131/2 335(EB)

2018

गणित

द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, रैखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा त्रिविमीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

नोट : (i) इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।
(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : (i) There are in all **eight** questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.
(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.
(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
(v) Start from the first question and proceed to the last.
(vi) Do not waste time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $2x + 3y = \sin x$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ख) $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

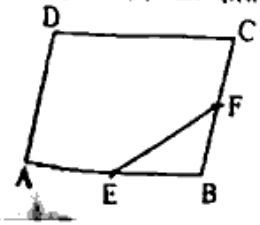
(ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण की कोटि एवं घात बताइये :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ 1

(घ) किसी ΔABC में सिद्ध कीजिए कि

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ 1

(ङ) चित्र में ABCD एक समान्तरचतुर्भुज है, जिसमें AB तथा BC का मध्य बिन्दु क्रमशः E तथा F हैं। यदि $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ हो, तो सदिश $\overrightarrow{EF}$ ज्ञात कीजिए। 1



1. Attempt any **four** parts of the following :

(a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ of the function $2x + 3y = \sin x$. 1

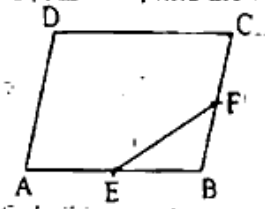
(b) Evaluate $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x}\, dx$ 1

(c) State the order and degree of the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ 1

(d) In any Δ ABC, prove that $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{O}$ 1

(e) In figure ABCD is a parallelogram, middle points of sides AB and BC are E and F. If $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, find the vector $\overrightarrow{EF}$. 1



2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) प्रथम सिद्धान्त से $\cos^{-1}x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(ख) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तो दर्शाइए कि सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ लम्बवत् हैं। 2

(घ) फलन $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1 + x^6}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ङ) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1 + y^2}{y}\right)$ को हल कीजिए। 2

2. Attempt any **four** parts of the following :

(a) Find the differential co-efficient of $\cos^{-1}x$ from first principle. 2

(b) Evaluate $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$. 2

(c) If $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, show that vector $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ are perpendicular 2

(d) Evaluate $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1 + x^6}\, dx$. 2

(e) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1 + y^2}{y}\right)$ 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्र $y = x^2 - 4x - 5$ के बिन्दु $x = -2$ पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

(ख) फलन $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए। 2

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1 + y^2}{x}\right) = 0$ को हल कीजिए। 2

(घ) सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाण 8 इकाई है। 2

(ङ) एक कण पर तीन बल $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - 4\hat{j}$ और $-3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ लग रहे हैं, सिद्ध कीजिए कि कण सन्तुलन की अवस्था में है। 2

3. Attempt any four parts of the following :

(a) Find the equation of the tangent to the curve $y = x^2 - 4x - 5$ at the point $x = -2$. 2

(b) Evaluate $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ w.r.t. x 2

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1+y^2}{x}\right) = 0$. 2

(d) Find a vector parallel to the given vector $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, and its magnitude is 8 unit. 2

(e) Three forces $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - 4\hat{j}$ and $-3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ are acting on a particle. Prove that the particle will be in rest. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $\sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 3

(ख) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+\sin y}$ को हल कीजिए। 3

(घ) यदि $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ हो, तो ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

4. Attempt any three parts of the following :

(a) Find the differential co-efficient of the function $\sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$ w.r.t. x. 3

(b) Evaluate $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 3

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+\sin y}$ 3

(d) If $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, find the area of the Δ OAB. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

(क) परवलय $y^2 = 16x$ के उस अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष से 60° का कोण बनाता है। उस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए, जहाँ पर यह अभिलम्ब है। 3

(ख) एक फल विक्रेता सेब व संतरे खरीदने में ₹ 500 की पूँजी लगा सकता है। उसकी दुकान में फलों की केवल 12 पेटियाँ ही रखी जा सकती हैं। सेब की एक पेटी ₹ 50 और संतरों की एक पेटी ₹ 25 की आती है। वह सेब की प्रति पेटी ₹ 10 और संतरों की एक पेटी ₹ 6 के लाभ से बेच सकता है। यह मानकर कि वह खरीदी हुई सभी पेटियाँ बेच सकता है। उसे सेब और संतरों की कितनी-कितनी पेटियाँ खरीदनी चाहिए ताकि उसे अधिकतम लाभ हो ? 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$. 3

(घ) प्रदर्शित कीजिए कि सदिशों $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण 60° है। 3

5. Attempt any three parts of the following :

(a) To find the equation of the normal of the parabola $y^2 = 16x$, which cuts the axis of x at 60° angle. Also find the co-ordinate of the point where this normal is. 3

(b) A fruit seller can invest ₹ 500 to purchase apples and oranges. Only 12 boxes of fruits can be placed in his shop. Cost of one box of apples is ₹ 50 and one box of oranges is ₹ 25. He can sell with a profit of ₹ 10 per box of apples and ₹ 6 per box of oranges. If he sells all the boxes, then how many boxes of apples and oranges should he purchase, so that he could get maximum profit ? 3

(c) Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$ 3

(d) Show that angle between vectors $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ is 60°. 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि एक निश्चित आयतन के शंकाकार डेरे के बनाने में कम से कम कपड़ा लगेगा जब उसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या में अनुपात $\sqrt{2} : 1$ हो। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$. 4

6. Attempt any one part of the following :

(a) Show that a minimum cloths use to make definite volume of conical tent when height and radius of the base of the cone is in the ratio of $\sqrt{2} : 1$. 4

(b) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$. 4

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए; यदि अन्तराल [a, b] में $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, जहाँ $a = 1$, $b = 3$ है। $f(c) = 0$ के लिए $c \in (1, 3)$ को ज्ञात कीजिए।

(ख) परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

7. Attempt any one part of the following :

(a) Verify the mean value theorem for the function $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ in the interval [a, b], where $a = 1$, $b = 3$. Find $f(c) = 0$ where $c \in (1, 3)$. 4

(b) Find the area enclosed between parabola $y^2 = 4ax$ and straight line $y = 2ax$. 4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि रेखाएँ

$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ तथा

$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ सह-तलीय हैं। 4

(ख) ग्राफीय विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए :
निम्न अवरोधों के अन्तर्गत
$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$
$z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए। 4

8. Attempt any one part of the following :

(a) Show that the straight lines

$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ and

$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ are coplanar. 4

(b) Solve the linear programming problem by graphical method with the following restrictions :
$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ and
maximize $z = 3x + 4y$. 4