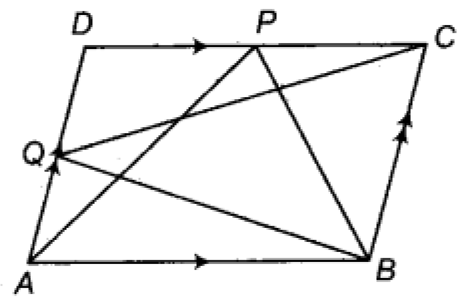
समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर

ar (ΔFHE)+ ar (ΔGFH) = $\frac{1}{2}$ ar(समान्तर चतुर्भुज ABFH) +$\frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज CFHD)

ar (EFGH) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. P और Q क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं। दर्शाइए ar (APB) = ar (BQC)



हल: त्रिभुज APB तथा समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखा A युग्म AB तथा CD के मध्य स्थित हैं।

ar (ΔAPB) = $\frac{1}{2}$ ar (स. च. ABCD) …(1)

त्रिभुज BQC तथा समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार BC पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म BC तथा AD के बीच स्थित है।

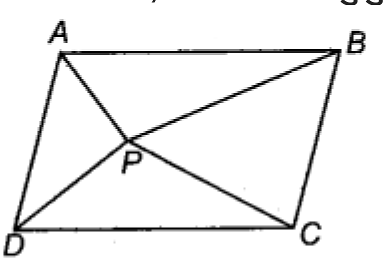
ar(ΔBQC) = $\frac{1}{2}$ ar (समान्तर चतुर्भुज ABCD)…(2)

समी. (1) तथा (2) से

ar (ΔAPB) = ar (ΔBQC)

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. चित्र में, P समान्तर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

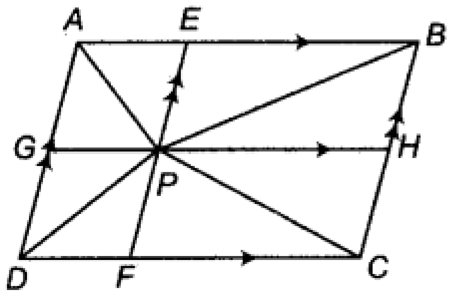


(i) ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

(ii) ar (ΔAPD) + ar (ΔPBC) = ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD)

हल: दिया है : P समान्तर चतुर्भुज ABCD के अभ्यन्तर में स्थित कोई बिन्दु है।
सिद्ध करना है :

(i) ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)
(ii) ar (ΔAPD) + ar (ΔPBC) = ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD)



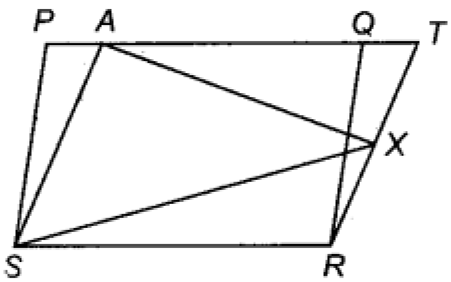
रचना : EF || BC तथा GH || AB खींची।

उपपत्तिः (i) GH || AB (रचना से) तथा CD || AB (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
GH || CD
त्रिभुज APB तथा समान्तर चतुर्भुज ABHG एक आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखायुग्म AB तथा GF के मध्य स्थित हैं।
ar (ΔAPB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABHG) …(1)
त्रिभुज PCD तथा समान्तर चतुर्भुज CDGH एक ही आधार CD पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म CD तथा GH के बीच स्थित है।
ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (CDGH) …(2)
समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर
ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABHG) + $\frac{1}{2}$ ar (CDGH)
⇒ ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ [ar (ABHG) + ar (CDGH)]
⇒ ar (ΔAPB) + ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) …(3)

(ii) EF || BC (रचना से) तथा AD || BC (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)
अतः EF || AD त्रिभुज APD तथा समान्तर चतुर्भुज AEFD एक ही आधार AD पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म AD और EF के बीच स्थित है।
ar (ΔAPD) = $\frac{1}{2}$ ar (AEFD) …(4)
त्रिभुज PBC तथा समान्तर चतुर्भुज BCFE एक ही आधार BC पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म BC और EF के बीच स्थित है।
ar (ΔPBC) = $\frac{1}{2}$ ar (BCEF) …(5)
समीकरण (4) व (5) को जोड़ने पर,
ar (ΔAPD) + ar (ΔPBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ADFE) + $\frac{1}{2}$ ar (BCEF)
⇒ ar (ΔAPD) + ar (ΔPBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) ……(6)
समीकरण (3) तथा (6) से

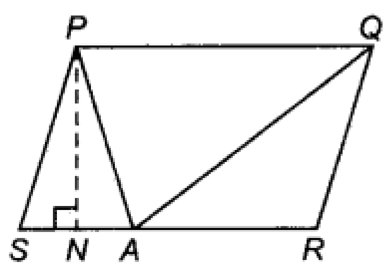
ar(∆APB) + ar(∆PCD) = ar(∆APD) + ar(∆PBC)
⇒ ar(∆APD) + ar(∆PBC) = ar(∆APB) + ar(∆PCD)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. चित्र में, PQRS और ATRS समान्तर चतुर्भुज हैं तथा X भुजा TR पर स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि
(i) ar (PQRS) = ar (ATRS)
(ii) ar (AXS) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS)



हल:
(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS तथा ATRS एक ही आधार RS तथा एक ही समान्तर रेखायुग्म PT’ और RS के मध्य स्थित हैं।
ar (PQRS) = ar (ATRS) …(1)
(ii) त्रिभुज AXS तथा समान्तर चतुर्भुज ATRS एक ही आधार AS पर तथा एक ही समान्तर रेखायुग्म AS तथा TR के मध्य स्थित हैं।
ar (∆AXS) = $\frac{1}{2}$ ar (ATRS) …..(2)
समीकरण (1) तथा (2) से
ar (∆AXS) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. एक किसान के पास समान्तर चतुर्भुज PQRS के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या है? किसान खेत में गेहूँ और दाले बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग चाहता है। वह ऐसा कैसे करे?



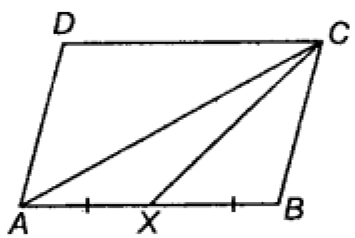
हल: माना किसान के पास चित्रानुसार PQRS समान्तर चतुर्भुज के आकार का एक खेत है। किसान ने भुजा RS पर एक बिन्दु A चुनकर उसे P तथा Q से मिला दिया।

खेत तीन त्रिभुजाकार भागों में विभाजित हो गया हैं ये भाग ΔPSA, ΔPAQ तथा ΔQAR हैं।
किसान को गेहूँ और दालें बराबर क्षेत्रफलों में बोनी हैं, इसलिए P से सम्मुख भुजा SR “पर PN लम्ब डाला गया है।
ΔPAQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times PQ \times PN$
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।
$PQ = RS$
तब ΔPAQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times RS \times PN$ ($\because PQ = RS$)
ΔPAQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ $(SA + AR) \times PN$
= $\frac{1}{2} \times SA \times PN + \frac{1}{2} \times AR \times PN$
= ΔPSA का क्षेत्रफल + ΔQAR का क्षेत्रफल
अत: किसान को ΔPAQ क्षेत्रफल में गेहूं और ΔPSA तथा ΔQAR के क्षेत्रफल में दालें बोनी चाहिए।

Exercise 10.3

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए-

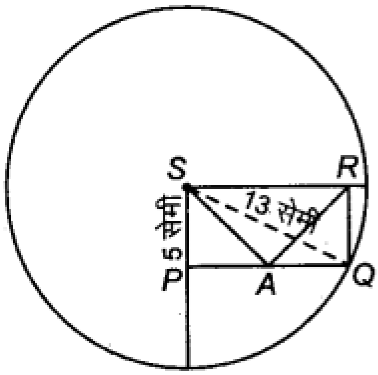
प्रश्न 1. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज और X भुजा AB का मध्य-बिन्दु है। यदि ar(AXCD) = 24 सेमी^{2} है तो ar(ABC) = 24 सेमी^{2} है।



हल: ar (ΔABC) = 24 सेमी^{2} ....(i)
ar (ABCX) = $\frac{1}{2}$ x 24 = 12 सेमी^{2} [$\because$ CX, ΔABC की माध्यिका है।]
ar (AXC) = ar (ΔABC) – ar (ΔBCX) = 24 – 12 = 12 सेमी^{2}
ar (AXCD) = ar (ΔACD) + ar (ΔACX) = 24 + 12 = 36 सेमी^{2} ...(ii) [$\because$ ar (ΔACD) = ar (ΔABC)]
समी. (i) तथा (ii) से, ar (ΔABC) $\neq$ ar (AXCD)
अतः कथन असत्य है।

प्रश्न 2. PQRS एक आयत है, जो त्रिज्या 13 सेमी वाले एक वृत्त के चतुर्थांश के अंतर्गत है। A भुजा PQ पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि PS = 5 सेमी है, तो ar (RAS) = 30 सेमी है।

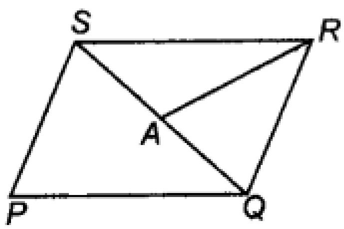
हल: विकर्ण SQ को मिलाया $SQ^2 = PQ^2 + PS^2$
$13^2 = PQ^2 + 5^2$
$PQ = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = 12$ सेमी
आयत PQRS का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 12 × 5 = 60 सेमी



त्रिभुज RAS तथा आयत PQRS एक ही आधार SR तथा एक समान्तर रेखा युग्म PQ तथा SR के मध्य स्थित है।
ar (ΔRAS) = $\frac{1}{2}$ ar (आयत PQRS) = $\frac{1}{2}$ × 60 = 30 सेमी^{2}
अत: कथन सत्य है।

प्रश्न 3. PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल 180 सेमी^{2} है तथा A विकर्ण QS पर स्थित कोई बिन्दु है। तब ΔASR का क्षेत्रफल 90 सेमी^{2} है।

हल:

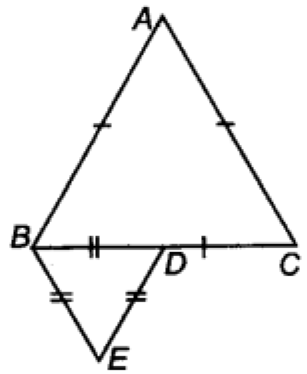


समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसके क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।
ΔQRS का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × समान्तर चतुर्भुज
PQRS का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × 180 = 90 वर्ग सेमी
अतः ΔASR का क्षेत्रफल 90 वर्ग सेमी से कम होगा। अतः कथन असत्य है।

प्रश्न 4. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। तब, ar (BDE) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC) है।

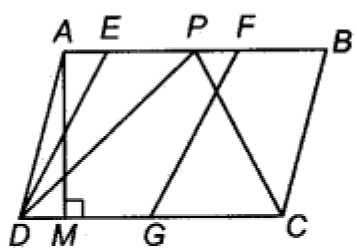
हल: ABC तथा BDC दो। समबाहु त्रिभुज हैं।
AB = BC = AC
माना कि AB = BC = AC = x
D, BC का मध्य बिन्दु है।

BD = BE = DE = $\frac{x}{2}$



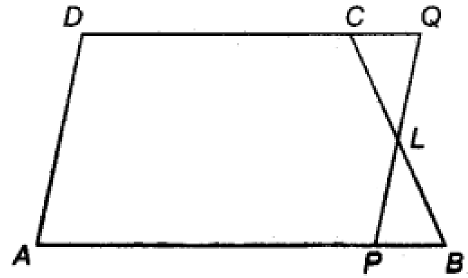
प्रश्न 5. दिए गए चित्र में, ABCD और EFGD दो समान्तर चतुर्भुज हैं तथा G भुजा CD का मध्य-बिन्दु है। तब, ar (DPC) = $\frac{1}{2}$ ar (EFGD) है।

हल:



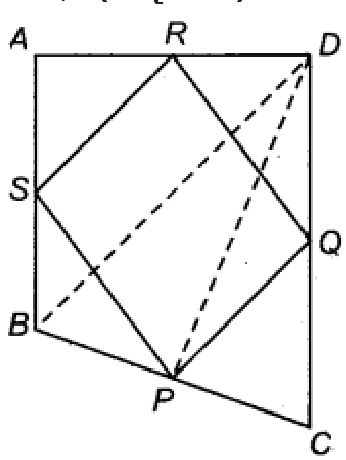
ABCD तथा EFGD दो समान्तर चतुर्भुज हैं। तथा G भुजा CD का मध्य बिन्दु है।
CD = AB
तथा DG = $\frac{1}{2}$ CD = $\frac{1}{2}$ AB
DG = EF
⇒ EF = $\frac{1}{2}$ AB
ar(EFGD) = DG x AM
= $\frac{1}{2}$ × AB × AM
= $\frac{1}{2}$ × AB × AM
= $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) .....(1)
ΔDPC तथा समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार CD तथा एक ही समान्तर रेखाओं CD और AB के मध्य स्थित हैं।
ar(ΔDPC) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) ...(2)
समीकरण (1) और (2) से,
ar(ΔDPC) = ar(EFGD)
अर्थात् ar(ΔDPC) ≠ $\frac{1}{2}$ ar(EFGD)
अतः कथन असत्य है।

प्रश्न 6. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB || DC है तथा L भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। L से होकर, एक रेखा PQ || AD खींची गई है, जो AB को P पर और बढ़ाई गई DC को २ पर मिलती है। सिद्ध कीजिए। ar(ABCD) = ar(APQD)



हल
समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB || CD है,
∠ABC = ∠QCB (एकान्तर कोण)
∠PBL = ∠QCL ...(1)
तथा L, भुजा BC का मध्य बिन्दु है।
CL = BL ...(2)
ΔPBL तथा ΔQCL में,
∠PBL = ∠QCL [सिमी (1) से]
BL = CL (समी (2) से)
∠PLB = ∠QLC (शीर्षाभिमुख कोण)
ΔPBL = ΔQCL
⇒ ar (ΔPBL) = ar (ΔQCL) ...(3)
ar (समलम्ब ABCD) = ar (APQD) + ar(PBL) – ar (AQCL) = ar (APQD)
अतः ar (ABCD) = ar (APQD)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है। (आकृति में)।

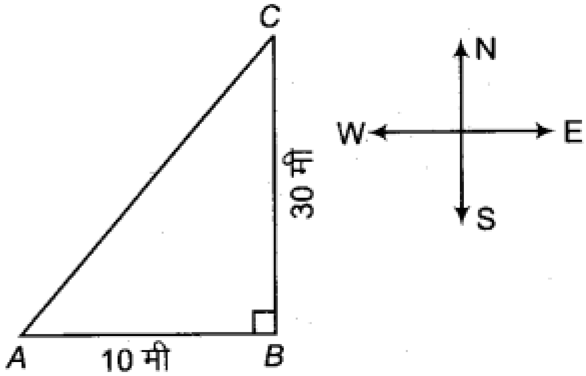


हल: चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर प्राप्त आकृति समान्तर चतुर्भुज PQRS है।
चूंकि हम जानते हैं कि माध्यिका त्रिभुजे को दो समान क्षेत्रफलों वाले भागों में विभाजित करती है।
PD त्रिभुज BCD की माध्यिका है।
ar (ΔPCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔBCD) ...(1)
PQ त्रिभुज PCD की माध्यिका है।
ar (ΔPCQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔPCD)
⇒ ar (ΔPCQ) = $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ ar (ΔBCD) [सिमी (1) से]
⇒ ar (ΔPCQ) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔBCD) ...(2)
इसी प्रकार, ar (ΔASR) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔABD) ...(3)
समी (2) तथा (3) के संगत पक्षों को जोड़ने पर
ar (ΔPCQ) + ar (ΔASR) = $\frac{1}{4}$ ar (ΔBCD) + $\frac{1}{4}$ ar (ΔABD)
⇒ ar (ΔPCQ) + ar (ΔASR) = $\frac{1}{4}$ ar (ABCD) ...(4)
इसी प्रकार ar (ΔBSP) + ar (ΔRQD) = $\frac{1}{4}$ ar (ABCD) ...(5)
समी. (4) तथा (5) के संगत पक्षों को जोड़ने पर
ar (ΔPCQ) + ar (ΔASR) + ar (ΔBSP) + ar (ΔRQD) = $\frac{1}{4}$ ar (ABCD) + $\frac{1}{4}$ ar (ABCD)
⇒ ar (ΔPCQ) + ar (ΔASR) + ar (ΔBSP) + ar (ΔRQD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) ...(6)
⇒ ar (PQRS) = ar (ABCD)- [ar (ΔPCQ) + ar (ΔASR) + ar (ΔBSP) + ar (ΔRDF)]
= ar (ABCD) – $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)
= $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. एक व्यक्ति 10 मीटर पूर्व की ओर जाता है और तब 30 मीटर उत्तर की ओर जाता है। उसकी प्रारम्भिक स्थान से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि व्यक्ति की प्रारम्भिक स्थिति A है।
बिन्दु A से व्यक्ति 10 मीटर पूर्व की ओर जाता है अर्थात् AB = 10 मी तथा फिर 30 मी उत्तर की ओर जाता है अर्थात् BC = 30 मी

उसकी प्रारम्भिक स्थान से दूरी ज्ञात करनी है। समकोण त्रिभुज ABC में,



पाइथागोरस प्रमेय से, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 10^2 + 30^2 = 100 + 900 = 1000$

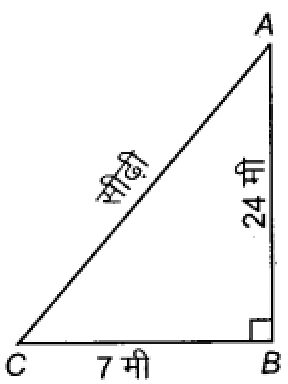
$\Rightarrow \quad AC = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$ सेमी

अत: व्यक्ति की प्रारम्भिक स्थान से दूरी

$= 10\sqrt{10}$ मी

प्रश्न 9. एक सीढ़ी दीवार के साथ इस प्रकार रखी गई है कि इसका नीचे का सिरा दीवार से 7 मीटर दूर है। यदि इसका दूसरा सिरा 24 मीटर ऊँची एक खिड़की तक पहुँचे, तो सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना AB कोई दीवार है जिसमें 24 मी ऊँचाई पर बिन्दु A पर खिड़की है अर्थात् AB = 24 मी। दीवार के निचले सिरे से 7 मी दूर AC कोई सीढ़ी है।
अर्थात् BC = 7 मी.

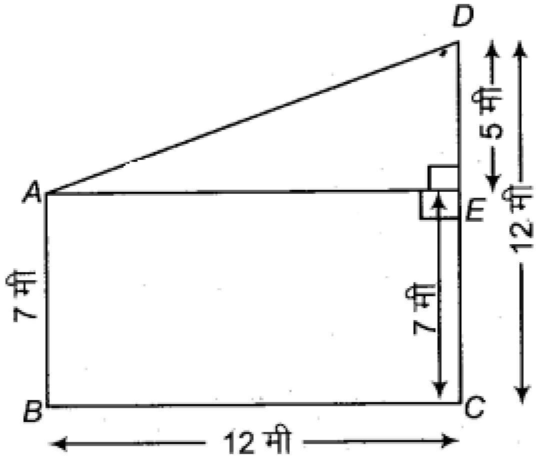


समकोण त्रिभुज ABC में,
$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$\Rightarrow AC^2 = 7^2 + 24^2$
$\Rightarrow AC^2 = 49 + 576 = 625$
$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25$ मी.
अत: सीढ़ी की लम्बाई = 25 मी

प्रश्न 10. एक समतल भूमि पर दो खम्भे 7 मीटर और 12 मीटर लम्बे खड़े हैं। यदि उनके पादों के बीच में 12 मीटर की दूरी हो, तो उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि दो खम्भों AB तथा CD हैं। इन खम्भों की ऊँचाइयाँ क्रमशः 7 मी तथा 12 मी हैं। खम्भों के पादों के बीच की दूरी 12 मी है।

अर्थात् AB = 7 मी, CD = 12 मी तथा BC = 12 मी



BC के समान्तर रेखा AE खींची।
$\angle BAE + \angle ABC = 180°$ (क्रमागत अन्त: कोण)
$\Rightarrow \angle BAE + 90° = 180°$
$\Rightarrow \angle BAE = 90°$
इसी प्रकार, $\angle AEC = 90°$
अत: ABCE एक आयत है।
AE = BC = 12 मी तथा CE = AB = 7 मी
DE = CD – CE = 12 मी – 7 मी = 5 मी
$\angle AED = \angle BCE = 90°$ (संगत कोण) समकोण
ΔAED में, (पाइथागोरस प्रमेयं से)
$AD^2 = AE^2 + DE^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
$\Rightarrow AD = \sqrt{169} = 13$ मी।
अत: खम्भों के ऊपरी सिरों के बीच की दूरी = 13 मी

प्रश्न 11. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षलम्ब की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी भुजा की लम्बाई a है।

हल: माना ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजा की लम्बाई a है।
चूंकि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब, संगत भुजा को समद्विभाजित करता है।

अतः BD = CD = $\frac{a}{2}$

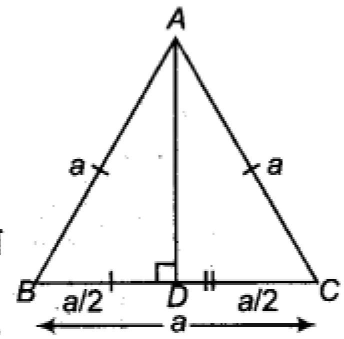
समकोण त्रिभुज ABD में,

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AD^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

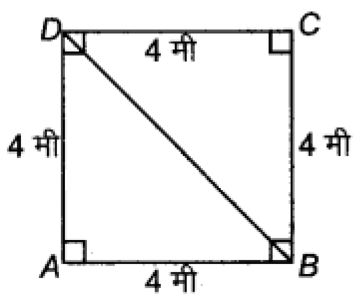
$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

अतः समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

प्रश्न 12. एक वर्ग के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 4 मी है।

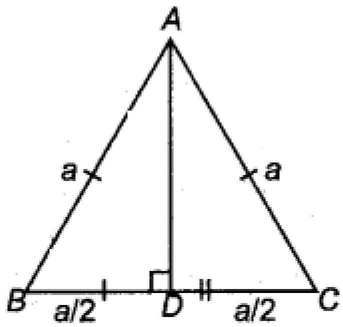
हल:



माना ABCD एक वर्ग हैं जिसकी प्रत्येक भुजा 4 मी है।
वर्ग का प्रत्येक 4 मी कोण 90° होता हैं।
समकोण ΔBAD में,
$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
$BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ मी
अतः वर्ग के विकर्ण की लम्बाई $= 4\sqrt{2}$ मी

प्रश्न 13. एक समबाहु त्रिभुज ABC में, AD भुजा BC पर लम्ब है। तो सिद्ध कीजिए कि $3AB^2 = 4AD^2$

हल: माना समबाहु त्रिभुज ABC की प्रत्येक भुजा a है।
तथा AD ⊥ BC है।
समबाहु त्रिभुज में लम्ब संगत भुजा को समद्विभाजित करती है।
अतः BD = CD = $\frac{a}{2}$



समकोण ΔABD में,
$AB^2 = BD^2 + AD^2$

$$\Rightarrow \quad a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AD^2$$

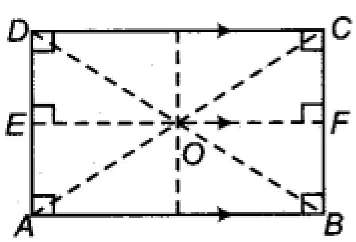
$$\Rightarrow \quad AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 3a^2 = 4AD^2 \Rightarrow 3AB^2 = 4AD^2 \quad [\because a = AB]$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 14. आयत ABCD के अन्दर कोई बिन्दु O है। सिद्ध कीजिए कि : $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$

हल: दिया है : ABCD एक आयत है, जिसके अन्दर कोई बिन्दु O है।

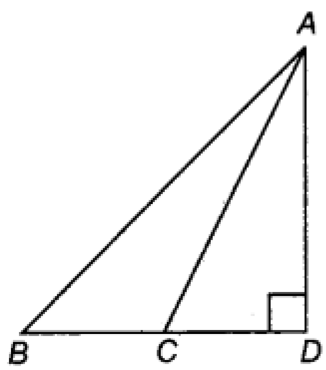


सिद्ध करना हैं : $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$
रचना : AB के समान्तर O से गुजरती L हुई रेखा EF खींची जो AD तथा BC को L क्रमशः बिन्दु E तथा F पर प्रतिच्छेद करती है।
उपपत्ति : AB || EF

$\angle A = \angle DEF = 90°$ (संगत कोण)
तथा $\angle B = \angle CFE = 90°$
समकोण ΔAEO में, पाइथागोरस प्रमेय से
$AO^2 = OE^2 + AE^2$ .....(1)
समकोण ΔOFC में, $OC^2 = OF^2 + CF^2$ ...(2)
समकोण ΔOED में, $OD^2 = ED^2 + OE^2$ ...(3)
समकोण ΔBFO में, $OB^2 = BF^2 + OF^2$ ...(4)
समी. (3) तथा (4) को जोड़ने पर
$OD^2 + OB^2 = ED^2 + OE^2 + BF^2 + OF^2$
$= CF^2 + OE^2 + AE^2 + OF^2$ [$\because ED^2 = CF^2, BF^2 = AE^2$]
$= CF^2 + OF^2 + AE^2 + OE^2 = OC^2 + AO^2$ [समी (1) तथा (2) का प्रयोग करने पर]
$\Rightarrow OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$
इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. एक अधिककोण त्रिभुज ABC में कोण C अधिक कोण है। AD ⊥ BC है और BC को आगे बढ़ाने पर D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \times BC \times CD$

हल: दिया है : एक अधिककोण त्रिभुज जिसमें $\angle C > 90°$
तथा $AD \perp BC$



सिद्ध करना है : $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \times BC \times CD$
उपपत्ति: समकोण ΔADC में, $AC^2 = CD^2 + AD^2$ ...(1)
समकोण ΔABD में, $AB^2 = BD^2 + AD^2$
$\Rightarrow AB^2 = (BC + CD)^2 + AD^2$
$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD + AD^2$
$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AD^2 + CD^2 + 2BC.CD$
$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD$ (समी (1) से)
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$
इति सिद्धम्।

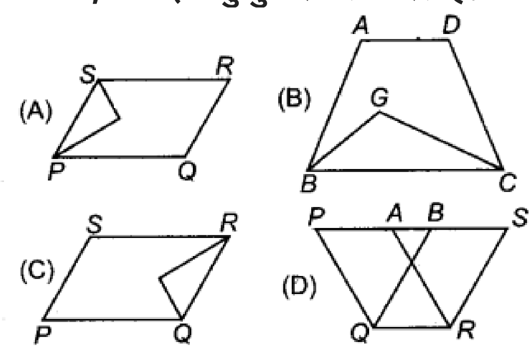
Miscellaneous Exercise

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए-

प्रश्न 1. एक त्रिभुज की माध्यिका उसे विभाजित करती है,दो
(A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में
(B) सर्वांगसम त्रिभुजों में।
(C) समकोण त्रिभुजों में
(D) समद्विबाहु त्रिभुजों में

उत्तर: (A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में

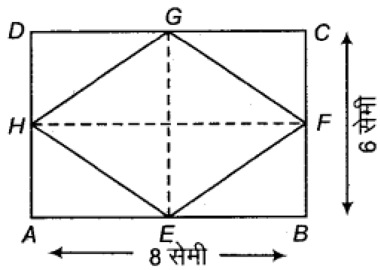
प्रश्न 2. निम्नलिखित आकृतियों में से किसमें आप एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच, बने दो बहुभुज प्राप्त करते हैं:



उत्तर: (D)

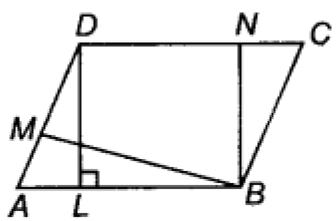
प्रश्न 3. 8 सेमी और 6 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की आसन्न भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति है।
(A) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक आयत
(B) 25 सेमी^{2} क्षेत्रफल को एक वर्ग
(C) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समलम्ब
(D) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज

उत्तर: (D) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज
संकेत:



EFGH के विकर्ण HF = AB = 8 सेमी
तथा GE = BC = 6 सेमी।
समचतुर्भुज EFGH का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
= $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$
= 24 सेमी^{2}

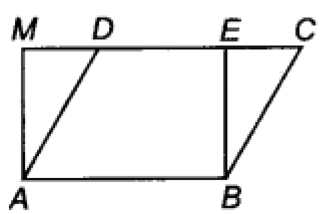
प्रश्न 4. चित्र में, समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है-



(A) AB × BM
(B) BC × BN
(C) DC × DL
(D) AD × DL

उत्तर: (C) DC × DL

प्रश्न 5. दिए गए चित्र में, यदि समान्तर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEM समान क्षेत्रफल के हैं, तो



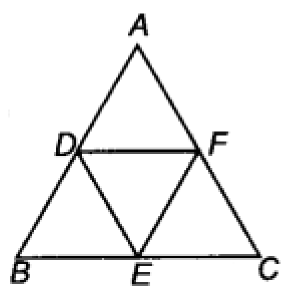
(A) ABCD का परिमाप = ABEM का परिमाप
(B) ABCD का परिमाप < ABEM का परिमाप (C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप
(D) ABCD का परिमाप = $\frac{1}{2}$ (ABEM का परिमाप)

उत्तर: (C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप
संकेत:

ΔBEC में, BC कर्ण है।
BC > BE तथा ΔADM में, AD > AM
समान्तर चतुर्भुज ABCD का परिमाप = AB + BC + CD + AD
= AB + BC + AB + BC
= 2 (AB + BC)
आयत ABEM का परिमाप
= AB + BE + ME + AM
= AB + BE + AB + BE
= 2 (AB + BE)
BC > BE
समान्तर चतुर्भुज ABCD का परिमाप > आयत ABEM का परिमाप

प्रश्न 6. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दु किसी भी एक शीर्ष को चौथा बिन्दु लेकर एक सरल चतुर्भुज बनाते है, जिसको क्षेत्रफल बराबर है:
(A) $\frac{1}{2}$ ar (ABC)
(B) $\frac{1}{3}$ ar (ABC)
(C) $\frac{1}{4}$ ar (ABC)
(D) ar (ABC)

उत्तर: (A) $\frac{1}{2}$ ar (ABC)
संकेत: चारों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होगा क्योंकि ये चारों सर्वांगसम त्रिभुज हैं।



ar (ΔDEF) = ar (ΔBDE) = ar (ΔCEF) = ar (ΔADE) ...(1)
मध्य बिन्दुओं D, E, F तथा त्रिभुज के चौथे बिन्दु B से प्राप्त आकृति BEFD होगी।
ar (ΔABC) = ar (ΔDEF) + ar (ΔBDE) + ar (ΔCEF) + ar (ΔADE)
= 4ar (ΔDEF) [समी. (1) का प्रयोग करने पर] ...(2)
ar (BEFD) = ar(ΔBED) + ar (ΔDEF) = 2ar (ΔDEF) ....(3)
समी (2) तथा (3) से
ar (ΔABC) = 2 ar (BEFD)
$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ar (ΔABC) = ar (BEFD)

प्रश्न 7. दो समान्तर चतुर्भुज बराबर आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात हैं:

(A) 1 : 2
(B) 1 : 1
(C) 2 : 1
(D) 3 : 1

उत्तर: (B) 1 : 1

प्रश्न 8. ABCD एक चतुर्भुज है जिसको विकर्ण AC उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करती है। तब ABCD
(A) एक आयत है
(B) सदैव एक समचतुर्भुज है।
(C) एक समांतर चतुर्भुज है।
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर: (C) एक समांतर चतुर्भुज है।

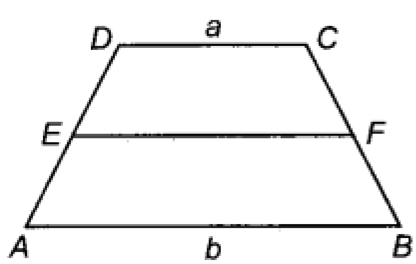
प्रश्न 9. एक त्रिभुज और एक समान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हैं, तो त्रिभुज के क्षेत्रफल का समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से अनुपात है।
(A) 1 : 3
(B) 1 : 2
(C) 3 : 1
(D) 1 : 4

उत्तर: (B) 1 : 2

संकेत: त्रिभुज का क्षेत्रफल, = $\frac{1}{2}$ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \frac{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

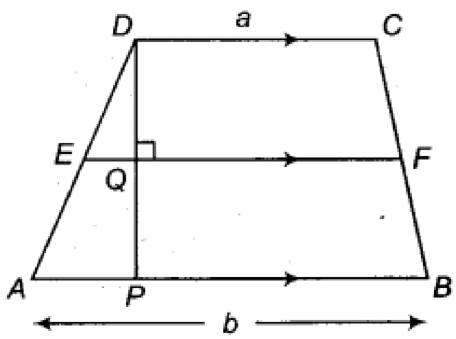
प्रश्न 10. ABCD एक समलम्ब है जिसकी , समान्तर भुजाएँ AB = b सेमी और DC = a सेमी है। E और F असमांतर भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं। ar (ABFE) और ar (EFCD) का अनुपात है:



(A) a : b
(B) (3a + b) : (a + 3b)
(C) (a + 3b) : (3a + b)
(D) (2a + b) : (3a + b)

उत्तर: (C) (a + 3b) : (3a + b)

संकेत: EF = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) = $\frac{1}{2}$ (b + a)
DP ⊥ AB खींचा।



चूँकि $AB \parallel EF$ अत: $\angle DQF = 90°$
त्रिभुज APD में, E, AD का मध्य बिन्दु है तथा $EQ \parallel AP$ है। अत: Q, DP का मध्य बिन्दु होगा।

$$\Rightarrow \qquad DQ = QP$$

समलम्ब $ABFE$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(AB + EF) \times PQ = \frac{1}{2}\left[b + \frac{1}{2}(b + a)\right] \times PQ$$

$$= \frac{1}{4}(2b + b + a) \times PQ = \frac{1}{4}(a + 3b) \times PQ$$

समान्तर चतुर्भुज $EFCD$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(EF + CD) \times DQ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b) + a\right] \times DQ$$

$$= \frac{1}{4}[a + b + 2a] \times PQ \qquad [DQ = PQ]$$

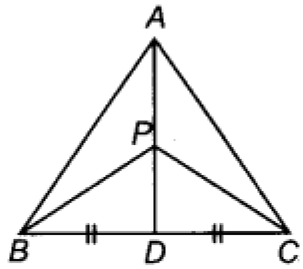
$$= \frac{1}{4}[3a + b] \times PQ$$

$$\frac{ar\,(ABFE)}{ar\,(EFCD)} = \frac{\frac{1}{4}(a + 3b) \times PQ}{\frac{1}{4}(3a + b) \times PQ} = \frac{a + 3b}{3a + b}$$

$$= (a + 3b) : (3a + b)$$

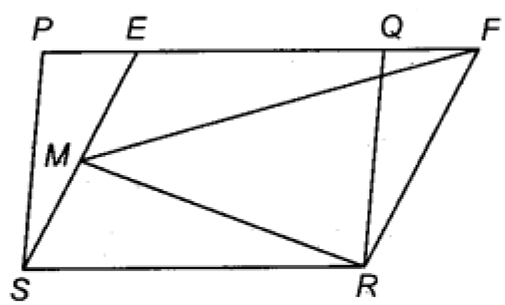
प्रश्न 11. यदि P किसी त्रिभुज ABC की माध्यिका AD पर स्थित कोई बिन्दु है तो ar (ABP) ≠ ar (ACP) है।

हल: माध्यिका किसी त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों में विभाजित करती है।



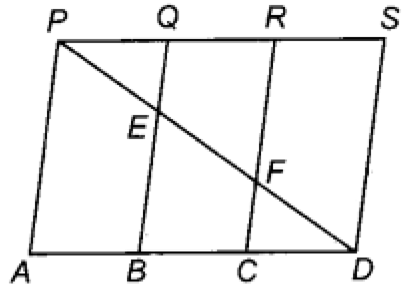
ar (ΔABD) = ar (ΔACD) ...(1)
PD त्रिभुज PBC की भी माध्यिका है।
ar (ΔBPD) = ar (ΔCPD) ..(2)
समी. (1) में से समी (2) को घटाने पर
ar (ΔABD) – ar (ΔBPD) = ar (ΔACD) – ar (ΔCPD)
ar (ΔABP)= ar (ΔACP)
अंतः दिया गया कथन पूर्णतयाः असत्य है।

प्रश्न 12. यदि दिए गए चित्र में PQRS और EFRS दो समान्तर चतुर्भुज हैं, तो ar (MFR) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS) है।



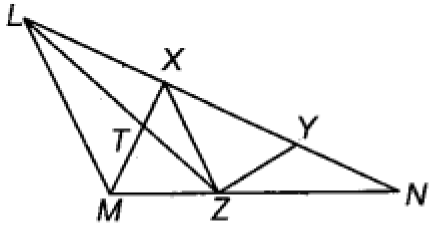
हल: समान्तर चतुर्भुज PQRS तथा EFRS एक ही आधार SR तथा एक ही समान्तर रेखाओं SR तथा PF के मध्य स्थित हैं।
ar (PQRS) = ar (EFRS) ...(1)
त्रिभुज MFR तथा समान्तर चतुर्भुज EFRS एक ही आधार RF तथा एक ही समान्तर रेखाओं RF तथा SE के मध्य स्थित है।
ar (MFR) = $\frac{1}{2}$ ar (EFRS) (उपप्रमेय 2) ...(2)
समी. (1) तथा (2) से
ar (MFR) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS)
अत: दिया गया कथन सत्य है।

प्रश्न 13. चित्र में, PSDA एक समान्तर चतुर्भुज है। PS पर बिन्दु Q और R इस प्रकार लिए। गए हैं कि PQ = QR = RS है। तथा PA || QB || RC है। सिद्ध कीजिए कि ar (PQE) = ar (CFD)



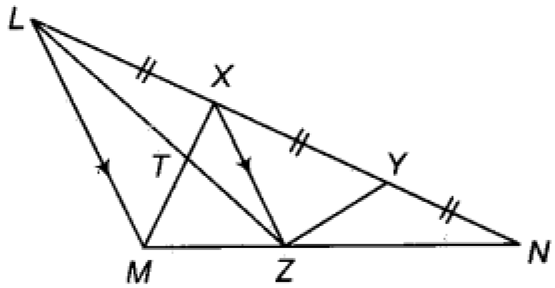
हल: PQ || AB तथा PA || QB (दिया है)
PABQ एक समान्तर चतुर्भुज है।
इसी प्रकार BCRQ तथा CDSR समान्तर चतुर्भुज है।
AB = PQ, BC = QR तथा CD = RS
चूंकि PQ = QR = RS
अत: AB = BC = CD
PQ = CD ...(1)
PA || QB || RC अब PA || SD (PSDA एक समान्तर चतुर्भुज है।)
AD || PS तथा PD एक तिर्यक रेखा है।
$\angle SPD = \angle ADP$ (एकान्तर कोण)
$\angle QPE = \angle CDF$ ...(2)
ΔPEQ तथा ΔDFC में,
$\angle QPE = \angle CDF$ [समी (2) से।
$\angle QEP = \angle CFD$ (शीर्षाभिमुख, कोण)
PQ = CD (समी (1) से)
$\Delta PEQ = \Delta DFC$ [AAS नियम से]
ar (ΔPQE) = ar (ΔCFD)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 14. X और Y त्रिभुजे LMN की भुजा LN पर स्थित दो। बिन्दु इस प्रकार हैं। LX = XY = YN है। X से होकर जाती हुई एक रेखा LM के समान्तर खींची गई जो MN को Z पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ΔLZY) = ar (MZYX) है।



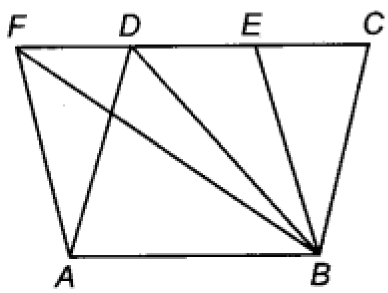
हल:

दिया है : X और Y त्रिभुज LMN की भुजा LN पर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि LX = XY = YN तथा LM || XZ है।
सिद्ध करना है : ar (ΔLZY) = ar (MZYX)
उपपत्ति: ΔLXZ तथा ΔMXZ एक ही आधार ZX तथा एक ही समान्तर रेखाओं XZ तथा LM के बीच स्थित है।



ar (ΔLXZ) = ar (MXZ) (प्रमेय 10.2 से) ...(1)
ar (ΔLXZ) + ar (ΔXYZ) = ar (ΔMXZ) + ar (ΔXYZ) [ar (ΔXYZ) दोनों तरफ जोड़ने पर)
ar (ΔLZY) = ar (MZYX)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 90 सेमी2 है। निम्नलिखित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

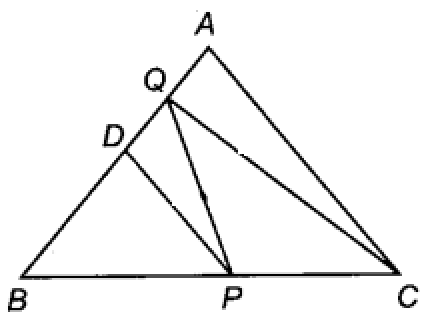


(i) ar (ABEF)
(ii) ar (ABD)
(iii) ar (BEF)

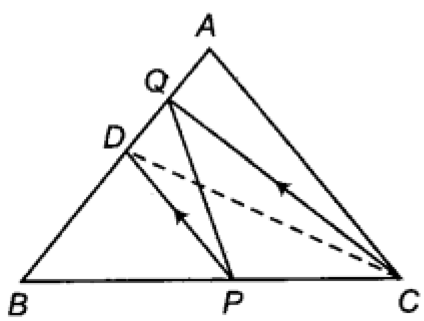
हल: (i) समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा समान्तर चतुर्भुज
ABEF एक ही आधार AB तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा CF के मध्य स्थित हैं।
ar (ABCD) = ar (ABEF) (प्रमेय 10.1 से)
⇒ 90 = ar (ABEF) [दिया है : ar (ABCD) = 90 सेमी2]
⇒ ar (ABEF) = 90 सेमी2
(ii) त्रिभुज ABD तथा समान्तर चतुर्भुज ABEF एक ही आधार AB तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा EF के मध्य स्थित हैं।
ar (ΔABD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABEF)
ar (ΔABD) = $\frac{1}{2}$ × 90 = 45 सेमी
(iii) BF समान्तर चतुर्भुज ABEF का विकर्ण है। तथा हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो

बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
ar (ΔABF) = ar (ΔEBF) = $\frac{1}{2}$ ar (ABEF)
ar (ΔBEF) = $\frac{1}{2}$ × 90 = 45 वर्ग सेमी

प्रश्न 16. ΔABC में, D भुजा AB का मध्य-बिन्दु है तथा P भुजा BC पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि रेखाखण्ड CQ || PD भुजा AB से Q पर मिलता है (चित्र से,) तो सिद्ध कीजिए कि ar (BPQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC) है।

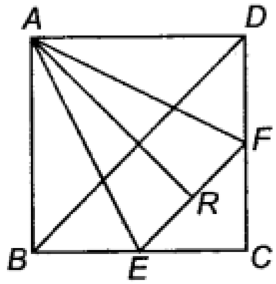


हल: दिया है : BD = AD, P भुजा BC पर स्थित कोई बिन्दु इस प्रकार है कि CQ || PD
सिद्ध करना है : ar (ΔBPQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC)
रचना : CD को मिलाया
उपपत्ति : चूंकि AB का मध्य बिन्दु D है। अतः ΔABC में CD एक माध्यिका है।

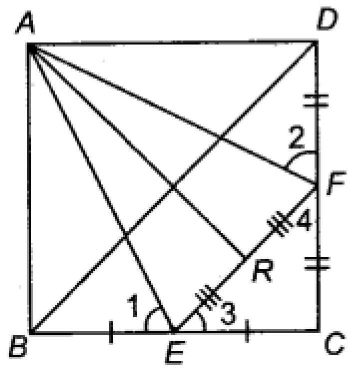


ar (ΔBCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC) ...(1)
ΔPDQ तथा ΔPDC एक ही आधार PD पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं PD और QC के बीच स्थित है।
ar (ΔPDQ) = ar (ΔPDC) ...(2)
समी. (1) से, ar (ΔBCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC)
ar (ΔBPD) + ar (ΔPDC) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC)
⇒ ar (ΔBPD) + ar (ΔPDQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC) [समी (2) से]
⇒ ar(ΔBPQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔABC)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. ABCD एक वर्ग है। E और F क्रमशः BC और CD भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं। यदि R रेखाखण्ड EF का मध्य-बिन्दु है, [देखो चित्र] तो सिद्ध कीजिए कि ar (AER) = ar (AFR) है।



हल: E तथा F क्रमशः वर्ग में की भुजाओं BC तथा CD के मध्य बिन्दु हैं।



BE = EC = $\frac{1}{2}$ BC ...(1)

तथा CF = DF = $\frac{1}{2}$ CD

BC = CD (वर्ग की समान भुजाएँ)

⇒ $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ CD

BE = DF ...(2)

ΔAFD तथा ΔAEB में,

AD = AB (वर्ग की समाने भुजाएँ)

DF = BE [समी (2) से

∠D = ∠B (प्रत्येक 90° है)

ΔAFD = ΔAEB (SAS नियम से)

AF = AE (CPCT) ...(3)

तथा ∠AFD = ∠AEB (CPCT) ...(4)

ΔCEF में,

CE = CF [∵ BC = CD ⇒ $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ CD]

∠3 = ∠4 .....(5)

∠1 + ∠AEF + ∠3 = 180°

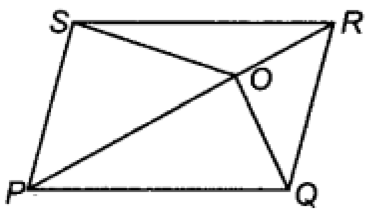
तथा ∠2 + ∠AFE + ∠4 = 180° ...(7)

समी. (6) तथा (7) से

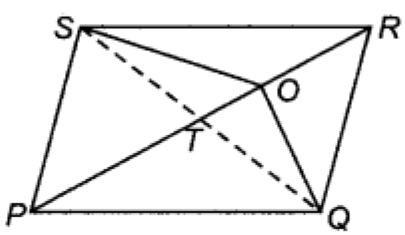
∠1 + ∠AEF + ∠3 = ∠2 + ∠AFE + ∠4

⇒ ∠1 + ∠AEF + ∠4 = ∠1 + ∠AFE + ∠4 [समी (4) तथा (5) का प्रयोग करने पर]
⇒ ∠AEF = ∠AFE
⇒ ∠AER = ∠AFR ...(8)
ΔAER तथा ΔAFR में
AE = AF (समी (3) से
∠AER = ∠AFF (समी (8) से]
ER = FR [R, EF का मध्य बिन्दु है।]
ΔAER = ΔAFR (SAS नियम से)
ar (ΔAER) = ar (ΔAFR)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 18. O एक समान्तरे चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई बिन्दु है। [देखें दिए गए चित्र में] सिद्ध कीजिए कि ar (PSO) = ar (PQO) है।

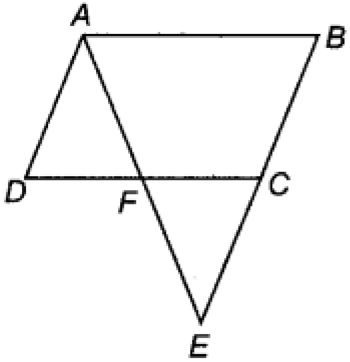


हल: QS को मिलाया, जो विकर्ण PR को बिन्दु T पर काटता है। चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं।
अतः ST = TQ
⇒ T, SQ का मध्य बिन्दु है। चूँकि हम जानते है कि एक त्रिभुज की माध्यिका त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफलों वाले भागों में विभाजित करती है।

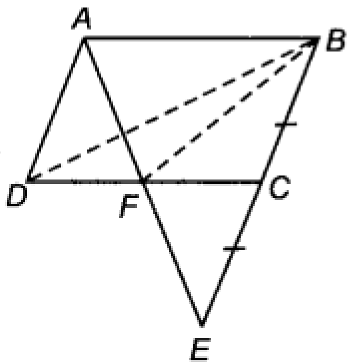


PT, ΔSPQ की माध्यिका है।
ar (ΔSPT) = ar (ΔQPT) ...(1)
OT, ΔOSQ की माध्यिका है।
ar (SOT) = ar (OQT)
समी. (1) तथा (2) के संगत पक्षों को जोड़ने पर।
ar (ΔSPT) + ar (ΔSOT) = ar (ΔQPT) + ar (ΔOQT)
⇒ ar (ΔPSO) = ar (ΔPQO)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 19. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसमें BC को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CE = BC है। [चित्र देखे] AE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। यदि ar (DFB) = 3 सेमी है, तो समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



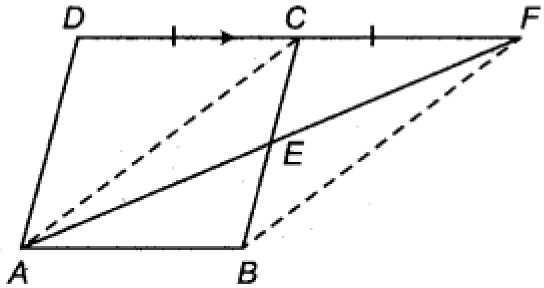
हल: BD तथा BF को । मिलाया। ΔAEB में, C, BE का मध्य बिन्दु है। तथा CF || AB ($\because$ CD || AB)
$\Rightarrow$ F, DC का मध्य बिन्दु हैं।
समान्तर चतुर्भुज ABCD में, BD इसका विकर्ण है।



ar (ΔCBD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)
$\Rightarrow$ ar (ΔBCD) = 2ar (ΔCBD) ...(1)
त्रिभुज की माध्यिका, त्रिभुज को समान क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करती है।
BF, ΔCBD की माध्यिका है।
ar (ΔDFB) = ar (ΔCBF) = $\frac{1}{2}$ ar (ΔCBD)
$\Rightarrow$ 3 = $\frac{1}{2}$ ar (ΔCBD)
$\Rightarrow$ ar (ΔCBD) = 6 सेमी2
समी. (2) से ar (ΔCBD) का मान, समी. (1) में रखने पर, ar (ABCD) = 2 x 6 = 12 सेमी

प्रश्न 20. किसी समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर कोई बिन्दु E लिया जाता है। AE और DC को बढ़ाया जाता है जिससे वे F पर मिलती है। यदि C, DF का मध्य बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए कि ar (ADF) = ar (ABFC)

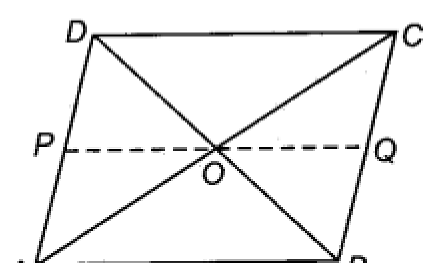
हल: दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर बिन्दु E, इस प्रकार स्थित है कि AE तथा DC को जब बढ़ाया जाता है तो वे F पर मिलते हैं ।



सिद्ध करना है : ar (ΔADF) = ar (ΔBFC)
रचना : AC तथा BF को मिलाया।
उपपत्ति : AB = CD [सिमान्तर चतुर्भज की सम्मुख भुजाएँ]
CF = CD (C, DF का मध्य बिन्दु है)
AB = CF तथा AB || DF
AB || CF
अब AB = CF तथा AB || CF
ABFC एक समान्तर चतुर्भज होगा।
ΔACB तथा ΔACF एक ही आधार AC तथा एक ही समान्तर रेखाओं AC और BF के मध्य स्थित है।
ar (ΔACB) = ar (ΔACF)
⇒ ar (ΔACB) + ar (ΔACD) = ar (ΔACF) + ar (ΔACD) [दोनों पक्षों में ar (ACD) जोड़ने पर]
⇒ ar (ABCD) = ar (ADF)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 21. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो AD को P और BC से Q पर मिलती है। दर्शाइए कि PQ इस समान्तर चतुर्भुज ABCD को बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है।

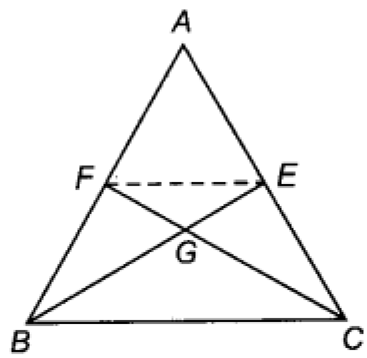
हल: दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
O से होकर एक A रेखा खींची जाती है जो AD को P तथा BC से Q पर मिलती है।
सिद्ध करना है : ar (ABQP) = ar (CQPD)



उपपत्तिः समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसको दो समान क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करता है।
ar (ΔABC) = ar (ΔACD)

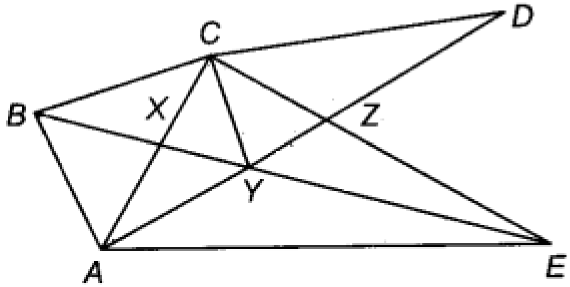
ar (चतुर्भुज ABQO) + ar (AOCQ) = ar (चतुर्भुज CDPO) + ar (ΔAOP) ...(1)
ΔAOP तथा ΔCOQ में
$\angle$OAP = $\angle$OCQ (एकान्तर कोण AD || BC)
$\Rightarrow$ AO = OC (O, AC को मध्य बिन्दु है)
$\Rightarrow$ $\angle$AOP = $\angle$COQ (शीर्षाभिमुख कोण)
$\Rightarrow$ ΔAOP = ΔCOQ (ASA नियम से)
$\Rightarrow$ ar(ΔAOP) = ar (ΔCOQ) ...(2)
समी. (1) तथा (2) से,
ar (चतुर्भुज ABQO) + ar (ΔAOP) = ar (चतुर्भुज CDPO) + ar (ΔCOQ)
$\Rightarrow$ ar(चतुर्भुज ABQP) = ar (चतुर्भुज CDPQ)
$\Rightarrow$ ar (ABQP) = ar (CQPD)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 22. एक त्रिभुज ABCD की माध्यिकाएँ BE और CF परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि AGBC का क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE के क्षेत्रफल के बराबर है।



हल: EF को मिलाया। ΔABC में E और F भुजाओं AC तथा AB के मध्य बिन्दु हैं।
EF || BC
ΔBEF तथा ΔCEF एक ही आधार EF तथा एक ही समान्तर रेखाओं FE तथा BC के मध्य स्थित है।
ar (ΔBEF) = ar (ΔCEF)
ar (ΔBEF) – ar (ΔFGE) = ar(ΔCEF) – ar (ΔFGE)
ar (ΔBFG) = ar (ΔCGE) ...(1)
हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिका त्रिभुज को बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।
चूंकि BE, ΔABC की माध्यिका है।
अतः ar (ΔBEC) = ar (ΔABE)
$\Rightarrow$ ar (ΔGBC) + ar (ΔCGE) = ar (AFGE) + ar (ΔBFG)
$\Rightarrow$ ar (ΔGBC) + ar (ΔCGE) = ar (AFGE) + ar(ΔCGE) (समी (1) से)
$\Rightarrow$ ar (ΔGBC) = ar (AFGE)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 23. दिए गए चित्र में, CD || AE और CY || BA है। सिद्ध कीजिए कि ar (CBX) = ar (AXY) है।



हल: त्रिभुज CBY तथा त्रिभुज CAY एक ही आधारे CY पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं CY तथा AB के मध्य स्थित है।

ar (ΔCBY) = ar (ΔCAY)

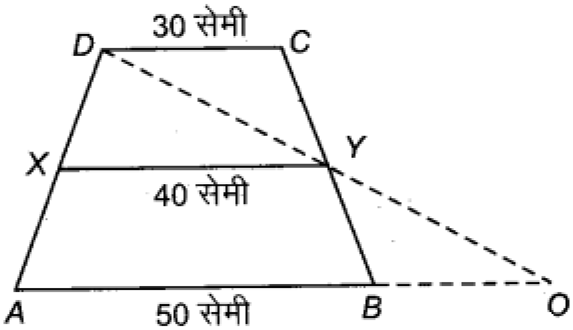
⇒ ar (ΔCBY) – ar(CXY) = ar (ΔCAY) – ar (ΔCXY)

⇒ ar (ΔCBX) = ar (ΔAXY)

इति सिद्धम्।

प्रश्न 24. ABCD एक समलम्ब है, जिसमें AB || DC, DC = 30 सेमी और AB = 50 सेमी है। यदि X और Y क्रमश: AD और BC के मध्य बिन्दु हैं, तो सिद्ध कीजिए कि ar (DCYX) = $\frac{7}{9}$ ar (XYBA) है।

हल: DY को मिलाया तथा इसे आगे बढ़ाया जो AB को आगे बढ़ाने पर O पर मिलती है।



ΔDCY तथा ΔOBY में,

∠DCY = ∠OBY (एकान्तर कोण)

CY = BY (Y, BC का मध्य बिन्दु है)

∠CYD = ∠BYO (शीर्षाभिमुख कोण)

ΔDCY = ΔOBY (ASA नियम से)

CD = OB (CPCT) ...(1)

तथा DY = OY

Y, OD का मध्य बिन्दु है।

ΔAOD में, Y, OD का मध्य बिन्दु है तथा X, AD का मध्य बिन्दु है।

XY || AO तथा XY = $\frac{1}{2}$ AO

⇒ XY = $\frac{1}{2}$ (AB + BO)

⇒ XY = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) [समी. (1) से BO = CD]
⇒ XY = $\frac{1}{2}$ (50 + 30) = 40 सेमी
XY || AO
⇒ XY || AB
तथा AB || CD
⇒ AB || XY || CD
ABYX तथा DCYX समलम्ब चतुर्भुज है। चूँकि X तथा Y भुजाओं AD तथा BC के मध्य बिन्दु हैं।
अत: समलम्ब चतुर्भुज ABYX तथा DCYX की ऊँचाइयाँ समान होगी। माना कि यह h सेमी है।

$$ar\ (\text{समलम्ब}\ ABYX) = \frac{1}{2}(AB + XY) \times h$$

$$\Rightarrow ar(\text{समलम्ब}\ ABYX) = \frac{1}{2}(50 + 40) \times h$$

$$\Rightarrow \quad ar\ (\text{समलम्ब}\ ABYX) = 45 \times h \qquad ...(2)$$

$$\text{तथा}\ ar\ (\text{समलम्ब}\ DCYX) = \frac{1}{2}(XY + CD) \times h$$

$$\Rightarrow ar(\text{समलम्ब}\ DCYX) = \frac{1}{2}(40 + 30) \times h$$

$$\Rightarrow \quad ar\ (\text{समलम्ब}\ DCYX) = 35 \times h \qquad ...(3)$$

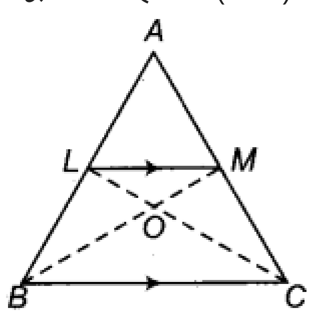
समी. (2) को (3) से भाग देने पर

$$\frac{ar(\text{समलम्ब}\ ABYX)}{ar\ (\text{समलम्ब}\ DCYX)} = \frac{45 \times h}{35 \times h} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \quad ar\ (DCYX) = \frac{7}{9} ar\ (ABYX)$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 25. त्रिभुज ABC में यदि L. और M क्रमश: AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित बिन्दु हैं कि LM || BC है। सिद्ध कीजिए कि ar (LOB) = ar (MOC)

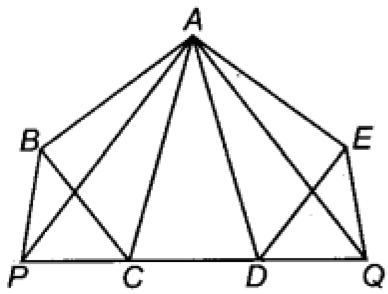
हल: दिया है : त्रिभुज ABC में L तथा M क्रमश: AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित हैं कि LM || BC
सिद्ध करमा है : ar (LOB) = ar (MOC)



रचना : LC को मिलाया तथा BM को मिलाया। माना कि यह बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
उपपत्ति : ΔLCB तथा AMBC एक ही आधार BC पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं BC और LM के मध्य

स्थित हैं।
ar (ΔLCB) = ar (ΔMBC)
$\Rightarrow$ ar (ΔLCB) – ar (ΔOBC) = ar (ΔMBC) – ar (ΔOBC)
$\Rightarrow$ ar (ΔLOB) = ar (MOC)
इति सिद्धम्।

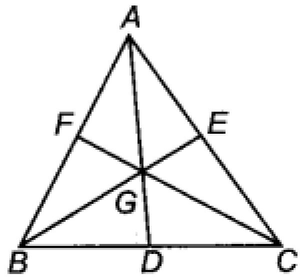
प्रश्न 26. दिए गए चित्र में, ABCDE एक पंचभुज है। AC के समान्तर खींची गई BP, बढ़ाई गई DC को P पर तथा AD के P समान्तर खींची गई EQ, बढ़ाई गई CD से Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ABCED) = ar (APQ)



हल: BP || AC हैं। (दिया है)।
ΔABC तथा ΔAPC एक ही आधार AC पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AC और BP के मध्य स्थित हैं।
ar (ΔABC) = ar (ΔAPC) ...(1)
AD || EQ (दिया है)
ΔAED तथा ΔAQD एक ही आधार AD पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं।
ar (ΔAED) = ar (ΔAQD) ...(2)
समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर
ar (ΔABC) + ar (ΔAED) = ar (ΔAPC) + ar (ΔAQD)
$\Rightarrow$ ar (ΔABC) + ar (ΔAED) + ar (ΔACD) = ar (ΔAPC) + ar(ΔAQD) + ar (ΔACD) [दोनों पक्षों में ar (ACD) जोड़ने पर]
$\Rightarrow$ ar (ABCDE) = ar (APQ)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 27. यदि एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँG पर मिलती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि ar (AGB) = ar (AGC) = ar (BGC) = $\frac{1}{3}$ ar (ABC)

हल: दिया है : एक ΔABC, जिसमें माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती है।
सिद्ध करना है : ar (AGB) = ar (AGC) = ar (BGC) = $\frac{1}{3}$ ar (ABC)



उपपत्ति : त्रिभुज की माध्यिका इसे समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। ΔABC में AD माध्यिका है।

ar (ΔABD) = ar (ΔACD) ....(1)

ΔGBC में, GD माध्यिका है।

ar (ΔGBD) = ar (ΔGCD) ...(2)

समी. (1) में से (2) को घटाने पर।

ar (ΔABD) – ar(ΔGBD) = ar (ΔACD) – ar (ΔGCD)

$\Rightarrow$ ar (ΔABG) = ar (ΔAGC) ...(3)

इसी प्रकार ar (ΔABG) = ar (ΔBGC) ...(4)

समी. (3) तथा (4) से।

ar (ΔABG) = ar(ΔAGC) = ar (ΔBGC)

$\Rightarrow$ ar (ΔAGB) = ar (ΔAGC) = ar (ΔBGC)...(5)

$\Rightarrow$ ar (ΔABC)= ar (ΔAGB) + ar (ΔBGC) + ar (ΔAGC)

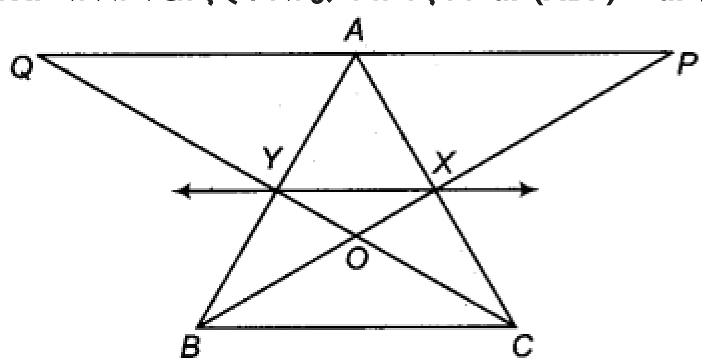
$\Rightarrow$ ar (ΔABC) = ar (ΔAGB) + ar (ΔAGB) + ar (ΔAGB) (समी (5) से)

$\Rightarrow$ ar (ΔABC) = 3ar (ΔAGB)

$\Rightarrow$ ar (ΔAGB) = $\frac{1}{3}$ ar (ΔABC)

अतः ar (AGB) = ar (AGC) = ar (BGC) = $\frac{1}{3}$ ar (ABC) इति सिद्धम्।

प्रश्न 28. दिए गए चित्र में, X और Y क्रमश: AC और AB के मध्य-बिन्दु हैं, QP || BC और CYQ और BXP सरल रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ABP) = ar (ACQ) है।



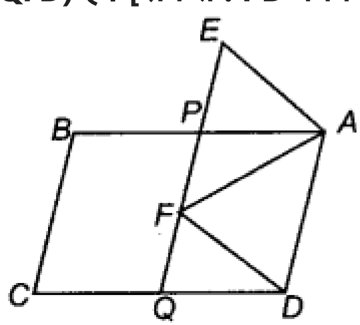
हल: चूँकि X और Y क्रमशः भुजाओं AC तथा AB के मध्य बिन्दु हैं।

XY || BC

XY || BC || PQ [$\because$ PQ || BC]

ΔAPX तथा ΔCBX में,
$\Rightarrow \angle AXP = \angle CXB$ (शीर्षाभिमुख कोण)
$\Rightarrow AX = CX$ (X, AC का मध्य बिन्दु है)
$\Rightarrow \angle PAX = \angle BCX$ (एकान्तर कोण, PQ || BC)
$\Delta APX = \Delta CBX$ (ASA नियम से)
ar (ΔAPX) = ar (ΔCBX) ...(1)
इसी प्रकार, ar (ΔAQY) = ar (ΔBCY) ...(2)
परन्तु ΔBCY तथा ΔCBX एक ही आधार BC पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं BC तथा XY के मध्य स्थित है।
ar (ΔBCY) = ar (ΔCBX)
$\Rightarrow$ ar (ΔBYC) = ar (ΔCXB) ...(3)
समी. (1), (2) तथा (3) से
ar (ΔAYQ) = ar (ΔAXP)
$\Rightarrow$ ar (ΔAXP) = ar (ΔAYQ) ...(4)
ΔYXB तथा ΔXYC एक ही आधार XY पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं XY तथा BC के बीच में स्थित है।
अत: ar (ΔYXB) = ar (ΔXYC)
ar (ΔYXB) + ar (ΔAXY) = ar (ΔXYC) + ar (ΔAXY)
$\Rightarrow$ ar (ABX) = ar (AYC) ...(5)
समी. (4) तथा (5) को जोड़ने पर
ar (ΔAXP) + ar (ΔABX) = ar (ΔAYQ)+ ar (ΔAYC)
$\Rightarrow$ ar (ΔABP) = ar (ΔACQ)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 29. चित्र में, ABCD और AEFD दो समान्तर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए। कि ar (PEA) = ar (QFD) है। [संकेत : PD को मिलाइए]



हल: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।
AB || CD $\Rightarrow$ AP || QD
AEFD एक समान्तर चतुर्भज है।
AD || EF $\Rightarrow$ AD || PQ
चतुर्भुज APQD में, AD || PQ तथा AP || QD
$\Rightarrow$ APQD एक समान्तर चतुर्भुज है।

AD = PQ ......(1)

AEFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

AD = EF .....(2)

समी. (1) तथा (2) से, EF = PQ

$\Rightarrow$ EF – PF = PQ – PF

$\Rightarrow$ EP = FQ ...(3)

AP || QD तथा QE एक तिर्यक रेखा है।

$\angle$APE = $\angle$DQP (संगत कोण)

$\Rightarrow$ $\angle$APE = $\angle$DQF ...(4)

ΔEPA तथा ΔFQD में,

EP = FQ (समी (3) से]

$\angle$APE = $\angle$DQF [समी (4) से]

AP = QD [समान्तर चतुर्भुज APQD की सम्मुख भुजाएँ]

ΔEPA = ΔFQD (SAS नियम से)

$\Rightarrow$ ar (ΔEPA) = ar (ΔFQD)

$\Rightarrow$ ar (ΔPEA) = ar (ΔQFD)

इति सिद्धम्।

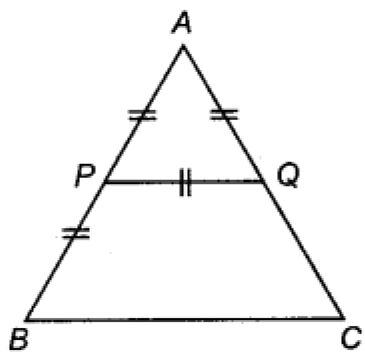
Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं, तब ar (△BCG) : ar (△ABC) का अनुपात है?

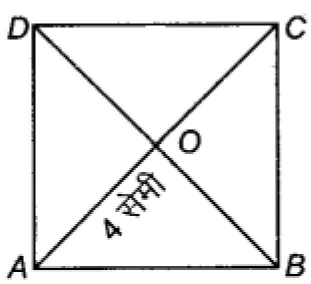
(A) 1 : 3
(B) 3 : 1
(C) 1 : 2
(D) 2 : 1

प्रश्न 2. चित्र में समबाहु त्रिभुज ABC तथा APQ इस प्रकार है कि बिन्दु P रेखा AB का मध्य बिन्दु है। तब ar (APQ) : ar (ABC) का अनुपात है।



(A) 1 : 2
(B) 1 : 4
(C) 3 : 4
(D) 4 : 1

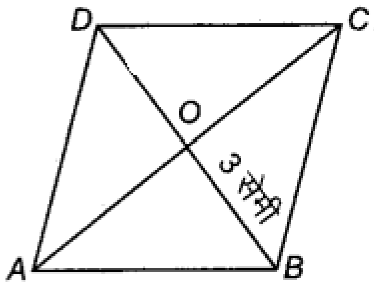
प्रश्न 3. चित्र में, ABCD एक वर्ग PN है। यदि विकर्ण AC तथा BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं और AO = 4 सेमी; तब वर्ग ABCD का क्षेत्रफल होगाः



(A) 32 सेमी^{2}
(B) 64 सेमी^{2}

(C) 16 सेमी^{2}
(D) 20 सेमी^{2}

प्रश्न 4. चित्र में, ABCD एक D समचतुर्भुज है। यदि BO = 3 सेमी तथा समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी है। विकर्ण AC की लम्बाई होगी :

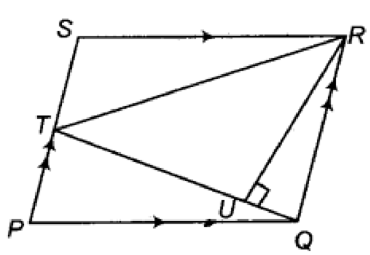


(A) 6 सेमी
(B) 8 सेमी
(C) 16 सेमी
(D) 10 सेमी

प्रश्न 5. यदि △ABC तथा △ABD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं AB तथा AD के मध्य स्थित है, तब ar (△ABC) : ar (△ABD)
(A) 1 : 1
(B) 1 : 2
(C) 1 : 3
(D) 1 : 4

प्रश्न 6. एक चतुर्भुज के विकर्ण इसको 4 समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों में विभाजित करते हैं, तब चतुर्भुज होगा:
(A) समान्तर चतुर्भुज
(B) समचतुर्भुज
(C) आयत
(D) सभी

प्रश्न 7. चित्र में, PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि RU ⊥ TQ तब, PQRS का क्षेत्रफल है:



(A) TQ × RU

(B) $\frac{1}{2}$ × RU × TQ
(C) 2 × RU × TQ
(D) QR × RU

प्रश्न 8. एक त्रिभुज का आधार 12 सेमी तथा ऊँचाई 10 सेमी है तो इसका क्षेत्रफल होगाः
(A) 30 सेमी^{2}
(B) 50 सेमी^{2}
(C) 60 सेमी^{2}
(D) 72 सेमी^{2}

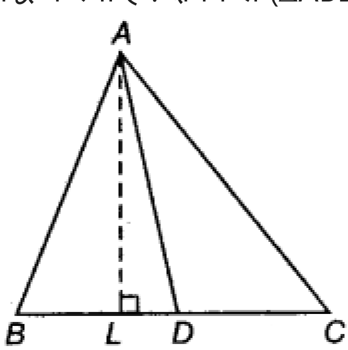
उत्तरमाला

1. (A)
2. (B)
3. (A)
4. (B)
5. (A)
6. (D)
7. (A)
8. (C)

अतिलघूत्तीय/लघूत्तीय प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिका उसको समान क्षेत्रफल वाली दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

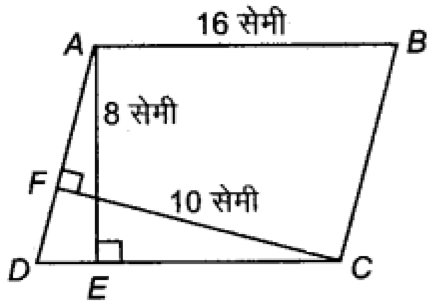
हल: दिया है। एक ΔABC, जिसमें AD माध्यिका है।
सिद्ध करना है : क्षेत्रफल (ΔABD) = क्षेत्रफल (ΔADC)



रचना : AL ⊥ BC
उपपत्ति : AD, ΔABC की माध्यिका है, अत: D बिन्दु, BC का मध्य-बिन्दु है।

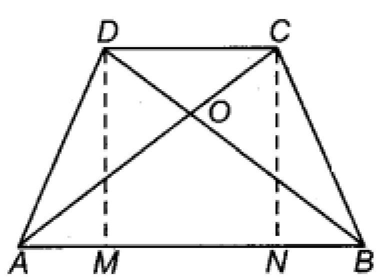
BD = DC
BD × AL = DC × AL
$\frac{1}{2}$ × BD × AL = $\frac{1}{2}$ × DC × AL
(दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर)
क्षेत्रफल (ΔABD) = क्षेत्रफल (ΔADC)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 2. आकृति में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, AE ⊥ DC और CF ⊥ AD है। यदि AB = 16 सेमी, AE = 8 सेमी CF = 10 सेमी है, तो AD ज्ञात कीजिए।



हल: हमें ज्ञात है कि
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = DC × AE
= AB × AE (∵ AB = CD)
= (16 × 8) सेमी
= 128 सेमी ...(i)
पुनः समान्तर चतुर्भुज ABCD में
AD = BC, AD || BC के बीच की दूरी CF हो, तो
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = AD × CF = (AD × 10) सेमी ...(ii)
समीकरण (i) एवं (ii) से,
128 = AD × 10
AD = 12.8 सेमी।

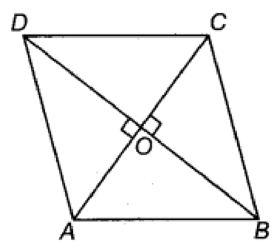
प्रश्न 3. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC तथा BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ar (ΔAOD) = ar (ΔBOC) है। सिद्ध करो कि AB || CD है।



हल: शीर्ष C तथा D से भुजा AB पर लम्ब CN तथा DM खींचे।
ar (ΔAOD) = ar (ΔBOC) (दिया है)
$\Rightarrow$ ar (ΔAOD) + ar (ΔAOB) = ar (ΔBOC) + ar (ΔAOB)
[दोनों पक्षों में ar (ΔAOB) जोड़ने पर)
ar (ΔABD) = ar (ΔABC)
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times AB \times DM = \frac{1}{2} \times AB \times CN$
DM = CN चूँकि दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी हमेशा बरोबर होती है।
अत: AB || CD इति सिद्धम्।

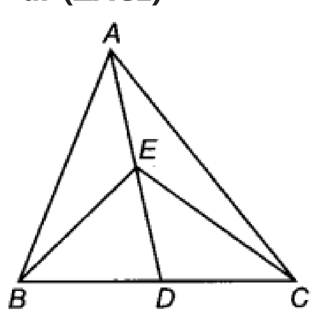
प्रश्न 4. दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल इसके विकर्णो की लम्बाई के गुणनफल का आधा होता है।

हल: दिया है : एक समचतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण एक-दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



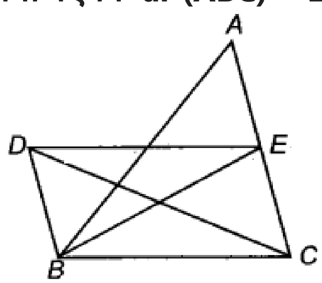
सिद्ध करना है : ar (ABCD) = $\frac{1}{2}$ AC × BD
उपपत्ति : चूँकि हम जानते हैं कि समचतुर्भुज परस्पर लम्ब होते हैं।
AO ⊥ BD तथा OC ⊥ BD,
ar (ΔABD) = $\frac{1}{2}$ BD x AO ...(1)
तथा ar (ΔBCD) = $\frac{1}{2}$ BD x OC ...(2)
समी. (1) तथा (2) के संगत पक्षों को जोड़ने पर
ar (ΔABD) + ar (ΔBCD) = $\frac{1}{2}$ BD x AO + $\frac{1}{2}$ BD x OC
ar (ABCD) = $\frac{1}{2}$ BD (AO + OC) = $\frac{1}{2}$ BD x AC = $\frac{1}{2}$ AC x BD
इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. आकृति में, ΔABC की एक माध्यिका AD पर स्थित E कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि ar (ΔABE) = ar (ΔACE)



हल: दिया है: AD, त्रिभुज ABC की माध्यिका है और E भुजा AD पर स्थित कोई बिन्दु है।
सिद्ध करना है: ar (ΔABE) = ar (ΔACE)
उपपत्ति : AD, त्रिभुज ABC की माध्यिका है।
ar (ΔABD) = ar (ΔACD) ...(i)
साथ ही, ED त्रिभुज EBC की माध्यिका है।
ar (ΔBED) = ar (ΔCED) ...(ii)
समीकरण (i) में से समीकरण (ii) को घटाने पर,
ar (ΔABD) – ar (ΔBED) = ar (ΔACD) – ar (ΔCED)
ar (ΔABE) = ar (ΔACE)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. दिए गए चित्र में BD || CA है, : E रेखाखण्ड CA का मध्य-बिन्दु है तथा BD = $\frac{1}{2}$ CA है। सिद्ध कीजिए कि ar (ABC) = 2ar (DBC) है।

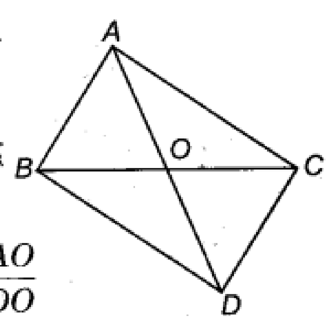


हल: DE को मिलाइए। यहाँ BCED एक समान्तर चतुर्भुज है, क्योंकि
BD = CE और BD || CE है।
ar (DBC) = ar (EBC) ...(1)
[एक ही आधार BC और एक ही समान्तर रेखाओं BC तथा DE के बीच में है।
ΔABC में, BE एक माध्यिका है।
ar (EBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC)
ar (DBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC) [समी. (1) से]
अतः ar (ABC) = 2ar (DBC)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 7.

चित्र में, यदि ΔABC एवं ΔDBC एक ही आधार BC पर हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

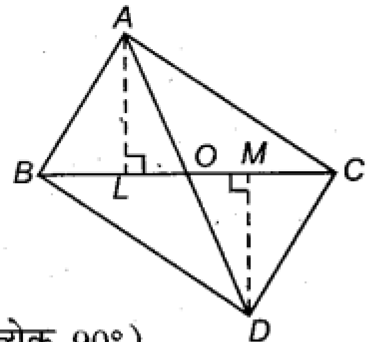
$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$$



हल:

दिया है : ΔABC और ΔDBC का आधार BC है।

सिद्ध करना है : $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AO}{DO}$



रचना : ΔABC और ΔDBC में क्रमशः $AL \perp BC$ एवं $DM \perp BC$ खींचे।

उपपत्ति : ΔALO और ΔDMO में,

$\angle ALO = \angle DMO$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle AOL = \angle DOM$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: कोण–कोण समरूपता गुणधर्म से,

$$\Delta ALO \sim \Delta DMO \Rightarrow \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO} \quad \ldots(1)$$

अत: $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times BC \times DM}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AL}{DM}$

$\because \quad \dfrac{AL}{DM} = \dfrac{AO}{DO}$ [समी. (1) से]

$\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AO}{DO}$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 8. दो त्रिभुज के आधार क्रमशः 8 सेमी व 6 सेमी हैं। यदि उनकी ऊँचाई क्रमशः 6 सेमी व 8 सेमी हो, तो उनके क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: पहले त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई
= $\frac{1}{2}$ × 8 × 6
= 24 वर्ग सेमी
दूसरे त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × 6 × 8

= 24 वर्ग सेमी

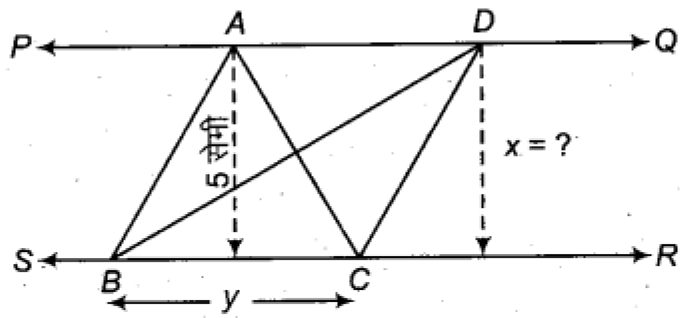
$$\therefore \text{अनुपात} = \frac{\text{पहले त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{दूसरे त्रिभुज का क्षेत्रफल}} = \frac{24}{24} = \frac{1}{1}$$

अत: दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात $= 1:1$

प्रश्न 9. दो त्रिभुज एक ही आधार पर एवं एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हैं। एक त्रिभुज की ऊँचाई 5 सेमी तथा क्षेत्रफल 18 वर्ग सेमी है। दूसरे त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: दो त्रिभुज ABC तथा त्रिभुज DBC एक ही आधार BC पर तथा एक ही समान्तर रेखाओं SR तथा PQ के मध्य स्थित हैं।

अतः दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होगा।



$$ar(\Delta ABC) = ar(\Delta ACD) \qquad ...(1)$$

अत: त्रिभुज ABC का क्षे. $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$\Rightarrow \qquad 18 = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times 5$$

$$\Rightarrow \text{आधार } (y) = \frac{2 \times 18}{5} = \frac{36}{5} = 7.2 \text{ सेमी}$$

दूसरे त्रिभुज का क्षे $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

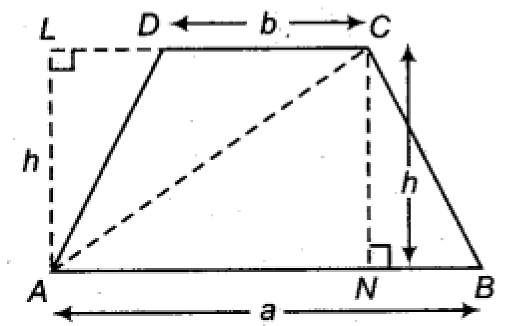
$$\Rightarrow \qquad 18 = \frac{1}{2} \times y \times x \qquad \text{[समी (1) से]}$$

$$18 = \frac{1}{2} \times 7.2 \times x \Rightarrow x = \frac{36}{7.2} = 5$$

$\therefore$ दूसरे त्रिभुज DBC की ऊँचाई $(x) = 5$ सेमी

प्रश्न 10. सिद्ध करो कि समलम्ब चतुर्भुज को क्षेत्रफल, उसकी समान्तर भुजाओं के मध्य लम्ब दूरी और समान्तर भुजाओं के योगफले के गुणन का आधा होता है।

हल: दिया है। समलम्ब चतुर्भुज ABCD, जिसमें
$AB \parallel CD$, $AL \perp DC$ और $CN \perp AB$ है।
$AB = a$, $DC = b$, $AL = CN = h$ (माना)
सिद्ध करना है :
ar (समलम्ब चतुर्भुज ABCD) = $\frac{1}{2} \times h \times (a + b)$
रचना : A और C को मिलाया।
उपपत्ति: AC, चतुर्भुज ABCD का विकर्ण है।
ar (समलम्ब चतुर्भुज ABCD) = ar (ΔABC) + ar (ΔACD)



अब, $\quad \text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} a \times h \qquad \ldots(i)$

$\text{ar}(\Delta ACD) = \frac{1}{2} b \times h \qquad \ldots(ii)$

समीकरण (i) व (ii) जोड़ने पर,

$\because \quad \text{ar}(\Delta ABC) + \text{ar}(\Delta ACD)$

ar (समलम्ब $ABCD$)

$= \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} h \times (a + b).$ **इति सिद्धम्।**