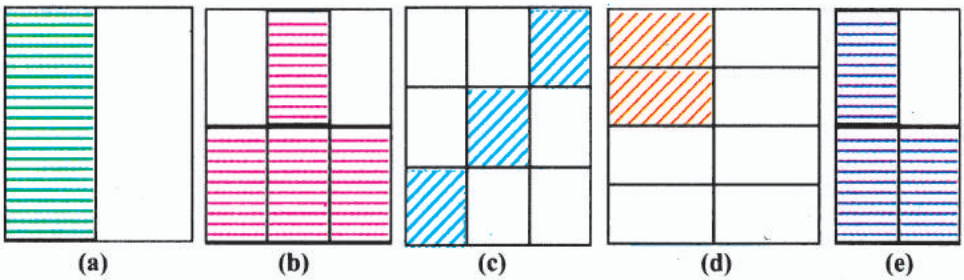
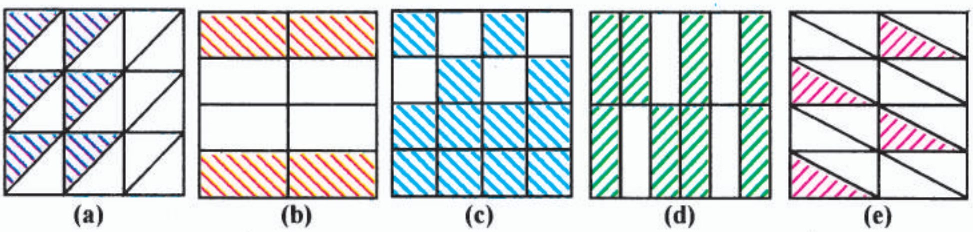
2. छायांकित भागों के लिए भिन्नों को लिखिए और पंक्ति (i) के प्रत्येक भिन्न का तुल्य भिन्न पंक्ति (ii) से चुनकर जोड़ा बनाइए।

(i)



(ii)



3. खाली डिब्बों (☐) को सही संख्या से भरिए–

(a) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$ (b) $\frac{2}{7} = \frac{8}{\square}$

(c) $\frac{4}{9} = \frac{12}{\square}$ (d) $\frac{49}{35} = \frac{\square}{5}$

4. $\frac{3}{4}$ के तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए जिनका–

(a) हर 20 है। (b) अंश 33 है।

(c) हर 8 है। (d) अंश 27 है।

5. $\frac{36}{48}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिनका–

(a) अंश 9 है। (b) हर 4 है।

6. जाँच कीजिए कि निम्न भिन्न तुल्य हैं या नहीं–

(a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में बदलिए–

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{7}{28}$

8. रमेश के पास 20 पेंसिलें थीं। नीलू के पास 50 पेंसिलें और अजहर के पास 80 पेंसिलें थीं। 5 महीने के बाद रमेश ने 10 पेंसिलें, नीलू ने 25 पेंसिलें और अजहर ने 40 पेंसिलें प्रयोग कर लीं। प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों का कितना-कितना हिस्सा प्रयोग कर लिया? क्या प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों का समान हिस्सा भिन्न प्रयोग किया है?

9. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए और प्रत्येक के लिए दो भिन्न और लिखिए–

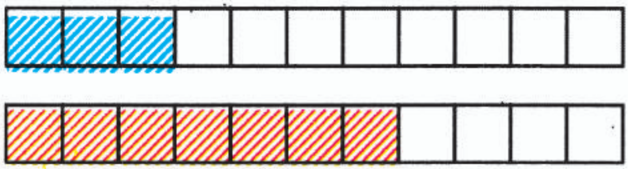
(i)	$\frac{250}{400}$	(a)	$\frac{2}{3}$
(ii)	$\frac{660}{990}$	(b)	$\frac{2}{5}$
(iii)	$\frac{180}{360}$	(c)	$\frac{1}{2}$
(iv)	$\frac{220}{550}$	(d)	$\frac{5}{8}$

7.7 समान भिन्न (Like fraction)

एक ही हर वाली भिन्न **समान भिन्न** कहलाती है। इस प्रकार $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{6}{16}$ सभी समान भिन्न हैं। $\frac{7}{25}$ और $\frac{7}{28}$ में हर असमान हैं, अतः ये **असमान भिन्न (Unlike fraction)** हैं। समान भिन्नों के पाँच युग्म और असमान भिन्नों के पाँच युग्म लिखिए।

7.7.1 भिन्नों की तुलना

निम्न आकृतियों को देखें –



$\frac{3}{11}$

$\frac{7}{11}$

दोनों भिन्नों में पूर्ण को 11 बराबर भागों में बाँटा गया है। स्पष्ट है $\frac{7}{11} > \frac{3}{11}$ । अतः समान हरों वाली दो भिन्नों में बड़े अंश वाली संख्या बड़ी होती है।

$\frac{4}{5}$ और $\frac{3}{5}$ में $\frac{4}{5}$ बड़ी संख्या है। इसी तरह $\frac{9}{20}$ और $\frac{13}{20}$ में $\frac{13}{20}$ बड़ी है।

स्वयं करके देखिए

1. **कौन-सी भिन्न बड़ी है?**

(i) $\frac{5}{10}$ या $\frac{7}{10}$ (ii) $\frac{13}{24}$ या $\frac{15}{24}$ (iii) $\frac{21}{102}$ या $\frac{29}{102}$

ऐसी संख्याओं की तुलना करना क्यों सरल है?

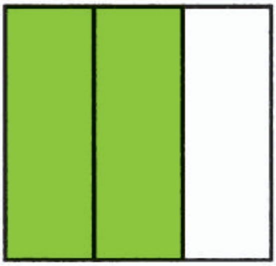
2. **इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रम में लिखिए–**

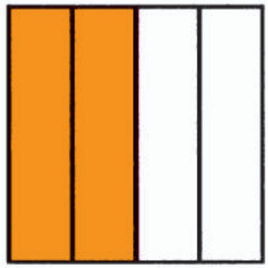
(a) $\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10}, \frac{2}{10}$ (b) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{11}{7}, \frac{4}{7}$

7.7.2 असमान भिन्नों की तुलना

दो भिन्न असमान होती हैं यदि उनके हर अलग-अलग हों। जैसे– $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{6}$ असमान भिन्न हैं और $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{5}$ भी असमान भिन्न हैं।

समान अंश वाली असमान भिन्न





$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$

स्पष्ट है, इनमें अंश समान हैं और हर अलग-अलग हैं। दूसरी संख्या में पूर्ण का टुकड़ा छोटा हो गया है। अतः यदि दो भिन्नों में अंश समान हों तो दोनों में से छोटे हर वाली संख्या बड़ी होती है।

इस प्रकार $\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$

आइए $\frac{2}{1}, \frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ को आरोही क्रम में सजाएँ। चूँकि सभी के अंश बराबर हैं, अतः छोटे हर वाली संख्याएँ बड़ी होंगी और बड़े हर वाली संख्याएँ छोटी होंगी।

अतः आरोही क्रम $\frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{1}$ है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित भिन्नों को आरोही और अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–

(a) $\frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}$ (b) $\frac{5}{6}, \frac{5}{19}, \frac{5}{15}, \frac{5}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{12}$

7.8 असमान अंश और हर वाली भिन्न

मान लीजिए हम $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं। इन दोनों के अंश और हर

अलग-अलग हैं। हम समान हर वाली भिन्नों की तुलना करना जानते हैं। अतः इनके हरों को तुल्य भिन्नों की पद्धति से समान करेंगे। अतः

$\frac{2}{3}$ का तुल्य भिन्न $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=----$

$\frac{3}{4}$ का तुल्य भिन्न $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=----$

स्पष्ट है $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ और $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

चूँकि समान हर वाली संख्या में बड़े अंश वाली संख्या बड़ी होगी। अतः $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}$

इसलिए $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ होगी।

ध्यान दीजिए कि तुल्य भिन्नों का समान हर 12 है जो 3 x 4 के बराबर है। यह 3 और 4 का एक सार्वगुणज है।

उदाहरण–2 : $\frac{5}{6}$ और $\frac{13}{15}$ की तुलना कीजिए।

हल : पहले 6 और 15 के सार्वगुणज वाली तुल्य संख्याएँ ज्ञात करेंगे।

अब $\frac{5}{6}=\frac{5\times5}{6\times5}=\frac{25}{30}$ तथा $\frac{13}{15}=\frac{13\times2}{15\times2}=\frac{26}{30}$

चूँकि $\frac{26}{30}>\frac{25}{30}$ इसलिए $\frac{13}{15}>\frac{5}{6}$ है।

असमान भिन्नों की तुलना में इनको समान भिन्न में बदला जाता है। इसे करने के लिए भिन्नों के हर का लघुतम समापवर्तक (ल.स) उपयोग कर सकते हैं।

ल.स. ही क्यों? : **6 और 15 का गुणनफल 90 है। स्पष्टतः 90 भी 6 और 15 का सार्वगुणज है। हम 90 का भी प्रयोग कर सकते हैं, परन्तु 30 भी 6 और 15 का सार्वगुणज है और इसके उपयोग से हमारा कार्य सरल हो जाएगा।**

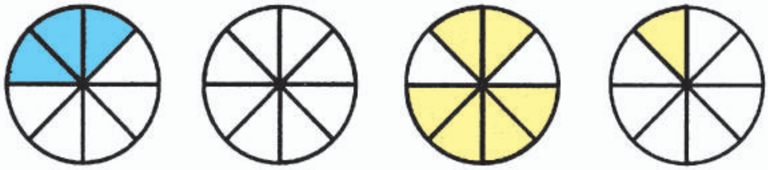
प्रश्नावली – 7.4

1. इन संख्याओं को आरोही क्रम में जमाएँ–

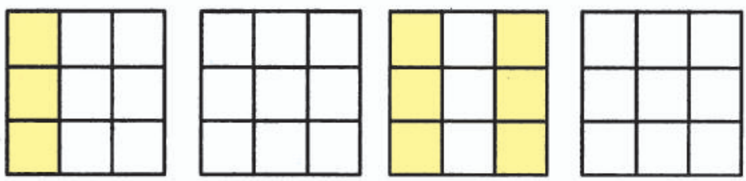
$$\frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8}$$

2. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्न को लिखिए। भिन्नों के बीच में सही चिह्न '<', '>' का प्रयोग करते हुए, इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए–

(a)



(b)



3. एक ही संख्या रेखा पर $\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}$ और $\frac{6}{6}$ को दर्शाइए।

4. दी हुई संख्याओं के बीच में उचित चिह्न '<' या '>' भरिए–

(a) $\frac{5}{6}\square\frac{2}{6}$ (b) $\frac{3}{6}\square 0$ (c) $\frac{1}{6}\square\frac{6}{6}$ (d) $\frac{8}{6}\square\frac{5}{6}$

(e) $\frac{3}{6}\square\frac{5}{6}$ (f) $\frac{1}{7}\square\frac{1}{4}$ (g) $\frac{4}{5}\square\frac{5}{5}$ (h) $\frac{3}{5}\square\frac{3}{7}$

5. निम्नलिखित के उत्तर लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया है–

(a) क्या $\frac{12}{15}, \frac{3}{30}$ के बराबर है?

(b) क्या $\frac{4}{5}, \frac{5}{9}$ के बराबर है?

(c) क्या $\frac{3}{5}, \frac{9}{15}$ के बराबर है?

(d) क्या $\frac{9}{16}, \frac{5}{9}$ के बराबर है?

6. रोहित कुल 8 रोटियों में से 4 रोटियाँ खाता है। रोहिणी कुल 8 रोटियों का $\frac{1}{4}$ भाग खाती है। किसने कम खाया?

7 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 15 विद्यार्थी 'प्रथम श्रेणी में पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 12 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग प्रथम श्रेणी में पास हुआ?

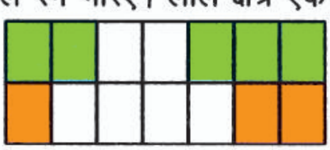
8. रीतेश एक घंटे के $\frac{5}{6}$ भाग तक पढ़ा, जबकि सर्वेश एक घंटे के $\frac{11}{12}$ भाग तक पढ़ा। किसने लम्बे समय तक पढ़ाई की?

7.9 भिन्न की सक्रियाएँ

7.9.1 भिन्नों का योग (जोड़)

क्या दो या अधिक भिन्न संख्याओं को जोड़ा जा सकता है? यदि हाँ, तो कैसे? हम समान हर वाली भिन्नों को मौखिक रूप से भी जोड़ सकते हैं। अगर भिन्नों के हर समान नहीं हैं, तो हमें पहले उनको समान हर वाली भिन्नों में बदलना होगा। हमें जोड़ना है $\frac{5}{14}$ और $\frac{3}{14}$ को। हम समान भिन्नों के योग से प्रारंभ करते हैं–

एक 7 x 2 की ग्रिड शीट (Grid sheet) लेते हैं। इस शीट की प्रत्येक पंक्ति में 7 खाने हैं और प्रत्येक स्तंभ में 2 खाने हैं। इसमें कुल 14 खाने हैं। इनमें से 5 खानों में हरा रंग भरिए। हरा क्षेत्र एक पूर्ण का $\frac{5}{14}$ भिन्न है। अब शीट के 3 खानों में लाल रंग भरिए। लाल क्षेत्र एक पूर्ण का $\frac{3}{14}$ भिन्न है। इससे स्पष्ट है कि $\frac{5}{14}+\frac{3}{14}=\frac{8}{14} \;=\frac{4}{7}$



दो या दो से अधिक समान हर वाली भिन्नों का योग = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{समान हर}}$

स्वयं करके देखिए–

1. आपकी माँ सुबह $1\frac{1}{4}$ लीटर दूध और शाम को $\frac{1}{2}$ लीटर दूध लेती है। वह एक दिन में कितना दूध लेती हैं?
2. ब्रजेश अपनी पेन्टिंग को रँग रहा था। उसने सुबह $\frac{1}{4}$ भाग को रँगा, दोपहर को $\frac{1}{4}$ भाग रँगा, तो उसने अभी तक कुल कितने भाग को रँगा?
3. मेरी माँ ने एक नारंगी को चार बराबर भागों में बाँटा। उसने मुझे दो भाग और मेरे भाई को एक भाग दिया। उन्होंने हम दोनों को कुल का कितना भाग दिया?
4. $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़ें।

7.9.2 असमान हर वाली भिन्नों का जोड़

हम जानते हैं कि जिन भिन्नों के हर समान नहीं हैं, उन्हें हम बगैर उनका रूप बदले जोड़ नहीं सकते। हम पहले उन भिन्नों के हर को समान करते हैं अर्थात् समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं। फिर पूर्व की भाँति आगे जोड़ते हैं। जैसे– $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

समान हर करने पर $\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{5}{15}$ और $\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$ (हम समान हर करने के लिए ल. स. लेते हैं। यहाँ 3 और 5 का ल.स. 15 है।)

अतः योग $\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$

इसी प्रकार $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ को जोड़ने के लिए हम समान हर वाली तुल्य भिन्न बनाने की आवश्यकता है।

चूँकि यहाँ हर 4 और 6 का ल.स. 12 है।

अतः $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}+\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$

स्वयं करके देखिए

(a) $\frac{1}{5}$ और $\frac{4}{7}$ को जोड़िए। (b) $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$ को जोड़िए।

7.9.3 समान भिन्नों को घटाना

रेशमा के पास एक रोटी का $\frac{5}{6}$ भाग था। उसने $\frac{2}{6}$ भाग अपने छोटे भाई को दिया। उसके पास रोटी का कितना भाग बचा?

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

इस प्रकार दो समान भिन्नों का अंतर पता करने के लिए–

$$\frac{\text{बड़ा अंश} - \text{छोटा अंश}}{\text{उभयनिष्ठ हर (सम हर)}}$$

स्वयं करके देखिए

1. $\frac{5}{8}$ और $\frac{3}{8}$ का अन्तर ज्ञात कीजिए।
2. मेरी माँ ने एक तरबूज को 12 बराबर भागों में विभाजित किया। मैंने इसके 5 टुकड़े खा लिए। मेरे मित्र ने चार टुकड़े खाए। हमने मिलकर कुल कितने तरबूज खाए? मैंने अपने मित्र से कितना अधिक तरबूज खाया? कितना तरबूज शेष रह गया?
3. इस प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और अपने मित्रों के साथ हल कीजिए।

7.9.4 असमान हरों वाली भिन्नों को घटाना

सोचें $\frac{1}{5}$ में क्या जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ प्राप्त होगा? यहाँ वांछित संख्या प्राप्त करने के लिए $\frac{1}{2}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाना होगा।

चूँकि $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{2}$ असमान भिन्न हैं, इसलिए घटाने के लिए पहले हम इन्हें समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं।

$\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ और $\frac{1}{5}=\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ (चूँकि 2 और 5 का ल.स. 10 है।)

अतः $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

स्वयं करके देखिए

(a) $\frac{5}{7}$ में से $\frac{2}{5}$ को घटाइए। (b) $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{4}$ को घटाइए।

7.9.5 मिश्रित भिन्नों का जोड़ और घटाव

मिश्रित भिन्नों को या तो एक पूर्ण भाग और एक उचित भिन्न के जोड़ के रूप में (जैसे $2\frac{4}{5}$) या एक अनुचित भिन्न (विषम भिन्न) के रूप में (जैसे लिखा जाता है– $\frac{14}{5}$)।

दो विधियों से संयुक्त भिन्नों को जोड़ा (या घटाया) जाता है–

(1) इसमें पूर्ण भागों और भिन्नीय भागों पर संक्रियाएँ अलग-अलग करते हैं।

(2) इनमें भिन्नों को अनुचित भिन्नों में बदलकर सीधे जोड़ा (या घटाया) जाता है।

उदाहरण–1 : $2\frac{3}{4}$ और $5\frac{4}{5}$ को जोड़िए।

हल : $2\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}=2+\frac{3}{4}+5+\frac{4}{5}=7+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$

अब $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15+16}{20}=\frac{31}{20}$ (चूँकि 4 और 5 का ल.स. = 20)

$=1\frac{11}{20}=1+\frac{11}{20}$

इस प्रकार कुल जोड़ $7+1+\frac{11}{20}=8\frac{11}{20}$

अतः $2\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}=8\frac{11}{20}$

उदाहरण–2 : $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}=(4-2)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)$ (यहाँ $4>2$)

$=2+\frac{1}{5}=2\frac{1}{5}$

उदाहरण–3 : $8\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $8>2$ परन्तु $\frac{1}{4}<\frac{5}{6}$। इस प्रश्न को अनुचित भिन्न में बदलकर हल कर सकते हैं।

$8\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$ तथा $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

अब $\frac{33}{4}-\frac{17}{6}=\frac{33\times3}{4\times3}-\frac{17\times2}{6\times2}=\frac{99}{12}-\frac{34}{12}$

$=\frac{99-34}{12}=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$

प्रश्नावली – 7.5

1. हल कीजिए–

(a) $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}$ (b) $1-\frac{2}{3}\left(1=\frac{3}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{4}+\frac{0}{4}$

(d) $3-\frac{12}{5}$ (e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ (f) $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$

(g) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ (h) $8\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$ (i) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

(j) $1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}$ (k) $4\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}$ (l) $\frac{16}{5}-\frac{7}{5}$

2. लीला ने $\frac{3}{8}$ मी रबर का फीता खरीदा और सीमा ने $\frac{4}{5}$ मी रबर का फीता खरीदा। दोनों ने कुल कितना फीता खरीदा?

3. रिक्त स्थान भरिए–

(a) $\frac{7}{10}-\square=\frac{3}{10}$ (b) $\square-\frac{3}{21}=\frac{5}{21}$

(c) $\square-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$ (d) $\square+\frac{5}{27}=\frac{12}{27}$

(e) $\square-\frac{5}{8}=\frac{1}{4}$ (f) $\frac{1}{2}-\square=\frac{1}{6}$

4. तालिका को पूरा कीजिए–

(a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

5. $\frac{7}{8}$ मीटर तार के दो टुकड़े हो जाते हैं। इसमें से एक टुकड़ा $\frac{2}{4}$ मीटर है। दूसरे टुकड़े की लम्बाई क्या है?

6. रश्मि का घर उसके विद्यालय से $\frac{9}{10}$ किमी दूर है। वह कुछ दूर पैदल चलती है और फिर $\frac{1}{2}$ किमी की दूरी बस द्वारा तय करके स्कूल पहुँचती है। वह कितनी दूरी पैदल चलती है?

7. करीना स्कूल के मैदान का चक्कर $3\frac{1}{5}$ मिनट में लगाती है और कमलेश इसी मैदान का चक्कर लगाने में $\frac{12}{5}$ मिनट का समय लेता है। कौन कम समय लेता है और कितना?

हमने सीखा

1. भिन्न एक संख्या है, जिसमें पूर्ण का भाग भी सम्मिलित है। इन संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी।
2. भिन्न $\frac{7}{9}$ में 7 अंश तथा 9 भिन्न का हर कहलाता है। भिन्न के सभी भाग बराबर होते हैं।
3. प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा पर एक निश्चित बिन्दु होता है। अतः भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
4. जिस भिन्न के अंश और हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, वह भिन्न का सरलतम या न्यूनतम रूप होता है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती हैं यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हैं। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करते हैं।
6. उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है, जबकि विषम भिन्न में अंश हमेशा हर से बड़ा होता है।
7. समान हर बनाने के लिए हरों का ल.स. निकालना सुविधाजनक होता है।

अध्याय-8 दशमलव

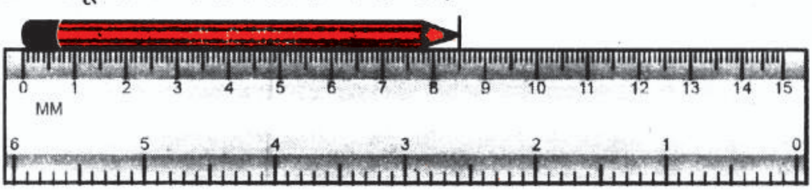
8.1 भूमिका

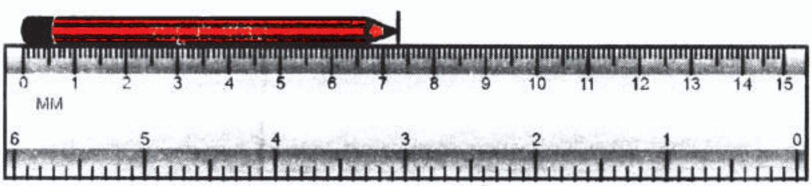
उमा और रमा बाजार जा रहे थे। उन्हें अपना गणित का गृहकार्य करने के लिए रबर और पेन्सिल खरीदने थे। उमा ने कहा, "मेरे पास 3 रुपये 50 पैसे हैं।" रमा ने कहा "मेरे पास 4 रुपये 75 पैसे हैं।" वे दशमलव का उपयोग करना जानते थे। इसलिए उमा ने कहा, मेरे पास 3.50 रुपये हैं और रमा ने कहा, मेरे पास 4.75 रुपये हैं। क्या उन दोनों ने सही लिखा था? इसे इस प्रकार पढ़ा जाता है– तीन दशमलव पाँच शून्य रुपये। इसी प्रकार आप रमा के रुपयों को पढ़िए।

हम जानते हैं कि दशमलव संख्या वे संख्या हैं, जिन्हें दशमलव बिन्दु के साथ लिखा जाता है। इस अध्याय में, हम दशमलव के विषय में और अधिक सीखेंगे।

8.2 इकाई एवं दशांश

रवि तथा राजू ने अपनी-अपनी पेंसिलों की लम्बाई मापी। रवि की पेंसिल 8 सेमी 5 मिमी लम्बी थी और राजू की 7 सेमी 3 मिमी लम्बी थी।





क्या आप इन लम्बाइयों को सेमी के साथ दशमलव रूप में लिख सकते हैं?

हम जानते हैं कि 10 मिमी = 1 सेमी। अतः 1 मिमी = $\frac{1}{10}$ सेमी

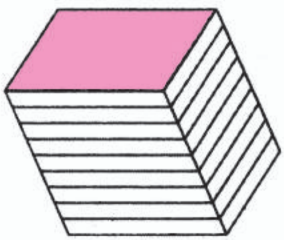
अब रवि के पेंसिल की लम्बाई = 8 सेमी 5 मिमी

$= 8\frac{5}{10}$ सेमी अर्थात् 8 सेमी और 1 सेमी का पाँच दशांश भाग

राजू की पेंसिल की लम्बाई = 7 सेमी 3 मिमी

$= 7\frac{3}{10}$ सेमी अर्थात् 7 सेमी और 1 सेमी का तीन दशांश भाग

हम जानते हैं कि यदि इकाइयों को खंडों द्वारा दर्शाएँ तो एक इकाई एक खंड को, दो इकाई दो खंड को और इसी प्रकार आगे भी।



एक खंड (इकाई)

इकाई का एक भाग

एक खंड को यदि दस बराबर भागों में बाँटें तो प्रत्येक भाग एक इकाई (खंड) का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश अर्थात् दसवाँ भाग) है। दो भाग, दो दशांश $\frac{2}{10}$ को दर्शाते हैं और इसी तरह आगे $\frac{3}{10}, \frac{4}{10} \ldots\ldots \frac{9}{10}$ दशांश लिखेंगे। यदि पूरे दस भाग को लेंगे तो क्या होगा? तब दस (10) का दशांश अर्थात् $10 \times \frac{1}{10} = 1$ (एक इकाई) हो जायेगा।

इसी प्रकार दो खंडों (इकाई) और तीन भाग (दशांश) इस प्रकार लिखा जाएगा–

इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
2	3

1 इकाई + 1 इकाई + 1 भाग + 1 भाग + 1 भाग

यानी 2 इकाई + एक इकाई का 3 भाग

अर्थात् 2 इकाई और $\frac{3}{10}$ (दशांश) = $2\frac{3}{10}$

अर्थात् इसे $2\frac{3}{10}$ लिखेंगे। हम $2\frac{3}{10}$ को 2.3 लिख सकते हैं। इससे पता चलता है कि 2 इकाइयाँ और 3 दसवें भाग हैं। इसे **दो दशमलव तीन** पढ़ा जाएगा। इस बिन्दु (•) को **दशमलव बिन्दु** कहते हैं। दशमलव बिन्दु का इस्तेमाल करके संख्या लिखने के तरीके को **दशमलव प्रणाली** कहते हैं।

अगर इकाई के स्थान में शून्य और दसवें भाग के स्तंभ में 5 लिख दें, तो दशमलव पद्धति में यह संख्या 0.5 (शून्य दशमलव पाँच) होगी।

अब संख्या 2.3 को भिन्न के रूप में कैसे लिखेंगे? $2\frac{3}{10}$ या $\frac{23}{10}$?

यहाँ $2\frac{3}{10} = 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{10}$

स्वयं करके देखिए

1. आप निम्न को दशमलव रूप में लिखिए–

दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
2	3	5
3	8	1
7	3	4
5	4	6
0	0	8

2. संख्या 41.6, 52.7, 48.3, 47.9, 73.3 में इकाई, दहाई और दशांश का मान ज्ञात कीजिए।

8.3 संख्या रेखा पर निरूपण

आइए 0.6 को संख्या रेखा पर निरूपित करें। हम जानते हैं कि 0.6 शून्य से बड़ा है लेकिन एक से कम। इसमें 6 दशांश हैं। अब एक संख्या रेखा खींचें और संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच की लंबाई को 10 बराबर भागों में विभाजित कीजिए और उनमें से छः भाग लीजिए। जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

अब आप 0 और 1 के बीच पाँच संख्याएँ लिखिए और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।

ऊपर 1.2 को संख्या रेखा पर दर्शाया गया है। अवलोकन कीज़िए कि 1.2 में कितनी इकाई और कितने दशांश हैं तथा यह संख्या रेखा पर कहाँ स्थित है?

अब 2.3 को संख्या रेखा पर दर्शाएँ।

उदाहरण–1 : **निम्न संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए–**

(a) 30.6 (b) 7.2

हल : **स्थानीय मान सारणी**

संख्या	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
30.6	3	0	6
7.2	0	7	2

उदाहरण 2 : निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) तीन इकाइयाँ और 6 दशांश

(b) बीस इकाइयाँ और 2 दशांश

हल : (a) तीन इकाइयाँ और 6 दशांश $= 3 + \frac{6}{10} = 3.6$

(b) बीस इकाइयाँ और 2 दशांश $= 20 + \frac{2}{10} = 20.2$

उदाहरण 3 : दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $10 + 5 + \frac{2}{10}$ (b) $300 + 1 + \frac{8}{10}$

हल : (a) यहाँ 1 दहाई, 5 इकाइयाँ और दो दशांश हैं। अतः दशमलव रूप 15.2 होगा।

(b) इसमें तीन सैकड़ा, शून्य दहाई, एक इकाई और 8 दशांश है। अतः दशमलव रूप 301.8 होगा।

8.4 भिन्न, दशमलव रूप में

हम देख चुके हैं कि एक भिन्न जिसका हर 10 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में बदल सकते हैं। जैसे $\frac{13}{5}$ को दशमलव रूप में बदलने के लिए हर को 10 करेंगे।

अर्थात् $\frac{13}{5} = \frac{13 \times 2}{5 \times 2} = \frac{26}{10} = \frac{20}{10} + \frac{6}{10} = 2 + \frac{6}{10} = 2.6$

अतः $\frac{13}{5} = 2.6$ दशमलव रूप में होगा।

8.5 दशमलव, भिन्न रूप में

हमने देखा कि 2.6 का भिन्न रूप $\frac{13}{5}$ है। इसी प्रकार 1.3 का भिन्न रूप $= 1 + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$ होगा।

स्वयं करके देखिए

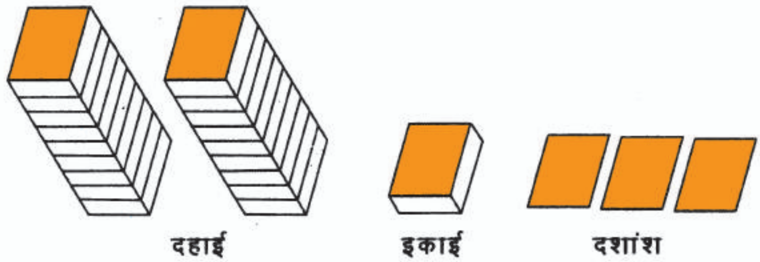
1. $\frac{9}{5}, \frac{8}{2}, \frac{4}{5}$ को दशमलव रूप में लिखिए।

2. 11.6, 9.5, 0.2 को भिन्न रूप में लिखिए।

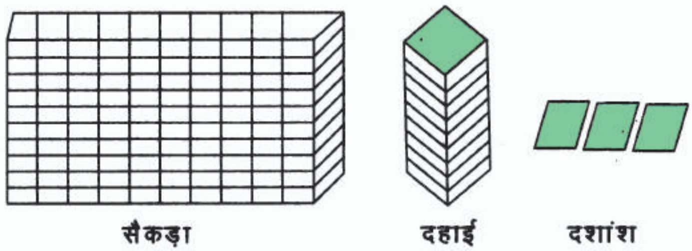
प्रश्नावली – 8.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए–

(i)



(ii)



	सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
(i)				
(ii)				

2. निम्न दशमलव संख्याओं का स्थानीय मान सारणी में लिखिए–

(a) 0.4 (b) 17.3 (c) 10.5 (d) 206.8

3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) 5 दहाई 7 दशांश (b) 8 दशांश

(c) बारह दशमलव तीन (d) दो सौ और 2 इकाई

(e) पाँच सौ सात दशमलव आठ

4. निम्न को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए–

(a) $200+60+5+\frac{7}{10}$ (b) $70+8+\frac{8}{10}$ (c) $\frac{88}{10}$

(d) $4\frac{2}{10}$ (e) $\frac{3}{2}$ (f) $\frac{12}{5}$

(g) $3\frac{3}{5}$ (h) $4\frac{1}{2}$

5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर न्यूनतम (सरलतम) रूप में बदलिए–

(a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8

(e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4

6. सेमी का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए–

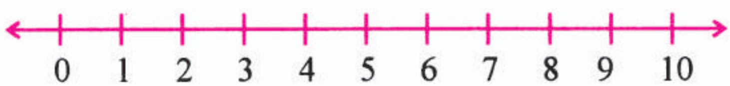
(a) 3 मिमी (b) 40 मिमी (c) 117 मिमी

(d) 3 सेमी 2 मिमी (e) 11 सेमी 53 मिमी (f) 83 मिमी

7. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाइए–

(a) 0.4 (b) 2.8 (c) 1.2 (d) 2.6

8. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित है और इनमें से कौन-सी पूर्ण संख्या दी हुई दशमलव संख्या के अधिक निकट है?



(a) 0.7 (b) 2.5 (c) 6.3

(d) 5.0 (e) 1.0 (f) 6.1

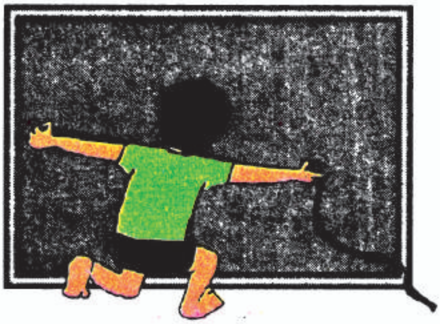
9. दी हुई संख्या रेखा पर स्थित A, B, C, D, E बिन्दुओं के लिए दशमलव संख्या लिखें और आरोही क्रम में सजाएँ।

10. (a) रघु की कॉपी की लम्बाई 8 सेमी 6 मिमी है। सेमी में इसकी लम्बाई क्या होगी?

(b) एक छोटे पौधे की लम्बाई 75 मिमी है। इसकी लम्बाई सेमी में व्यक्त कीजिए।

8.6 शतांश

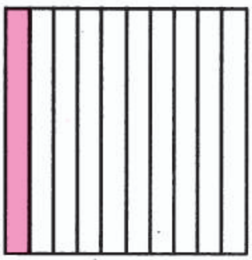
श्याम अपने कक्षा में श्यामपट्ट की लम्बाई माप रहा था। उसने मापने पर श्यामपट्ट की लम्बाई 2 मी और 25 सेमी पाई। वह इस लम्बाई को मीटर में लिखना चाहता था। क्या आप उसकी मदद कर सकते हैं?



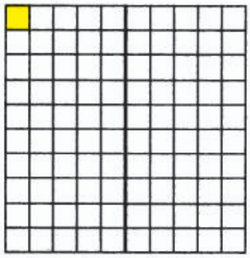
हम जानते हैं कि एक सेमी, एक मीटर का सौवाँ भाग है जिसे शतांश भी कहते हैं।

अर्थात् 1 सेमी = $\frac{1}{100}$ मी

चित्र–1 में एक वर्ग को दस बराबर भागों में बाँटा गया है। छायांकित आयत इस वर्ग का $\frac{1}{10}$ या एक दशांश या 0.1 हैं। चित्र–2 में एक वर्ग को 100 छोटे-छोटे वर्ग में बाँटा गया है। इसमें प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का 100वाँ हिस्सा या $\frac{1}{100}$ या एक शतांश है।



चित्र–1



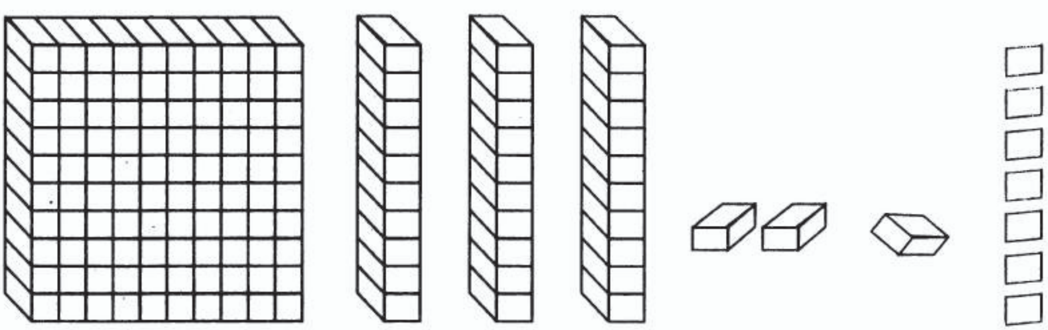
चित्र–2

दशमलव रूप में हम $\frac{1}{100} = 0.01$ लिखते हैं और इसे "शून्य दशमलव शून्य एक" पढ़ते हैं।

अब एक बड़े वर्ग के क्रमशः 7 वर्ग, 16 वर्ग, 40 वर्ग, 98 वर्ग छायांकित करें, तो वह पूरे वर्ग का कौन-सा भाग होगा?

छायांकित भाग	भिन्न संख्या	दशमलव संख्या
7 वर्ग	$\frac{7}{100}$	0.07
16 वर्ग	$\frac{16}{100}$	0.16
40 वर्ग	......	......
98 वर्ग	......	......

आगे खंडों के आधार पर स्थानीय मान सारणी बनाई गई है। आप सारणी के आधार पर संख्या को दशमलव रूप में लिख सकते हैं।



सौ का एक खंड   दस के तीन खंड   इकाई के दो खंड   दशांश का 1 खंड   शतांश के 7 खंड

स्थानीय मान सारणी

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश
(100)	(10)	(1)	$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{100}\right)$
1	3	2	1	7

अतः दशमलव में संख्या होगी $100+30+2+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

$=132.17$

इसे "एक सौ बत्तीस दशमलव एक सात" पढ़ते हैं। सारणी को ध्यान से देखने पर हम पाते हैं कि जैसे-जैसे बाईं से दाईं ओर जाते हैं, हर चरण पर गुणनखंड पिछले गुणन का $\frac{1}{10}$ हो जाता है।

अतः स्वाभाविक रूप से हम स्थानीय मान को शतांश से हजारवें (सौवें का $\frac{1}{10}$) हिस्से से छोटे हिस्सों तक भी बढ़ा सकते हैं।

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवें
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु हमेशा इकाई और दसवें स्थानों के बीच लगाया जाता है।

उदाहरण–1 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{8}{1000}$

हल : (a) हमें $\frac{3}{2}$ के तुल्य ऐसी भिन्न संख्या प्राप्त करनी होगी, जिसका हर 10 हो

$$\frac{3}{2}=\frac{3\times5}{2\times5}=\frac{15}{10}=\frac{10}{10}+\frac{5}{10}=1.5$$

(b) यहाँ $\frac{3}{4}$ के तुल्य एक ऐसी संख्या निकालनी है जिसका हर 10 हो। लेकिन 4 को किसी भी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर हमें 10 प्राप्त नहीं होता है। अतः हमें हर को 100 में बदलना होगा।

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=0.75$$

(c) $$\frac{8}{1000}=0.008$$

उदाहरण–2 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $100+40+6+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$ (b) $58+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

हल : (a) $100+40+6+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$

$=146+3\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}$

$=146.36$

(b) $58+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

$=58+\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{100}$

$=58.17$

उदाहरण–3 : भिन्न में बदलकर सरलतम रूप में लिखिए–

(a) 0.05 (b) 2.75

हल : (a) $0.05=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$

(b) $2.75=2+\frac{75}{100}=2+\frac{75\div25}{100\div25}$

$=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$

उदाहरण–4 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) दो सौ चार और छः शतांश (b) सात और पन्द्रह हजारवें भाग

(c) तेरह दशमलव सात पाँच तीन

हल : (a) दो सौ चार और छः शतांश

$$= 204 + \frac{6}{100}$$

$$= 204 + 0 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100} = 204.06$$

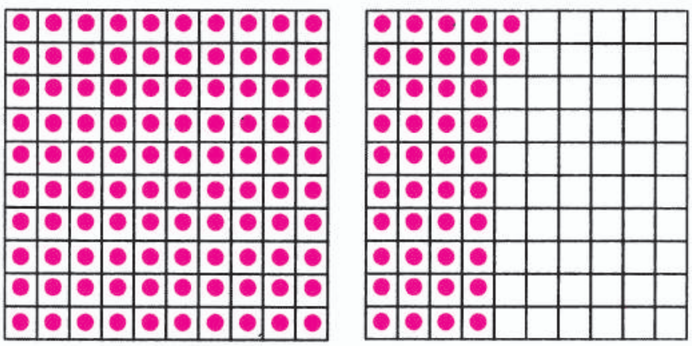
(b) सात और पन्द्रह हजारवें भाग

$$= 7 + \frac{15}{1000} = 7 + \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{5}{1000} = 7.015$$

(c) तेरह दशमलव सात पाँच तीन

$$= 13 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} = 13.753$$

उदाहरण–5 : तालिका को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए–



इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$

हल :

इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$
1	4	2

अतः संख्या 1.42 है।

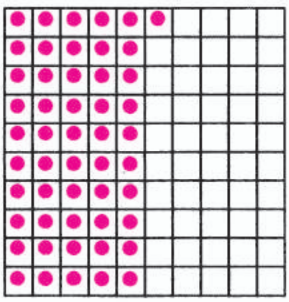
प्रश्नावली – 8.2

1. निम्न दशमलव संख्याओं को शब्दों में लिखिए –

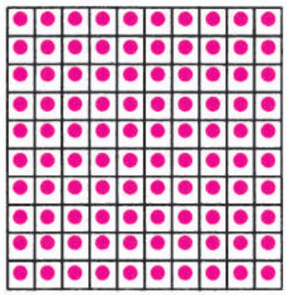
(a) 0.05 (b) 0.75 (c) 5.10

(d) 22.56 (e) 0.032 (f) 6.008

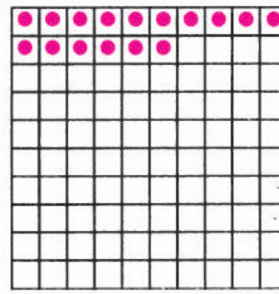
2. इन बक्सों की सहायता से सारणी को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए–



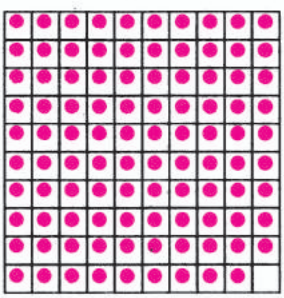
(a)



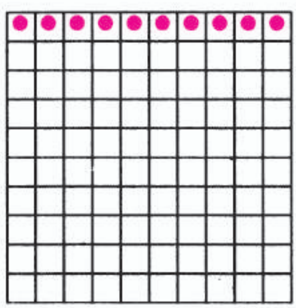
(b)



(c)



(d)



(e)

	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	अंक
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				

3. स्थानीय मान सारणी को देखकर दशमलव रूप में लिखिए–

स्थानीय मान	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवाँ
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
(a)	2	1	1	9	0	2
(b)	0	0	2	3	4	0
(c)	0	4	0	0	1	5
(d)	0	1	2	3	4	2
(e)	4	7	2	9	6	0

4. निम्न दशमलवों को स्थानीय मान सारणी बनाकर लिखिए–

(a) 0.18 (b) 3.07 (c) 26.70

(d) 125.36 (e) 186.186

5. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $10+9+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ (b) $11+\frac{5}{100}$

(c) $\frac{6}{10}+\frac{7}{100}+\frac{3}{1000}$ (d) $25+\frac{3}{10}+\frac{5}{1000}$

(e) $700+50+6+\frac{8}{100}$

6. जिस प्रकार 0.16 दो दशमलव संख्याओं 0.1 और 0.2 के बीच स्थित है, उसी प्रकार निम्न संख्याएँ किन दो दशमलव संख्याओं के बीच हैं?

(a) 0.05 (b) 0.15 (c) 0.19

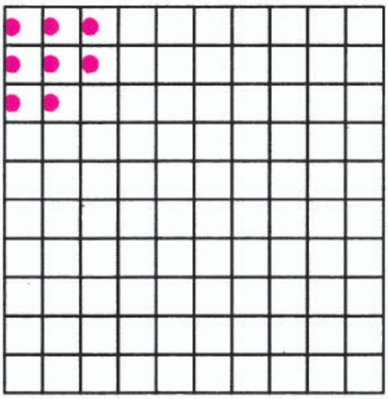
(d) 0.33 (e) 0.92 (f) 0.67

7. भिन्न संख्या में बदलिए–

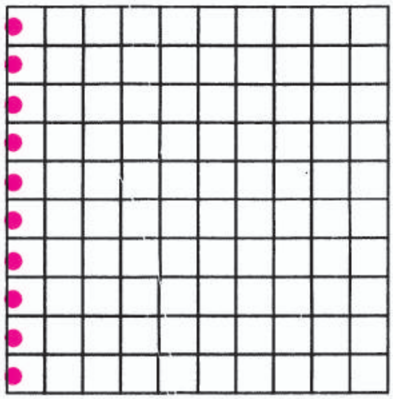
(a) 0.50 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.125

8.7 दशमलव संख्या की तुलना

हम स्थानीय मान सारणी में देख चुके हैं कि जैसे-जैसे बाईं से दाईं ओर जाते हैं तो प्रत्येक चरण पिछले का $\frac{1}{10}$ हो जाता है। अर्थात् इकाई स्थान के दाईं ओर दशमलव के बाद का पहला अंक पूर्ण का दसवाँ हिस्सा होता है तथा दूसरा अंक पूर्ण का सौवाँ हिस्सा। नीचे के चित्र को देखें –



$\frac{8}{100} = 0.08$



$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.1$

इस प्रकार $0.1 > 0.08$

आइए अब संख्या 105.66 और संख्या 105.63 को लें। यहाँ हम सबसे पहले पूर्ण भाग को देखते हैं और पाते हैं कि दोनों संख्याओं के पूर्ण भाग समान हैं। अब इसके दशांश भाग की तुलना करते हैं, ये भी समान हैं। अब इसके शतांश भाग की तुलना करते हैं तो पाते हैं कि 105.66 में 6 शतांश है जबकि 105.63 में 3 शतांश है। अर्थात् $6>3$

अत: $105.66 > 105.63$

उदाहरण 1 : कौन सी संख्या बड़ी है?

(a) 1 या 0.99 (b) 2.09 या 2.093

हल : (a) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$

तथा $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

स्पष्ट है $1 > 0.99$

(b) $2.09 = 2 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$2.093 = 2 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

स्पष्ट है दोनों संख्याओं के शतांश स्थान तक के सभी अंक समान है। परन्तु 2.093 के हजारवें में अंक 3 है जो 2.09 के हजारवें में अंक 0 से बड़ा है।

अतः 2.093 > 2.09

प्रश्नावली – 8.3

1. **कौन-सी संख्या बड़ी है? कारण भी लिखिए–**

(a)	0.2 या 0.3	(b)	0.07 या 0.05
(c)	2 या 0.9	(d)	0.4 या 0.04
(e)	1.32 या 1.3	(f)	0.099 या 0.199
(g)	1.6 या 1.60	(h)	5.54 या 5.504

2. पाँच और दशमलव संख्या के युग्म लिखकर उनमें से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।

8.8 दशमलव का प्रयोग

8.8.1 रुपया-पैसा

हम जानते हैं कि 100 पैसा = 1 रुपया

अतः 1 पैसा = $\frac{1}{100}$ रुपया = 0.01 रुपया

इसी प्रकार 8 पैसे $= \frac{8}{100} =$ 0.08 रुपया

तथा 65 पैसे $= \frac{65}{100} =$ 0.65 रुपया

स्वयं प्रयास कीजिए

1. 105 पैसे कितने रूपये होंगे?
2. 2 रुपये 5 पैसे और 2 रुपये 50 पैसों को दशमलव में लिखिए।
3. 15 रुपये 25 पैसे और 75 रुपये 75 पैसे को दशमलव में लिखिए।

8.8.2 लम्बाई

रीया ने अपनी मेज की ऊपरी सतह की लम्बाई मापने पर 138 सेमी पायी। इसकी लम्बाई मीटर में कितनी होगी। चित्र द्वारा इसे समझें।

हम जानते हैं 1 सेमी $= \frac{1}{100}$ मी

= 0.01 मी

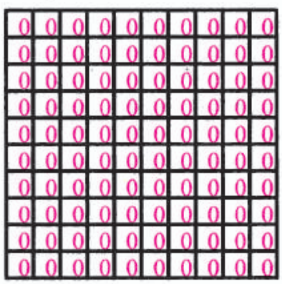
अतः 38 सेमी $= \frac{38}{100}$ मी

= 0.38 मी

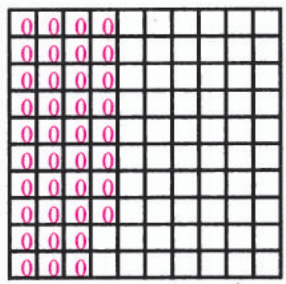
138 सेमी = 100 सेमी + 38 सेमी

$= 1$ मी $+ \frac{38}{100}$ मी

= 1 मी + .38 मी



100 सेमी = 1 मी



38 सेमी $= \frac{38}{100}$ मी

स्वयं करके देखिए

1. 2 मी और 28 सेमी को दशमलव का प्रयोग कर मीटर में लिखिए।
2. 7 सेमी 6 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिखें।
3. 62 मी को दशमलव का प्रयोग करके किमी में लिखिए। (1 किमी = 1000 मी)

8.8.3 वजन या भार

हम जानते हैं कि 1000 ग्राम = 1 किग्रा

अतः 1 ग्राम = $\frac{1}{1000}$ किग्रा

= 0.001 किग्रा

अब, 1352 ग्राम को किग्रा में कैसे बदलेंगे?

1352 ग्राम = 1000 ग्राम + 352 ग्राम

= $\frac{1000}{1000}$ किग्रा + $\frac{352}{1000}$ किग्रा

= 1.352 किग्रा

स्वयं करके देखिए

1. 2500 ग्राम को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए।
2. 9 ग्राम को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए।

प्रश्नावली – 8.4

1. दशमलव का प्रयोग कर रुपयों में बदलिए :

(a) 5 पैसे (b) 50 पैसे (c) 725 पैसे

(d) 3 रुपये 30 पैसे (e) 50 रुपये 45 पैसे

2. दशमलव का प्रयोग कर मीटर में व्यक्त कीजिए :

(a) 25 सेमी (b) 3 सेमी (c) 217 सेमी

(d) 1 मी 35 सेमी (e) 829 सेमी

3. दशमलव का प्रयोग कर सेमी में बदलिए :

(a) 7 मिमी (b) 60 मिमी (c) 154 मिमी

(d) 9 सेमी 5 मिमी (e) 99 मिमी

4. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए :

(a) 6 मी (b) 66 मी

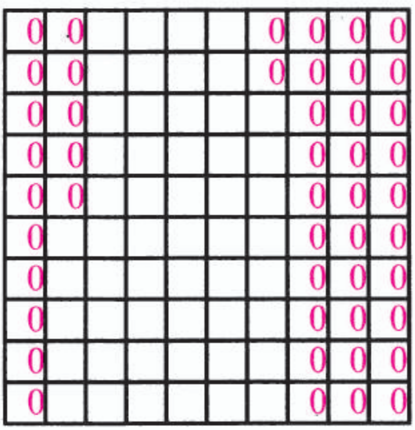
(c) 2222 मी (d) 75 किमी 7 मी

5. दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए :

(a) 2 ग्राम (b) 20 ग्राम (c) 200 ग्राम

(d) 2000 ग्राम (e) 4 किग्रा 8 ग्रा

8.9 दशमलव संख्याओं का जोड़



0.15 और 0.32 को कैसे जोड़ेंगे? एक वर्ग लेकर उसे 100 समान भागों में बाँटिए।

इस वर्ग में 0.15 को दर्शाने के लिए 1 दशांश और 5 शतांश को रंगते हैं। फिर इसी वर्ग में 0.32 को दिखाने के लिए 3 दशांश और 2 शतांश को रंगते हैं। अवलोकन से स्पष्ट है कि वर्ग में कुल (जोड़) 4 दशांश और 7 शतांश रंगे भाग हैं।

अतः 0.15 + 0.32 = 0.47

इस प्रकार जैसे हम पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं, ऐसे ही दशमलव संख्याओं को भी जोड़ सकते हैं।

क्या अब आप 0.78 और 0.64 को जोड़ सकते हैं?

	इकाई	दशांश	शतांश
	0	7	8
+	0	6	4
=	1	4	2

अतः 0.78 + 0.64 = 1.42

स्वयं करके देखिए

(a)	$0.47 + 0.32$	(b)	$0.78 + 0.96$
(c)	$0.5 + 0.05$	(d)	$1.34 + 2.30$
(e)	$3.45 + 4.55$	(f)	$9.50 + 2.50$

उदाहरण–1 :लता ने 12.50 रुपये का एक किताब खरीदा और 4.75 रुपये की एक कॉपी खरीदी। उसने कुल कितने रुपये खर्च किये?

हल : किताब पर खर्च = 12.50 रुपये

कॉपी पर खर्च = 4.75 रुपये

कुल खर्च = 12.50 रुपये

\+ 4.75 रुपये

= 17.25 रुपये

उदाहरण–2 :शर्मिला पटना घुमने गई तो उसने 15 किमी 32 मी की दूरी ट्रेकर से, 3 किमी 160 मी टेम्पों से और शेष 1 किमी 15 मी पैदल तय की। उसने कुल कितनी दूरी तय की?

हल : ट्रेकर द्वारा तय की गई दूरी = 15 किमी 32 मी

= 15.032 किमी

टेम्पो द्वारा तय की गई दूरी = 3 किमी 160 मी

= 3.160 किमी

पैदल तय की गई दूरी = 1 किमी 15 मी

= 1.015 किमी

$$\begin{array}{r} 15.032 \text{ किमी} \\ + 3.160 \text{ किमी} \\ + 1.015 \text{ किमी} \\ \hline 19.207 \text{ किमी} \\ \hline \end{array}$$

कुल तय की गई दूरी है =

उदाहरण–3 : प्रशांत ने सरस्वती पूजा के लिए 4 किग्रा 9 ग्रा. लड्डू, 2 किग्रा 60 ग्राम जलेबी और 5 किग्रा 300 ग्राम फल खरीदे। खरीदे गए कुल सामग्री का वजन कितना था?

हल : लड्डू का वजन = 4 किग्रा 9 ग्रा

= 4.009 किग्रा

जलेबी का वजन = 2 किग्रा 60 ग्रा = 2.060 किग्रा

फलों का वजन = 5 किग्रा 300 ग्रा = 5.300 किग्रा

अतः सामग्रियों का कुल वजन है :

$$\begin{array}{r} 4.009 \text{ किग्रा} \\ + 2.060 \text{ किग्रा} \\ + 5.300 \text{ किग्रा} \\ \hline 11.369 \text{ किग्रा} \\ \hline \end{array}$$

प्रश्नावली – 8.5

1. निम्न में से प्रत्येक का जोड़ ज्ञात करें :

(i) 0.35 + 9.425 + 27

(ii) 0.003 + 6.2 + 15.02

(iii) 15 + 0.345 + 11.2

(iv) 26.025 + 0.44 + 0.004

2. राधा की माँ ने उसे 15.75 रुपये दिये और पिता ने 16.25 रुपये दिये। उसके माता-पिता द्वारा दिया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।

3. उमा ने परदे के लिए 15 मी 25 सेमी कपड़ा खरीदा और रमा ने 16 मी 85 सेमी कपड़ा खरीदा। दोनों के द्वारा खरीदें गये कुल कपड़े की लम्बाई ज्ञात करें।

4. मोहन ने 45.25 रुपये खर्च किये और शेष 30.85 रुपये बचे, तो उसके पास कुल कितने रुपये थे।

5. सकीला सुबह में 2 किमी 25 मी चलती है और शाम में 1 किमी 9 मी चलती है। वह कुल कितनी दूरी चलती है।

6. रमेश के घर और उसके मित्र के घर की दूरी पता करें यदि वह 12 किमी 168 मी की दूरी बस से, 5 किमी 7 मी की दूरी कार से और 400 मी की दूरी पैदल तय करता हो।

7. एक विद्यालय के मध्याह्न भोजन में 10 किग्रा 400 ग्रा चावल, 2 किग्रा 200 ग्रा दाल और 5 किग्रा 750 ग्रा आलू का उपयोग हुआ, तो उपयोग की गई कुल सामग्रियों का वजन ज्ञात कीजिए।

8.10 दशमलव संख्याओं का घटाव

घटाने में भी (जोड़ की तरह) शतांश में से शतांश स्थान का अंक, दशांश में से दशांश स्थान का अंक और इकाई में से इकाई अंक और आगे इसी प्रकार घटाते हैं।

निम्न सारणी को देखें

	इकाई	दशांश	शतांश
	2	6	9
−	1	4	3
	1	2	6

स्पष्ट है $2.69 - 1.43 = 1.26$

स्वयं करके देखिए

1. 4.32 में से 1.20 घटाएँ
2. 6.46 में से 3.85 घटाएँ
3. 1.39 में से 0.95 घटाएँ
4. 5.68 में से 1.25 घटाएँ

उदाहरण–1 अन्नु के पास 9.35 रुपये हैं। वह 2.30 रुपये की टॉफी खरीदता है। अब उसके पास कितने रुपये शेष बचे?

हल : कुल धन = 9.35 रुपये

टॉफी पर किया गया खर्च = 2.30 रुपये

शेष धन = 9.35 रुपये

− 2.30 रुपये

= 7.05 रुपये

प्रश्नावली – 8.6

1. बड़ी दशमलव भिन्न में से छोटी दशमलव भिन्न को घटाइए–

(a) 4.21 एवं 2.21 (b) 1.23 एवं 2.12

(c) 2.04 एवं 2.01 (d) 1.2 एवं 1.002

(e) 2.45 एवं 2.456 (f) 2 एवं 1.5

2. हल करें–

(a) 1.23 – 0.23 (b) 2.45 – 2.45

(c) 3.40 – 3.04 (d) 2.004 – 1.999

(e) 4 – 1.6 (f) 2.3 – 2

3. शालिनी की उम्र 12.5 वर्ष है, अकबर की उम्र 10.25 वर्ष है, दोनों में से कौन छोटी उम्र का है और कितना?

4. पलक ने भाषा में 62.23 प्रतिशत एवं मौली ने उसी विषय में 60.23 प्रतिशत अंक प्राप्त किये। पलक ने मौली से कुल कितने प्रतिशत अधिक अंक प्राप्त किये।

5. अफशाना 50 रु. लेकर बाजार जाती है। वह 12.50 रु. की पुस्तक, 8.50 रु. की कॉपी एवं 2.25 रु. की लीड खरीदती है। अब उसके पास शेष कितना रुपया बचा रहता है?

'पर्यावरण एवं वन विभाग, बिहार सरकार'

बिहार पृथ्वी दिवस (9 अगस्त) के अवसर पर 11 सूत्री संकल्प।

मैं संकल्प लेता / लेती हूँ कि

1. पृथ्वी के संरक्षण तथा पर्यावरण संतुलन को बनाये रखने के लिए सदैव कार्य करूँगा।
2. वर्ष में कम से कम एक पौधा अवश्य लगाऊँगा, इसे बचाऊँगा तथा पेड़–पौधों के संरक्षण में सहयोग करूँगा।
3. तालाब, नदी एवं पोखर आदि को प्रदूषित नहीं करूँगा।
4. जल का दुरुपयोग नहीं होने दूँगा एवं इस्तेमाल के तुरंत बाद सावधानीपूर्वक नल को बंद करूँगा।
5. बिजली का अनावश्यक उपयोग नहीं करूँगा तथा आवश्यकता नहीं रहने पर बिजली के बल्ब, पंखा एवं अन्य उपकरणों को बंद रखूँगा।
6. कूड़ा–कचरा को निर्धारित स्थानों पर रखे डस्टबिन में डालूँगा तथा अन्य लोगों से भी इसके लिए अनुरोध करूँगा।
7. अपने घर तथा स्कूल को साफ रखूँगा।
8. प्लास्टिक/पॉलीथीन का उपयोग बंद कर इसके स्थान पर कपड़े या कागज के बने झोलों/थैलों का उपयोग करूँगा।
9. पशु–पक्षियों के प्रति दया का भाव रखूँगा।
10. नजदीक के कार्यों के लिए साइकिल का उपयोग करूँगा अथवा पैदल जाऊँगा।
11. आवश्यकतानुसार कागज का उपयोग करूँगा तथा इसका दुरुपयोग नहीं होने दूँगा।

अध्याय-9 आँकड़ों का प्रयोग

9.1 भूमिका

आपने अपने शिक्षक को कक्षा में रजिस्टर पर प्रतिदिन उपस्थिति बनाते अवश्य ही देखा होगा। क्या आपने कभी सोचा कि इससे हम क्या-क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? हम एक उदाहरण लेकर विचार करें। किसी सप्ताह में, एक कक्षा के 50 विद्यार्थियों की उपस्थिति नीचे सारणी में दर्शाई जा रही है–

दिन	उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	45
मंगलवार	50
बुधवार	40
बृहस्पतिवार	29
शुक्रवार	35
शनिवार	25

अब आप सप्ताह में विद्यार्थियों की संख्या के आधार पर बताएँ कि (1) किस दिन सबसे कम उपस्थिति रही? (2) सबसे अधिक उपस्थिति किस दिन रही? (3) आप यह भी ज्ञात कर सकते हैं कि विद्यार्थियों की कक्षा में उपस्थिति 30 से अधिक कितने दिन रही।

अतः आप विद्यार्थियों की उपस्थिति से सम्बन्धित कई महत्त्वपूर्ण बातों का पता लगा सकते हैं।

इसी प्रकार अपने दैनिक जीवन में निर्णय लेते समय हमें कुछ-न-कुछ पुराने अनुभवों की आवश्यकता होती है। आपने इस सब से सम्बन्धित अनेक प्रकार की सारणियाँ (Tables) भी देखी होंगी। ये सारणियाँ आँकड़े (Data) एकत्रित करने और संक्षेप में उपलब्ध कराने का साधन हैं।

9.2 आँकड़ों को प्रदर्शित करना

कक्षा का आज पहला दिन था, सभी बच्चे उत्साहित थे, नई किताबें, नई कक्षा सभी बच्चे अपने दोस्तों से बातचीत कर रहे थे। इतने में शिक्षक ने कक्षा में प्रवेश किया। कक्षा का ऐसा माहौल देख शिक्षक ने बच्चों से पूछा चलो बताओ आज क्या पढ़ना चाहोगे?

बच्चों की ओर से अलग-अलग आवाजें आने लगीं। कोई बोला अंग्रेजी तो कोई विज्ञान, किसी ने गणित कहा तो कोई हिन्दी पढ़ने की बात करने लगा।

शिक्षक जी सोच में पड़ गए। कैसे तय करूँ? तभी उन्हें एक उपाय सूझा, उन्होंने ब्लैकबोर्ड पर सभी बच्चों का नाम लिखा और सामने वह विषय, जो वे उस समय पढ़ना चाहते हैं, लिखने को कहा। सारणी इस प्रकार बनी–

क्र. सं.	विद्यार्थी का नाम	अभी कौन-सा विषय पढ़ें?
1	कमल	गणित
2	रमेश	हिन्दी
3	रीता	गणित
4	मोईन	विज्ञान
5	मनजीत	अंग्रेजी

क्र. सं.	विद्यार्थी का नाम	पसंदीदा विषय
6	रोशन	हिन्दी
7	मोनिका	विज्ञान
8	ट्विंकल	अंग्रेजी
9	बीरम	विज्ञान
10	किशोर	हिन्दी
11	आतिफ	विज्ञान
12	नीतीश	हिन्दी
13	कालू लाल	अंग्रेजी
14	राजेश	हिन्दी
15	बलवंत	गणित
16	रुचि	विज्ञान
17	गरिमा	हिन्दी
18	लक्ष्मण	गणित
19	आरिफ	हिन्दी

सारणी के आधार पर शिक्षक ने प्रश्न किया कि क्या अब हम तय कर सकते हैं हमें कौन-सा विषय पढ़ना चाहिए? बच्चे सोचने की कोशिश कर रहे थे कि कैसे तय करें।

तभी रोशन को एक विचार सूझा। उसने ब्लैकबोर्ड पर खाली जगह में विषयों के नाम लिखे और उसके सामने वे बच्चों के नाम लिखे–

क्र. सं.	विद्यार्थी के नाम
गणित	कमल, रीता, बलवन्त, लक्ष्मण
हिन्दी	रमेश, रोशन, किशोर, नीतीश, राजेश, गरिमा, आरिफ
विज्ञान	मोईन, मोनिका, बीरम, आतिफ, रुचि
अंग्रेजी	मनजीत, ट्विंकल, कालू लाल

किशोर सारणियों को बार-बार देख रहा था और सोच रहा था कि इन सारणियों में नाम लिखने का क्या मतलब है? हमें तो मात्र यह गिनना है कि माँगी गई जानकारी के पक्ष में कितने विद्यार्थी हैं? नाम न लिखकर उसके स्थान पर संकेत का भी उपयोग किया जा सकता है।

क्या आप किशोर की सोच से सहमत हैं? क्या ऐसा कोई तरीका सोच सकते हैं, जिसमें नाम के स्थान पर केवल किसी चिह्न का उपयोग करके ही गणना की जा सके?

इसके तुरंत बाद राजेश ने एक सुझाव दिया कि क्यों न प्रत्येक नाम के स्थान पर एक-एक खड़ी लकीर का उपयोग किया जाए और अन्त में सभी खड़ी लकीरों की गिनती कर ली जाए। सभी विद्यार्थी इस सुझाव से सहमत थे।

विषय	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)
गणित	||||
हिन्दी	||||| ||
विज्ञान	|||||
अंग्रेजी	||||

इस तालिका के आधार पर कैसे पता करें कि अभी कौन-सा विषय पढ़ना चाहिए?

खेलों की लोकप्रियता का क्रम पता करने के लिए एक शिक्षक ने इसकी सूचना पूरे स्कूल में एकत्रित करने का कार्य रीता को सौंपा है, रीता ने बोर्ड पर 4 खेलों के नाम लिखे और अपने-अपने पसंद के खेल के सामने प्रत्येक विद्यार्थी को खड़ी लकीर खींचने को कहा।

सारणी कुछ इस प्रकार बनी –

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	||||||||||||||||||	18
क्रिकेट	||||||||||||||||||||||	22
वॉलीबॉल	||||||||||||||	14
कबड्डी	||||||||||||||||	16

उपर्युक्त सारणी को देखकर कक्षा के दूसरे विद्यार्थी सुनील ने कहा कि विद्यार्थियों को गिनने के लिए चिह्नों (ǀ) को दस-दस के समूहों में निम्न प्रकार व्यवस्थित कर सकते हैं–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀǀǀǀ	18
क्रिकेट	ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ ǀǀ	22
वॉलीबाल	ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀ	14
कबड्डी	ǀǀǀǀǀǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀǀ	16

गिनने की समस्या देख शेखर ने इसको और अधिक सरल बनाने के लिए सुनील से कहा कि वह दस-दस के समूहों के स्थान पर पाँच-पाँच के समूह बनाए, जैसा नीचे दिखाया जा रहा है–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀ	18
क्रिकेट	ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀ	22
वॉलीबाल	ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀ	14
कबड्डी	ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀǀǀǀǀ ǀ	16

शिक्षक ने सुझाव दिया कि पाँच-पाँच के प्रत्येक समूह में पाँचवाँ चिह्न एक तिरछी रेखा के रूप में प्रयोग किया जाए, ऐसे '𝍸' इन चिह्नों को मिलान चिह्न (Tally marks) कहते हैं। इस प्रकार 𝍸 ǀǀǀ यह दर्शाता है कि गिनने पर यह पाँच जमा तीन (अर्थात आठ) है। और 𝍸 𝍸 यह दर्शाता है कि यह पाँच जमा पाँच (अर्थात् दस) है।

इसके साथ उपर्युक्त सारणी निम्न प्रकार की दिखती है–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	卌 卌 卌 |||	18
क्रिकेट	卌 卌 卌 卌 ||	22
वॉलीबाल	卌 卌 ||||	14
कबड्डी	卌 卌 卌 |	16

प्रवीण ने अपने जन्म दिन पर कक्षा VI के 25 बच्चों को उनकी पसंद के उपहार देना तय किया। सभी को चार उपहारों पेन, गेंद, कार, बाक्स में से एक उपहार चुनना था। चार टोकरियों में हरेक को अपनी पसंद की गोटी डालनी थी। इससे जो आँकड़े मिले उनसे मिलान चिह्नों का प्रयोग कर प्रवीण ने एक सारणी तैयार की–

उपहार का नाम	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों के सेट
पेन	卌 |||	8
गेंद	卌	5
कार	|||	3
बॉक्स	卌 ||||	9

(i) किस उपहार को कक्षा VI के सबसे ज्यादा बच्चों ने पसंद किया?

(ii) किस उपहार को कक्षा VI के सबसे कम बच्चों ने पसंद किया?

(iii) पेन पसंद करने वाले विद्यार्थी कितने हैं?

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित विषय में प्राप्त अंक पता कीजिए और उन्हें एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या

पता कीजिए

– सबसे अधिक प्राप्तांक कितने थे और यह कितने बच्चों को मिले?

2. अपनी कक्षा **VI** के सभी विद्यार्थियों का जन्म कौन-से महीने में हुआ है पता कीजिए और उसे एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए। अब ज्ञात कीजिए–

(अ) कौन-से महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(ब) किस महीने में सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(स) ऐसे कौन-कौन से महीने हैं, जिनमें जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या समान है?

9.3 चित्रालेख (Pictograph)

किसी विद्यालय के एक सप्ताह में 25 विद्यार्थियों वाली एक कक्षा में अनुपस्थित रहने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्न प्रकार से प्रदर्शित की गई है–

दिन	चित्र	अनुपस्थित विद्यार्थी
सोमवार		
मंगलवार		
बुधवार		
बृहस्पतिवार		
शुक्रवार		
शनिवार		

अनुपस्थित विद्यार्थी =

किस दिन अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है? किस दिन अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है? क्या ऐसा भी कोई दिन है, जिस दिन एक भी छात्र अनुपस्थित नहीं है?

आप उपर्युक्त आलेख को देखकर इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इसमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इसमें चित्रों को देखकर आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं। इसे हम **चित्रालेख (Pictograph)** कहते हैं।

चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भाग अथवा उसके प्रतीक के रूप में निरूपित करता है।

इन्हें कीजिए–

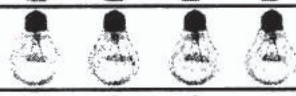
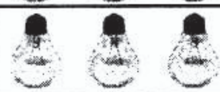
पत्रिकाएँ एवं समाचार पत्रों में प्रकाशित चित्रालेखों को एकत्रित कर अपनी कक्षा में प्रदर्शित कीजिए। यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि ये चित्रालेख क्या-क्या दर्शाते हैं?

एक चित्रालेख द्वारा दी गई सूचनाओं को समझने के लिए कुछ अभ्यास।

9.3.1 चित्रालेख की व्याख्या–

उदाहरण–1 : एक सप्ताह के विभिन्न दिवसों में बल्ब की बिक्री नीचे दर्शाई गई है–

(1 बल्ब =)

दिनों का नाम	बिक्री हुए बल्बों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	
रविवार	

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) शुक्रवार को कितने बल्ब बेचे गए?

(b) किस दिन बेचे गए बल्बों की संख्या अधिकतम थी और यह कितनी थी?

(c) यदि एक बल्ब 8 रु. में बेचा गया हो, तो रविवार को कुल कितने की बिक्री हुई?

(d) आप पूरे सप्ताह में हुई कुल बिक्री बल्बों में और प्राप्त रुपयों में ज्ञात करें।

(e) यदि एक बड़े डिब्बे में 7 बल्ब आते हैं, तो इस सप्ताह कितने बड़े डिब्बों की आवश्यकता पड़ी?

हल : (a) शुक्रवार को बेचे गए बल्बों की संख्या 4 है।

(b) शनिवार को बेचे गए बल्बों की संख्या सबसे अधिक थी। उस दिन 9 बल्ब बिके।

(c) रविवार को बेचे गए बल्बों की संख्या 4 है।

8 रु. प्रति बल्ब के दर से 4 बल्बों की कीमत = (4 x 8) रु. = 32 रु.। अतः रविवार को कुल 32 रु. की बिक्री हुई।

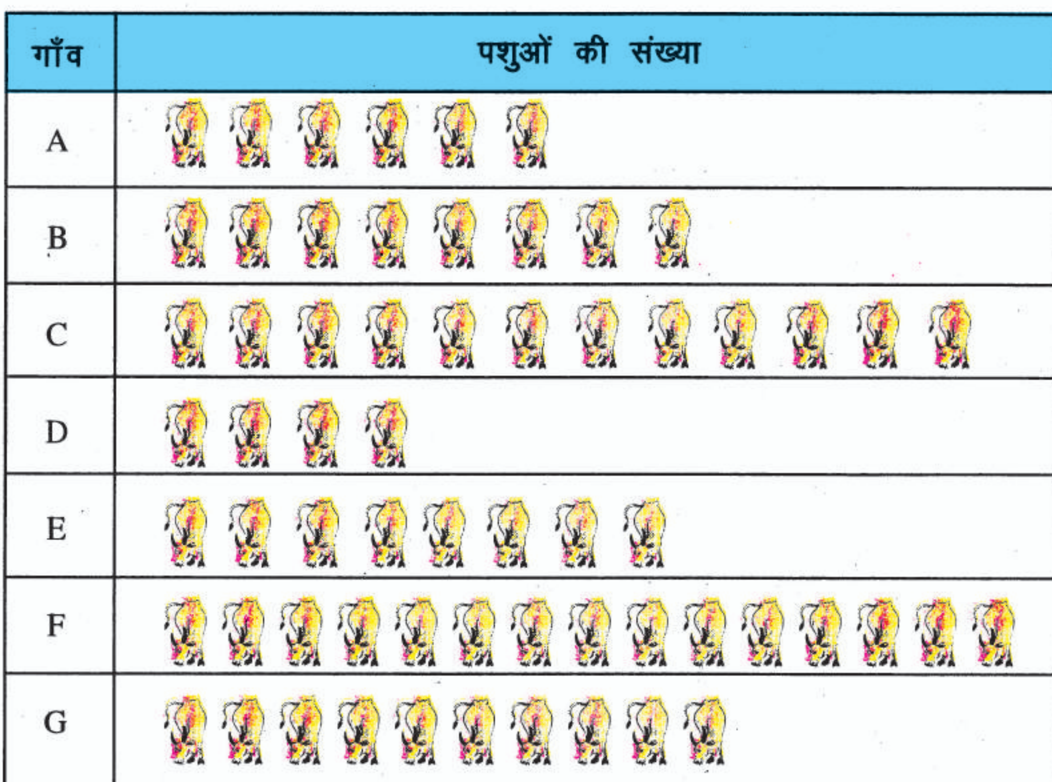
(d) पूरे सप्ताह में कुल 35 बल्बों की बिक्री हुई और इनसे प्राप्त रुपये 35×8 = 280 रु. हैं।

(e) 7 बल्ब रखने के लिए 1 डिब्बे की आवश्यकता है।

इस प्रकार 35 बल्ब रखने के लिए 35 ÷ 7 = 5 डिब्बों की आवश्यकता होगी।

उदाहरण–2 : सात गाँवों में पशुओं की कुल संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है–

(एक चित्र– **= 10 पशु)**



(a) किस गाँव में पशुओं की संख्या सबसे कम है?

(b) गाँव F में पशुओं की संख्या, गाँव B में पशुओं की संख्या से कितनी अधिक है?

(c) क्या गाँव A और गाँव D में पशुओं की संख्या गाँव G में पशुओं की संख्या के बराबर है?

(d) सभी गाँवों में पशुओं की कुल संख्या बताइए।

हल :

(a) गाँव D में पशुओं की संख्या सबसे कम 40 है।

(b) गाँव F में पशुओं की संख्या गाँव B में पशुओं की संख्या से 150-80 = 70 अधिक है।

(c) गाँव A और गाँव D में पशुओं की कुल संख्या = 60 + 40 = 100 है।

यह गाँव G में पशुओं की संख्या के बराबर है।

(d) सभी गाँवों में पशुओं की कुल संख्या = 60 + 80 + 120 + 40 + 80 + 150 + 100 = 630 है।

प्रश्नावली – 9.1

(1) एक कक्षा के 20 छात्रों ने गणित की जाँच परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

3, 2, 5, 4, 0, 7, 2, 3, 5, 2, 2, 7, 8, 4, 1, 0, 3, 2, 5, 4

इन प्राप्तांकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

(a) ज्ञात कीजिए कि कितने छात्रों ने 5 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए?

(b) कितने छात्रों ने 4 से कम अंक प्राप्त किए?

(2) कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों को जो-जो वाहन पसंद है, उनके चित्र नीचे दिए गए हैं–

(a) वाहनों के चित्रों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए।

(b) कौन-सा वाहन विद्यार्थियों द्वारा अधिक पसंद किया गया?

(3) राधा ने एक पासा (dice) लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा–

3 4 6 1 5 6 2 3 5 2

मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए–

(a) न्यूनतम बार आने वाली संख्या
यह संख्या कितनी बार आई?

(b) अधिकतम बार आने वाली संख्या
यह संख्या कितनी बार आई?

(c) समान बार आने वाली संख्याएँ।

(4) सारणी को पूरा कीजिए–

क्र. सं.	भोजन रुचि	मिलान चिह्न	लोगों की संख्या
(a)	केवल रोटी	𝍸 ||	7
(b)	केवल चावल	𝍸 𝍸 ||	12
(c)	दाल और चावल दोनों	....	16
(d)	रोटी और चावल दोनों	....	14

(5) कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों ने अपने-अपने परिवार में सदस्यों की संख्या को एक साथ लिखा। यह संख्या नीचे दर्शाई गई है:

4 6 7 6 5 4 3 6 7 6 4 6 5 5 7

7 4 5 6 4 6 5 4 7 5 3 6 4 5 3

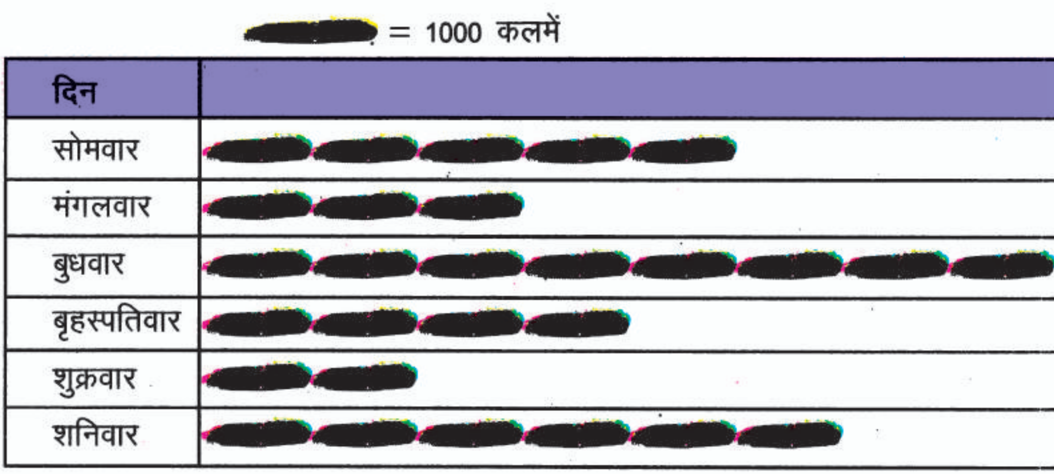
मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी बनाइए। अब, ज्ञात कीजिए–

(a) कितने परिवार ऐसे हैं जिनमें सदस्य संख्या 7 है?

(b) कितने ऐसे हैं जिनमें सदस्य संख्या 3 है?

(c) कौन-सी सदस्य संख्या सबसे अधिक परिवारों की है?

(6) किसी सप्ताह में एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कलमों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है–



ज्ञात कीजिए–

(a) किस दिन न्यूनतम कलमें निर्मित की गईं? यह सख्या कितनी है?

(b) किस दिन निर्मित कलमों की संख्या अधिकतम थी? यह कितनी कलमें थीं?

(c) इस सप्ताह निर्मित कलमों की कुल संख्या कितनी है?

(7) गया शहर के एक सब्जी बाजार में 5 सब्जी विक्रेताओं द्वारा बेची गई सब्जी की टोकरियों की संख्या निम्न चित्रालेख में प्रदर्शित है–

इस चित्रालेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस सब्जी विक्रेता ने अधिकतम सब्जी की टोकरियाँ बेचीं? उसने कितनी टोकरियाँ बेचीं?

(b) नरेश ने सब्जी की कितनी टोकरियाँ बेचीं?

(c) सबसे कम कितनी टोकरियाँ बिकीं?

9.3.2 चित्रालेखों को प्रदर्शित करना

आपने दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाली कई वस्तुओं की तस्वीरें अवश्य ही बनाई होंगी। उनमें से कुछ तस्वीरें तो आसानी से बन जाती हैं। कुछ तस्वीरों को बनाने में कठिनाई

होती है। चित्रालेखों से आँकड़े दर्शाना एक रोचक क्रिया है, परन्तु किसी-किसी संकेत को बनाने में समय लगता है। ऐसी स्थिति में, हम सरल संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं। ऐसे में हम एक चित्र से कई वस्तु को इंगित कर देते हैं। जैसे एक संकेत = 10 विद्यार्थियों को निरूपित कर सकता है। हमने पहले भी 10 पशुओं के लिए एक चित्र का उपयोग किया है और हजार कलम के लिए भी एक का, हम इस तरह के कुछ और अभ्यास करेंगे।

उदाहरण–3 : एक मध्य विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में लड़कियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है–

(= 2 लड़की)

कक्षा का नाम	लड़कियों की संख्या
I पहली	
II दूसरी	
III तीसरी	
IV चौथी	
V पाँचवीं	
VI छठी	
VII सातवीं	
VIII आठवीं	

इस चित्रालेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस कक्षा में लड़कियों की संख्या अधिकतम है?

(b) क्या कक्षा VI में लड़कियों की संख्या कक्षा V की लड़कियों की संख्या से कम है?

(c) कक्षा VIII में कितनी लड़कियाँ हैं?

(d) कक्षा III से अधिक लड़कियाँ किस कक्षा में हैं?

हल :

(a) सबसे अधिक लड़कियाँ कक्षा I में हैं।

= 2 लड़कियाँ। इसलिए इस कक्षा में 2 x 6 = 12 लड़कियाँ दर्शाते हैं।

(b) नहीं, क्योंकि कक्षा VI में लड़कियों की संख्या 2 x 4 = 8 जबकि कक्षा V में लड़कियों की संख्या 2 x 2 = 4 है।

(c) कक्षा VIII में लड़कियों की संख्या 2 x 3 = 6 है।

(d) कक्षा III से अधिक कक्षा I में हैं क्योंकि कक्षा III में 2 x 5 = 10 तथा कक्षा 1 में 2 x 6 = 12 लड़कियाँ हैं।

उदाहरण–4 : शिवहर जिले के सात गाँवों में गन्ने की पैदावार (टन में) इस प्रकार है–

गाँव A	:	70
गाँव B	:	100
गाँव C	:	120
गाँव D	:	60
गाँव E	:	40
गाँव F	:	110
गाँव G	:	90

संकेत ⊖ का प्रयोग करके जो 10 टन (1 टन = 1000 किलोग्राम) को निरूपित करता है। इस पैदावार का एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) गाँव F की पैदावार को कितने संकेत निरूपित करते हैं?

(b) किस गाँव में पैदावार अधिकतम है?

(c) गाँव A या गाँव D में से किस गाँव में पैदावार अधिक है?

हल :

गाँव	पैदावार टन में
A	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
B	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
C	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
D	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
E	⊖ ⊖ ⊖ ⊖
F	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
G	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖

(a) गाँव F की पैदावार को 11 संकेत निरूपित करते हैं।

(b) C गाँव में पैदावार अधिकतम है।

(c) A गाँव में पैदावार अधिक है।

प्रश्नावली – 9.2

1. गत वर्ष के अंतिम चार महीनों में किसी होटल के लिए खरीदे गए बिजली के बल्बों की संख्या निम्नलिखित है–

महीना	बल्बों की संख्या
सितम्बर	45
अक्टूबर	60
नवम्बर	75
दिसम्बर	15

उपर्युक्त सारणी को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए। एक चित्र को कितने बल्ब के बराबर लेंगे?

2. पटना शहर के एक माध्यमिक विद्यालय में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या विभिन्न वर्षों में निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित है–

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
2004	250
2005	300
2006	450
2007	350
2008	400

(A) एक संकेत का प्रयोग करके, जो 50 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) वर्ष 2006 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

(b) वर्ष 2004 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

(B) कोई और संकेत लेकर, जो 100 विद्यार्थियों को निरूपित करता है एक चित्रालेख बनाइए। साथ में यह भी बताइए कि कौन-सा चित्रालेख अधिक सूचनाप्रद है?

3. किसी पाँच गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या इस प्रकार है–

गाँव	ट्रैक्टरों की संख्या
गाँव A	5
गाँव B	4
गाँव C	6
गाँव D	7
गाँव E	2

संकेत का प्रयोग करके एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या न्यूनतम है?

(b) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या अधिकतम है?

(c) पाँचों गाँवों में कुल मिलाकर कितने ट्रैक्टर हैं?

9.4 दंड आलेख (Bar Graph)

चित्रालेख बनाने में समय लगता है और हमें ऐसे प्रतीक सोचने होते हैं जो सरल है।

आइए आँकड़ों को निरूपित करने की एक अन्य विधि पर विचार करें। हम एक समान चौड़ाई के क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दंड इस प्रकार से खींचते कि इनके बीच में समान दूरी बनी रहे। खींचे गए प्रत्येक दंड की लम्बाई दी हुई संख्या के अनुसार बना लेने से यह आँकड़ों को स्पष्ट प्रदर्शित कर पाता है।

आँकड़ों का यह निरूपण **दंड आरेख (Bar diagram)** या **दंड आलेख (Bar graph)** कहलाता है।

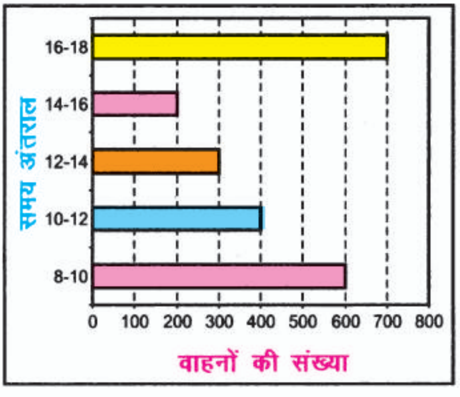
9.4.1 दंड आलेख की व्याख्या

यातायात पुलिस द्वारा पटना के डाक बंगला चौराहे पर एक दिन सुबह आठ बजे से शाम 6 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या का अध्ययन किया गया। आगे दी गई तालिका में यह दर्शाया गया है।

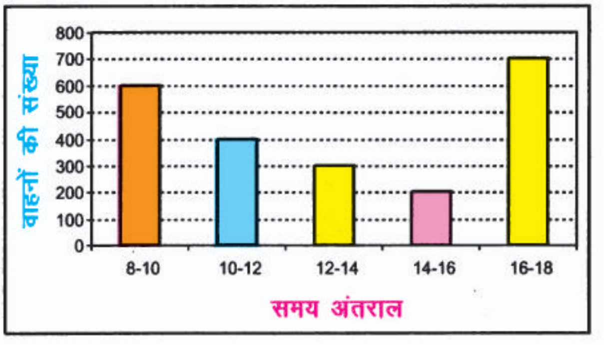
समय	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
वाहन संख्या	600	400	300	200	700

इसे हम दण्डालेख के रूप में दो तरह से प्रस्तुत कर सकते हैं। इसके लिए 100 वाहनों को एक इकाई मान कर सांकेतिक रूप से, एक खाने से निरूपित किया गया है। पैमाना है : 1 इकाई लम्बाई = 100 वाहन।

क्षैतिज दण्ड आलेख
(Horizontal Bar Graph)



ऊर्ध्वाधर दण्ड आलेख
(Vertical Bar Graph)



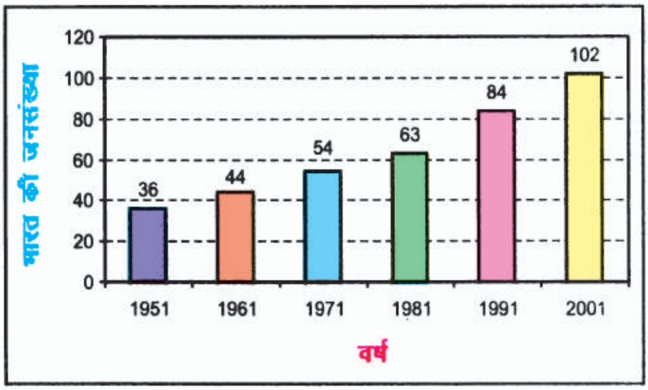
16 से 18 बजे के बीच का दण्ड सबसे लम्बा है। यह दिखाता है कि इस समय यातायात अधिकतम होता है। इसी तरह 14 से 16 बजे के बीच का दण्ड सबसे छोटा है। हम कह सकते हैं कि न्यूनतम यातायात इसी समय में होता है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि दण्ड आलेख दिए गए आँकड़ों को सुविधा से समझने में सहायता करते हैं। इससे निष्कर्ष केवल एक दृष्टि में निकाला जा सकता है।

पैमाने का चुनाव

यहाँ एक बात ध्यान देने योग्य है कि यदि आँकड़ों में संख्याएँ बड़ी हों, तो आपको एक भिन्न पैमाने (scale) की आवश्यकता पड़ेगी। उदाहरण के लिए हम भारत की जनसंख्या का अध्ययन करें तो ये संख्या करोड़ों में है। इसलिए यदि आप 1 इकाई = 1 व्यक्ति लेंगे या

1000 भी लेंगे तो दंड खींचना संभव नहीं होगा। अतः इस तरह का पैमाना चुनिए कि वह आपके कागज में फिट हो। इस के लिए 1 इकाई = 10 करोड़ निरूपित कर सकते हैं जैसा दंडालेख में लिया गया है।



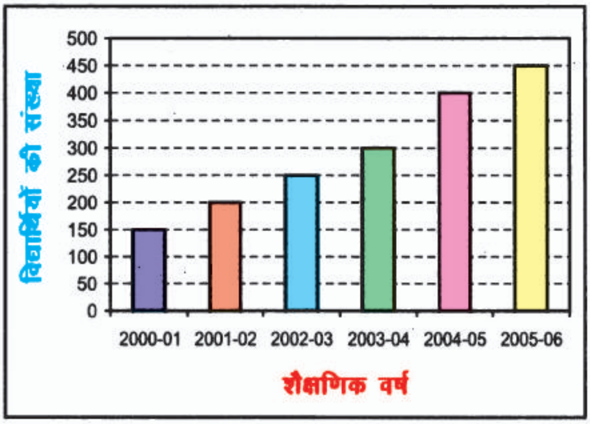
उदाहरण 1 : एक विद्यालय के शैक्षणिक वर्ष 2000 – 2001 से 2005 – 2006 तक कक्षा VI के विद्यार्थियों की संख्या का एक दंड आलेख दिया गया है। इसे पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(a) इस आलेख का पैमाना क्या है?

(b) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(c) क्या शैक्षणिक वर्ष 2002–03 में विद्यार्थियों की संख्या शैक्षणिक वर्ष 2001–02 के विद्यार्थियों की संख्या की दोगुनी है?

1 इकाई लम्बाई = 50 विद्यार्थी



हल : (a) पैमाना है–

1 इकाई लम्बाई = 50 विद्यार्थी

(b) शैक्षणिक वर्ष 2004–05 में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई। क्योंकि इस वर्ष पिछले वर्ष से 100 अधिक विद्यार्थी थे।

(c) शैक्षणिक वर्ष 2002–03 में विद्यार्थियों की संख्या = 250,

शैक्षणिक वर्ष 2001–02 में विद्यार्थियों की संख्या = 200

$\frac{250}{200}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}\neq 2$, अतः विद्यार्थियों की संख्या दोगुनी नहीं है।

9.4.2 दंड आलेख को खींचना

आइए एक सारणी लें जो किसी परिवार की विभिन्न मदों में होने वाले मासिक व्यय को निरूपित करती है–

मद	व्यय (रु. में)
मकान किराया	2000
भोजन	2500
बिजली	500
शिक्षा	1500
परिवहन	500
विविध	1000

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में इस प्रकार निरूपित किया जाता है :

(a) परस्पर दो लम्ब रेखाएँ खींचिए, एक ऊर्ध्वाधर और एक क्षैतिज।

(b) क्षैतिज रेखा के अनुदिश समान दूरी पर 'मद' अंकित कीजिए। ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय (रु. में) अंकित किए जाएँगे।

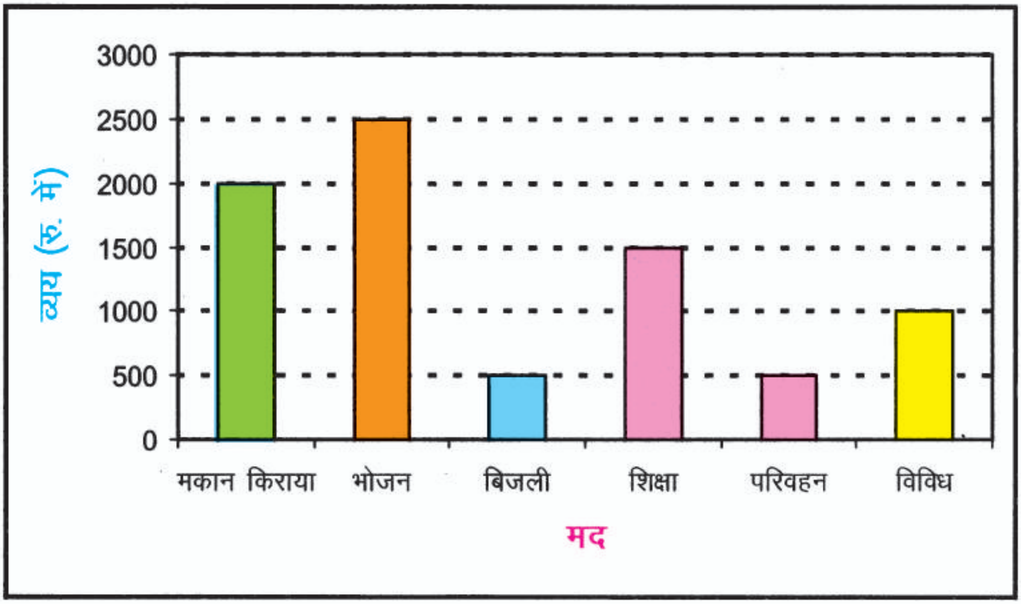
(c) समान चौड़ाई के दंड बनाइए।

(d) ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लीजिए।

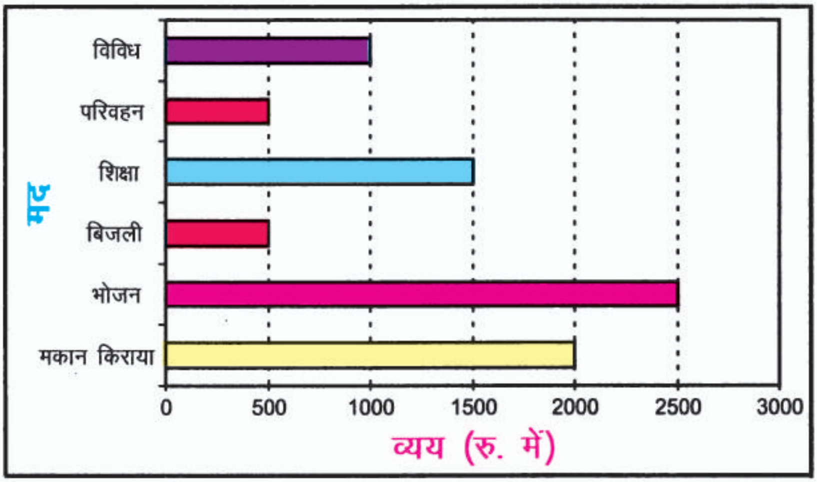
मान लीजिए 1 इकाई लम्बाई = 500 रु. है। इसके अनुसार संगत मान अंकित करने के लिए दण्ड की लम्बाई निकालेंगे।

विभिन्न मदों के लिए दंडों की लम्बाई परिकल्पित कीजिए जैसा कि नीचे दिखाया जा रहा है–

मकान किराया	: 2000 ÷ 500 = 4 इकाई
भोजन	: 2500 ÷ 500 = 5 इकाई
बिजली	: 500 ÷ 500 = 1 इकाई
शिक्षा	: 1500 ÷ 500 = 3 इकाई
परिवहन	: 500 ÷ 500 = 1 इकाई
विविध	: 1000 ÷ 500 = 2 इकाई



इन्हीं आँकड़ों को 'मद' और 'व्यय' मद की स्थितियों को अक्षों पर परस्पर बदलकर, निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है–



इन्हें कीजिए

आप अपनी कक्षा में एक सर्वे कीजिए जिसमें आप उनसे किसी विषय में उनकी पसन्द के बारे में पूछ सकते हैं (a) आपका मनपसन्द हीरो, हिरोइन कौन हैं? (b) आपका मनपसंद रंग कौन-सा है? (c) आपका मनपसन्द विषय कौन-सा है? अब इन आँकड़ों को एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए तथा उन्हें एक दंडालेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

प्रश्नावली – 9.3

1. छः क्रमागत दिनों में किसी दुकानदार द्वारा बेची गई फ्रिजों की संख्या नीचे दी गई है। अपनी पसंद का पैमाना चुनते हुए, उपर्युक्त सूचना के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

दिन	बेचे गए रेफ्रीजरेटर की संख्या
सोमवार	15
मंगलवार	5
बुधवार	10
वृहस्पतिवार	25
शुक्रवार	15
शनिवार	20
रविवार	35

2. वर्ष 2000 से 2005 तक एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कारों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गई है–

वर्ष	निर्मित कारों की संख्या
2000	900
2001	600
2002	1500
2003	1200
2004	1800
2005	2400

इन आँकड़ों के लिए उपयुक्त पैमाना चुनते हुए एक दंड आलेख खींचिए और बताइए–

(a) किस वर्ष सबसे अधिक कारें निर्मित की गईं ?

(b) वर्ष 2000 से 2005 तक कुल कितनी कारें निर्मित हुईं?

3. बिहार राज्य के किसी शहर के व्यक्तियों की संख्या विभिन्न आयु समूहों के अनुसार नीचे सारणी में दी हुई है–

आयु समूह (वर्षों में)	1–14	15–29	30–44	45–59	60–74	75 और उससे ऊपर
व्यक्तियों की संख्या	3 लाख	2 लाख 50 हजार	1 लाख 50 हजार	1 लाख 50 हजार	2 लाख	25 हजार

इन आँकड़ों को उपयुक्त पैमाना चुनकर एक दंड आलेख बनाइए और बताइए कि –

(a) किन दो आयु समूहों की जनसंख्या बराबर है?

(b) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के सभी व्यक्ति वरिष्ठ नागरिक कहलाते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इस शहर में कितने वरिष्ठ नागरिक हैं?

4. **एक स्कूल के 150 विद्यार्थियों का सर्वेक्षण इस आशय से किया गया कि वे अपने खाली समय में किस क्रियाकलाप को पसंद करते हैं। निम्न आँकड़े प्राप्त हुए–**

पसंद का क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	50
कहानी की पुस्तक पढ़ना	30
टी.वी. देखना	35
संगीत सुनना	20
पेंटिंग	15

1 इकाई लम्बाई = 5 विद्यार्थी का पैमाना लेकर एक दंड आलेख बनाइए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया जाता है?

हमने क्या सीखा–

1. आँकड़ों से विशेष सूचना तुरंत प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नों का प्रयोग करके सारणी में प्रस्तुत किया जा सकता है।
2. हमने सीखा कि आँकड़ों को चित्रालेख एवं दंड आलेख द्वारा निरूपित किया जाता है। इसे करने का तरीका भी हमने सीखा। हमने यह भी जाना कि चित्रालेख को केवल देखकर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।
3. हमने चर्चा की है कि किसी आँकड़े का एक दंड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खींचे जाते हैं। प्रत्येक दंड की लम्बाई वांछित सूचना दर्शाती है।
4. हमने आलेख के लिए एक पैमाना चुनने की प्रक्रिया की भी चर्चा की, उदाहरणार्थ 1 इकाई = 5 विद्यार्थी।
5. हमने दंड आलेखों को पढ़ने का अभ्यास भी किया है। हमने इसकी व्याख्या करके निष्कर्ष निकालना भी सीखा है।

अध्याय-10 अनुपात और समानुपात

10.1 भूमिका

रीना और रमेश ने अपनी-अपनी गुल्लकों में कुछ रुपये इक्ट्ठे किए थे। आज वे उनको गिन रहे थे। रीना– रमेश तुम्हारे पास कुल कितने रुपये जमा हुए?

रमेश – कुल मिलाकर 40 रु. और तुम्हारे पास!

रीना– मेरे पास तो 10 रु. ही जमा हुए।

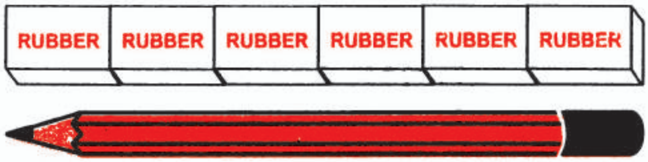
रमेश – अभी तो शुरुआत है। हम और रुपये जोड़ने की कोशिश करेंगे। रीना, तुम्हारे रुपये मेरे रुपयों से कम हैं। जरा देखें तो कितने कम हैं?

40-10 = 30 रुपये

रीना– तुम ठीक कहते हो। मेरे पास तुमसे तीस रुपये कम हैं। अरे! रमेश 10 के पहाड़े में 40, 10 को 4 बार गुणा करने पर आता है। अगर मैं कहूँ कि तुम्हारे पास मेरे से 4 गुना पैसे हैं तो क्या मैं ठीक हूँ।

क्या रीना ठीक कह रही है?

यदि हम एक पेंसिल और एक मिटाने वाले रबर के टुकड़े की लम्बाई की तुलना करना चाहें तो दोनों लम्बाइयों में अंतर द्वारा तुलना करना उचित नहीं होगा। पेंसिल की लम्बाई 18 सेमी होती है जो कि रबर की लम्बाई से बहुत अधिक है। यदि हम पेंसिल की लम्बाई के बराबर एक के पीछे जोड़-जोड़कर, रबर की एक पंक्ति बना दें तो हम कह सकते हैं कि 5 से 6 रबर की कुल लम्बाई एक पेंसिल की लम्बाई के समान है।



अतः एक पेंसिल की लम्बाई रबर की कुल लम्बाई के 5 से 6 गुना के बीच होती है।

इसी प्रकार एक ट्रक का मूल्य 6,00,000 रुपये हैं और एक मोटर साइकिल का मूल्य 50,000 रुपये हैं। ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल से कितना गुना ज्यादा है।

भाग के द्वारा तुलना करने पर $\frac{6,00,000}{50,000} = \frac{12}{1}$ है।

इस प्रकार ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का 12 गुना हुआ। इस प्रकार कुछ परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना, अंतर द्वारा तुलना से बेहतर होती है। **भाग द्वारा तुलना को ही अनुपात कहा जाता है** और इसे हम संकेत ' : ' द्वारा दर्शाते हैं जैसे –

ट्रक और मोटर साइकिल के मूल्यों का अनुपात 12 : 1 है।

ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का 12 गुना है तो इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं, मोटर साइकिल का मूल्य ट्रक के मूल्य का $\frac{1}{12}$ है।

आप भी इन राशियों के बीच अनुपात लिखिए–

(1) वार्षिक परीक्षा में प्राप्तांक

समीर – 300

जेम्स – 400

(2) 1 क्विंटल गेहूँ का मूल्य – 1200 रु.

1 क्विंटल मक्का का मूल्य – 900 रु.

(3) पटना से राजगीर की दूरी – 100 किमी

पटना से बेतिया की दूरी – 200 किमी

(4) एक कक्षा में 30 लड़के और 20 लड़कियाँ हैं। लड़कों की और लड़कियों की संख्या में क्या अनुपात है?

अनुपात और इकाई

टीना का कद 135 सेमी है और और मीना का कद 1.5 मीटर, सोहन ने अनुपात के बारे में पढ़ा था। उसने टीना और मीना के कद का अनुपात निकालना शुरू किया।

टीना का कद = 135 सेमी
मीना का कद = 1.5 मीटर

मोहन इसे इस प्रकार लिखता है = $\frac{135}{1.5}=\frac{1350}{15}=\frac{90}{1}$

क्या मोहन ने सही रूप में लिखा है? 90 : 1

मोहन की गलती को आप सुधारिए।

(दो राशियों के बीच अनुपात निकालते समय दोनों राशियों का एक ही इकाई में होना जरूरी है।)

एक और उदाहरण– भीम और इलियास बाजार से कुछ केले लेकर खाते हैं। भीम $\frac{1}{2}$ दर्जन केले खा जाता है और इलियास 3 केले खाता है। अब यदि आपको दोनों द्वारा खाए गए केलों का अनुपात निकालना हो तो पहले भीम द्वारा खाए गए $\frac{1}{2}$ दर्जन केलों को खुले केलों में बदलेंगे। अतः भीम द्वारा खाए गए केले $=\frac{1}{2}$ दर्जन $= \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{12}=6$ केले

अब इकाई समान एक होने पर हम भीम और इलियास द्वारा खाए गए केलों की तुलना कर सकते हैं = भीम द्वारा खाए गए केले : इलियास द्वारा खाए गए केले

$= \cancel{6} : \cancel{3}$

$=$ 2 : 1 (सरल अनुपात)

रीना ने इसे इस प्रकार किया–

भीम द्वारा खाए गए केले = $\frac{1}{2}$ दर्जन

इलियास द्वारा खाए गए केले = 3 केले = $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ दर्जन

भीम और इलियास द्वारा खाए गए केलों का अनुपात = $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2:1$$

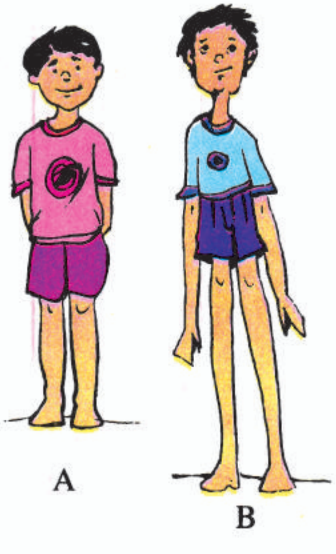
चूँकि भीम ने $\frac{1}{2}$ दर्जन केले खाए थे। अतः इलियास द्वारा खाए गए 3 केले को दर्जन की इकाई में बदल दिया। हम दर्जन को केलों की संख्या में बदलकर या केलों की संख्या को दर्जन में बदलकर सरल अनुपात निकाल सकते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. महेश दिन में 4 घंटे पढ़ाई करता है और लक्ष्मी दिन भर में 180 मिनट पढ़ाई करती है। बताइए कि महेश और लक्ष्मी द्वारा पढ़ाई में लगाए समय का अनुपात क्या होगा? (60 मिनट = 1 घंटा)

2. एक स्कूल में एक वर्ष में 73 छुट्टियाँ बनती हैं। छुट्टियों का वर्ष के कुल दिनों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए। (1 वर्ष = 365 दिन)

अनुपात का प्रयोग : हम अनुपात की संकल्पना का प्रयोग दैनिक जीवन की बहुत सी परिस्थितियों में बिना जाने ही करते हैं।



आकृति A तथा B की तुलना करें। आकृति A आकृति B से ज्यादा वास्तविक लगती है। क्यों?

आकृति B में टाँगें, बाकी शरीर की तुलना में अधिक लंबी है। आकृति B अस्वाभाविक इसलिए लगती है क्योंकि हम टाँगों और शरीर के अन्य हिस्सों की लम्बाई में एक खास अनुपात की आशा रखते हैं।

चित्र में बनी दोनों पेंसिलों की तुलना कीजिए। क्या पहली पेंसिल देखने में पूरी पेंसिल लगती है? नहीं। कारण यह है कि पेंसिल की मोटाई और लम्बाई में सही अनुपात नहीं है।

बराबर अनुपात अर्थात् तुल्य अनुपात

हम अलग-अलग परिस्थितियों में एक जैसा अनुपात देख सकते हैं–

जैसे– एक परिवार में 6 आदमी और 4 औरतें हैं तो आदमी, औरतों का अनुपात $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=3:2$

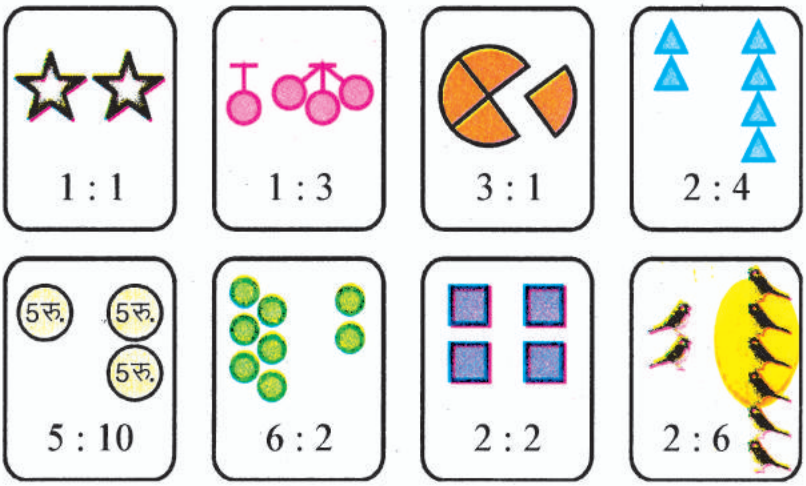
एक कमरे की लम्बाई 30 मी और इसकी चौड़ाई 20 मी है। अतः कमरे की लम्बाई का चौड़ाई से अनुपात $=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}=3:2$

दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है।

अतः 30 : 20 और 6 : 4 समान हैं जो 3 : 2 के बराबर हैं। यह तुल्य अनुपात कहलाता है।

स्वयं कीजिए

दिए गए चित्र में दो समूहों में आकृतियों की संख्या का अनुपात दिया है। आप तुल्य अनुपातों को मिलाइए।



राजा ने अपने चचेरे भाई हँसमुख के साथ मिलकर एक खेत खरीदा। राजा ने 40,000 रु. और हँसमुख ने 60,000 रु. लगाए। दोनों द्वारा लगाए गए पैसों का सरल अनुपात 40,000: 60,000 = 4 : 6 अर्थात् 2 : 3 है।

फसल के बाद सारे खर्च काटने पर उन्हें कुल मिलाकर 40,000 रु. का मुनाफा हुआ। जब लाभ बाँटने की बात चली तो हँसमुख बोला "मुझे ज्यादा रुपये मिलने चाहिए। मैंने शुरुआत में ज्यादा धन लगाया था"।

तब यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक द्वारा मिलाए गए धन के अनुपात में ही लाभ बाँटा जाएगा अर्थात् 2 : 3 के अनुपात में।

जैसे– मान लीजिए अगर 5 रु. का लाभ होता तो 2 रु. राजा को और 3 रु. हँसमुख को मिलते। या 5 हिस्सों में 2 हिस्से राजा को और 3 हिस्से हँसमुख को मिलेंगे।

इसे इस प्रकार भी लिखते हैं लाभ का $\frac{2}{5}$ राजा को और $\frac{3}{5}$ हँसमुख को।

अब लाभ 40,000 रु. है तो राजा को मिलेंगे $\frac{2}{5} \times 40,000 = 16,000$ रु.

और हँसमुख को मिलेंगे $\frac{3}{5} \times 40,000 = 24,000$ रु.

अगर लाभ 1000 रु. होता तो राजा और हँसमुख को कितने-कितने रुपये मिलते? ऐसे ही अलग-अलग लाभ लेकर राजा और हँसमुख में 2 : 3 में बाँटिए।

उदाहरण–1 : नमन के बगीचे की लम्बाई 100 मी और चौड़ाई 75 मी है। उसके बगीचे की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : बगीचे की लम्बाई = 100 मी, बगीचे की चौड़ाई = 75 मी

अतः लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात = 100 : 75

$$\frac{100}{75} = \frac{\cancel{100}}{\cancel{75}} = 4:3$$

अतः अनुपात होगा 4 : 3

उदाहरण–2 : एक जहाज में हज की यात्रा पर जाने वाले लोगों की संख्या 55 थी। यदि उनमें से 25 महिलाएँ थीं और शेष पुरुष, तो निम्न में अनुपात ज्ञात कीजिए–

(अ) महिलाओं और पुरुषों की संख्या का।

(ब) पुरुषों और महिलाओं की संख्या का।

हल : कुल यात्रियों की संख्या =55

महिलाओं की संख्या = 25

पुरुषों की संख्या = 55 − 25 = 30

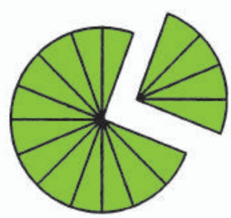
अतः महिलाओं की संख्या और पुरुषों की संख्या का अनुपात = 25 : 30 = 5 : 6 और पुरुषों की संख्या और महिलाओं की संख्या का अनुपात = 30 : 25 = 6 : 5 (ध्यान दें कि 5 : 6 और 6 : 5 अलग-अलग हैं। वास्तव में एक-दूसरे से विपरीत हैं)

उदाहरण–3 : चित्र में दिखाए अनुपात के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

हल : अब यदि $\frac{6}{2}$ को ऊपर और नीचे 2 से गुणा करें तो हमें मिलेगा

$\frac{6\times2}{2\times2}=\frac{12}{4}=12:4$ प्राप्त होगा।

आपने यहाँ गौर किया होगा कि टुकड़ों की संख्या बढ़ गई है पर टुकड़ों द्वारा घेरा गया स्थान बराबर है।



अतः 12 : 4 और 6 : 2 तुल्य अनुपात हैं।

इसी प्रकार 6 : 2 = $\frac{6}{2}=\frac{6\div2}{2\div2}=\frac{3}{1}$ = 3 : 1

3 : 1 भी 6 : 2 का तुल्य अनुपात है।

अतः तुल्य अनुपात = $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=\frac{18}{6}=$................

10.2 तुल्य अनुपात का गुण धर्म

तरीका–1 : हम तुल्य अनुपात में पढ़ चुके हैं कि अंश और हर को एक समान संख्या से गुणा या भाग कर तुल्य अनुपात प्राप्त होता है।

मान लिया कि $\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}$ दूसरा तुल्य अनुपात निकालने के लिए हमें हर 12 के सापेक्ष अंश निकालना है, तो $\frac{3}{4}$ के अंश तथा हर को 3 से गुणा करना होगा जिससे हर 12 हो जाए। यानि यह इस प्रकार होगा–

$\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12}$ अतः तुल्य अनुपात के लिए अंश में 9 रखना पड़ेगा। इस प्रकार $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ अब तुल्य अनुपात है।

तरीका–2 :

$\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}$

$12\times 3=4\times\square$

$36=4\times\square$

(4 को 9 से गुणा करने पर हमें 36 प्राप्त होता है।)

या $\frac{36}{4}=\frac{9}{1}$

अतः $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ तुल्य अनुपात हुआ।

स्वयं कीजिए

$\frac{3}{4}=\frac{---}{20}$ को हल कीजिए।

उदाहरण–4 : जीवन की कुल आमदनी का खर्च और बचत का अनुपात 2 : 1 है। अब यदि जीवन की आमदनी 600 रु. है तो बताइए वह महीने में कुल कितना बचा लेता है?

हल : अनुपात के दो हिस्से 2 और 1 हैं।

अतः दोनों हिस्सों का योग = 2 + 1 = 3

इसका अर्थ है कि बचत 3 रु. में से 1 रु.

तो 1 रु. में $\frac{1}{3}$ रु.

600 रु. में = $\frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{200}{\cancel{600}} = 200$ रु. बचत

इस प्रकार जीवन अपने कुल आमदनी 600 रुपये में से 200 रुपये बचा लेता है। इसी प्रकार उसका खर्चा भी ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. **एक कक्षा में 20 लड़कियाँ और 15 लड़के हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से।
   (b) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।
2. **30 विद्यार्थियों की कक्षा में 6 फुटबॉल, 12 क्रिकेट और बाकी टेनिस पसंद करते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) फुटबॉल पसंद करने वालों का टेनिस पसंद करने वालों से।
   (b) क्रिकेट प्रेमियों का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।
3. **मारगरेट एक कारखाने में काम करती है और 1910 रु. मासिक वेतन लेती है। वह अपनी आय में से 370 रु. प्रति मास बचत करती है तो अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) उसकी बचत और उसकी आय का।
   (b) उसकी आय और उसके व्यय का।

4. राम और रहीम ने एक घंटे में क्रमशः 9 किमी और 12 किमी की दूरी तय की। राम और रहीम की चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. **रिक्त स्थानों को भरिए–**

$\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ (क्या ये तुल्य अनुपात हैं?)

6. **निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(a) 81 का 108 से। (b) 98 का 63 से।

(c) 3 किमी का 11 किमी से। (d) 30 मिनट का 45 मिनट से।

7. **निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(a) 30 मिनट का 1.5 घंटे से। (b) 40 सेमी का 1.5 मी से।

(c) 55 पैसे का 1 रुपया से। (d) 500 मिली का 2 लीटर से।

8. **एक वर्ष में सीमा की आय 150000 रु. है और वह 50,000 रु. की बचत करती है। अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(a) सीमा की आय और उसकी बचत का।

(b) सीमा द्वारा की गई बचत और उसके द्वारा किए गए खर्च का।

9. एक दर्जन पेन का मूल्य 180 रु. है और 8 बॉल पेन का मूल्य 56 रु. है। पेन के मूल्य का बॉल पेन के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. **कथन को देखें – एक हॉल की चौड़ाई और लंबाई का अनुपात 2 : 5 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई और लंबाई को दिखाती है।**

हॉल की चौड़ाई (मीटर में)	10	....	40	....
हॉल की लंबाई (मीटर में)	25	50	....	....

11. शीला और संगीता के बीच 20 पेनों को 3 : 2 में बाँटिए।

12. **पिता की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसके पुत्र की 14 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(a) पिता की वर्तमान आयु का पुत्र की वर्तमान आयु से।

(b) जब पुत्र 12 वर्ष का था तब पिता की आयु का पुत्र की आयु से।

(c) 10 वर्ष बाद पिता की आयु का पुत्र की आयु से।

(d) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 30 वर्ष का था।

13. **एक विद्यालय की छठवीं कक्षा में कुल छात्रों की संख्या 120 है। उसमें से 40 छात्र 'अ' वर्ग में 35 छात्र 'ब' वर्ग में और शेष 'स' वर्ग में पढ़ते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(i) कुल छात्रों का वर्ग 'अ' में पढ़ने वाले छात्रों के साथ।

(ii) कुल छात्रों का वर्ग 'स' में पढ़ने वाले छात्रों के साथ।

(iii) 'ब' वर्ग और 'अ' वर्ग के छात्रों का अनुपात।

(iv) 'ब' वर्ग के छात्रों का कुल छात्रों के साथ अनुपात।

10.3 समानुपात

दो सहेलियाँ आशमा और पंखुड़ी हेयर क्लिप खरीदने बाजार गईं। उन्होंने 30 रु में 20 हेयर क्लिप खरीदे। आशमा ने 12 रु. दिए और पंखुड़ी ने 18 रु. दिए। घर आने पर आशमा ने पंखुड़ी से 10 हेयर क्लिप देने को कहा। लेकिन पंखुड़ी ने कहा कि जब मैंने ज्यादा रुपये दिए हैं तो मुझे ज्यादा हेयर क्लिप मिलने चाहिए। उसके अनुसार, आशमा को 8 और उसे 12 हेयर क्लिप मिलने चाहिए।

क्या आप बता सकते हैं कि आशमा या पंखुड़ी में से सही कौन है? क्यों?

आशमा द्वारा दिए गए धन और पंखुड़ी द्वारा दिए गए धन का अनुपात = 12 रु. : 18 रु. = 2 रु. : 3 रु

आशमा के सुझाव के अनुसार, आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुड़ी के हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात = 10 : 10 = 1 : 1

पंखुड़ी के सुझाव के अनुसार, आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुड़ी के हेयर

क्लिप की संख्या का अनुपात = 8 : 12 = 2 : 3

आशमा द्वारा किए गए वितरण के अनुसार हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात, दिए गए धन के अनुपात के समान नहीं है, जो कि होना चाहिए था। जबकि पंखुड़ी द्वारा किए गए वितरण में दोनों परिस्थितियों में अनुपात समान है। अतः पंखुड़ी ने सही वितरण किया।

उदाहरण–1 : नीलू ने 15 रु. में 3 पेन खरीदे और पप्पू ने 50 रु. में 10 पेन खरीदे। किसके पेन महँगे थे?

हल : नीलू द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या और पप्पू द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या का अनुपात = 3 : 10

उनके मूल्यों का अनुपात = 15 : 50 = 3 : 10

3 : 10 और 15 : 50 समान हैं। इस प्रकार, दोनों ने समान मूल्य में पेन खरीदे।

उदाहरण–2 : रहीम ने 60 रु. में 2 किग्रा सेब और रोशन ने 120 रु. में 4 किग्रा सेब बेचे। किसने सेब महँगे बेचे?

हल : सेब के भारों का अनुपात = 2 किग्रा : 4 किग्रा = 1 : 2

मूल्यों का अनुपात = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

इस प्रकार सेब के भारों का अनुपात = मूल्यों का अनुपात

क्योकि दोनों अनुपात समान हैं, अतः हम कह सकते हैं कि ये समानुपात में हैं। वे दोनों समान मूल्यों पर सेब बेच रहे हैं।

यदि दो अनुपात एक समान हैं तो वे समानुपात में हैं और इन्हें समान करने के लिए ' : : ' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

स्वयं करके देखिए

जाँच कीजिए कि दिए गए अनुपात समान हैं अर्थात् वे समानुपात में हैं। यदि हाँ तो सही ढंग से लिखिए।

1. 1 : 5 और 3 : 15
2. 2 : 9 और 3 : 5
3. 15 : 45 और 5 : 25
4. 4 : 12 और 9 : 27
5. 10 रु. का 15 रु. और 4 का 6 से

समानुपात के कथन में, क्रम में ली गई चारों राशियाँ पद कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को चरम पद कहते हैं। दूसरे और तीसरे पद को मध्य पद कहते हैं।

उदाहरण के लिए 35 : 70 : : 2 : 4 में 35, 70, 2 और 4 पद हैं।

इसमें से 35 तथा 4 चरम पद हैं और 70 तथा 2 मध्य पद हैं।

प्रश्नावली – 10.2

1. क्या निम्न राशियाँ समानुपात में हैं?

(a) 15, 45, 40, 120
(b) 33, 121, 9, 96
(c) 24, 28, 36, 48
(d) 32, 48, 70, 210
(e) 4, 6, 8, 12
(f) 6, 8, 12, 16

2. निम्न में से प्रत्येक कथन के आगे सत्य या असत्य लिखिए। असत्य को सत्य बनाइए–

(a) 16 : 24 :: 20 : 30
(b) 21 : 6 :: 35 : 10
(c) 12 : 18 :: 28 : 12
(d) 8 : 9 :: 24 : 27
(e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4
(f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4

3. सही कथन के आगे (✓) का निशान लगाइए। गलत को सही बनाइए–

(a) 40 व्यक्ति : 200 व्यक्ति = 15 रु. : 75 रु.
(b) 7.5 ली : 15 ली = 5 किग्रा : 10 किग्रा
(c) 99 किग्रा : 45 किग्रा = 44 रु : 20 रु
(d) 32 मी : 64 मी = 6 सेकंड : 12 सेकंड
(e) 45 किमी : 60 किमी = 12 घंटे : 15 घंटे

4. जाँच कीजिए कि क्या निम्न अनुपात, समानुपात, बनाते हैं? यदि समानुपात बनता हो तो मध्य पद और चरम पद भी लिखिए–

(a) 25 सेमी : 1 मी और 40 रु. : 160 रु.

(b) 39 ली : 65 ली और 6 बोतल : 10 बोतल

(c) 2 किग्रा : 80 किग्रा और 25 ग्रा : 625 ग्रा

(d) 200 मिली : 2.5 ली और 4 रु. : 50 रु.

5. समानुपाती के गुण का उपयोग करते हुए रिक्त स्थान में भरी जाने वाली संख्या ज्ञात कीजिए–

(i) 15 : 5 : : ------- : 6

(ii) 22 : 10 : : 11 : -------

(iii) ------- : 12 : : 96 : 36

(iv) 19 : 95 : : 5 : -------

(v) 12 : ------- : : 14 : 21

6. एक विद्यालय में छात्र और छात्राओं का अनुपात 2 : 1 है। अब यदि कुल विद्यार्थियों की संख्या 510 है तो छात्राओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक परिवार की मासिक आय और व्यय का अनुपात 6 : 4 हैं। यदि परिवार की आय 6000 रु. है तो परिवार का मासिक व्यय क्या होगा?

अध्याय-11 ऐकिक नियम

दो मित्र रमेश और महेश सामान को खरीदने बाजार गए। रमेश केले खरीदने के लिए दूकान पर गया। उसने दुकानदार से केले का भाव पूछा। दुकानदार ने 8 केले की कीमत 16 रुपये बताया। रमेश 3 केले खरीदना चाहता था। रमेश सोच में पड़ गया कि वह दुकानदार को 3 केले का कितना मूल्य चुकाए?

रमेश ने महेश से पूछा, "दुकानदार को 3 केलों का कितना मूल्य दूँ।" महेश बोला, "हमें सबसे पहले एक केले का मूल्य निकालना होगा।"

जब 8 केलों की कीमत 16 रु. है, तो 1 केले की कीमत होगी = $\frac{16}{8} = 2$ रु.

चूँकि रमेश 3 केले खरीदना चाहता था, इसलिए महेश ने 3 केले की कीमत $3 \times 2 = 6$ रु. बता दी और रमेश ने 3 केले 6 रु. देकर खरीद लिए।

इस प्रश्न के हल में पहले हमने दी गई जानकारी से 1 वस्तु का मूल्य निकाला। फिर अभीष्ट वस्तुओं का मूल्य ज्ञात किया। यानि एक इकाई राशि अथवा वस्तु का मूल्य निकाल कर और फिर इस मूल्य से जितनी चाहिए उतने का मूल्य ज्ञात किया। इस विधि को ऐकिक विधि या ऐकिक नियम कहा जाता है।

आइए, हम कुछ और उदाहरणों को लें–

परिस्थिति I किशोर अपने मित्र मनीष के साथ कॉपियाँ खरीदने बाजार जाता है। किशोर 3 कॉपियाँ 15 रुपये में खरीदता है। क्या हम ज्ञात कर सकते हैं कि किशोर ने एक कॉपी कितने में खरीदी?

क्या हम यह भी बता सकते हैं कि 25 रुपये में कितनी कॉपियाँ खरीदी जा सकती हैं?

परिस्थिति II गुंजन अपने जन्म दिन पर अपने 15 दोस्तों को कोई छोटा-सा उपहार देना चाहती है। वह खिलौने की दुकान पर एक गाड़ी पसन्द करती है। यदि 120 रु. में 4 गाड़ियाँ मिलती हैं तो गुंजन के पास 15 गाड़ियाँ खरीदने के लिए कितने रुपये होने चाहिए?

परिस्थिति I

3 कॉपियों का मूल्य = 15 रु.

अतः 1 कॉपी का मूल्य = $\frac{15}{3}$ रु. = 5 रु.

अतः किशोर ने एक कॉपी 5 रुपये में खरीदी।

और 25 रु. में खरीदी कॉपियों की संख्या = $\frac{25}{5} = 5$

दूसरा तरीका :

15 रुपये में खरीदी गई कॉपियों की संख्या = 3

अतः 1 रुपया में खरीदी गई कॉपियों की संख्या = $\frac{3}{15}$ कॉपी

इसलिए 25 रुपये में खरीदी गई कॉपियों की संख्या $= \frac{3}{15} \times 25 = 5$

इस प्रकार 25 रुपये में 5 कॉपियाँ खरीदी जा सकती हैं।

परिस्थिति II

4 गाड़ियों का मूल्य = 120 रु.

अतः 1 गाड़ी का मूल्य = 120 रु. ÷ 4 = 30 रु.

तब 15 गाड़ियों का मूल्य = 30 x 15 = 450 रु.

अन्य उदाहरण

उदाहरण–1 : यदि एक कार समान गति से चलकर 240 किलोमीटर की दूरी 4 घंटे में तय करती है तो–

(a) उसी चाल से 180 किमी दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

(b) उसी चाल से 5 घंटे में कार कितनी दूरी तय करेगी?

हल : (a) इस स्थिति में दूरी ज्ञात है और समय अज्ञात है।

$\because$ (क्योंकि) 240 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा समय = 4 घंटे

$\therefore$ (इसलिए) 1 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा = $\frac{4}{240}$ घंटे

$\therefore$ (इसलिए) 180 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा समय = $\left(\frac{4}{240}\times 180\right)$ घंटे

= 3 घंटे

इस प्रकार 180 किमी की दूरी तय करने में कार को 3 घंटे लगेंगे।

हल : (b) इस स्थिति में दूरी अज्ञात है और समय ज्ञात है।

$\because$ 4 घंटे में तय की गई दूरी = 240 किलोमीटर

$\therefore$ 1 घंटे में तय की गई दूरी = (240 ÷ 4) किलोमीटर = 60 किलोमीटर

अतः 5 घंटे में तय की गई दूरी = 60 x 5 = 300 किलोमीटर

इस प्रकार 5 घंटे में 300 किमी की दूरी तय करेगी।

उदाहरण–2 : यदि किसी मजदूर की 25 दिनों की आय 1500 रु. है तो पूरे जनवरी महीने में उसकी आय ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि जनवरी माह में 31 दिन होते हैं।

$\because$ 25 दिनों की आय 1500 रुपये हैं।

$\therefore$ 1 दिन की आय = (1500 ÷ 25) रुपये

= 60 रुपये

∴ 31 दिनों की आय = (60 x 31) रुपये

= 1860 रुपये

इस प्रकार पूरे जनवरी माह में मजदूर को 1860 रु. की आय होगी।

प्रयास कीजिए

1. पाँच ऐसे ही प्रश्न बनाइए और उसका हल स्वयं या मित्रों की मदद से कीजिए।
2. नीचे दी सारणी को देखें। इस सारणी को देखकर हम यह बता सकते हैं कि 5 कि.ग्रा. आलू का मूल्य 75 रुपये है। अतः 1 कि.ग्रा. आलू का मूल्य = $\frac{75}{5} = 15$ रु.

   इसी प्रकार 3 कि.ग्रा. आलू का मूल्य = $15 \times 3 = 45$ रु. होगा।

इसी प्रकार आप अन्य मूल्य निकालकर सारणी के रिक्त स्थानों में भरें–

वजन (कि.ग्रा. में)	आलू का मूल्य (रुपये में)	टमाटर का मूल्य (रुपये में)	प्याज का मूल्य (रुपये में)
5	75	60	160
1	15		
3	45	36	
7			224
30			

प्रश्नावली – 11

1. यदि 8 किलोग्राम चीनी का मूल्य 240 रु. है तो 12 किलोग्राम चीनी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. किसी व्यक्ति ने एक पुस्तक की तीन प्रतियाँ 75 रु. में खरीदीं। बताइए कि 300 रु. में वह व्यक्ति पुस्तक की कितनी प्रतियाँ खरीद सकता है?
3. यदि 3 दर्जन केले का मूल्य 45 रुपये है तो बताइए कि 22.50 रु. में कितने केले खरीदे जा सकते हैं?
4. यदि एक छात्रावास में प्रति 8 बच्चों के लिए चावल की खपत 4 किलोग्राम है तो 30 ब्च्चों के लिए चावल की कितनी खपत होगी?
5. एक हवाई जहाज 5 घंटे में 4000 किमी उड़ता है। वह तीन घंटे में कितना उड़ेगा?
6. यदि 22 मीटर कपड़े का मूल्य 704 रु. है तो 20 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?
7. एक कार 3 घंटे में 165 किलोमीटर चलती है तो वह कार–
   (i) 440 किलोमीटर की दूरी कितने समय में तय करेगी?
   (ii) $6\frac{1}{2}$ घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?
8. एक महिला की 15 महीने की बचत 18000 रु. है तो–
   (a) उसकी सात महीने की बचत क्या होगी?
   (b) कितने महीने में उसकी बचत 30000 रु. होगी?
9. रेशमा 4 महीने का मकान किराया 5600 रु. देती है। यदि वर्षभर किराया समान रहे तो उसे पूरे वर्ष का किराया कितना देना होगा?
10. पिछले 30 दिन में तापमान 15° सेल्सियस बढ़ा। यदि तापमान की बढ़ोत्तरी इसी गति से जारी रही तो, अगले 10 दिन में तापमान कितने डिग्री और बढ़ेगा?
11. रामू ने 5 ओवर में 45 रन बनाए और अनूप ने 7 ओवर में 42 रन बनाए। एक ओवर में किसने अधिक रन बनाए?

अध्याय-12 बीजगणित

12.1 भूमिका

अभी तक हमने संख्याओं की मदद से दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं को हल करने का प्रयास किया है। गणित की वह शाखा जिसमें हमने संख्याओं का अध्ययन किया, अंकगणित (Arithmetic) कहलाती है। गणित की वह शाखा जिसमें हम आकृतियों अथवा आकारों का अध्ययन करते हैं, ज्यामिति (Geometry) कहलाती है। अब हम गणित की एक अन्य शाखा का अध्ययन शुरू करने जा रहे हैं जो बीजगणित (Algebra) है।

इस नई शाखा की मुख्य विशेषता यह है कि इसमें अक्षरों का प्रयोग करके हम नियमों और सूत्रों (Formulas) को व्यापक रूप में लिख पाने में समर्थ हो जाएँगे। अक्षरों के इस प्रयोग से, हम केवल एक विशेष संख्या की ही बात न करके, किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं। दूसरी बात यह है कि अक्षर अज्ञात राशियों के स्थान पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं। अज्ञात राशियों (Unknowns) को निर्धारित करने की विधियों को सीखकर हम दैनिक जीवन से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने के प्रभावशाली साधन विकसित कर सकते हैं।

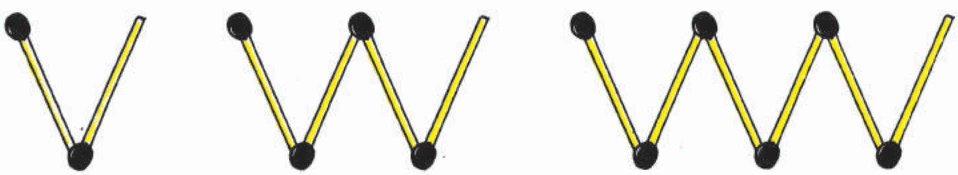
तीसरी बात यह है कि ये अक्षर संख्याओं के स्थान पर प्रयोग किए जाते हैं, इसलिए इन पर संख्याओं की तरह संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं। इससे हम बीजीय व्यंजकों (Algebraic expressions) और उनके गुणों के अध्ययन की ओर अग्रसर होते हैं।

भास्कराचार्य की पुस्तक में एक अध्याय बीजगणित पर है। भास्कर ने अज्ञात राशियों के लिए बीज, वर्ण इत्यादि नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों का प्रयोग किया। जैसे– काला से "का", नीला से "नी" इत्यादि। इन्होंने बीजगणित के क्षेत्र में ब्रह्मगुप्त के कार्यों को आगे बढ़ाते हुए समीकरणों को हल करने के लिए चक्रवाल का तरीका खोजा।

आइए अपने अध्ययन को सरल उदाहरणों द्वारा प्रारंभ करके यह देखते हैं कि बीजगणित समस्याओं के हल करने में किस प्रकार उपयोगी रहता है।

12.2 माचिस की तीलियों से बने प्रतिरूप

राम और श्याम माचिस की तीलियों से प्रतिरूप (pattern) बनाना चाहते हैं। उन्होंने अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों के सरल प्रतिरूप बनाने का निर्णय किया। राम दो तीलियाँ लेकर अक्षर V बनाता है जैसा कि आकृति (a) में दिखाया गया है। फिर श्याम भी दो तीलियाँ लेता है और एक अन्य V बनाकर राम द्वारा बनाए गए V के आगे रख देता है, जैसा कि आकृति (b) में दिखाया गया है।



(a) (b) (c)

(आकृति–1)

फिर श्याम एक और V बनाकर आगे रख देता है और यह सिलसिला आगे जारी रहता है, जैसा कि आकृति (c) में दर्शाया गया है।

तभी सलमा वहाँ आ जाती है। वह इस प्रतिरूप को देखती है। सलमा उन दोनों से पूछता है कि आठ V बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी? राम और श्याम सुचारू रूप से कार्य करते हैं। वे 1V, 2V, 3V, इत्यादि से प्रतिरूप बनाते रहते हैं और एक सारणी बनाते हैं–

सारणी – 1

बनाए गए V की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	–	–
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	–	–

सलमा को सारणी–1 से अपना उत्तर प्राप्त हो जाता है। आठ V बनाने के लिए 16 तीलियों की आवश्यकता होगी।

सारणी बनाते समय श्याम यह अनुभव करता है कि आवश्यक तीलियों की संख्या बनाए गए V की संख्या की दो गुनी है अर्थात् आवश्यक तीलियों की संख्या $=2 \times$ V की संख्या।

हम सुविधा के लिए, V की संख्या के लिए n लिख सकते हैं।

यदि एक V बनाया जाता है तो $n = 1$ है,

यदि 2V बनाए जाते हैं तो $n = 2$ है, इत्यादि।

इस प्रकार, n कोई भी प्राकृत संख्या 1, 2, 3, 4, 5 .... हो सकती है।

अतः हम लिखते हैं, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times n$,

$2 \times n$ लिखने के स्थान पर हम इसे 2n लिखते हैं। ध्यान दीजिए 2n और $2 \times n$ एक ही है।

श्याम अपने मित्रों से कहता है कि उसका यह नियम कितनी भी संख्या में V बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या बता सकता है।

इस प्रकार $n = 1$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 1 = 2$;

$n = 2$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 2 = 4$;

$n = 3$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 3 = 6$; इत्यादि

राम कहता है, "यह नियम बहुत प्रभावशाली है। इस नियम का प्रयोग करके मैं 100V बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या भी बता सकता हूँ। एक बार नियम ज्ञात हो जाय, तो मुझे प्रतिरूप खींचने या सारणी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होगी।"

क्या आप राम के कथन से सहमत हैं?

12.3 चर

ऊपर के उदाहरण में हमने V का एक प्रतिरूप बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए एक नियम ज्ञात किया था। नियम यह था–

आवश्यक तीलियों की संख्या = 2n

यहाँ n, V के प्रतिरूपों की संख्या है और n के मान 1, 2, 3, 4 .... हो सकते हैं।

आइए, सारणी–1 को पुनः देखते हैं। जब n का मान बढ़ता है तो आवश्यक तीलियों की संख्या भी बढ़ती जाती है।

n चर (variable) का एक उदाहरण है। इसका मान स्थिर (fixed) नहीं है, यह कोई भी मान 1, 2, 3, 4 .... ले सकता है। हमने आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए n का प्रयोग करके नियम लिखा।

चर शब्द का अर्थ है– 'बदलने वाला'। अर्थात् जिसका मान स्थिर नहीं है। यह विभिन्न मान ले सकता है।

हमने चर को दर्शाने के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है। रमेश पूछता है– "m क्यों नहीं?" सरिता ने कहा, "n में कोई विशेष बात नहीं है, किसी भी अक्षर का प्रयोग किया जा सकता है।"

इस प्रकार एक चर को दर्शाने के लिए हिन्दी या अंग्रेजी वर्णमाला के किसी भी अक्षर जैसे अ, ब, स, द या क, ख, ग, घ या a, b, c या p, q, r या x, y, z इत्यादि का प्रयोग किया जा सकता है। इन्हीं अक्षरों को हम चरांक या बीजांक भी कहते हैं।

उदाहरण : बाजार के एक जनरल स्टोर से प्रवीण, किशोर एवं मुन्नी टॉफी का एक-एक पैकेट खरीदकर अपने मित्र रवि को जन्म दिन पर उपहार स्वरूप देना चाहते हैं। टॉफी के हर पैकेट में 20 टॉफियाँ हैं परन्तु टॉफियां अलग-अलग क़िस्म की हैं। कैसे पता करें की कौन-सी टॉफी वे खरीद सकते हैं? हम पता कर सकते हैं कि टॉफी का पैकेट खरीदने के लिए कितनी धनराशि की आवश्यकता पड़ेगी?

यदि 1 टॉफी का मूल्य 1 रु. है तो पैकेट का मूल्य 20 x 1 रु. = 20 रुपये होगा

यदि 1 टॉफी का मूल्य 2 रु. है तो पैकेट का मूल्य 20 x 2 रु. = 40 रुपये होगा

हम सब मिलकर एक सारणी बनाते हैं–

सारणी – 2

टॉफी का मूल्य (रुपयों में)	1	2	3	--	x	y	--
पैकेट का मूल्य (रुपयों में)	20	40	60	--	20 x	20y	--

यहाँ x और y उस टॉफी का मूल्य व्यक्त करता है जिसे बच्चे खरीदना चाहते हैं। यहाँ x और y चर राशियाँ हैं जिसका कोई भी मान 1, 2, 3, 4 .... हो सकता है। प्रत्येक टॉफी

का मूल्य x हो अथवा y रुपये की दर से हो तो पूरे पैकेट का कुल मूल्य–

(रुपये में) $= 20x$ (जब 1 टॉफी का मूल्य x रुपये हो)

$= 20y$ (जब 1 टॉफी का मूल्य y रुपये हो)

उनके पास कितना पैसा है इसके आधार पर तय कर सकते हैं कि कौन-सी टॉफी लें। x रु प्रति टॉफी या y रु प्रति टॉफी या कोई अन्य।

ऊपर के उदाहरण में एक चर को एक संख्या से गुणा किया गया है परन्तु स्थितियाँ ऐसी भी हो सकती हैं, जहाँ संख्याओं को चरों में जोड़ा या चरों में से घटाया जाए, इसके लिए दूसरा उदाहरण लें–

राकेश मुकेश से 5 वर्ष बड़ा है। यदि मुकेश की उम्र 10 वर्ष है तो राकेश की उम्र 15 वर्ष होगी। इसी प्रकार मुकेश की उम्र कुछ भी हो राकेश की उम्र उससे 5 वर्ष अधिक ही होगी।

हम मुकेश की उम्र को x से दर्शाएँगे। यहाँ x एक चर है जो मान 1, 2, 3, 4 .... ले सकता है। x का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि राकेश की उम्र $= x + 5$ है। व्यंजक $(x+5)$ को 'x धन (plus) 5' पढ़ा जाता है।

प्रश्नावली – 12.1

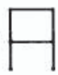
1. **तीलियों से निम्न प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए चर का प्रयोग कीजिए–**

(a) अक्षर U का के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

(b) अक्षर Z का के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

(c) अक्षर B का के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

(d) अक्षर S का के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

(e) अक्षर A का  के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

2. गणतंत्र दिवस पर बच्चे सामूहिक ड्रिल का प्रदर्शन कर रहे हैं। एक पंक्ति में 10 बच्चे हैं। यदि पंक्तियों की संख्या ज्ञात हो, तो बच्चों की संख्या प्राप्त करने के लिए क्या नियम है? (पंक्तियों की संख्या के लिए चर a का प्रयोग कीजिए।)

3. एक टोकरी में 60 केले हैं। आप टोकरियों की संख्या के पदों में केले की कुल संख्या को किस प्रकार लिखेंगे? (टोकरियों की संख्या के लिए b का प्रयोग कीजिए।)

4. रानी अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को जन्म दिन के उपलक्ष्य पर दो-दो टॉफियाँ बाँटती है। विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होने पर क्या आप कुल टॉफियों की संख्या के लिए सूत्र बता सकते हैं? (विद्यार्थियों की संख्या के लिए m का प्रयोग कीजिए।)

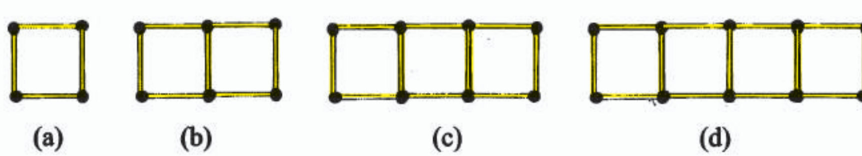
5. सीमा गुड़िया की बड़ी बहन है। सीमा गुड़िया से 5 वर्ष बड़ी है तो–

   (a) सीमा की आयु गुड़िया की आयु के पदों में लिखें।

   (b) जब गुड़िया की आयु x वर्ष है तो सीमा की आयु बताइए।

6. अमरूद की बड़ी टोकरियों में से छोटी टोकरियों में अमरूद को रखा जाना है। जब एक बड़ी टोकरी को खाली किया जाता है तो उसके अमरूदों से तीन छोटी टोकरियाँ भर जाती हैं और फिर भी 25 अमरूद शेष रह जाते हैं। यदि एक छोटी टोकरी में अमरूदों की संख्या को x लिया जाय, तो एक बड़ी टोकरी में अमरूदों की संख्या क्या है?

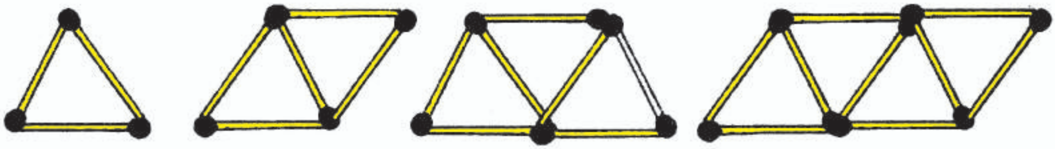
7. (a) तीलियों से बने हुए वर्गों के नीचे दिए हुए प्रतिरूपों (आकृति 2) को देखिए ये वर्ग अलग-अलग नहीं हैं। दो संलग्न वर्गों में एक तीली उभयनिष्ठ है। इस प्रतिरूप को देखिए और वह नियम ज्ञात कीजिए जो वर्गों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



(a) (b) (c) (d)

(आकृति–2)

   (b) तीलियों से बने त्रिभुजों का एक प्रतिरूप (आकृति–3) दर्शा रही है। व्यापक नियम ज्ञात कीजिए जो त्रिभुजों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



(a) (b) (c) (d)

(आकृति–3)

12.4 सामान्य नियमों में चरों का प्रयोग

आइए अब हम सब देखें कि गणित की दूसरी शाखा से सम्बन्धित कुछ ऐसे सामान्य नियम, जिन्हें हम पहले ही पढ़ चुके हैं, किस प्रकार चरों का प्रयोग करते हुए व्यक्त किए जा सकते हैं।

12.4.1 अंकगणित के नियम

1. दो संख्याओं के योग की क्रम विनिमेयता

हम जानते हैं कि 3 + 5 = 8 और 5 + 3 = 8 है।

अर्थात् 3 + 5 = 5 + 3 है।

जैसा कि हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में देख चुके हैं, किसी भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए यह सत्य है। संख्याओं का यह गुण संख्याओं के योग की **क्रम विनिमेयता** कहलाता है। क्रम विनिमेय' का अर्थ है 'क्रम उलटना'। योग में संख्याओं के क्रम को बदलने से उनके योग में कोई परिवर्तन नहीं आता। चरों का प्रयोग, इस गुण को एक संक्षिप्त रूप में व्यक्त करता है। मान लीजिए कि a और b दो चर हैं जो किसी भी संख्या का मान ले सकते हैं।

तब, $a + b = b + a$ होता है।

एक बार जब हम इस नियम को इस रूप में लिख लेते हैं तो इसमें सभी विशिष्ट स्थितियाँ सम्मिलित हो जाती हैं। यदि $a = 3$ और $b = 6$ है तो हमें $3 + 6 = 6 + 3$ प्राप्त होता है। यदि $a = 7$ और $b = 5$ है तो हमें $7 + 5 = 5 + 7$ प्राप्त होता है, इत्यादि।

2. दो संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता

हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं के गुणन में, जिन दो संख्याओं का गुणा किया जाता है उनके क्रम को उलटने से गुणनफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

उदाहरणार्थ $5 \times 6 = 30$ और $6 \times 5 = 30$ है।

अतः $5 \times 6 = 6 \times 5$ है।

संख्याओं का यह गुण संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता कहलाती है। गुणन में क्रम को बदलने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं आता है। योग की तरह ही चर a और b का प्रयोग करके हम दो संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता को $a \times b = b \times a$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ a और b किसी भी संख्या का मान ले सकते हैं।

इस व्यापक नियम द्वारा सभी विशिष्ट स्थितियाँ, जैसे– $3 \times 5 = 5 \times 3$ या $7 \times 5 = 5 \times 7$ इत्यादि प्राप्त हो जाती हैं।

3. संख्याओं की वितरणता

हम जानते हैं–

$$5 \times 48 = 5 \times (40 + 8)$$
$$= 5 \times 40 + 5 \times 8$$
$$= 200 + 40 = 240$$

$5 \times (40+8) = (5 \times 40) + (5 \times 8)$ अतः 5 से 48 के गुणा को 40 और 8 के योग पर वितरित (Distribute) किया जा सकता है। यह 5, 40 और 8 ही नहीं, किन्हीं भी तीन संख्याओं के लिए सत्य है। यह गुण संख्याओं के योग पर **गुणन की वितरणता (Distributivity of multiplication over addition of numbers)** कहलाती है। हम चरों का प्रयोग करके, संख्याओं के इस गुण को भी व्यापक और साथ-ही-साथ संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं।

मान लीजिए कि a, b और c कोई तीन चर हैं और इनमें से प्रत्येक किसी भी संख्या का मान ग्रहण कर सकता है। तब,

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

संख्याओं के गुण अति आकर्षक होते हैं। चरों का प्रयोग, हमें इन गुणों को व्यापक और संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है।

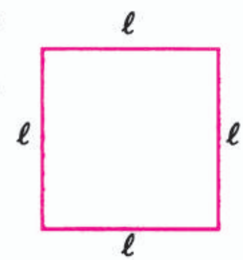
संख्याओं के ऐसे ही कुछ और गुण ज्ञात कीजिए और उन्हें चरों का प्रयोग करते हुए व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

12.5 क्षेत्रमिति से नियम

हम क्षेत्रमिति (Mensuration) के अध्याय में वर्ग के परिमाप और आयत के परिमाप के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। अब उन्हें एक नियम के रूप में लिखने के लिए वापस चलते हैं।

1. वर्ग का परिमाप

हम यह जानते हैं कि एक बहुभुज (3 या अधिक रेखाखंडों से बनी बंद आकृति) का परिमाप (Perimeter) उसकी भुजाओं का लम्बाइयों का योग होता है। वर्ग में चार भुजाएँ होती हैं और प्रत्येक की लम्बाई बराबर होती है।



(आकृति–4)

अतः वर्ग का परिमाप $=$ वर्ग की भुजाओं की लम्बाइयों का योग

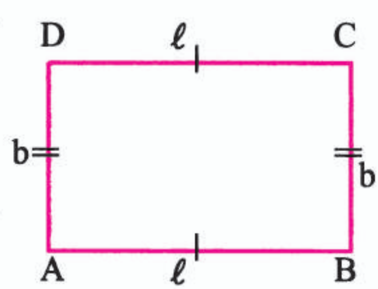
$= \ell + \ell + \ell + \ell$

$= 4\ell$

इस प्रकार, हम वर्ग के परिमाप का एक नियम प्राप्त कर लेते हैं। चर ℓ का प्रयोग कर हम एक व्यापक नियम लिख पाते हैं।

2. आयत का परिमाप

हम जानते हैं कि एक आयत की चार भुजाएँ होती हैं। उदाहरण के लिए आयत ABCD (आकृति–5) की चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA हैं। एक आयत की सम्मुख भुजाएँ सदैव बराबर होती हैं। इसलिए, आइए आयत ABCD की भुजाओं AB और CD की लम्बाई को ℓ से व्यक्त करें और भुजाओं AD और BC की लम्बाई को b से व्यक्त करें।



(आकृति–5)

अतः, आयत का परिमाप = AB की लम्बाई + BC की लम्बाई + CD की लम्बाई +AD की लम्बाई

$= \ell + b + \ell + b$

$= (\ell + \ell) + (b + b)$

$= 2\ell + 2b$

आयत का परिमाप $2\ell + 2b$, जहाँ ℓ और b क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं।

$\ell = b$ होने पर क्या होगा? यदि आयत के परिमाप को चर p से व्यक्त करें, तो आयत के परिमाप का नियम होगा $p = 2\ell + 2b = 2\ell + 2\ell = 4\ell$, जो कि वर्ग के परिमाप के लिए है।

प्रश्नावली – 12.2

1. **साहचर्य का नियम–** तीन संख्याओं 15, 28 और 14 के योग पर विचार कीजिए। हम यह योग दो प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं–

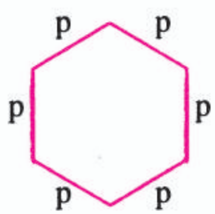
   (a) हम पहले 15 और 28 को जोड़कर 43 प्राप्त कर सकते हैं और 43 में 14 जोड़कर कुल योग 57 प्राप्त कर सकते हैं। या

   (b) हम पहले 28 और 14 को जोड़कर 42 प्राप्त कर सकते हैं और फिर इसे 15 में जोड़कर कुल योग 57 प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार $(15 + 28) + 14 = 15 + (28 + 14)$ हुआ।

   ऐसा किसी भी तीन संख्याओं के लिए किया जा सकता है। यह गुण संख्याओं के योग का साहचर्य (Associative) गुण कहलाता है। इस गुण को चर a, b और c का प्रयोग करते हुए एक व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

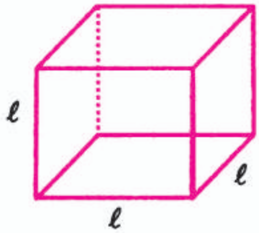
2. समबाहु त्रिभुज की एक भुजा को k से दर्शाया जाता है। इस समबाहु त्रिभुज के परिमाप को k का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।

3. एक समषड्भुज (Regular hexagon) (आकृति–6) की एक भुजा को p से व्यक्त किया गया है। p का प्रयोग करते हुए इस समषड्भुज के परिमाप को व्यक्त कीजिए। (संकेत– एक समषड्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण बराबर होते हैं।)



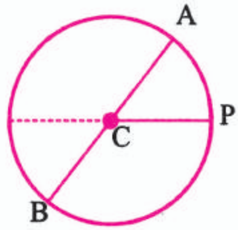
(आकृति–6)

4. घन (cube) एक त्रिविमीय (Three dimensional) आकृति है, जैसा कि आकृति 7 में दिखाया गया है। इसके 6 फलक होते हैं और ये सभी सर्वसम (Identical) वर्ग होते हैं। घन के एक किनारे की लम्बाई ℓ से दी जाती है। घन के किनारों की कुल लम्बाई के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए।



(आकृति–7)

5. वृत्त का व्यास वह रेखाखंड है जो वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को जोड़ता है और उसके केन्द्र से होकर जाता है। वृत्त की त्रिज्या (r) उस पर स्थित किसी बिन्दु P को केन्द्र C से जोड़ने वाली रेखाखंड की लम्बाई है। संलग्न आकृति–8 में AB वृत्त का व्यास है और C उसका केन्द्र है। वृत्त के व्यास (d) को उसकी त्रिज्या (r) के पदों में व्यक्त कीजिए।



(आकृति–8)

12.6 चरों वाले व्यंजक

आइए हम कुछ अंक गणितीय व्यंजकों (Expressions) का उदाहरण लें :

$2 \times 10 + 3$, $\quad -4 \times 3 + 5$,

$8 - 5 \times 2$, $\quad 14 - (5-2)$,

$3 \times 6 - 5$ $\quad 5 \times 7 - 3 \times 4$ इत्यादि

ये उपर्युक्त व्यंजक 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 इत्यादि जैसी संख्याओं से बनते हैं। ऐसे व्यंजकों को बनाने के लिए चारों संक्रियाओं योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन का प्रयोग किया जा सकता है।

व्यंजकों को चरों का प्रयोग करके भी प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए 2n, 6m, x + 12, y – 3 इत्यादि चरों वाले व्यंजक हैं। चरों वाले ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करने के बाद प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक 2n चर n को 2 से गुणा करने पर बनता है, व्यंजक (x + 12) चर x में 12 जोड़ने पर बनता है इत्यादि।

हम जान चुके हैं कि चर विभिन्न मान ले सकते हैं, इनका कोई निश्चित मान नहीं होता है। परंतु ये संख्याएँ हैं। इसी कारण संख्याओं की ही तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं।

एक महत्त्वपूर्ण बात ध्यान देने योग्य है कि एक संख्यात्मक व्यंजक जैसे–

5 x 4 + 6 का मान निकाला जा सकता है।

उदाहरणार्थ 5 x 4 + 6 = 20 + 6 = 26

परन्तु (5x + 6) जैसे व्यंजक, जिसमें एक चर x आ रहा है, का मान निकालना संभव नहीं है। यदि चर x का मान दिया हो, केवल तभी व्यंजक का मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ जब x = 4 है, तो

5x + 6 = 5 x 4 + 6 = 26 है, जो पहले भी प्राप्त हुआ था।

नीचे हम देखेंगे कि व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं।

	व्यंजक	कैसे बनाया गया
(a)	$x + 5$	x में 5 जोड़ने पर
(b)	$y - 4$	y में 4 घटाने पर
(c)	$7a$	a को 7 से गुणा करने पर
(d)	$\frac{m}{5}$	m को 5 से भाग देने पर
(e)	$2x-y$	पहले x में 2 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में से y घटाने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं। हमें व्यंजक को तब भी बना पाना चाहिए, जब निर्देश दिए जाएँ कि उसे कैसे बनाना है। निम्नलिखित उदाहरण को देखिए–

(a)	y में 7 जोड़ने पर मिली संख्या	$y + 7$
(b)	10 में से x घटाने पर मिली संख्या	$10 - x$
(c)	y की 5 गुनी संख्या	$5y$
(d)	x में 8 का भाग देने पर मिली संख्या	$\frac{x}{8}$
(e)	m का –5 से गुणा करने पर मिली संख्या	$-5m$
(f)	y में 10 से गुणा और फिर गुणनफल में 7 जोड़ना	$10y + 7$

ऐसे ही दस और तरीके लिखिए और इनसे बने व्यंजक बनाइए।

प्रश्नावली – 12.3

1. आप तीन संख्याओं 7, 10 और 12 से संख्याओं वाले (चर नहीं) जितने व्यंजक बना सकते हैं बनाइए। एक संख्या का एक से अधिक बार प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए। केवल योग, व्यवकलन (घटाना) और गुणन संक्रियाओं का ही प्रयोग करें। (उदाहरणार्थ $10 + 7 - 12$)

2. निम्नलिखित में से कौन-से केवल संख्याओं वाले व्यंजक हैं?

   (a) $x + 5$ (d) $7y$

   (b) $10 \times 9 - 7$ (e) $9 - 9z$

   (c) $5 \times 4 - zy$ (f) $5 \times 17 - 4 \times 16 + 3x$

3. निम्न व्यंजकों को बनाने में प्रयुक्त संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन) को देखिए और बताइए कि ये व्यंजक किस प्रकार बनाए गए हैं?

   (a) $x + 9$ (b) $x - 9$ (c) $13y$ (d) $\frac{y}{13}$

   (e) $2y + 15$ (f) $2y - 15$ (g) $7p$ (h) $-7p + 2$ (i) $-7p - 3$

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए–

   (a) a में 5 जोड़ना (e) m में से 7 घटाना

   (b) a में 5 घटाना (f) –m को 7 से गुणा करना

   (c) a को 5 से गुणा करना (g) –m को 7 से भाग देना

   (d) a को 5 से भाग देना (h) m को –5 से गुणा करना

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए–

   (a) m के 7 गुना में 6 जोड़ना

   (b) 2a में 13 जोड़ना

   (c) x का –5 से गुणा करना

   (d) x को –5 से गुणा करके परिणाम में 10 जोड़ना

   (e) x को 5 से गुणा करके परिणाम में 15 घटाना

   (f) y को –5 से गुणा करके परिणाम को 18 में जोड़ना

6. (a) k और 9 का प्रयोग करके अलग-अलग व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में दोनों एक-एक बार होने चाहिए।

(b) m, 5 और 7 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में m अवश्य होना चाहिए। हर व्यंजक केवल दो अलग-अलग संख्या संक्रियाओं का प्रयोग करें।

12.7 व्यावहारिक रूप से व्यंजकों का प्रयोग

हमारे व्यावहारिक जीवन में कई ऐसी परिस्थितियाँ आती है जहाँ व्यंजकों का उपयोग करना जरूरी होता है। आइए ऐसी परिस्थितियों को जानने का प्रयत्न करें–

क्र. सं.	परिस्थिति में वर्णित (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
1.	सोनू की उम्र मोनू से 5 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए मोनू की उम्र x वर्ष है।	सोनू की उम्र (x+5) वर्ष है।
2.	गुड़िया सीमा से 3 वर्ष छोटी है।	मान लीजिए सीमा की आयु x वर्ष है।	गुड़िया की आयु (x–3) वर्ष है।
3.	राकेश के पिता की आयु राकेश की आयु के दोगुने से 10 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए राकेश की आयु x वर्ष है।	राकेश के पिता की आयु (2x+10) वर्ष है।
4.	विकास की आयु मनोज की आयु की तिगुनी है।	मान लीजिए मनोज की आयु x वर्ष है।	विकास की आयु 3x वर्ष है।
5.	आज़ से 7 वर्ष पहले राधा की आयु क्या थी?	मान लीजिए राधा की वर्तमान आयु y वर्ष है	आज से 7 वर्ष पहले राधा की आयु (y–7) वर्ष थी।
6.	आज प्रति लीटर तेल का मूल्य प्रति किलोग्राम चावल के मूल्य का 4 गुना है।	मान लीजिए चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य pरु. है।	प्रति लीटर तेल का मूल्य 4p रु. है।
7.	चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य गेहूँ के प्रति कि.ग्रा. मूल्य से 2 रु. अधिक है।	मान लीजिए प्रति किग्रा गेहूँ का मूल्य p रु. है।	चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य (p+2) रु. है।
8.	एक कार की चाल उसी सड़क पर जाते हुए एक बस की चाल से 20 कि.मी./घंटा अधिक है।	मान लीजिए बस की चाल x कि.मी./घंटा है।	कार की चाल (x+20) कि.मी./घंटा है।

ऐसी ही कुछ अन्य परिस्थितियों को ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आप अनुभव करेंगे कि साधारण भाषा में वर्णित ऐसे अनेक कथन आपको देखने को मिलेंगे जहाँ पर आप चरों वाले व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथनों में बदल सकते हैं।

प्रश्नावली – 12.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) सुशीला की वर्तमान आयु x वर्ष लीजिए–

(i) बताइए 5 वर्ष पूर्व उसकी आयु कितनी थी?

(ii) बताइए 4 वर्ष बाद वह कितने वर्ष की हो जाएगी?

(iii) सुशीला के दादाजी की आयु सुशीला के आयु की 7 गुनी है। उसके दादाजी की आयु क्या है?

(iv) सुशीला की बड़ी बहन की आयु सुशीला की आयु के दोगुने से 3 वर्ष कम है। उसकी बड़ी बहन की आयु क्या है?

(b) एक आयताकार हॉल की लम्बाई उसकी चौड़ाई के दोगुने से 5 मीटर अधिक है। यदि चौड़ाई b मीटर है, तो लम्बाई क्या है?

(c) एक आयताकार बक्से की ऊँचाई h सेमी है। इसकी लम्बाई, ऊँचाई की 3 गुनी है और चौड़ाई, लम्बाई से 7 सेमी कम है। बक्से की लम्बाई और चौड़ाई को ऊँचाई के पदों में व्यक्त कीजिए।

(d) एक बस x किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यह पटना से राजगीर की ओर जा रही है। बस के 3 घंटे चलने के बाद राजगीर की दूरी 22 किमी बची रह जाती है। x का प्रयोग करते हुए पटना से राजगीर की दूरी बताइए।

2. व्यंजकों के प्रयोग से बने निम्न कथनों को साधारण भाषा के कथनों में बदलिए–
(उदाहरणार्थ हमारी कक्षा में x विद्यार्थी हैं और स्कूल में 15x विद्यार्थी हैं। साधारण भाषा में स्कूल में विद्यार्थियों की कुल संख्या हमारी कक्षा के विद्यार्थियों की 15 गुनी है।)

(a) राखी के पास x रुपये हैं। उसकी सहेली के पास 3 x रुपये हैं।

(b) एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य p रु. है। एक पुस्तक का मूल्य 4 p रु. है।

(c) सुरेश के पास y बकरियाँ हैं। रमेश के पास $\frac{y}{4}$ बकरियाँ हैं।

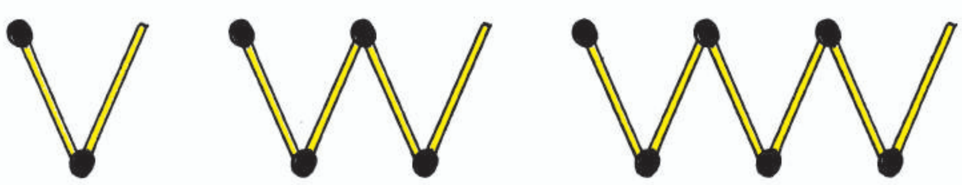
(d) मोहन की आयु r वर्ष है। उसके पिताजी की आयु 4r वर्ष है और उसकी माँ की आयु (4r – 5) वर्ष है।

3. (a) सपना की आयु x वर्ष दी हुई है। बताइए (x+5) और (x–3) क्या दर्शाएँगे?

(b) दिया हुआ है कि एक कक्षा के m विद्यार्थी टेलीविजन देखना पसंद करते हैं। 3m क्या दर्शाएगा तथा $\frac{m}{2}$ क्या दर्शाएगा?

12.8 एक समीकरण क्या है?

आइए आकृति – 1 में दी हुई तीलियों से बने अक्षर V के प्रतिरूप को याद करें। अपनी सुविधा के लिए हमने यहाँ आकृति–1 पुनः बनाई है जिसे नीचे दिखाया गया है–



विभिन्न संख्याओं के V बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या सारणी–1 में दी गई है। हम इस सारणी को पुनः यहाँ बना रहे हैं।

सारणी–1

बनाए गए V की संख्या	1	2	3	4	5	6	....
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	....

हम जान गए हैं कि आवश्यक तीलियों की संख्या को निम्न नियम से प्राप्त किया जा सकता है –

2n यदि n बनाए गए V की संख्या है।

सलमा पूछती है कि V की संख्या दी हुई हो तो आवश्यक तीलियों की संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है? और इसके विपरीत यदि माचिस की तीलियों की संख्या दी हुई हो तो V की संख्या कैसे ज्ञात की जा सकती है?

हम अपने आपसे पूछते हैं यदि 12 तीलियाँ दी हुई हो, तो कितने V बनेंगे? हम कह सकते हैं कि– $2n = 12$ ----- (1) दी हुई है।

यहाँ हम एक प्रतिबंध प्राप्त करते हैं, जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए। यह प्रतिबंध समीकरण (equation) का एक उदाहरण है।

हमारे प्रश्न का उत्तर सारणी–1 को देखकर प्राप्त किया जा सकता है। n के विभिन्न मानों को देखिए। यदि n=1, तो तीलियों की संख्या 2 है। स्पष्टतः प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हुआ है, इसी प्रकार हम इसकी जाँच कर सकते हैं।

n	2n	क्या प्रतिबंध संतुष्ट है? हाँ/नहीं
1	2	नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	नहीं
6	12	हाँ
7	14	नहीं

हम पाते हैं कि केवल n = 6 के लिए उपर्युक्त प्रतिबंध अर्थात् समीकरण 2n = 12 संतुष्ट हो जाता है। 6 के अतिरिक्त किसी भी अन्य मान के लिए यह समीकरण संतुष्ट नहीं होता है। आइए एक अन्य उदाहरण को देखें।

मोनू, सोनू से 3 वर्ष छोटा है। सोनू की आयु x वर्ष लेने पर, मोनू की आयु (x–3) वर्ष होगी। मान लीजिए कि मोनू की आयु 9 वर्ष है। तब, देखें कि किस प्रकार हम सोनू की आयु ज्ञात करते हैं। हमें मोनू की आयु = x – 3 = 9 ------- (2) प्राप्त है।

यह चर x में एक समीकरण है। हम x के विभिन्न मानों के लिए (x–3) के मानों की एक सारणी बनाते हैं।

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x–3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-	-

जिन प्रविष्टियों को रिक्त छोड़ा गया है उन्हें पूरा कीजिए सारणी से हम देखते हैं कि केवल x = 12 के लिए प्रतिबंध x – 3 = 9 संतुष्ट होता है। अन्य किसी भी मान जैसे x = 13 या x = 11 के लिए प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता। अतः सोनू की आयु 12 वर्ष है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है **हर समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। यह चर के निश्चित मान के लिए ही संतुष्ट होता है।** समीकरण 2n = 12 चर n के मान 6 से ही संतुष्ट होता है। इसी प्रकार, समीकरण

x–3 = 9 चर x के मान 12 से ही संतुष्ट होता है।

यहाँ ध्यान दीजिए कि एक समीकरण के दोनों पक्षों के बीच में समता चिह्न (=) होता है। समीकरण बताता है कि बाएँ पक्ष (वाम पक्ष) (LHS) का मान दाएँ पक्ष (दक्षिण पक्ष) (RHS) के मान के बराबर है।

यदि बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष के बराबर न हो तो हमें समीकरण प्राप्त नहीं होता। जैसे– यह कथन कि 2n संख्या 12 से बड़ा है, अर्थात् 2n > 12 यह एक समीकरण नहीं है। इसी प्रकार