

6

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ

(Permutations, Combinations and Binomial Expansion)

ગણિતના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ આંકડાશાસ્ત્રમાં વ્યાપક પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. ગણિતના નિયમો દ્વારા ગણતરી સરળતાથી કરી શકાય છે. ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતોથી આપેલ સમૂહના એકમોની ચોક્કસ પ્રકારે કરેલ ગોઠવણીના અને પસંદગીના વિકલ્પોની સંખ્યા જાણવા અનુક્રમે ક્રમચય અને સંચય ઉપયોગી છે. સંચયની મદદથી દ્વિપદી પદાવલિની ધન પૂર્ણાંક ઘાતનું વિસ્તરણ મેળવી શકાય છે.

સૂત્રોની યાદી

- ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- ${}^nP_0 = 1$, ${}^nP_n = n!$, ${}^np_1 = n$, ${}^np_{n-1} = n!$
- કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, C વસ્તુઓ ત્રીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો $\frac{N!}{A! B! C!}$ થાય.
- ${}^nC_r = \frac{n!}{r! (n-r)!}$
- ક્રમચય અને સંચયના સંદર્ભમાં nP_r અને nC_r વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ : ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$
- $(x + a)^n$ પદાવલિનું વિસ્તરણ :
 ${}^nC_0 (x)^n (a)^0 + {}^nC_1 (x)^{n-1} (a)^1 + {}^nC_2 (x)^{n-2} (a)^2 + \dots + {}^nC_n (x)^0 (a)^n$

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નની સામે આપેલ ખાનામાં લખો :

1. કંપની X જુદા-જુદા બે મોડલની કાર પાંચ કલરમાં અને કંપની Y જુદા-જુદા બે મોડલની કાર ચાર કલરમાં બનાવે છે.
એક વ્યક્તિ આ કારમાંથી કોઈ એક કાર કેટલી રીતે પસંદ કરી શકે ?
(a) 120 (b) 18 (c) 9 (d) 20
2. 5 પ્રકારના પિઝા અને 4 પ્રકારના કોલ્ડ્રિંક્સમાંથી 1 પિઝા અને 1 કોલ્ડ્રિંક કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?
(a) 5 (b) 4 (c) 9 (d) 20
3. $0!$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?
(a) 0 (b) 10 (c) 1 (d) અવ્યાખ્યાયિત
4. એક ઓફિસમાં કેટલાક કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. જો પ્રત્યેક કર્મચારી બાકીના તમામ કર્મચારી જોડે હસ્તધૂનન કરે, તો હસ્તધૂનનની 36 સંખ્યા થાય છે. ઓફિસમાં કુલ કેટલા કર્મચારીઓ નોકરી કરતાં હશે ?
(a) 12 (b) 9 (c) 8 (d) 6
5. સંખ્યા 108ના બધા જ અંકોનો ઉપયોગ કરીને બે અંકની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ?
(a) 4 (b) 6 (c) 2 (d) 8
6. કમચય અને સંચયના પ્રચલિત સંકેત અનુસાર n અને r વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ શું થાય ?
(a) $n + r = 0$ (b) $n < r$ (c) $n \geq r$ (d) $n \leq r$
7. $6!$ ની કિંમત કેટલી થાય ?
(a) 120 (b) 6×5 (c) $6 \times 5!$ (d) $6 \times 5 \times 4 \times 3$
8. ZOO શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલી ગોઠવણી બનાવી શકાય ?
(a) 6 (b) 3 (c) 4 (d) 9
9. ${}^6P_6 - {}^6P_5$ નું મૂલ્ય જણાવો :
(a) -5 (b) 719 (c) 0 (d) 720
10. ${}^nC_1 \div {}^nP_n$ ની કિંમત જણાવો :
(a) $n!$ (b) $(n-1)!$ (c) $\frac{1}{n!}$ (d) $\frac{1}{(n-1)!}$
11. $\frac{{}^nP_3}{{}^nC_3}$ ની કિંમત જણાવો :
(a) $3!$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) 3 (d) $\frac{1}{3}$

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ લખો : (જરૂરી હોય ત્યાં ગણતરી કરવી.)

1. ગણતરીનો સરવાળાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

2. ગણતરીનો ગુણકારનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

3. $(n + 1) ! = 720$ હોય, તો n નું મૂલ્ય જણાવો.

4. $n ! \times 15 = 1800$ હોય, તો n નું મૂલ્ય જણાવો.

5. nP_r એટલે શું ?

6. ઋત્વા ગાંધીનગરથી મુંબઈ જવા ઇચ્છે છે. ગાંધીનગરથી મુંબઈ જવાના જુદા-જુદા 4 રસ્તા છે. જો તે જે રસ્તે જાય તે સિવાયના રસ્તે પરત ફરવા ઇચ્છે, તો તે આ સફર કેટલી રીતે કરી શકે ?
7. એક સેફ લોકરનો પાસવર્ડ ચાર જુદા-જુદા અંકથી બનાવવાનો છે. કયન આ પાસવર્ડ કેટલી રીતે બનાવી શકે ?
8. N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુ એ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ હોય અને બાકીની બધી વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કમચય કેટલા થાય ?
9. કમચય અને સંચય વચ્ચે મુખ્ય તફાવત શું છે ?
10. પ્રચલિત સંકેત અનુસાર કમચય અને સંચય વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ લખો.
11. nC_r એટલે શું ?

12. ${}^6C_0 + {}^6C_1 + \dots + {}^6C_6$ નું મૂલ્ય જણાવો.

13. ${}^nC_1 \div {}^nC_{n-1}$ નું મૂલ્ય જણાવો.

14. ${}^{17}C_0 + {}^{17}C_1 + {}^{17}C_{16} + {}^{17}C_{17}$ નું મૂલ્ય જણાવો.

15. જો ${}^nC_x = {}^nC_y$ હોય તો x અને y ના સંબંધના શક્ય બે વિકલ્પો જણાવો.

16. ${}^nC_1 + {}^nC_{n-1}$ નું મૂલ્ય જણાવો.

17. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું પ્રથમ પદ જણાવો.

18. $(x + a)^4$ ના વિસ્તરણના સહગુણકો લખો.

19. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ લખો.

20. $(x - a)^5$ ના વિસ્તરણમાં દરેક પદના સહગુણક લખો.

21. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ ના વિસ્તરણના ચોથા પદનું ચિહ્ન જણાવો.

22. $(2x - a)^n$ નું વિસ્તરણ કરતાં એક પદ $-40 x^2 a^3$ મળે છે. n ની કિંમત શોધો.

નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ લખો : (જરૂરી હોય ત્યાં ગણતરી કરવી.)

1. ${}^nP_4 = 17160$ હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

2. ${}^9P_r = 504$ હોય, તો r નું મૂલ્ય શોધો.

3. ${}^nP_4 : {}^{(n+1)}P_4 = 3 : 4$ હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

4. 6, 7, 8, 9 અને 0 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

5. 8, 3, 6, 5 અને 0 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને એવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય કે જેનું મૂલ્ય 500થી 1000ની વચ્ચે હોય ?
6. એક બેન્કના બચતખાતાનો નંબર આઠ જુદા-જુદા અંકથી બનેલો હોય છે. જો પ્રથમ અને અંતિમ અંક અનુક્રમે 3 અને 6 હોય, તો આવાં જુદાં-જુદાં કેટલાં બચતખાતાં નંબર બની શકે ?
7. GANDHINAGAR શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને 4 જુદા-જુદા અક્ષરોવાળી કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ બનાવી શકાય ?

8. જુદા-જુદા અંક ધરાવતો દસ અંકનો મોબાઈલ ફોન-નંબર 98 થી શરૂ થાય તેવા જુદા-જુદા કેટલા મોબાઈલ ફોન-નંબર બનાવી શકાય ?
9. એક શાળામાં વાણિજ્ય-પ્રવાહમાં આંકડાશાસ્ત્ર સહિત કુલ 7 વિષયો ભણાવવામાં આવે છે. તે શાળામાં કાર્યદિવસે કુલ 6 તાસનું સમયપત્રક ચાલે છે. જો આંકડાશાસ્ત્ર વિષયનો તાસ પ્રથમ જ ગોઠવવાનો હોય, તો કોઈ એક દિવસે જુદા-જુદા વિષયોનું સમયપત્રક કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?
10. ENGINEERING શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી કુલ કેટલી નવી ગોઠવણીઓ બનાવી શકાય ?
11. ${}^{12}C_{r+3} = {}^{12}C_{r+5}$ હોય તો r શોધો.

12. ${}^nC_2 = 55$ હોય તો n શોધો.

13. ${}^8P_4 = n \cdot {}^8C_4$ હોય તો n શોધો.

14. એક ફૂટબોલ ટુર્નામેન્ટમાં 10 દેશો ભાગ લે છે. જો પ્રથમ રાઉન્ડમાં દરેક દેશે બાકીના દરેક દેશ જોડે એક-એક મેચ રમવાની હોય, તો આ રાઉન્ડમાં કેટલી મેચો રમાશે ?

15. એક રેલવેના રૂટમાં કુલ 10 સ્ટેશન છે. જો કોઈ પણ બે સ્ટેશન વચ્ચે મુસાફરી કરવા ટિકિટ લેવી પડતી હોય, તો રેલવે સંચાલકે જુદી-જુદી કેટલી ટિકિટ તૈયાર કરવી પડે ?

16. લોટરીની 10 ટિકિટોમાં 3 ટિકિટ ઇનામવાળી છે. એક વ્યક્તિ તેમાંથી 2 ટિકિટ પસંદ કરે, તો તેને ઇનામ કેટલા પ્રકારે મળી શકે ?

17. એક હેતુલક્ષી કસોટીમાં વિદ્યાર્થીને 6 વિધાનો આપી તે પૈકી દરેક સાચું કે ખોટું છે તે ચકાસવાનું કહેવામાં આવે છે. જો વિદ્યાર્થી દરેક વિધાનના અંદાજે જ જવાબ આપે, તો તે ઓછામાં ઓછો એક સાચો જવાબ કેટલી રીતે આપી શકે ?
18. એક ટોપલીમાં 20 નારંગી છે જેમાં 25 % સહેલી છે. જો ટોપલીમાંથી 2 નારંગી પસંદ કરવામાં આવે, તો બંને સારી નારંગી કેટલી રીતે પસંદ થઈ શકે ?
19. 52 પત્તાની જોડમાંથી બે પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે, તો તેમાં એક પત્તું ચહેરાવાળું અને બીજું પત્તું ચહેરા વગરનું કેટલી રીતે પસંદ થઈ શકે ?
20. 16 ખેલાડીઓમાંથી 11 ખેલાડીઓની એક ક્રિકેટ-ટીમ પસંદ કરવાની છે. 4 બૉલરોમાંથી 3 બૉલરો અને 2 વિકેટકીપરમાંથી એક વિકેટકીપર પસંદ કરવાનો હોય, તો ટીમની પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

21. દ્વિપદી વિસ્તરણનાં લક્ષણો લખો.

22. $(3x + 2y)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

23. $\left(3x - \frac{3}{x}\right)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

24. $(1 + k)^3$ નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $k = 1$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

1. 2, 3, 5, 0 અને 9 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકની 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?
2. 0, 1, 3, 6 અને 7 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને એવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય કે, જેનું મૂલ્ય 500 થી 1500ની વચ્ચે હોય ?

3. પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરીને 3400 થી મોટી ચાર અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

4. 4 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી,

(i) કોઈ પણ બે છોકરીઓ એકસાથે ન આવે ?

(ii) છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી આવે ?

5. કંપની A ની જુદાં-જુદાં 4 મોડલની કાર અને કંપની B ની જુદાં-જુદાં 4 મોડલની કાર એક પાર્કિંગ પ્લોટમાં એક હારમાં કેટલી રીતે પાર્ક કરી શકાય કે જેથી બંને કંપનીની કાર વારાફરતી આવે ?

6. 5 પુરુષો અને 3 સ્ત્રીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી ત્રણેય સ્ત્રીઓ એકસાથે ન આવે ?

7. WAKEFUL શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી એવી કેટલી ગોઠવણીઓ બને કે જેથી ત્રણેય સ્વર ભેગા ન આવે ?

8. NATURE શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્શનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં NATURE શબ્દ કયા ક્રમે આવે ?

9. એક શાળામાં 4 શિક્ષકો, 4 છોકરાઓ, 2 છોકરીઓ અને આચાર્યને ગ્રૂપ ફોટા માટે એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવાના છે કે જેથી બંને છેડાની બબે પુરુષોમાં ફક્ત છોકરાઓ જ ગોઠવાય અને છોકરીઓનું સ્થાન કોઈ પણ છોકરાની પાસે ન હોય તેમજ આચાર્યને બરાબર મધ્યમાં ગોઠવવાના હોય, તો આવી ગોઠવણી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

10. MISSION શબ્દથી એવી કેટલી ગોઠવણીઓ બને કે જેથી બંને 'I' અને બંને 'S' એકસાથે જ આવે ?

11. એક ડીસ્કવે રેફ્રિજરેટરમાં કંપની Aની 2 ચોકલેટ, કંપની Bની 3 ચોકલેટ અને કંપની Cની 4 ચોકલેટ છે. તાનિયા તેમાંથી 3 ચોકલેટની પસંદગી કરે છે, તો તેમાં કંપની Bની ઓછામાં ઓછી બે ચોકલેટ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકે ?

12. 7 વ્યક્તિઓના ગ્રૂપમાંથી 4 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવાના છે.

(i) જો ચોક્કસ 2 વ્યક્તિઓની પસંદગી કરવાની જ હોય, તો પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

(ii) જો ચોક્કસ 2 વ્યક્તિઓની પસંદગી કરવાની ન જ હોય, તો પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

13. ટેનિસ ડબલ્સની સ્પર્ધા માટે ત્રણ શાળામાંથી 3 જોડી (છોકરો-છોકરી)ને એકત્રિત કરવામાં આવ્યાં છે. તેમાંથી બે ખેલાડીઓને પસંદ કરવામાં આવે છે.

(i) પસંદ કરેલા બે ખેલાડીઓમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(ii) પસંદ કરેલા બે ખેલાડીઓમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોય પરંતુ તેઓ બંને એક શાળાના ન હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

14. એક મેદાનમાં બે દેશો A અને B વચ્ચે કબડ્ડીની મેચ રમાય છે. આ સમયે પ્રેક્ષક ગણમાંથી 9 વ્યક્તિઓને પૂછતાં તેમાંથી 5 પ્રેક્ષકો દેશ A તરફી છે અને બાકીના દેશ B તરફી છે. આ 9 પ્રેક્ષકોમાંથી 3 પ્રેક્ષકોની પસંદગી કરવામાં આવે, તો તેમાં દેશ Aની તરફેણમાં હોય તેવા પ્રેક્ષકો બહુમતીમાં રહે તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

15. એક સાહસિક પ્રવૃત્તિ માટે 4 શિક્ષકો, 5 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓમાંથી 7 સભ્યોની ટુકડી બનાવવાની છે. આવી ટુકડી કેટલી રીતે બનાવી શકાય કે જેથી તેમાં 2 શિક્ષકો અને વધુમાં વધુ 1 છોકરી પસંદ થાય ?

16. એક બોક્સમાં 4 કાળી, 3 લાલ અને 6 વાદળી રંગની પેન છે. તેમાંથી 2 પેન કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેથી તેમાં,

(i) બંને પેન એક જ રંગની હોય ?

(ii) બંને પેન જુદા-જુદા રંગની હોય ?

17. 52 પત્તામાંથી બે પત્તાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેથી તે બંને

(i) એક જ પ્રકાર (SUIT)ના હોય ?

(ii) એક જ રંગના હોય ?

18. નીચલી કોર્ટમાંથી મળેલા ચુકાદાને પડકાર આપવા સ્વરૂપે 7 કેસ ઊપલી કોર્ટમાં જાય છે. જ્યાં ચુકાદો બદલાઈ શકે છે. આ 7 કેસમાંથી બદલાયેલા ચુકાદાની સંખ્યા બહુમતીમાં હોય તેવું કેટલી રીતે બની શકે ?

19. 7 વ્યંજન અને 3 સ્વર એમ કુલ 10 જુદા-જુદા અક્ષરોમાંથી દરેક અક્ષરનો એક વખત ઉપયોગ કરીને 3 વ્યંજન અને 2 સ્વરવાળી કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ બનાવી શકાય ?

20. $\left(\frac{y}{4} + \frac{4}{y}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

21. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^6$ નું વિસ્તરણ કરો.

22. $(\sqrt{5} + 2)^5 - (\sqrt{5} - 2)^5$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની મદદથી મેળવો.

23. $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની મદદથી મેળવો.

24. $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^4 + (\sqrt{7} - \sqrt{2})^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની મદદથી મેળવો.

