6 सांख्यिकी

चला, शिकूया.

- **केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे – वर्गीकृत वारंवारता सारणीवरून मध्य, मध्यक, बहुलक.**
- **सांख्यिक माहितीचे आलेखांद्‌वारे सादरीकरण – आयतालेख, वारंवारता बहुभुज, वृत्तालेख.**

मानवी जीवनात सांख्यिकी अनेक शाखांत उपयुक्त ठरते जसे, शेती, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, औषधशास्त्र वनस्पतिशास्त्र, जैवतंत्रज्ञान, भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र, शिक्षणशास्त्र, समाजशास्त्र, व्यवस्थापन इत्यादी. एखाद्या प्रयोगानंतर मिळणाऱ्या निष्पत्तींच्या अनेक शक्यता असतात. जेव्हा त्यांची शक्यता तपासायची असते, तेव्हा मोठ्या प्रमाणावर प्रयोग करून, सर्व बाबतींत व्यवस्थित नोंदी केल्या जातात. या नोंदींचा उपयोग करून विविध निष्पत्तींच्या संभाव्यता तपासता येतात. यासाठी संख्याशास्त्रात म्हणजेच सांख्यिकीत नियम तयार केले आहेत.

फ्रान्सिस गाल्टन (1822-1911) या ब्रिटिश शास्त्रज्ञाने संख्याशास्त्रात मूलभूत काम केले. ते प्रश्नावली तयार करून तिचे वाटप अनेक लोकांमध्ये करत असत व ती भरून देण्यास विनंती करत असत. या रीतीने खूप लोकांची माहिती गोळा करून त्यांची पूर्वपीठिका, आर्थिक स्थिती, आवडी-निवडी, आरोग्य इत्यादींची मोठ्या प्रमाणावर नोंद करत असत. वेगवेगळ्या लोकांच्या बोटांचे ठसे वेगवेगळे असतात हे माहीत झाले होते. गाल्टन यांनी अनेक लोकांच्या बोटांचे ठसे तपासून त्यांचे वर्गीकरण करण्याची पद्‌धत ठरवली. संख्याशास्त्राचा उपयोग करून दोन वेगळ्या व्यक्तींच्या बोटांचे ठसे सारखे असण्याची शक्यता जवळपास शून्य असते हे दाखवले. त्यामुळे बोटांच्या ठशांवरून एखाद्या व्यक्तीची ओळख पटवणे शक्य झाले. गुन्हेगारांना शोधण्यासाठी ही पद्‌धत न्यायालयातही मान्य झाली. प्राण्यांच्या व मानवाच्या अनुवंशशास्त्रात त्यांनी खूप काम केले.

फ्रान्सिस गाल्टन

जरा आठवूया.

सर्वेक्षणातून मिळालेल्या सांख्यिक सामग्रीमध्ये सर्वसाधारणपणे एक गुणधर्म आढळतो, तो म्हणजे सर्व प्राप्तांक एका विशिष्ट प्राप्तांकाभोवती किंवा त्याच्या आसपास केंद्रित होण्याची प्रवृत्ती. हा विशिष्ट प्राप्तांक त्या समूहाची प्रातिनिधिक संख्या असते. या संख्येला 'केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण' म्हणतात.

अवर्गीकृत सारणीसाठी, मध्य, मध्यक व बहुलक या परिमाणांचा अभ्यास आपण यापूर्वी केला आहे.

प्रात्यक्षिक 1 : तुमच्या वर्गातील सर्व मुलांची उंची मोजून सेंटिमीटरमध्ये नोंदवा. आपल्याला असे आढळते, की अनेक मुलांची उंची ही एखाद्या विशिष्ट संख्येभोवती किंवा त्याच्या आसपास केंद्रित झालेली असते.

प्रात्यक्षिक 2 : पिंपळाच्या झाडाखाली पडलेली पाने गोळा करा. प्रत्येक विद्यार्थ्याला एकेक पान द्या. आपापल्या पानाची लांबी देठापासून टोकापर्यंत मोजा व नोंदवा. सर्व निरीक्षणे (प्राप्तांक) नोंदवल्यावर आपल्या असे लक्षात येईल, की एका विशिष्ट संख्येभोवती ही निरीक्षणे केंद्रित झालेली आहेत.

आता आपण सांख्यिक सामग्रीच्या केंद्रीय प्रवृत्तींच्या परिमाणांचा 'मध्य', 'मध्यक' व 'बहुलक' यांचा अधिक अभ्यास करणार आहोत. त्यासाठी त्यातील परिभाषा आणि चिन्हे यांची माहिती करून घेऊ.

$$\text{सांख्यिक सामग्रीचा मध्य} = \frac{\text{सर्व प्राप्तांकाची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांक}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ (येथे x_i हा i वा प्राप्तांक आहे.)

मध्य $\overline{X}$ ने दर्शवतात आणि ती दिलेल्या सामग्रीची सरासरी असते.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीवरून मध्य (Mean from grouped frequency distribution)

जेव्हा प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते तेव्हा वरील सूत्रात सर्व संख्या लिहून बेरीज करणे जिकिरीचे होते. त्यासाठी आपण अन्य काही पद्धतींचा वापर करतो.

कधी कधी मोठ्या प्रमाणात केलेल्या प्रयोगाची सामग्री वर्गीकृत सारणीत दिलेली असते. अशा वेळी सांख्यिक माहिती तपासण्याच्या संख्यांचा मध्य अचूक काढता येत नाही, म्हणून त्याच्या जवळपासची संख्या काढण्याची किंवा अंदाजे मध्य काढण्याची रीत अभ्यासू.

सरळ पद्धती (Direct method)

आता आपण वर्गीकृत सांख्यिक माहितीचा मध्य काढण्याची रीत उदाहरणाने अभ्यासू.

उदा. : खालील सारणीत एक काम पूर्ण करण्यास प्रत्येक कामगाराला लागणाऱ्या वेळेचे वारंवारता वितरण दिले आहे, त्यावरून ते काम पूर्ण करण्यास एका कामगारास लागणाऱ्या वेळेचा मध्य काढा.

प्रत्येकाला काम पूर्ण करण्यास लागलेला वेळ (तास)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
कामगारांची संख्या	10	15	12	8	5

उकल :

(1) सारणीत दाखवल्याप्रमाणे उभे स्तंभ घेतले.

(2) पहिल्या स्तंभात वर्ग लिहिले.

(3) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य x_i लिहिला.

(4) तिसऱ्या स्तंभात त्या वर्गातील कामगारांची वारंवारता (f_i) लिहिली.

(5) चौथ्या स्तंभात प्रत्येक वर्गासाठी ($x_i \times f_i$) हा गुणाकार लिहिला.

(6) नंतर $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ लिहिले.

(7) सूत्र वापरून मध्य काढला.

वर्ग (वेळ तासात)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (कामगारांची संख्या) f_i	वर्गमध्य ×वारंवारता $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
एकूण		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{मध्य} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

एका कामगारास काम पूर्ण करण्यास लागणाऱ्या वेळेचा मध्य = 25.3 तास (अंदाजे)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालील सारणीत 50 विद्यार्थ्यांच्या चाचणी परीक्षेच्या गुणांची टक्केवारी दिली आहे. त्यावरून गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य काढा.

गुणांची टक्केवारी	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	3	7	15	20	5

उकल : पायऱ्यांच्या आधारे खालील सारणी तयार केली.

वर्ग (गुणांची टक्केवारी)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या) f_i	वर्गमध्य × वारंवारता $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
एकूण		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{2840}{50}$$

$= 56.8$

$\therefore$ गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य = 56.8

उदा. (2) मागील उन्हाळ्यात महाराष्ट्रातील 30 शहरांतील एका दिवसाचे कमाल तापमान °C मध्ये खालील सारणीत दिले आहे, त्यावरून कमाल तापमानाचा मध्य काढा.

कमाल तापमान	24–28	28–32	32–36	36–40	40–44
शहरांची संख्या	4	5	7	8	6

उकल :

वर्ग (तापमान °C)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (शहरांची संख्या) f_i	वर्गमध्य × वारंवारता $x_i f_i$
24–28	26	4	104
28–32	30	5	150
32–36	34	7	238
36–40	38	8	304
40–44	42	6	252
एकूण		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

मध्य = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$

गृहीतमध्य पद्धती (Assumed mean method)

सोडवलेल्या वरील उदाहरणांवरून आपल्या लक्षात येते, की कधीकधी $x_i f_i$ हा गुणाकार खूप मोठी संख्या येते. त्यामुळे सरळ पद्धतीने मध्य काढणे थोडे कठीण होते. त्यासाठी आपण आणखी एक पद्धत 'गृहीतमध्य पद्धती' जाणून घेऊ. या पद्धतीने मध्य काढताना लहान संख्यांची बेरीज व भागाकार केल्यामुळे काम सोपे होते.

उदाहरणार्थ, 40, 42, 43, 45, 47, 48 हे प्राप्तांक आहेत. यांचा मध्य काढायचा आहे.

या उदाहरणातील संख्यांचे निरीक्षण केल्यास आपल्या असे लक्षात येते, की या सामग्रीचा मध्य 40 पेक्षा जास्त आहे म्हणून आपण 40 ही संख्या मध्य मानू. हा गृहीतमध्य आहे. 40–40 = 0, 42 – 40 = 2, 43–40 = 3, 45–40 = 5, 47 – 40 = 7, 48 – 40 = 8 हे फरक पाहा. त्यांना विचलन म्हणतात. त्यांचा मध्य काढू. तो 40 या मानलेल्या गृहीतमध्यात मिळवल्यास आपल्याला या सामग्रीचा मध्य मिळतो.

म्हणजेच, मध्य = गृहीतमध्य + गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनांचा मध्य

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

गृहीतमध्यासाठी A, गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनासाठी d आणि विचलनांच्या मध्यासाठी $\overline{d}$ ही चिन्हे मानून $\overline{X} = A + \overline{d}$ हे सूत्र मिळते.

हेच उदाहरण आपण गृहीतमध्य 43 घेऊन करून पाहू. प्रत्येक प्राप्तांकातून 43 वजा करून वजाबाकी, म्हणजेच गृहीतमध्यापासूनचे विचलन मिळवू.

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनांची बेरीज $= -3 -1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

आता $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (येथे एकूण विचलने 6 आहेत.)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

आपल्या लक्षात येते, की याप्रमाणे गृहीतमध्य वापरून उदाहरण सोडवल्यास आकडेमोड कमी होते. तसेच प्राप्तांकांतील किंवा सोईची अन्य कोणतीही संख्या गृहीतमध्य मानली तरी सामग्रीचा मध्य बदलत नाही.

आता आपण दिलेल्या वारंवारता सारणीसाठी ही पद्धत कशी वापरता येते हे एका उदाहरणाने अभ्यासू.

उदा. : 100 भाजी विक्रेत्यांची रोजच्या विक्रीची वारंवारता सारणी खाली दिली आहे. गृहीतमध्य पद्धतीने दैनंदिन विक्रीचा मध्य काढा.

दैनंदिन विक्री रुपये	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विक्रेत्यांची संख्या	15	20	35	30

उकल : गृहीतमध्य A = 2250 घेऊ. $d_i = x_i - A$ हे विचलन आहे.

वर्ग दैनंदिन विक्री (रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	वारंवारता (विक्रेत्यांची संख्या) f_i	वारंवारता × विचलन $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250→A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
एकूण			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

पायऱ्या वापरून सारणी तयार केली.

(1) गृहीतमध्य A = 2250 घेतला. (साधारणपणे जास्तीत जास्त वारंवारता असणाऱ्या वर्गाचा वर्गमध्य हा गृहीतमध्य मानतात.)

(2) विक्रीचे वर्ग पहिल्या स्तंभात लिहिले.

(3) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य लिहिले.

(4) तिसऱ्या स्तंभात $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ च्या किमती लिहिल्या.

(5) चौथ्या स्तंभात प्रत्येक वर्गातील विक्रेत्यांची संख्या लिहिली व बेरीज $\sum f_i$ लिहिली.

(6) पाचव्या स्तंभात $(f_i \times d_i)$ हे गुणाकार करून त्यांची बेरीज $\sum f_i d_i$ केली.

सूत्र वापरून आता $\overline{d}$ व $\overline{X}$ काढला.

$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100$ $\therefore$ मध्य $\overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$

दैनंदिन विक्रीचा मध्य = 2150 रुपये आहे.

कृती : हेच उदाहरण सरळ पद्धतीने सोडवा.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) खालील सारणीत एका व्यावसायिकाकडील 50 कामगारांच्या दैनंदिन पगारांचे वारंवारता वितरण दिले आहे. त्यावरून एका कामगाराच्या दैनिक पगाराचा मध्य, गृहीतमध्य पद्धतीने काढा.

दैनिक पगार (रुपये)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
कामगारांची संख्या (वारंवारता)	5	10	15	12	8

उकल : गृहीतमध्य A = 300 मानू.

वर्ग (पगार रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	वारंवारता (कामगार संख्या) f_i	वारंवारता × विचलन $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
एकूण			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

मध्य, $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

कामगारांच्या दैनिक पगाराचा मध्य = 306.40 रुपये आहे.

मध्यप्रमाण विचलन पद्धती (Step deviation method)

आपण मध्य काढण्याच्या सरळ पद्धती व गृहीतमध्य पद्धती यांचा अभ्यास केला. अधिक सुलभतेने मध्य काढण्याची आणखी एक पद्धत उदाहरणातून अभ्यासू.

- प्रथम A हा गृहीतमध्य वजा करून d_i चा स्तंभ तयार करू.
- सर्व d_i चा मसावि g हा सहज मिळत असेल तर $u_i = \frac{d_i}{g}$ यांचा स्तंभ तयार करू.
- सर्व u_i या संख्यांचा मध्य $\overline{u}$ हा काढू.
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ या सूत्राने मध्य काढू

उदाहरण : 100 कुटुंबांनी आरोग्यविम्यासाठी गुंतवलेली वार्षिक रक्कम वारंवारता सारणीत दिली आहे. मध्य-प्रमाण विचलन पद्धतीने कुटुंबांच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा मध्य काढा.

प्रत्येक कुटुंबाची विम्याची रक्कम (रुपये)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
कुटुंबांची संख्या	3	15	20	25	30	7

उकल : A = 2200 मानू, सर्व d_i पाहून $g = 400$ आहे.

वर्ग विम्याची रक्कम (रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	वारंवारता (कुटुंबांची संख्या) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
एकूण				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

वरील सारणी पुढील पायऱ्यांच्या आधारे केली.

(1) सारणीच्या पहिल्या स्तंभात विम्याच्या गुंतवणुकींचे वर्ग लिहिले.

(2) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य x_i लिहिला.

(3) तिसऱ्या स्तंभात $d_i = x_i - A$ यांच्या किमती लिहिल्या.

(4) di या सर्व किमतींचा मसावि 400 आहे. म्हणून g = 400 घेतला. चौथ्या स्तंभात $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ या किमती लिहिल्या.

(5) पाचव्या स्तंभात प्रत्येक वर्गाची वारंवारता (कुटुंबांची संख्या) लिहिली.

(6) सहाव्या स्तंभात $f_i \times u_i$ हा गुणाकार प्रत्येक वर्गासाठी लिहिला.

u_i चा मध्य खालील सूत्राने काढला.

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ कुटुंबांच्या विम्याच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा मध्य 2140 रुपये आहे.

कृती : सरळ पद्धतीने, गृहीतमध्य पद्धतीने वरील उदाहरण सोडवा. कोणत्याही पद्धतीने काढलेला मध्य सारखाच असतो हे अनुभवा.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांनी पूरग्रस्तांसाठी जमवलेल्या निधींची वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून जमा केलेल्या निधींचा मध्य काढा.

निधी (रुपये)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विद्यार्थी	2	4	24	18	1	1

लगतच्या वर्गात खूप कमी प्राप्तांक असले, तर त्यांचा मिळून एक वर्ग करणे सोईचे असते. या उदाहरणात 0 - 500 व 500 - 1000 यांचा एक वर्ग आणि 2000 - 2500 व 2500 - 3000 यांचा एक वर्ग केला.

निधी (रुपये)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
विद्यार्थी	6	24	18	2

उकल : A = 1250 मानू, सर्व d_i अभ्यासून g = 250 घेऊ.

वर्ग निधी (रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	वारंवारता f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
एकूण				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = \quad 1250 + 140 = 1390$$

∴ जमा केलेल्या नीधींचा मध्य 1390 रुपये आहे.

कृती –

1. हेच उदाहरण सरळ पद्धतीने सोडवा.

2. वरील उदाहरणात काढलेला मध्य गृहीतमध्य पद्धतीने काढून पडताळून पाहा.

3. A = 1750 घेऊन वरील पद्धतीने उदाहरण सोडवा.

सरावसंच 6.1

1. इयत्ता 10 वीच्या 50 विद्यार्थ्यांनी रोजच्या अभ्यासासाठी व्यतीत केलेले तास व विद्यार्थी संख्या यांची वारंवारता वितरण सारणी दिलेली आहे. त्यावरून विद्यार्थ्यांनी अभ्यासासाठी दिलेल्या वेळेचा मध्य सरळ पद्धतीने काढा.

वेळ (तास)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
विद्यार्थी संख्या	7	18	12	10	3

2. एका महामार्गावरील टोलनाक्यावर सकाळी 6 ते संध्याकाळी 6 या वेळेत जमा होणारा कर (रुपयांत) व वाहनसंख्या यांची वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून जमा होणाऱ्या कराचे 'गृहीतमध्य' पद्धतीने मध्य काढा.

जमा कर (रुपये)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
वाहन संख्या	80	110	120	70	40

3. एका दिवशी दूध विक्री केंद्रावरून 50 ग्राहकांना वितरित केलेल्या दुधाची वारंवारता वितरण सारणी दिलेली आहे. त्यावरून वितरित केलेल्या दुधाचा मध्य सरळ पद्धतीने काढा.

दूध वितरण (लीटर)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ग्राहक संख्या	17	13	10	7	3

4. काही बागाइतदारांच्या संत्र्यांच्या उत्पन्नाची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. त्यावरून उत्पन्नाचा मध्य, 'गृहीतमध्य' पद्धतीने काढा.

उत्पन्न (हजार रुपये)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
बागाइतदारांची संख्या	20	25	15	10	10

5. एका कंपनीतील 120 कर्मचाऱ्यांकडून दुष्काळग्रस्तांसाठी जमा केलेल्या निधीची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. कर्मचाऱ्यांच्या जमा निधीचे मध्य, 'मध्य प्रमाण विचलन' पद्धतीने काढा.

निधी (रुपये)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
कर्मचारी संख्या	35	28	32	15	10

6. एका कारखान्यातील 150 कामगारांची साप्ताहिक पगाराची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. त्यावरून कामगारांच्या साप्ताहिक पगाराचा मध्य, 'मध्यप्रमाण विचलन' पद्धतीने काढा.

साप्ताहिक पगार रुपये	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
कामगारांची संख्या	25	45	50	30

जरा आठवूया.

विज्ञान प्रदर्शनात भाग घेण्यासाठी एका शाळेतून दोन विद्यार्थी व दोन विद्यार्थिनी दोन दिवसांसाठी वेगळ्या शहरात गेले होते. त्यांना आपले संध्याकाळचे जेवण कोठे घ्यावे हे ठरवायचे होते. कामाच्या जागेपासून एक किलोमीटर अंतराच्या आत भोजन देणारी दहा हॉटेल्स होती. त्यांचे जेवणाचे दर रुपयांत, चढत्या क्रमाने खालीलप्रमाणे होते.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 आणि 500

सर्व हॉटेलांतील जेवणाची सरासरी किंमत $\frac{1130}{10} = 113$ रु. होती.

विद्यार्थ्यांनी कोणत्या हॉटेलात जेवण घेण्याचे ठरवले असावे? 500 रुपये दराचे जेवण देणारे हॉटेल सोडून इतर सर्व हॉटेलांचा दर 113 रु. पेक्षा कमी होता. विद्यार्थ्यांनी मध्यम दराचे हॉटेल निवडायचे ठरवले. पहिल्या दिवशी 70 रु. दराचे व दुसऱ्या दिवशी 80 रु. दराचे जेवण घेतले.

काही वेळा प्राप्तांकांच्या सरासरीपेक्षा त्यांचा मध्यक वापरला जातो याचे हे उदाहरण आहे.

मागील इयत्तेत अवर्गीकृत सामग्रीसाठी 'मध्यक' ही संकल्पना आपण अभ्यासली आहे.

- दिलेल्या सामग्रीतील संख्या चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्या असता, मांडणीतील मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला सामग्रीचा मध्यक म्हणतात.
- मध्यक हा दिलेल्या सामग्रीचे दोन समान भागांत विभाजन करतो. म्हणजेच दिलेल्या सामग्रीसाठी मध्यकाच्या वर आणि खाली दोन्ही बाजूंना समान प्राप्तांक असतात.
- दिलेले प्राप्तांक $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \ldots\ldots \leq k_n$ अशा रीतीने लिहितात.
- सामग्रीतील प्राप्तांक विषम असताना $\frac{n+1}{2}$ वा प्राप्तांक सामग्रीचा मध्यक असतो, कारण $k_{\frac{n+1}{2}}$ च्या आधी $\frac{n-1}{2}$ इतके प्राप्तांक व त्यानंतरही $\frac{n-1}{2}$ इतके प्राप्तांक असतात. n = 2m + 1 घेऊन हे पडताळा.
- सामग्रीतील प्राप्तांक n हा सम असताना सामग्रीचा मध्यक हा मध्यावरील दोन संख्यांची सरासरी असतो. कारण $k_{\frac{n}{2}}$ च्या आधी व $k_{\frac{n+2}{2}}$ च्या नंतर प्रत्येकी $\frac{n-2}{2}$ प्राप्तांक असतात. n = 2m घेऊन हे पडताळा.
- म्हणजेच $\frac{n}{2}$ वी संख्या व $\frac{n+2}{2}$ वी संख्या यांची सरासरी घेतल्यावर येणारी संख्या ही त्या सामग्रीचा मध्यक असते.

उदा. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 या प्राप्तांकांच्या मांडणीत चौथी संख्या मध्यावर येते, म्हणून दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = 40

उदा. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 येथे प्राप्तांकांची संख्या 8 म्हणजे सम आहे, म्हणून चौथी व पाचवी अशा दोन संख्या मध्यावर आहेत, त्या 66 व 68 या आहेत. म्हणून दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = $\frac{66+68}{2} = 67$

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीवरून मध्यक (Median from grouped frequency distribution)

प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते, तेव्हा अशा प्रकारे मांडणी करून मध्यक काढणे जिकिरीचे होते. म्हणून आता आपण वर्गीकृत वारंवारता वितरणाचे अंदाजे मध्यक काढण्याची रीत उदाहरणांच्या साहाय्याने अभ्यासू.

उदा. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 या प्राप्तांकांची वर्गीकृत सारणी पुढे दिली आहे.

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
6-10	$\mid\mid$	2
11-15	$\mid\mid$	2
16-20	$\mid$	1

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
5.5-10.5	$\mid\mid\mid$	3
10.5-15.5	$\mid\mid$	2
15.5-20.5	$\mid\mid$	2

पहिल्या सारणीत 10.4 व 15.5 हे दोन प्राप्तांक समाविष्ट करता आले नाहीत. कारण या संख्या 6-10, 11-15, 16-20 यांपैकी कोणत्याच वर्गात समाविष्ट होत नाहीत.

अशा वेळी वर्ग सलग करून घेतात हे आपल्याला माहीत आहे.

या सारणीत खालची वर्गमर्यादा 0.5 ने कमी व वरची वर्गमर्यादा 0.5 ने वाढवली असता, मिळालेली दुसरी वितरण सारणी तयार होईल. येथे 15.5 हा प्राप्तांक 15.5 - 20.5 या वर्गात समाविष्ट होईल.

वर्गीकरणाची पद्धत बदलली तर वारंवारता बदलू शकते हे वरील सारणींवरून लक्षात येते.

हे लक्षात ठेवूया.

वरील सारणींत 6-10 या वर्गाचा मध्य = $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

तसेच 5.5-10.5 या वर्गाचा मध्य = $\frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

म्हणजे वर्गांची रचना वेगळ्या पद्धतीने केली तरी वर्गमध्य बदलत नाही हे लक्षात घ्या.

सोडवलेले उदाहरण

इयत्ता 10 वीच्या सराव परीक्षेत प्राप्त केलेल्या 100 विद्यार्थ्यांच्या गुणांची वारंवारता सारणी पुढे दिली आहे. विद्यार्थ्यांच्या गुणांचे मध्यक काढा.

परीक्षेतील गुण	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	4	20	30	40	6

उकल : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 म्हणून 50 वी संख्या हा अंदाजे मध्यक असणार. यासाठी 50 वी संख्या कोणत्या वर्गात येते, हे आपल्याला शोधावे लागेल. 'वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी' प्रकारच्या संचित वारंवारता सारणीवरून हे शोधता येईल. त्यासाठी आपण वरील वारंवारता सारणीवरून 'पेक्षा कमी' संचित वारंवारता वितरण सारणी तयार करू.

वर्ग (विद्यार्थ्यांचे गुण)	वारंवारता विद्यार्थी संख्या f_i	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

या सारणीवरून,

- $\frac{N}{2}$ = 50 या क्रमांकाचा प्राप्तांक 40-60 या वर्गात आहे. ज्या वर्गामध्ये मध्यक येतो, त्या वर्गाला **मध्यकवर्ग** म्हणतात. येथे 40 - 60 हा मध्यकवर्ग आहे.
- 40-60 या वर्गाची खालची मर्यादा 40 आहे व वारंवारता 30 आहे.
- पहिल्या 50 प्राप्तांकांपैकी सुरुवातीचे 24 प्राप्तांक हे 40 पेक्षा कमी आहेत. उरलेले 50 - 24 = 26 प्राप्तांक (40 - 60) या वर्गात आहेत. त्यातील 50 व्या प्राप्तांकाचा अंदाज पुढीलप्रमाणे करतात.
- या वर्गातील एकूण 30 पैकी 26 प्राप्तांक 50 व्या प्राप्तांकापर्यंत आहेत व वर्गांतर 20 आहे म्हणून 50 वा प्राप्तांक, 40 पेक्षा $\frac{26}{30} \times 20$ ने मोठा आहे असे मानतात.

  तो अंदाजे $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ आहे.

  $\therefore$ मध्यक $= 57\frac{1}{3}$

- सूत्ररूपाने हे आपण खालीलप्रमाणे लिहू शकतो.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

या सूत्रात L = मध्यकवर्गाची खालची सीमा, N = एकूण वारंवारता

h = मध्यक वर्गाचे वर्गांतर, f = मध्यक वर्गाची वारंवारता

cf = मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता.

वरील उदाहरणात; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h \quad \ldots\ldots\ (\text{सूत्र})$$

$$= 40 + \left(\frac{50-24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

हे लक्षात ठेवूया.

- मध्यक काढण्यासाठी दिलेले वर्ग सलग नसतील तर ते सलग करून घ्यावे लागतात.
- प्राप्तांकांची संख्या खूप मोठी असताना चढत्या क्रमाने प्रत्येक प्राप्तांक लिहिणे अवघड असते. म्हणून सामग्रीची मांडणी वर्गीकृत स्वरूपात करतात. अशा वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक अचूक काढणे शक्य नसते, परंतु अंदाजे मध्यक काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सार्वजनिक वाहतूक सेवेच्या 60 बसेसनी एका दिवसात कापलेल्या अंतराची वारंवारता सारणी दिली आहे. बसेसनी एका दिवसात कापलेल्या अंतराचा मध्यक काढा.

दैनंदिन कापलेले अंतर (किमी)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
बसेसची संख्या	4	14	26	10	6

उकल : सारणीत दिलेले वर्ग सलग नाहीत,

एका वर्गाची वरची मर्यादा व पुढील वर्गाची खालील मर्यादा यांतील फरक 1 आहे.

$\therefore$ 1 $\div$ 2 = 0.5 ही किंमत प्रत्येक वर्गाच्या खालच्या मर्यादेतून वजा करू आणि वरच्या वर्गमर्यादेत मिळवून वर्गसीमा ठरवू. त्यानुसार वर्ग सलग करू व नवी सारणी लिहू.

नंतर त्यात 'पेक्षा कमी'चा संचित वारंवारतेचा स्तंभ तयार करू.

दिलेले वर्ग	सलग केलेले वर्ग	वारंवारता f_i	संचित वारंवारता पेक्षा कमी
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220-229	219.5-229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

येथे एकूण वारंवारता = Σf_i = N = 60 $\therefore$ $\frac{N}{2}$ = 30. $\therefore$ मध्यक हा अंदाजे 30 वा प्राप्तांक.

पहिले 18 प्राप्तांक 219.5 पेक्षा कमी व उरलेले, 30 − 18 = 12 प्राप्तांक 219.5 − 229.5 या वर्गात आहेत. म्हणून हा मध्यकवर्ग आहे.

219.5-229.5 या वर्गाची संचित वारंवारता 44 आहे.

सूत्रामध्ये,

L = मध्यक वर्गाची खालची मर्यादा = 219.5, h = मध्यक वर्गाचे वर्गांतर = 10

cf = मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता = 18,

f = मध्यक वर्गाची वारंवारता = 26

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\therefore \text{ मध्यक } = 219.5+\left(\frac{30-18}{26}\right)\times 10$$

$$= 219.5 + \left(\frac{12\times 10}{26}\right)$$

$$= 219.50 + 4.62$$

$$= 224.12$$

बसेसच्या दैनंदिन अंतरांचे मध्यक = 224.12 किलोमीटर

उदा.(2) खालील सारणीत एका दिवशी एका वस्तुसंग्रहालयाला भेट देणाऱ्या व्यक्तींची वये दिलेली आहेत. त्यावरून व्यक्तींच्या वयांचे मध्यक काढा.

वय (वर्षे)	व्यक्तींची संख्या
10 पेक्षा कमी	3
20 पेक्षा कमी	10
30 पेक्षा कमी	22
40 पेक्षा कमी	40
50 पेक्षा कमी	54
60 पेक्षा कमी	71

उकल : येथे पेक्षा कमी संचित वारंवारता वितरण दिलेले आहे. प्रथमतः या सर्व वर्गांच्या खऱ्या वर्गमर्यादा मिळवाव्या लागतील. आपल्याला माहीत आहे, की 'पेक्षा कमी' संचित वारंवारता ही वर्गाच्या वरच्या वर्गमर्यादेशी निगडित असते. पहिल्या वर्गाची वरची मर्यादा 10 आहे. कोणाही व्यक्तीचे वय धन संख्या असते म्हणून पहिला वर्ग 0-10 असा असेल. दुसऱ्या वर्गाची वरची मर्यादा 20 आहे, म्हणून दुसरा वर्ग 10-20 होईल. अशा प्रकारे वर्गांतर 10 घेऊन क्रमाने वर्ग तयार केले. याप्रमाणे शेवटचा वर्ग 50-60 झाला. अशा प्रकारे आपल्याला खालीलप्रमाणे वर्ग लिहिता येतात.

वय वर्षे	वर्ग	व्यक्तींची संख्या वारंवारता	संचित वारंवारता पेक्षा कमी
10 पेक्षा कमी	0-10	3	3
20 पेक्षा कमी	10-20	10 - 3 = 7	10
30 पेक्षा कमी	20-30	22 - 10 = 12	22 $\rightarrow cf$
40 पेक्षा कमी	30-40	40 - 22 = 18 $\rightarrow f$	40
50 पेक्षा कमी	40-50	54 - 40 = 14	54
60 पेक्षा कमी	50-60	71 - 54 = 17	71

येथे N = 71 $\therefore$ $\frac{N}{2}$ = 35.5 आणि h = 10

35.5 ही संख्या 30-40 या वर्गात आहे. म्हणून हा मध्यकवर्ग आहे. त्याआधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता 22 आहे, म्हणून cf = 22, L = 30, f = 18.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ भेट देणाऱ्या व्यक्तींच्या वयांचे मध्यक = 37.5 वर्षे

सरावसंच 6.2

1. खालील सारणीत एका सॉफ्टवेअर कंपनीतील दैनंदिन कामाचे तास व तेवढा वेळ काम करणाऱ्या कर्मचाऱ्यांची संख्या दिली आहे. त्यावरून कंपनीतील कर्मचाऱ्यांच्या दैनंदिन कामाच्या तासांचे मध्यक काढा.

दैनंदिन कामाचे तास	8-10	10-12	12-14	14-16
कर्मचाऱ्यांची संख्या	150	500	300	50

2. एका आमराईतील आंब्याची झाडे व प्रत्येक झाडापासून मिळालेल्या आंब्यांची संख्या यांचे वारंवारता वितरण दिले आहे. त्यावरून दिलेल्या सामग्रीचे मध्यक काढा.

आंब्यांची संख्या	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
झाडांची संख्या	33	30	90	80	17

3. मुंबई-पुणे द्रुतगतीमार्गाच्या वाहतुकीचे नियंत्रण करणाऱ्या पोलीस चौकीवर केलेल्या सर्वेक्षणात पुढीलप्रमाणे निरीक्षणे आढळली. दिलेल्या नोंदींचे मध्यक काढा.

वाहनांची गती (किमी/तास)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
वाहनांची संख्या	10	34	55	85	10	6

4. विविध कारखान्यांमध्ये उत्पादन होणाऱ्या दिव्यांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. त्यावरून दिव्यांच्या उत्पादनाचा मध्यक काढा.

दिव्यांची संख्या (हजार)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कारखान्यांची संख्या	12	35	20	15	8	7	8

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरणावरून बहुलक (Mode from grouped frequency distribution)

दिलेल्या प्राप्तांकांत जास्तीत जास्त वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे त्या समूहाचा बहुलक असतो हे आपण जाणतो.

उदाहरणार्थ, एखादी दुचाकी उत्पादक कंपनी विविध रंगांमध्ये दुचाकी गाड्या तयार करते. कोणत्या रंगाच्या गाड्यांची पसंती सर्वाधिक आहे हे जाणून घेण्यासाठी त्या कंपनीला रंगाचे बहुलक माहीत असणे आवश्यक असते. त्याचप्रमाणे विविध उत्पादने असणाऱ्या एखाद्या कंपनीला सर्वाधिक मागणी कोणत्या उत्पादनासाठी आहे हे जाणून घेण्याची आवश्यकता वाटेल. अशा वेळी त्या उत्पादनाचा बहुलक काढावा लागेल.

आपण अवर्गीकृत वारंवारता सारणीवरून बहुलक कसा काढायचा हे पाहिले आहे.

आता आपण वर्गीकृत वारंवारता वितरणावरून अंदाजे बहुलक कसा काढायचा ते अभ्यासू.

त्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

वरील सूत्रात, L = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर

हे सूत्र वापरून अंदाजे बहुलक कसा काढतात, हे उदाहरणांवरून अभ्यासू.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) खालील वारंवारता वितरण सारणीत क्रीडांगणावर खेळायला येणाऱ्या मुलांची संख्या व त्यांचे वयोगट दिले आहेत. त्यावरून क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक काढा.

मुलांचा वयोगट (वर्षे)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
मुलांची संख्या	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

वरील सारणीवरून असे लक्षात येते, की 10-12 या वयोगटांतील विद्यार्थी संख्या सर्वांत जास्त आहे, म्हणजेच 10-12 हा बहुलकीय वर्ग आहे.

उकल : येथे f_1 = 70, आणि 10-12 हा बहुलकीय वर्ग.

$\therefore$ दिलेल्या उदाहरणात,

L = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा = 10

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर = 2

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता = 70

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता = 58

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता = 42

बहुलक = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\frac{70 - 58}{2(70) - 58 - 42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{140 - 100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \frac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

$\therefore$ क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक = 10.6 वर्षे

उदा. (2) खालील वारंवारता वितरण सारणीत एका पेट्रोलपंपावर पेट्रोल भरणाऱ्या वाहनांची संख्या आणि वाहनांमध्ये भरलेले पेट्रोल याची माहिती दिली आहे. त्यावरून वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचे बहुलक काढा.

भरलेले पेट्रोल (लीटर)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
वाहनांची संख्या	33	40	27	18	12

उकल : येथे दिलेले वर्ग सलग नाहीत. ते आपण सलग करून घेऊ आणि वारंवारता सारणी तयार करू.

वर्ग	सलग केलेले वर्ग	वारंवारता
1-3	0.5-3.5	$33 \rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

येथे f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता = 40, बहुलकीय वर्ग 3.5-6.5

बहुलक = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

बहुलक = $3.5 + \left[\frac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\frac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \frac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचा बहुलक = 4.55 लीटर

सरावसंच 6.3

1. एका दूध संकलन केंद्रावर शेतकऱ्यांकडून संकलित केलेले दूध व लॅक्टोमीटरने मोजलेले दुधातील (फॅटचे) स्निग्धांशाचे प्रमाण दिले आहे. त्यावरून दुधातील स्निग्धांशाच्या प्रमाणाचे बहुलक काढा.

दुधातील स्निग्धांश (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
संकलित दूध (लीटर)	30	70	80	60	20

2. काही कुटुंबांचा मासिक वीजवापर पुढील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत दिला आहे. त्यावरून वीजवापराचे बहुलक काढा.

वीजवापर (युनिट)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
कुटुंबांची संख्या	13	50	70	100	80	17

3. चहाच्या 100 हॉटेलांना पुरवलेले दूध व हॉटेलांची संख्या यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून पुरवलेल्या दुधाचे बहुलक काढा.

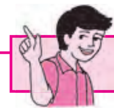
दूध (लीटर)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
हॉटेलांची संख्या	7	5	15	20	35	18

4. खालील वारंवारता वितरण सारणीत 200 रुग्णांची वये आणि उपचार घेणाऱ्या रुग्णांची एका आठवड्यातील संख्या दिली आहे. त्यावरून रुग्णांच्या वयाचे बहुलक काढा

वय (वर्षे)	5 पेक्षा कमी	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
रुग्णसंख्या	38	32	50	36	24	20

कृती :-

- तुमच्या वर्गातील 20 मुलांच्या वजनाचा मध्य काढा.
- तुमच्या वर्गातील मुलांच्या शर्टांच्या मापाचा बहुलक काढा.
- वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याने आपल्या नाडीचे एका मिनिटात पडणारे ठोके मोजावेत व त्याची नोंद करावी. या नोंदींची सारणी करा व त्यावरून नाडीच्या ठोक्यांचा बहुलक काढा.
- वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या उंचीची नोंद करा. त्या नोंदींचे वर्गीकरण करा. उंचीचा मध्यक काढा.



हे लक्षात ठेवूया.

आपण केंद्रीय प्रवृत्तीच्या मध्य, मध्यक व बहुलक या परिमाणांचा अभ्यास केला. केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण निवडायचे हे ठरवण्यासाठी, ते निवडण्यासाठीचा हेतू आपल्याला स्पष्टपणे माहीत असणे आवश्यक असते.

समजा, एका शाळेतील 10 वी च्या पाच तुकड्यांपैकी कोणती तुकडी अंतर्गत परीक्षेत जास्त सरस आहे हे ठरवण्यासाठी त्या प्रत्येक तुकडीचा अंतर्गत परीक्षेतील गुणांचा 'मध्य' काढावा लागेल.

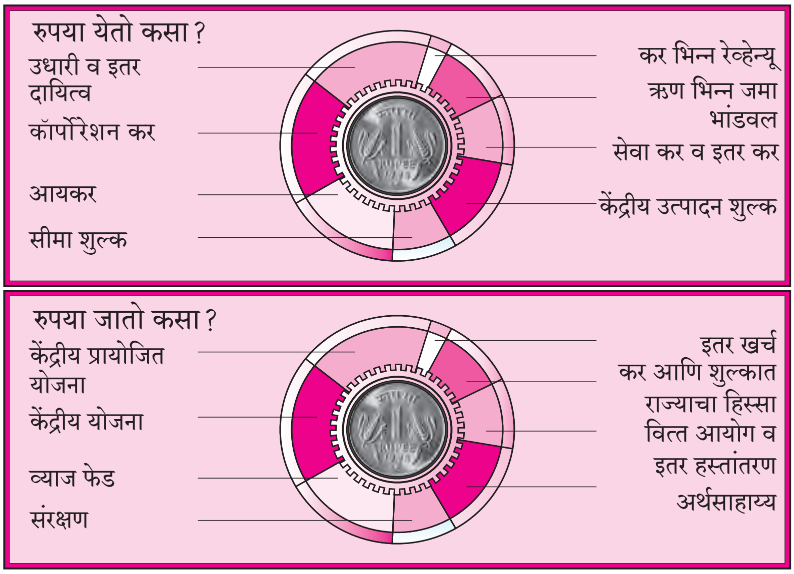
एखाद्या वर्गातील मुलांचे त्यांच्या परीक्षेतील गुणांवरून दोन गट करायचे असतील, तर त्या वर्गातील मुलांच्या गुणांचा 'मध्यक' हे परिमाण निवडावे लागेल.

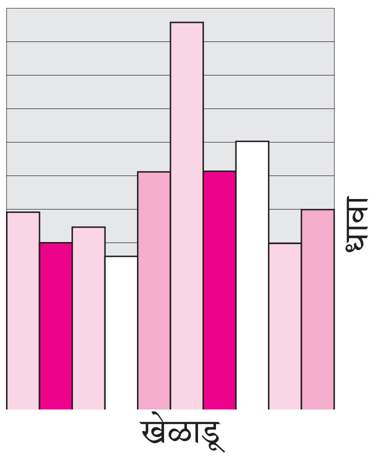
खडू तयार करणाऱ्या एखाद्या बचत गटाला कोणत्या रंगाच्या खडूंना सर्वाधिक मागणी आहे हे शोधायचे असेल, तर केंद्रीय प्रवृत्तीचे 'बहुलक' हे परिमाण निवडावे लागेल.

सांख्यिक सामग्रीचे चित्ररूप सादरीकरण (Pictorial representation of statistical data)

सांख्यिक माहितीचा मध्य, मध्यक, बहुलक यांवरून किंवा माहितीचे विश्लेषण करून त्याचा उपयोग काही विशिष्ट निष्कर्ष मिळवण्यासाठी होतो.

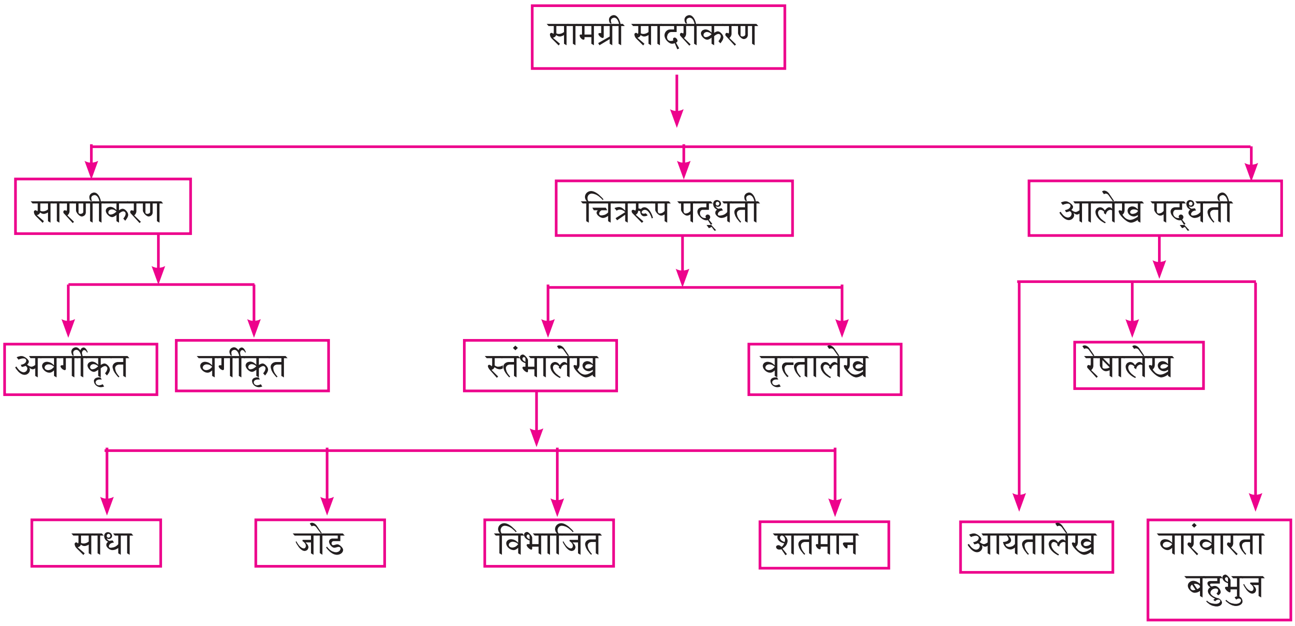
सांख्यिक माहिती संक्षिप्त रूपात सादर करण्याची एक पद्धत म्हणजे सारणीच्या रूपात सामग्री मांडणे हे आपल्याला माहीत आहे, परंतु सारणीच्या रूपात असल्यामुळे त्यावरून काही बाबी झटकन लक्षात येत नाहीत. सामान्य माणसांना त्या समजण्यासाठी, म्हणजेच सर्वसामान्य लोकांचे लक्ष सामग्रीतील महत्त्वाच्या बाबींकडे वेधण्यासाठी, त्या माहितीचे सादरीकरण वेगळ्या प्रकारे करता येईल का असा विचार करू. उदाहरणार्थ, अर्थसंकल्पातील बाबी, खेळातील माहिती इत्यादी.





सामग्रीचे सादरीकरण (Presentation of data)

चित्ररूप व आलेखरूप सादरीकरण हे सामग्रीचा अर्थबोध होण्यासाठी वापरले जाणारे लक्षवेधी प्रकार आहेत. सामग्री सादरीकरणाच्या विविध पद्धती दर्शवणारी शाखाकृती (tree chart) खाली दाखवली आहे.



मागील इयत्तांमध्ये आपण यांपैकी काही पद्धतींचा व आलेखांचा अभ्यास केला आहे. आता आपण आयतालेख, वारंवारता बहुभुज व वृत्तालेख यांच्या साहाय्याने सामग्रीचे प्रतिरूपण कसे करायचे ते पाहू.

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल (1820-1910) या थोर स्त्रीला उत्कृष्ट व ध्येयनिष्ठ परिचारिका म्हणून ओळखले जाते. क्रीमियन युद्धातील जखमी सैनिकांची शुश्रूषा करून त्यांनी अनेकांचे प्राण वाचवले. संख्याशास्त्रात देखील फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल यांनी पायाभूत काम केले आहे. अनेक सैनिकांची अवस्था, त्यांच्यावर केलेले उपचार व त्यांचा उपयोग या सर्वांची व्यवस्थित नोंद करून त्यांनी महत्वाचे निष्कर्ष काढले. सैनिकांच्या मृत्यूंना त्यांच्या जखमांपेक्षा टायफॉइड, कॉलरा यांसारखे रोग जास्त कारणीभूत होते. त्यांची कारणे परिसराची अस्वच्छता, पिण्याचे अस्वच्छ पाणी, रुग्णांना दाटीवाटीने राहायला लागणे ही, होती. ही कारणमीमांसा चटकन ध्यानात यावी म्हणून फ्लॉरेन्स यांनी पायचार्टसारखे आलेख तयार केले. योग्य उपचार आणि स्वच्छतेचे नियम पाळून त्यांनी सैनिकांचा मृत्युदर खूप कमी करून दाखवला. शहराचे आरोग्य राखण्यासाठी, व्यवस्थित मलनिस्सारण करणारे ड्रेनेज आणि पिण्यासाठी सर्वांना शुद्ध पाणी आवश्यक आहे, हे त्यांचे निरीक्षण नगरपालिकांना पटले. अनेक निरीक्षणांची केलेली उत्तम नोंद, सांख्यिकीच्या आधारे विश्वासार्ह निष्कर्ष काढण्यास मदत करते, हे त्यांच्या कामावरून दिसले.

जाणून घेऊया.

आयतालेख : Histogram आयतालेख व तो काढण्याची रीत आपण एका उदाहरणाने समजून घेऊ.

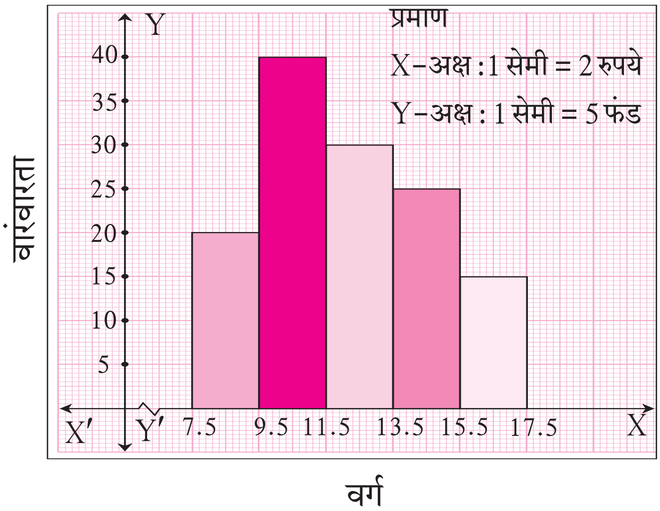
उदा : खालील सारणीत विविध कंपन्यांच्या म्युच्युअल फंडांचे एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (Net asset value) दिले आहे.

त्यावरून आयतालेख काढा.

नक्त मालमत्ता मूल्य (रुपये) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
म्युच्युअल फंडाची संख्या	20	40	30	25	15

उकल : वरील सारणीसाठी दिलेले वर्ग सलग नाहीत. ते सर्वप्रथम सलग करून घेऊ.

सलग केलेले वर्ग	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
वारंवारता	20	40	30	25	15



आकृती 6.1

आयतालेख काढण्याची कृती

1. वर्ग सलग नसल्यास ते सलग करून घ्यावेत. अशा वर्गांना वर्धित वर्ग (extended class intervals) म्हणतात.

2. हे वर्धित वर्ग X- अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.

3. Y- अक्षावर वारंवारता योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.

4. X- अक्षावर प्रत्येक वर्धित वर्ग हा पाया घेऊन त्यावर आयत काढा. आयतांची उंची संगत वारंवारतांएवढी घ्या.

लक्षात घ्या.

X-अक्षावर आरंभबिंदू आणि पहिला वर्ग यांच्यामध्ये ‘—/\/—’ अशी खूण आहे. (या खुणेस अक्षसंकोच, krink mark, असे म्हणतात.) याचा अर्थ आरंभबिंदूपासून पहिल्या वर्गापर्यंत कोणतीही निरीक्षणे नाहीत. त्यामुळे X- अक्षाची घडी घातल्यासारखी ही खूण आहे. आवश्यकतेनुसार Y- अक्षावरही ही खूण वापरतात. त्यामुळे योग्य आकाराचा आलेख काढता येतो.

सरावसंच 6.4

1. पुढील सामग्री आयतालेखाद्‌वारे दर्शवा.

विद्यार्थ्यांची उंची (सेमी.)	135-140	140-145	145-150	150-155
विद्यार्थी संख्या	4	12	16	8

2. खालील सारणीत ज्वारीचे एकरी उत्पन्न दिले आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

एकरी उत्पन्न (क्विंटल)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
शेतकऱ्यांची संख्या	30	50	55	40	20

3. खालील सारणीत 210 कुटुंबांची वार्षिक गुंतवणूक दिली आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

गुंतवणूक (हजार रुपये)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
कुटुंबांची संख्या	30	50	60	55	15

4. खालील सारणीत विद्यार्थ्यांनी परीक्षेच्या तयारीसाठी दिलेला वेळ दर्शवला आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

वेळ (मिनिटांत)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
विद्यार्थी संख्या	14	20	24	22	16

जाणून घेऊया.

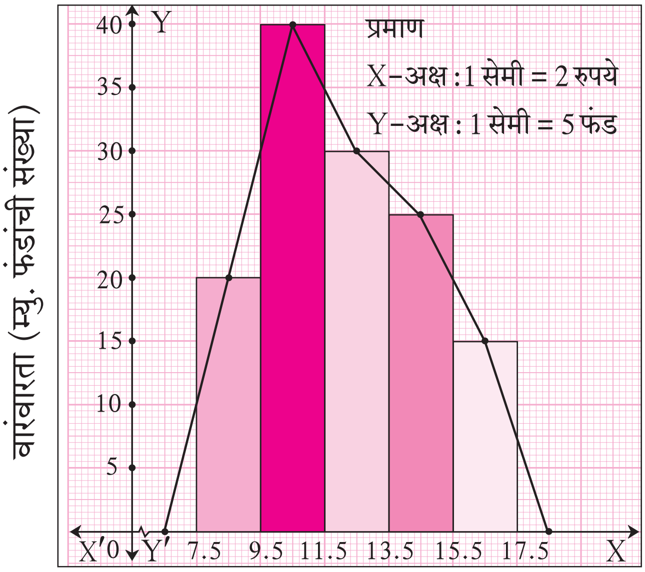
वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon)

वारंवारता सारणीतील माहिती विविध प्रकारे दर्शवता येते. आपण आयतालेखाचा अभ्यास केला आहे. दुसरा प्रकार ‘वारंवारता बहुभुज’ हा आहे.

वारंवारता बहुभुज काढण्याच्या दोन पद्धतींचा अभ्यास करू.

(1) आयतालेखाच्या मदतीने (2) आयतालेख न वापरता.

(1) आयतालेखाच्या मदतीने वारंवारता बहुभुज काढण्याची रीत समजून घेण्यासाठी आपण आकृती 6.1 मध्ये दाखवलेल्या आयतालेखाचाच उपयोग करू.



वर्ग (नक्त मालमत्तामूल्य)

आकृती 6.2

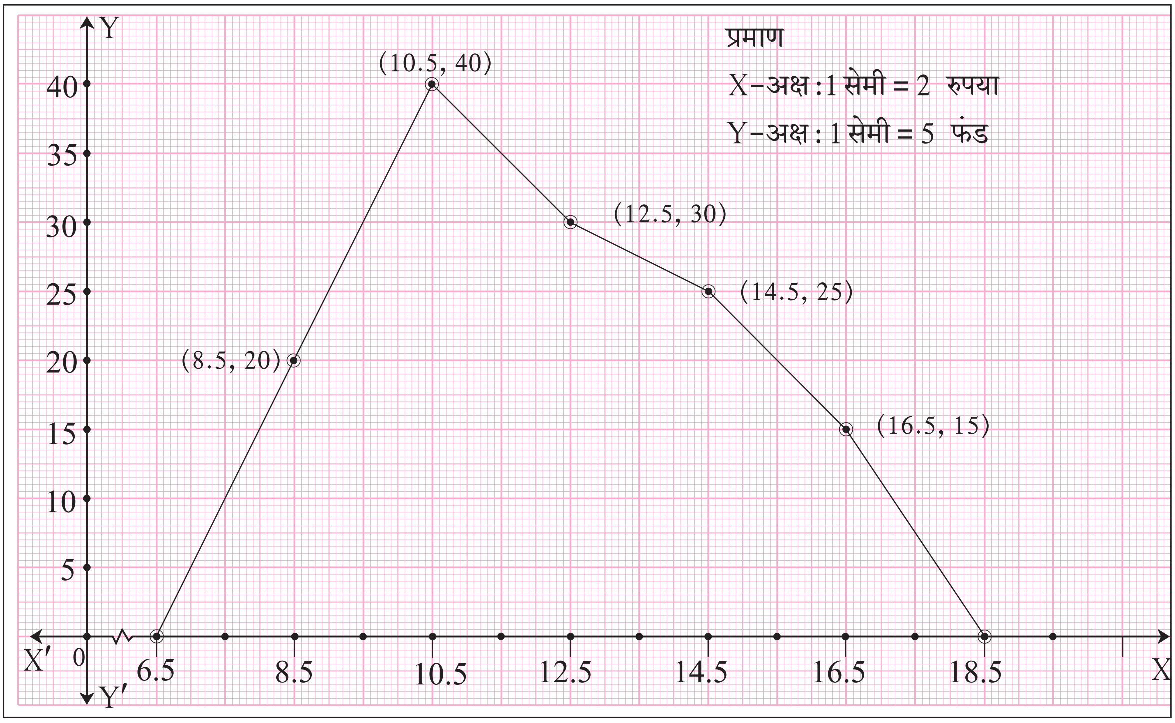
1. आयतालेखातील प्रत्येक आयताच्या वरच्या बाजूचा मध्यबिंदू दर्शवा.
2. पहिल्या आयताच्या आधी शून्य उंचीचा आयत आहे असे माना व त्याचा मध्यबिंदू दर्शवा. तसेच शेवटच्या आयतानंतर एक शून्य उंचीचा आयत मानून त्याच्याही मध्यबिंदूवर खूण करा. हे बिंदू X- अक्षावर येतील.
3. सर्व मध्यबिंदू क्रमाने सरळ रेघांनी जोडा.

तयार झालेली बंदिस्त आकृती म्हणजेच वारंवारता बहुभुज होय.

(2) आयतालेख न काढता, वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी बिंदूंचे निर्देशक कसे ठरवतात हे खालील सारणीवरून समजून घ्या.

वर्ग	सलग वर्ग	वर्गमध्य	वारंवारता	बिंदूंचे निर्देशक
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 -13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

सारणीतील पाचव्या स्तंभातील निर्देशकांशी संगत बिंदू आलेख कागदावर स्थापन करतात. ते क्रमाने जोडले, की वारंवारता बहुभुज मिळतो. हा बहुभुज आकृती 6.3 मध्ये दाखवला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.



वर्गमध्य (नक्त मालमत्तामूल्य)

आकृती 6.3

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सोबतच्या आकृतीत दाखवलेल्या वारंवारता बहुभुजाच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

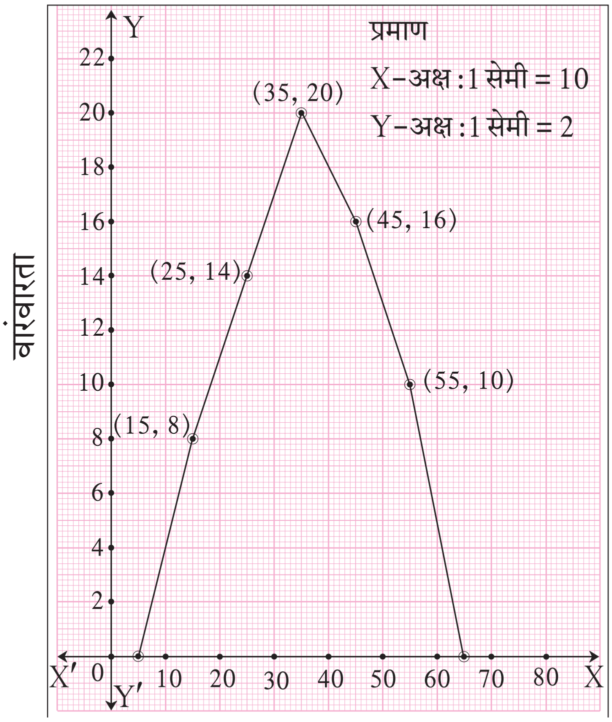
(1) 50-60 या वर्गाची वारंवारता लिहा.

(2) ज्या वर्गाची वारंवारता 14 आहे असा वर्ग लिहा.

(3) वर्गमध्य 55 असलेला वर्ग लिहा.

(4) सर्वाधिक वारंवारता असलेला वर्ग लिहा.

(5) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग लिहा.



वर्ग

आकृती 6.4

उकल :

(1) वर्गमध्य X- अक्षावर दर्शवले आहेत. x- निर्देशक 55 असलेल्या बिंदूचा, (50-60 या वर्गाचा मध्य 55 आहे.) y- निर्देशक 10 आहे, म्हणून 50-60 या वर्गाची वारंवारता 10 आहे.

(2) वारंवारता Y- अक्षावर दर्शवल्या आहेत. y- निर्देशक 14 असलेल्या बिंदूचा x- निर्देशक 25 आहे. Y-अक्षावर 14 या वारंवारतेची खूण पाहा. 25 हा 20-30 या वर्गाचा मध्य आहे. म्हणून वारंवारता 14 असणारा वर्ग 20-30 आहे.

(3) 55 हा मध्य असलेला वर्ग 50-60 आहे.

(4) वारंवारता Y-अक्षावर दर्शवली आहे. बहुभुजावर y- निर्देशकाची सर्वाधिक किंमत 20 आहे. त्याचा संगत x- निर्देशक 35 आहे. वर्गमध्य 35 असणारा वर्ग 30-40 आहे. म्हणून 30-40 या वर्गाची वारंवारता सर्वाधिक आहे.

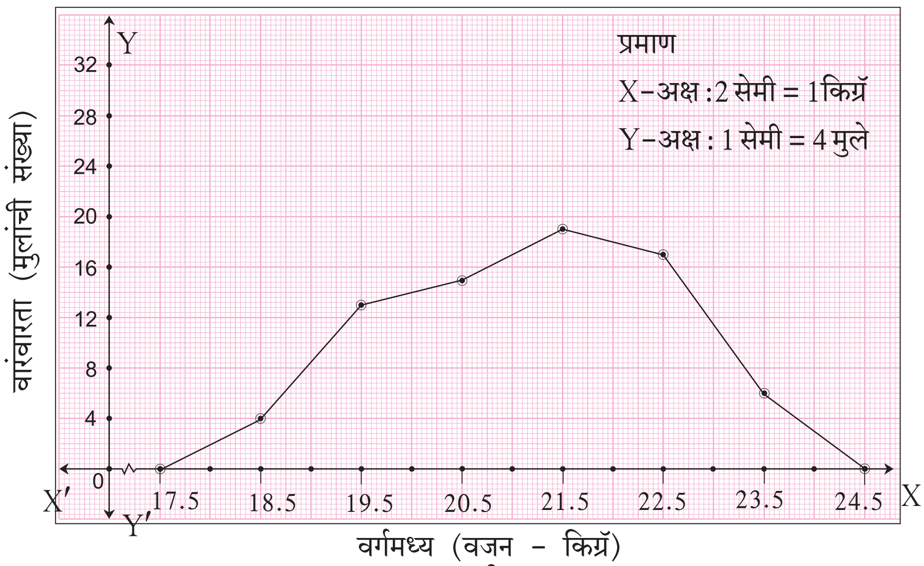
(5) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग 0-10 आणि 60-70 हे आहेत.

उदा. (2) खालील सारणीत मुलांचे वजन व मुलांची संख्या दिलेली आहे. या सामग्रीवरून वारंवारता बहुभुज काढा.

मुलांचे वजन (किग्रॅ)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
मुलांची संख्या	4	13	15	19	17	6

वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी आवश्यक बिंदूंसह खालील सारणी तयार करू व वारंवारता बहुभुज काढू.

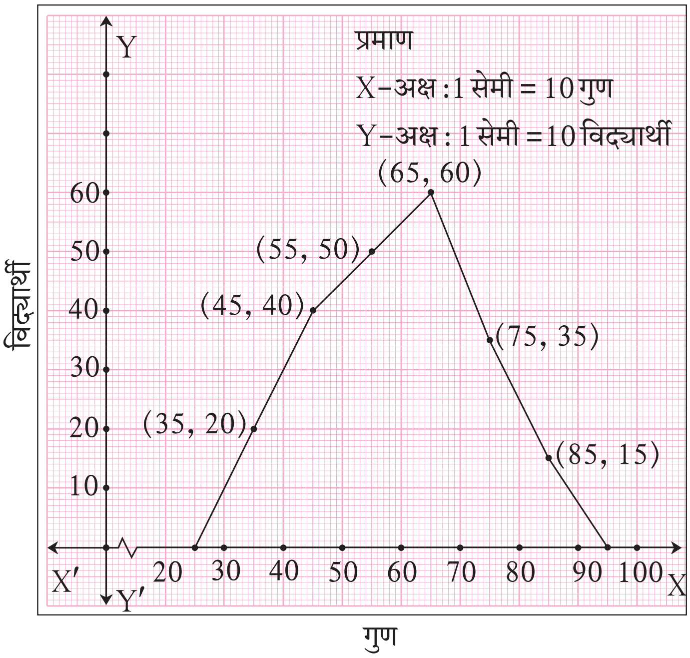
वर्ग	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
वर्गमध्य	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
वारंवारता	4	13	15	19	17	6
बिंदूचे निर्देशक	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



आकृती 6.5

सरावसंच 6.5

1. खालील बहुभुजाचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.6

(1) जास्तीत जास्त विद्यार्थी कोणत्या वर्गात आहेत?

(2) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग लिहा.

(3) 50 विद्यार्थी संख्या असणाऱ्या वर्गाचा मध्य किती?

(4) वर्गमध्य 85 असणाऱ्या वर्गाची खालची व वरची वर्गमर्यादा लिहा.

(5) 80-90 गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

2. खालील सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

वीज बिले (रुपये)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
कुटुंबे	240	300	450	350	160

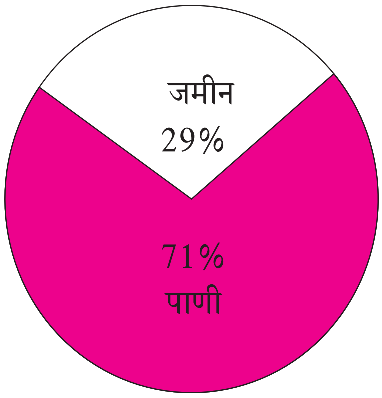
3. एका परीक्षेच्या निकालाच्या टक्केवारीचे वर्ग आणि त्या वर्गांत असणारी विद्यार्थी संख्या खालील सारणीत दिली आहे. या सारणीवरून वारंवारता बहुभुज काढा.

निकाल (टक्के)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी संख्या	7	33	45	65	47	18	5

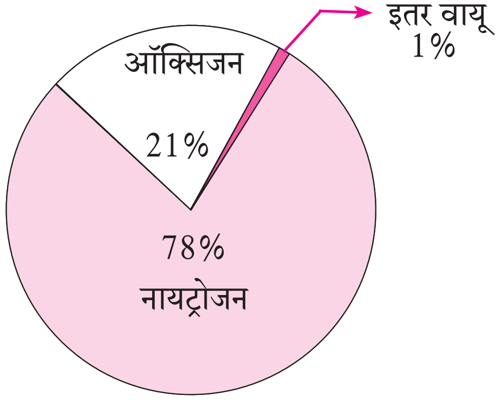
जरा आठवूया.

वृत्तालेख (Pie diagram)

मागील इयत्तांमध्ये आपण भूगोल व विज्ञान या विषयांमध्ये खालील आलेख पाहिले आहेत.अशा आलेखांना वृत्तालेख म्हणतात.



पृथ्वीवरील जमीन व पाणी यांचे प्रमाण



हवेतील विविध घटकांचे प्रमाण

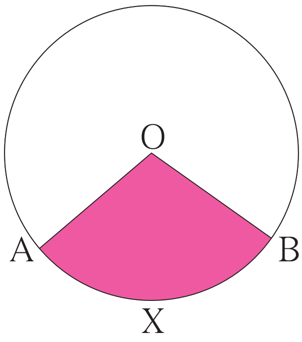
आकृती 6.7

वृत्तालेखात सांख्यिक सामग्री संपूर्ण वृत्तात म्हणजेच वर्तुळात दर्शवली जाते. सामग्रीतील वेगवेगळे घटक प्रमाणबद्ध वर्तुळपाकळ्यांनी त्यात दर्शवलेले असतात.

आकृती 6.8 मध्ये वर्तुळकेंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या OA व OB या त्रिज्या आहेत.

∠AOB हा केंद्रीय कोन आहे.

O – AXB हा छायांकित भाग म्हणजेच वर्तुळपाकळी (sector of a circle) आहे.



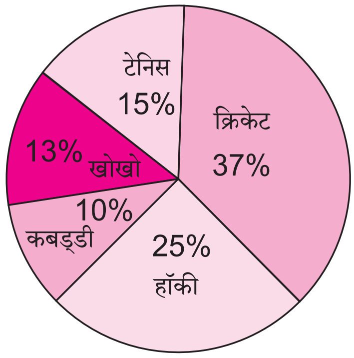
आकृती 6.8

जाणून घेऊया.

वृत्तालेखाचे वाचन Reading of Pie diagram

वृत्तालेखावरून दृष्टिक्षेपातच माहिती कशी मिळते, हे खालील उदाहरणावरून समजून घ्या.

इयत्ता 10 वीतील 120 मुलांना 'तुमचा आवडता खेळ कोणता', हा प्रश्न विचारला. मिळालेली माहिती वृत्तालेखाने दर्शवली आहे.



आकृती 6.9

कोणता खेळ सर्वाधिक आवडीचा आहे?

किती टक्के मुलांना खो-खो आवडतो?

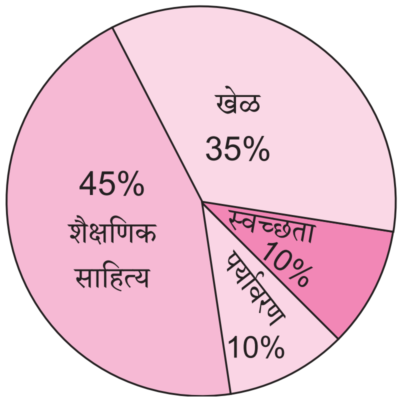
कबड्डी आवडणारी मुले किती टक्के?

यांसारख्या प्रश्नांची उत्तरे आपल्याला एका दृष्टिक्षेपात या वृत्तालेखावरून मिळतात.

आणखी एक वृत्तालेख पाहा.

सोबतच्या आकृतीतील वृत्तालेख एका शाळेच्या वार्षिक अर्थनियोजनाचा आहे. या वृत्तालेखावरून आपल्याला असे समजते, की

- 45% रक्कम शैक्षणिक साहित्यासाठी राखून ठेवली आहे.
- 35% रक्कम खेळाच्या साहित्यासाठी दर्शवली आहे.
- 10% रक्कम स्वच्छतेच्या साहित्यासाठी ठेवली आहे.
- 10% रक्कम पर्यावरण रक्षणासाठी ठेवलेली आहे.



आकृती 6.10

अशा प्रकारे वृत्तालेखातून आपल्याला एका दृष्टिक्षेपात माहिती मिळते.

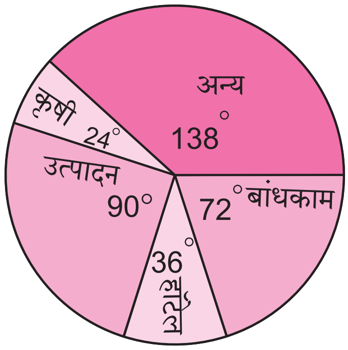
आता आपण वृत्तालेखाची अधिक माहिती घेऊ.

अनेक वेळा वृत्तालेखाद्‌वारे दिलेली विविध प्रकारची माहिती आपण वृत्तपत्रातून पाहतो, जसे वार्षिक अंदाजपत्रक, ऑलिंपिक स्पर्धांमधील विविध देशांची कामगिरी, देशाचा पैसा येतो कसा व जातो कसा इत्यादी.

त्यासाठी आपण माहिती कशी शोधायची हे उदाहरणांवरून समजून घेऊ.

नमुना उदाहरण :

एका सर्वेक्षणात मिळालेली कार्यकुशल व्यक्तींची वर्गवारी खालील वृत्तालेखात दाखवली आहे. जर उत्पादन क्षेत्रात कार्यरत असलेल्या व्यक्ती 4500 असतील तर पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.11

(i) सर्व क्षेत्रांतील एकूण कार्यकुशल व्यक्ती किती आहेत ?

(ii) बांधकाम क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्तींची संख्या किती ?

(iii) कृषी क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्ती किती ?

(iv) उत्पादन व बांधकाम क्षेत्रातील कुशल व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक किती ?

उकल : (i) समजा, सर्व क्षेत्रांतील एकूण कार्यकुशल व्यक्तींची संख्या x आहे.

$\therefore$ x व्यक्तींसाठीचा केंद्रीय कोन = 360°

$$\text{उत्पादन क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्तींसाठीचा केंद्रीय कोन} = \frac{\text{उत्पादन क्षेत्रातील व्यक्ती}}{\text{एकूण व्यक्ती}} \times 360$$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ सर्व क्षेत्रांतील कार्यकुशल व्यक्ती = 18000.

(ii) बांधकाम क्षेत्रासाठी केंद्रीय कोन 72° दाखवला आहे.

$$72 = \frac{\text{बांधकाम क्षेत्रातील व्यक्ती}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \text{बांधकाम क्षेत्रातील व्यक्ती} = \frac{72 \times 18000}{360}$$

$$= 3600$$

(iii) कृषी क्षेत्रासाठी केंद्रीय कोन = 24° आहे.

$$24 = \frac{\text{कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती}}{\text{एकूण कार्यकुशल व्यक्ती}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \text{कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती} = \frac{24 \times 18000}{360}$$

$$= 1200$$

(iv) उत्पादन व बांधकाम या क्षेत्रांतील केंद्रीय कोनांतील फरक = $90° - 72° = 18°$.

$$\therefore \text{ केंद्रीय कोनांतील फरक} = \frac{\text{दोन क्षेत्रांतील व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक}}{\text{एकूण कार्यकुशल व्यक्ती}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{दोन क्षेत्रांतील व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक}}{18000} \times 360$$

$$\text{उत्पादन व बांधकाम या क्षेत्रांतील कुशल व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

हे लक्षात ठेवूया.

- सामग्रीतील प्रत्येक घटक त्याच्याशी निगडित वर्तुळपाकळीने दाखवलेला असतो.
- वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप त्या विशिष्ट घटकांच्या नोंदींच्या प्रमाणात असते.
- केंद्रीय कोनाचे माप $(\theta) = \dfrac{\text{निगडित घटकातील संख्या}}{\text{एकूण घटकांतील संख्या}} \times 360$
- योग्य त्रिज्येचे वर्तुळ काढावे. प्रत्येक घटकातील संख्येच्या प्रमाणात केंद्रीय कोन घेऊन वर्तुळाचे पाकळ्यांत विभाजन केलेले असते.

जाणून घेऊया.

वृत्तालेख काढणे (To draw Pie diagram)

काढलेल्या वृत्तालेखावरून माहिती कशी वाचायची हे आपण पाहिले. आता वृत्तालेख कसा काढतात, ते पाहू.

1. वृत्तालेख काढताना संपूर्ण वर्तुळाची विभागणी प्रमाणबद्ध वर्तुळपाकळ्यांत करतात.
2. प्रत्येक घटकाशी संबंधित वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप खालील सूत्राने काढतात.

$$\text{वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप } \theta = \frac{\text{त्या घटकातील संख्या}}{\text{सर्व घटकांतील एकूण संख्या}} \times 360$$

योग्य त्रिज्येचे वर्तुळ काढून, सामग्रीत जेवढे घटक आहेत तेवढ्या वर्तुळपाकळ्यांत वर्तुळाचे विभाजन करतात.

वृत्तालेख काढण्याची कृती खालील उदाहरणांतून समजावून घेऊ.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका दुकानात दुचाकींच्या खरेदीसाठी रंगांची पसंती खालीलप्रमाणे होती. ही माहिती वृत्तालेखाने दर्शवण्यासाठी प्रत्येक घटक दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप ठरवा.

उकल : दुचाकींची एकूण मागणी 36 आहे.त्यांपैकी 10 दुचाकी पांढऱ्या रंगाच्या आहेत.

$\therefore$ पांढऱ्या दुचाकी दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप

$$= \frac{\text{पांढऱ्या दुचाकींची संख्या}}{\text{दुचाकींची एकूण संख्या}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

याप्रमाणेच इतर रंगांच्या दुचाकींशी संगत वर्तुळपाकळ्यांच्या केंद्रीय कोनांची मापे काढून सारणीत दर्शवली आहेत.

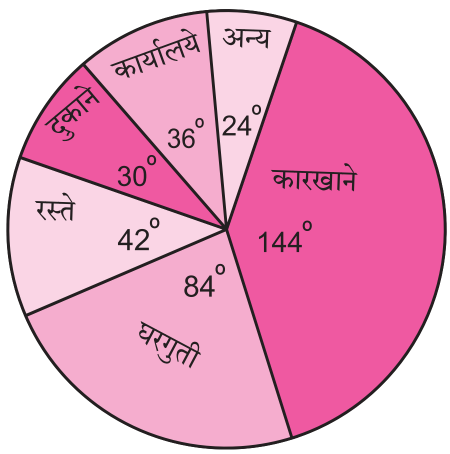
रंग	दुचाकींची मागणी	वर्तुळपाकळीचा केंद्रीय कोन
पांढरा	10	$\frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$
काळा	9	$\frac{9}{36} \times 360 = 90^\circ$
निळा	6	60°
राखाडी	7	70°
लाल	4	40°
एकूण	36	360°

उदा (2) एका गावात विविध स्थानांना दररोज होणारा वीजपुरवठा खालील सारणीत दर्शवला आहे या माहितीचा वृतालेख काढा.

स्थाने	कारखाने	घरे	रस्ते	दुकाने	कार्यालये	अन्य
वीजपुरवठा (हजार एकक)	24	14	7	5	6	4

उकल : एकूण वीजपुरवठा 60 हजार एकके आहे. त्यावरून केंद्रीय कोनांची मापे काढून सारणीत दाखवू.

वीजपुरवठा	एकक	केंद्रीय कोनाचे माप
कारखाने	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
घरगुती	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
रस्ते	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
दुकाने	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
कार्यालये	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
अन्य	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
एकूण	60	360°



आकृती 6.12

वृत्तालेख काढण्याच्या पायऱ्या :

(1) प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळ काढून एक त्रिज्या काढली. नंतर सारणीत काढून घेतलेल्या केंद्रीय कोनांच्या मापांच्या वर्तुळपाकळ्या एकापाठोपाठ एक (144°, 84°, 42°, 30°, 36°, व 24°) याप्रमाणे घड्याळाच्या काट्यांच्या दिशेने काढल्या. (वर्तुळपाकळ्या एकाच दिशेने एकापुढे एक काढताना त्यांचा क्रम बदलला तरी चालतो.)

(2) प्रत्येक पाकळीत संबंधित घटक नोंदवले.

कृती :

एका कुटुंबाचा विविध बाबींवर होणारा मासिक खर्च दिलेला आहे, त्यावरून केंद्रीय कोनांची मापे काढून वृत्तालेख काढा.

विविध बाबी	प्रतिशत खर्च	केंद्रीय कोनाचे माप
अन्न	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
कपडे	20	$\square \times \square = \square$
घरभाडे	15	$\square \times \square = \square$
शिक्षण	20	$\square \times \square = \square$
इतर खर्च	05	$\square \times \square = \square$
एकूण	100	360°

सरावसंच 6.6

1. एका रक्तदान शिबिरात विविध वयोगटांतील 200 व्यक्तींनी केलेले रक्तदान दिले आहे. त्यावरून वृत्तालेख काढा.

वयोगट (वर्षे)	20-25	25-30	30-35	35-40
व्यक्तींची संख्या	80	60	35	25

2. एका विद्यार्थ्याने विविध विषयांत 100 पैकी मिळवलेले गुण दिले आहेत. ही माहिती वृत्तालेखाद्वारे दाखवा.

विषय	इंग्रजी	मराठी	विज्ञान	गणित	सा. शास्त्र	हिंदी
गुण	50	70	80	90	60	50

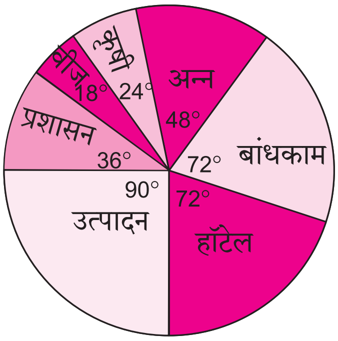
3. वृक्षारोपण कार्यक्रमांतर्गत शाळेतील वेगवेगळ्या इयत्तांतील विद्यार्थ्यांनी लावलेल्या झाडांची संख्या खालील सारणीत दिलेली आहे. ही माहिती वृत्तालेखाद्वारे दाखवा.

इयत्ता	5 वी	6 वी	7 वी	8 वी	9 वी	10 वी
झाडांची संख्या	40	50	75	50	70	75

4. एका फळविक्रेत्याकडे आलेल्या विविध फळांच्या मागणीची टक्केवारी खालील सारणीत दिली आहे. या माहितीचा वृत्तालेख काढा.

फळे	आंबा	मोसंबी	सफरचंद	चिकू	संत्री
मागणीची टक्केवारी	30	15	25	20	10

5. एका गावातील विविध व्यावसायिकांचे प्रमाण दर्शवणारा वृत्तालेख आकृती 6.13 मध्ये दिला आहे. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.13

(1) एकूण व्यावसायिकांची संख्या 10000 असल्यास बांधकाम क्षेत्रात किती व्यावसायिक आहेत? (2) प्रशासन क्षेत्रात किती व्यावसायिक कार्यरत आहेत? (3) उत्पादन क्षेत्रात किती टक्के व्यावसायिक आहेत?

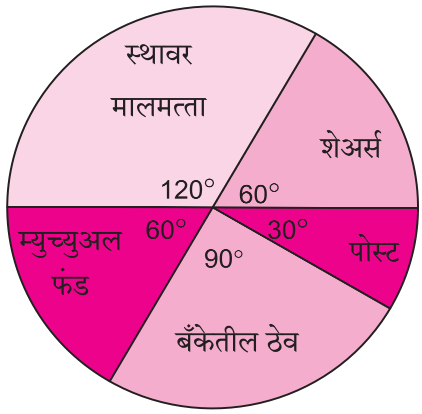
6. एका कुटुंबाच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा वृत्तालेख सोबतच्या आकृतीत दिला आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) शेअरमध्ये गुंतवलेली रक्कम रु. 2000 असल्यास एकूण गुंतवणूक किती?

(2) बँकेतील ठेवींची रक्कम किती?

(3) म्युच्युअल फंडापेक्षा स्थावर मालमत्तेत किती रक्कम जास्त गुंतवली?

(4) पोस्टातील गुंतवणूक किती?



आकृती 6.14

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. बहुपर्यायी प्रश्नांची उत्तरे दिलेल्या पर्यायांतून शोधून लिहा.

(1) विविध रक्तगटांच्या व्यक्तींचे रक्तगटानुसार वर्गीकरण वृत्तालेखात दाखवायचे आहे. O− रक्तगट असणाऱ्या व्यक्ती 40% असल्यास O− रक्तगट असणाऱ्या व्यक्तींसाठी वृत्तालेखातील केंद्रीय कोन किती घ्यावा?

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) इमारतीच्या बांधकामाचे विविध खर्च वृत्तालेखाद्वारे दाखवले असता, सिमेंटचा खर्च $75°$ च्या केंद्रीय कोनाने दाखवला आहे. सिमेंटचा खर्च रु. 45,000 असल्यास, इमारतीच्या बांधकामाचा एकूण खर्च किती रुपये ?

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील संचित वारंवारतेचा उपयोग . . . . . काढण्यासाठी होतो.

(A) मध्य (B) मध्यक (C) बहुलक (D) यांपैकी सर्व

(4) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठीच्या पुढील सूत्रात $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ मध्ये $u_i = . . .$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

प्रतिलीटर कापलेले अंतर (किमी)	12-14	14-16	16-18	18-20
कारची संख्या	11	12	20	7

वरील सामग्रीसाठी कारच्या प्रतिलीटर कापलेल्या अंतराचे मध्यक . . . . . या वर्गात आहे.

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

प्रत्येक विद्यार्थ्याने लावलेली झाडे	1-3	4-6	7-9	10-12
विद्यार्थी संख्या	7	8	6	4

वरील वारंवारता सारणीतील सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढायचा आहे. 4-6 या वर्गातील विद्यार्थी दर्शवण्यासाठीच्या बिंदूंचे निर्देशक . . . आहे.

(A) (4, 8) 0 (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. एका द्राक्षाच्या मोसमात बागाईतदारांना मिळालेल्या उत्पन्नाची वर्गीकृत वारंवारता सारणी खाली दिली आहे. त्यावरून उत्पन्नाचा मध्य काढा.

उत्पन्न (हजार रुपये)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बागाईतदार	10	11	15	16	18	14

3. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत एका बँकेने शेततळ्यांसाठी उपलब्ध करून दिलेले कर्ज दिले आहे, तर बँकेने दिलेल्या रकमेचा मध्य काढा.

कर्ज (हजार रुपये)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
शेततळ्यांची संख्या	13	20	24	36	7

4. एका कारखान्यातील 120 कामगारांच्या आठवड्याच्या पगाराची वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी खाली दिली आहे. त्यावरून कामगारांच्या आठवड्याच्या पगाराचा मध्य काढा.

आठवड्याचा पगार (रुपये)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
कामगारांची संख्या	15	35	50	20

5. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत 50 पूरग्रस्तांच्या कुटुंबांना दिलेल्या मदतीची रक्कम दिली आहे. त्यावरून मदतीच्या रकमेचा मध्य काढा.

मदतीची रक्कम (हजार रुपये)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कुटुंबांची संख्या	7	13	20	6	4

6. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत सार्वजनिक बस सेवेच्या 250 बसेसनी एका दिवसात कापलेले अंतर दिले आहे. त्यावरून एका दिवसात कापलेल्या अंतराचे मध्यक काढा.

अंतर (किलोमीटर)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
बसची संख्या	40	60	80	50	20

7. एका जनरल स्टोअरमधील विविध वस्तूंच्या किमती व त्या वस्तूंची मागणी यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून किमतीचा मध्यक काढा.

किंमत (रुपये)	20 पेक्षा कमी	20-40	40-60	60-80	80-100
वस्तूंची संख्या	140	100	80	60	20

8. खालील वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीत एका मिठाईच्या दुकानातील विविध वजनांच्या मिठाईची मागणी दिली आहे. त्यावरून वजनाच्या मागणीचे बहुलक काढा.

मिठाईचे वजन (ग्रॅम)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ग्राहक संख्या	10	60	25	20	15

9. खालील वारंवारता वितरणासाठी आयतालेख काढा.

वीजवापर (युनिट)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
कुटुंबांची संख्या	150	400	460	540	600	350

10. एका हातमाग कारखान्यात मजुरांना एक साडी बनवण्यास लागणारे दिवस आणि मजुरांची संख्या यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. या सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

दिवस	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
मजुरांची संख्या	5	16	30	40	35	14

11. एका वर्गातील विद्यार्थ्यांना विज्ञानाचा प्रयोग करण्यासाठी लागलेल्या वेळेची वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. या माहितीसाठी आयतालेख काढून वारंवारता बहुभुज काढा.

प्रयोगासाठी लागलेला वेळ (मिनिटे)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
विद्यार्थ्यांची संख्या	8	16	22	18	14	12

12. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

रक्तदात्यांचे वय (वर्षे)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
रक्तदात्यांची संख्या	38	46	35	24	15	12

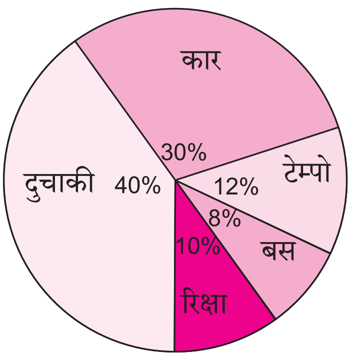
13. खालील सारणीत 150 गावांतील पावसाची वार्षिक सरासरी दिली आहे. त्यासाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

सरासरी पाऊस (सेंटिमीटर)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
गावांची संख्या	14	12	36	48	40

14. सकाळी 8 ते 10 या वेळेत शहरातील एका चौकातील सिग्नलवरून पुढे जाणाऱ्या विविध वाहनांच्या संख्यांची शतमाने शेजारील वृत्तालेखात दिली आहेत.

(1) प्रत्येक प्रकारच्या वाहनासाठीच्या केंद्रीय कोनाचे माप काढा.

(2) दुचाकींची संख्या 1200 असल्यास वाहनांची एकूण संख्या किती ?



आकृती 6.15

15. खालील तक्त्यात ध्वनिप्रदूषण निर्माण करणारे घटक दिले आहेत. त्यासाठी वृत्तालेख काढा.

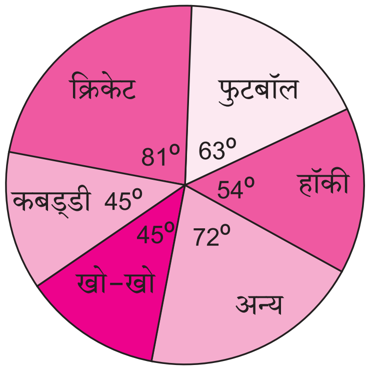
बांधकाम	रहदारी	विमान उड्डाणे	औद्योगिक	रेल्वेच्या गाड्या
10%	50%	9%	20%	11%

16. एका सर्वेक्षणातील शालेय विद्यार्थ्यांची विविध खेळांतील आवड जाणण्यासाठी केलेल्या सर्वेक्षणात मिळालेली माहिती शेजारील वृत्तालेखात दाखवली आहे. एकूण विद्यार्थी संख्या 1000 असल्यास,

(1) क्रिकेट आवडणारे विद्यार्थी किती ?

(2) फुटबॉल हा खेळ किती विद्यार्थ्यांना आवडतो ?

(3) अन्य खेळांना पसंती देणारे विद्यार्थी किती ?



आकृती 6.16

17. एका गावातील आरोग्य केंद्रात 180 स्त्रियांची तपासणी झाली. त्यांतील 50 स्त्रियांचे हिमोग्लोबीन कमी होते, 10 स्त्रियांना मोतीबिंदूचा त्रास होता, 25 स्त्रियांना श्वसनाचे विकार होते. उरलेल्या स्त्रिया निरोगी होत्या. ही माहिती दर्शवणारा वृत्तालेख काढा.

18. वनीकरणाच्या प्रकल्पात एका शाळेतील विद्यार्थ्यांनी पर्यावरण दिनानिमित्त 120 झाडे लावली. त्याची माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ही माहिती दर्शवणारा वृत्तालेख काढा.

झाडांची नावे	करंज	बेहडा	अर्जुन	बकुळ	कडुनिंब
झाडांची संख्या	20	28	24	22	26

AJ542B