પરિશિષ્ટ 2

ગાણિતિક નમૂના

A.2.1 પ્રાસ્તાવિક

છેલ્લી કેટલીક સદીઓથી વિવિધ ક્ષેત્રો જેમકે વિજ્ઞાન, નાણાવ્યવસ્થા, સંચાલન વગેરેની મોટા ભાગની ગતિમાં ઉદ્‌ભવતી વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગાણિતિક પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવો આવશ્યક બને છે. ડિજિટલ કમ્પ્યૂટર અને ગણતરીની પદ્ધતિઓની વધતી જતી શક્તિના લીધે જીવનની વાસ્તવિક સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગણિતના ઉપયોગનો બહોળો પ્રસાર થયો તેમજ આ બંનેના કારણે સરળતાથી ખૂબ જ લાંબી અને જટિલ સમસ્યાઓનો ઉકેલ હાથવગો થયો.

વાસ્તવિક જીવનની અમુક સમસ્યાઓનું ગાણિતિક સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરી તેના ઉકેલને સારી રીતે રજૂ કરી શકાય છે. આ રૂપાંતરણની ક્રિયાને ગાણિતિક નમૂના મેળવવાની પદ્ધતિ કહે છે.

અહીં અમે તમને ઉદાહરણો દ્વારા આ વિધિમાં ઉપયોગમાં લેવાતા સોપાનોથી પરિચિત કરીશું. સૌ પ્રથમ આપણે ગાણિતિક નમૂનો શું છે તેની વાત કરીશું અને પછી ગાણિતિક નમૂના બનાવવાની પ્રક્રિયામાં આવતાં સોપાનોની ચર્ચા કરીશું.

A.2.2 પ્રાથમિકતાઓ

વિશ્વને સમજવા માટે ગાણિતિક નમૂના એ આવશ્યક સાધન છે. જૂના જમાનામાં ચાઈનિઝ, ઇજિપ્શયન, ભારતીય, બેબીલોનીઅન અને ગ્રીક પ્રજા ગણિતના જ્ઞાન દ્વારા કુદરતી ઘટનાઓની આગાહી કરતાં હતાં. શિલ્પી, કસબી અને હસ્તકલાના મોટા ભાગની કલાકારીગરી ભૂમિતિના સિદ્ધાંત પર આધારિત હતી.

ધારો કે એક સર્વેયરને ટાવરની ઊંચાઈ માપવી છે. માપપટ્ટીથી આ ઊંચાઈ માપવી મુશ્કેલ છે. આ ઊંચાઈ માપવા માટેનાં કયાં પરિબળો છે તે શોધવું એ બીજો વિકલ્પ છે. જો સર્વેયર ઉત્સેધકોણ અને જ્યાં તે ઊભો છે ત્યાંથી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર જાણતા હોય, તો ત્રિકોણમિતિના જ્ઞાનથી ટાવરની ઊંચાઈની ગણતરી કરી શકે.

આથી તેનું કામ હવે ટાવરના ટોચનો ઉત્સેધકોણ અને તે જ્યાં ઊભો છે ત્યાંથી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર શોધવાનું

રહે છે. તે બંને સરળતાથી માપી શકાય છે. આમ, જો ઉત્સેધકોણ $40°$ હોય અને અંતર 450 મી હોય, તો આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઉદાહરણ 1માં આપેલ છે.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પરના બિંદુ O થી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ $40°$ છે તથા ટાવરના જમીન પરના બિંદુથી O નું અંતર 450 મી છે. ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આપણે આ પ્રશ્નને જુદાં જુદાં સોપાનોથી ઉકેલીશું.

સોપાન 1 : પ્રથમ આપણે વાસ્તવિક સમસ્યાને સમજીશું. પ્રશ્નમાં ટાવર આપેલ છે અને તેની ઊંચાઈ માપવાની છે. ધારો કે તેની ઊંચાઈ h છે. જમીન પરના કોઈક બિંદુ O થી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર 450 મી આપેલ છે. ધારો કે આ અંતર d છે. તેથી $d = 450$ મી. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, θ વડે દર્શાવેલ ઉત્સેધકોણ $40°$ છે.

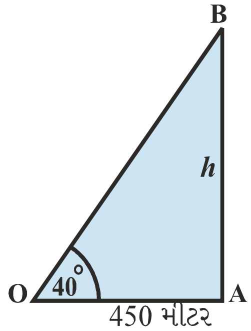
અંતર d અને ઉત્સેધકોણ θ આપેલ હોય ત્યારે ઊંચાઈ h શોધવી તે વાસ્તવિક સમસ્યા છે.

સોપાન 2 : પ્રશ્નમાં ત્રણ વસ્તુઓ દર્શાવેલ છે; ઊંચાઈ, અંતર અને ઉત્સેધકોણ છે. તો આપણે આ ત્રણેને સાંકળતો સંબંધ મેળવીશું. પ્રશ્નને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવીને આ સંબંધ મેળવી શકાય. (આકૃતિ 1)

AB ટાવર દર્શાવે છે. OA એ બિંદુ O થી ટાવરના જમીન પરના બિંદુ વચ્ચેનું સમક્ષિતિજ અંતર છે. $\angle AOB$ એ ઉત્સેધકોણ છે.

આમ, $$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ અથવા } h = d\ \tan\theta \qquad \dots (1)$$

આ θ, h અને d ને સાંકળતું સમીકરણ છે.



આકૃતિ 1

સોપાન 3 : આપણે h શોધવા માટે સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ કરીશું. આપણી પાસે $\theta = 40°$ અને $d = 450$ મી છે.

$$\therefore\ h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6 \text{ મી}$$

સોપાન 4 : આમ આપણે ટાવરની ઊંચાઈ આશરે 378 મી મેળવી.

ચાલો આપણે આ પ્રશ્નને ઉકેલવા માટે જે જુદાં જુદાં સોપાનોનો ઉપયોગ કર્યો છે તેના વિશે વિચારીએ. સોપાન 1 માં આપણે વાસ્તવિક સમસ્યાનો અભ્યાસ કર્યો અને તેમાં ત્રણ પ્રચલ, ઊંચાઈ, અંતર અને ઉત્સેધકોણ આવેલ છે તેમ નક્કી કર્યું. એટલે કે આ સોપાનમાં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાનો અભ્યાસ કર્યો અને પ્રચલને ઓળખ્યા.

સોપાન 2 માં આપણે ભૂમિતિનો ઉપયોગ કર્યો અને આકૃતિ 1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપણે શોધ્યું કે આપેલ સમસ્યાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ કરી શકાય છે. પછી *"tangent"* વિધેયના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરી

$h = d \tan\theta$ સંબંધ સ્થાપિત કર્યો.

આમ, આ સોપાનમાં આપણે સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કર્યું. એટલે કે આપણે આ વાસ્તવિક સમસ્યાને દર્શાવતું સમીકરણ શોધ્યું.

સોપાન 3 માં આપણે ગાણિતિક પ્રશ્નનો ઉકેલ શોધ્યો અને $h = 377.6$ મી પ્રાપ્ત કર્યા. એટલે કે આપણે સમસ્યાનો ઉકેલ શોધ્યો.

છેલ્લા સોપાનમાં આપણે પ્રશ્નના ઉકેલનું અર્થઘટન કર્યું અને દર્શાવ્યું કે ટાવરની ઊંચાઈ આશરે 378 મી છે. આપણે આને

વાસ્તવિક સમસ્યાના ગાણિતિક ઉકેલનું અર્થઘટન કરવું એમ કહીએ છીએ.

ખરેખર ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને બીજા બધા જ્યારે વાસ્તવિક જીવનની જુદી જુદી સમસ્યાઓનો અભ્યાસ કરે છે ત્યારે આ સોપાનો હોય છે.

જ્યાં જુદી જુદી પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવા માટે ગણિતનો ઉપયોગ અસરકારક રીતે થાય છે એવાં અમુક ઉદાહરણો નીચે આપ્યાં છે :

1. માનવ અને અન્ય તમામ પ્રાણીઓમાં શરીરના વિવિધ ભાગોમાં ઑક્સિજન અને અન્ય પોષક તત્ત્વોને પ્રવાહિત કરવા માટે રક્તનો યોગ્ય પ્રવાહ આવશ્યક છે. રક્તવાહિનીમાં કોઈ પણ પ્રકારનું સંકોચન અથવા રક્તવાહિનીઓની લાક્ષણિકતાઓમાં કોઈ ફેરફાર પ્રવાહને બદલી શકે છે અને તેનાથી અસુવિધાથી માંડીને અચાનક મૃત્યુ સુધીની ક્ષતિ થઈ શકે છે. રક્તપ્રવાહ અને રક્તવાહિનીની શારીરિક લાક્ષણિકતાઓ વચ્ચેનો સંબંધ શોધવો એ સમસ્યા હોય છે.
2. ક્રિકેટમાં ત્રીજા અમ્પાયર બૅટ્સમૅન ત્યાં નથી એવું ધારીને દડાના પથનું અનુકરણ કરીને પ્રથમ LBW નો નિર્ણય કરે છે. બૅટ્સમૅનના પગને દડો વાગે તે પહેલાંના તેના જાણીતા પથના ગાણિતિક સમીકરણ પર આવી શકાય છે. આ અનુકરણ નમૂનાની મદદથી LBWનો નિર્ણય લઈ શકાય છે.
3. હવામાનશાસ્ત્રના વિભાગ હવામાનની આગાહી ગાણિતિક નમૂનાઓના આધારે કરે છે. હવામાનની પરિસ્થિતિમાં ફેરફારને અસર કરતાં અમુક પરિબળો તાપમાન, હવાનું દબાણ, ભેજ, પવનની ઝડપ વગેરે છે. આ પરિબળો માપવા માટે તાપમાન માપવા માટે થરમૉમિટર, હવાનું દબાણ માપવા માટે બેરોમિટર, ભેજ માપવા માટે ભેજમાપક *(hygrometer)*, પવનની ઝડપ માપવા માટે એનેમોમિટર જેવાં સાધનો વપરાય છે. એકવાર દેશભરનાં વિવિધ કેન્દ્રો પાસેથી માહિતી પ્રાપ્ત થાય પછી કમ્પ્યૂટરની મદદથી તેનું વધુ વિશ્લેષણ અને અર્થઘટન કરવામાં આવે છે.
4. કૃષિવિભાગ ભારતમાં ઉત્પાદિત થતા પાકમાંથી ચોખાની ઊપજનો અંદાજ કાઢવા માંગે છે. વૈજ્ઞાનિકો ચોખાની ખેતીના વિસ્તારોને ઓળખી કાઢે છે અને કેટલાંક પ્રતિનિધિ ક્ષેત્રોમાંથી પાકની લણણી અને વજનના આધારે એકર દીઠ સરેરાશ ઊપજ શોધી કાઢે છે. આંકડાશાસ્ત્રીય તકનિકોના આધારે ચોખાની સરેરાશ ઊપજનો નિર્ણય કરવામાં આવે છે.

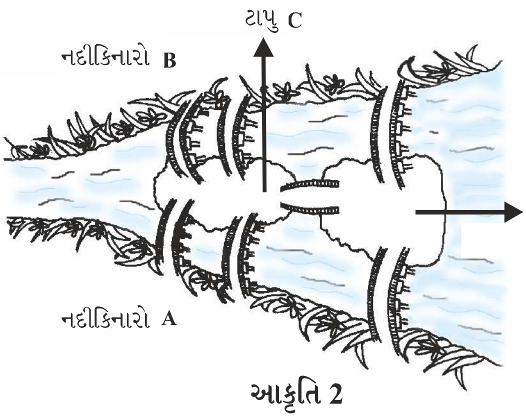
ગણિતશાસ્ત્રીઓ આવી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે કેવી રીતે મદદ કરે છે ? તે જે-તે ક્ષેત્રના નિષ્ણાતો સાથે બેસે છે. ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પ્રશ્નમાં શરીરવિજ્ઞાની સાથે કામ કરીને સમસ્યાને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં તૈયાર કરે છે. આ ગાણિતિક સ્વરૂપ એક અથવા વધુ સમીકરણો અથવા અસમતાઓ ધરાવે છે. તેમને આપણે ગાણિતિક નમૂના કહીએ છીએ. ત્યાર બાદ આ નમૂનાનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે અને તે ઉકેલનું મૂળ સમસ્યાના સંદર્ભમાં અર્થઘટન કરવામાં આવે છે.

આ પ્રક્રિયા સમજાવતા પહેલાં આપણે ગાણિતિક નમૂના શું છે તેની ચર્ચા કરીશું.

ગાણિતિક નમૂનો એ પરિસ્થિતિના આકલનની રજૂઆત છે. એક રસપ્રદ ભૌમિતિક નમૂનો પૃષ્ઠ 388 પરના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે :

ઉદાહરણ 2 : (સેતુ સમસ્યા) કોનિગ્સબર્ગ એ પ્રીગલ નદી પર આવેલું શહેર છે. તે 18મી સદીમાં જર્મન શહેર હતું, પરંતુ હવે તે રશિયામાં છે. શહેરની અંદર નદીના બે ટાપુઓ અને નદીના બે કિનારા આકૃતિ 2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સાત પુલ દ્વારા જોડાયેલા છે.

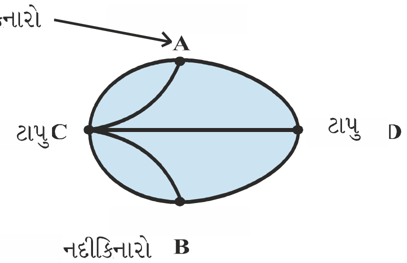
લોકો શહેરની આસપાસ ફક્ત એકવાર દરેક પુલનો ઉપયોગ કરીને ચાલવાનો પ્રયાસ કરતા હતા, પરંતુ તે મુશ્કેલ સમસ્યા સાબિત થઈ હતી. રશિયન સામ્રાજ્ય કેથેરિન ધી ગ્રેટમાં નોકરી કરતા સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્રી ***Leonhard Euler*** એ આ સમસ્યા વિશે સાંભળ્યું.



આકૃતિ 2

ઈ. સ. 1736 માં ઑઇલરે સાબિત કર્યું કે ઉપરની શરત પ્રમાણે ચાલી શકાય નહિ. તેણે જેને જાળગૂંથણી કહે છે તે રેખાકૃતિ શોધી અને તેણે પરિણામ સાબિત કર્યું. આ જાળગૂંથણી જ્યાં રેખાઓ મળે તે બિંદુઓ અને જીવાઓ (રેખાઓ)થી બનેલી હોય છે. (આકૃતિ 3).

તેણે નદીના બે કિનારા તથા બે ટાપુઓ માટે ચાર બિંદુઓ (શિરોબિંદુઓ)નો ઉપયોગ કર્યો. તે આકૃતિમાં A, B, C, D વડે દર્શાવેલ છે. સાત પુલ માટે સાત રેખાઓ છે. તમે જોઈ શકો છો કે 3 પુલ નદીના કિનારા A સાથે જોડાયેલ છે અને 3 પુલ નદીના કિનારા B સાથે જોડાયેલ છે. 5 પુલ ટાપુ C સાથે તથા 3 પુલ ટાપુ D સાથે જોડાયેલ છે. આનો અર્થ એમ થાય કે જીવાઓ બધાં શિરોબિંદુઓને અયુગ્મ સંખ્યામાં મળે છે. તેથી તેને અયુગ્મ શિરોબિંદુ કહે છે. (જીવાઓ યુગ્મ શિરોબિંદુને યુગ્મ સંખ્યામાં મળે.) યાદ રાખો કે શહેરની આસપાસ દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરવાનો છે. આનો અર્થ એમ થાય કે ઑઇલરની જાળગૂંથણીમાં દરેક જીવાનો ફક્ત એક વખત ઉપયોગ કરીને દરેક શિરોબિંદુ પર જઈ શકાતું હોવું જોઈએ. ઑઇલરે સાબિત કર્યું કે, આ થઈ શકે નહિ. કારણ કે તેણે બતાવ્યું કે અયુગ્મ શિરોબિંદુ હોય ત્યારે તમારે સફરની શરૂઆત અથવા અંત તે જ શિરોબિંદુથી કરવો પડે. (આના વિશે વિચારો.)

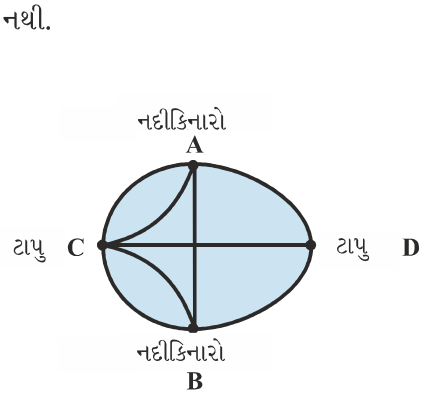


આકૃતિ 3

અહીં ફક્ત એક જ શરૂઆત અને એક અંત છે તથા જો તમારે દરેક જીવાનો ફક્ત એક જ વાર ઉપયોગ કરવાનો હોય તો ફક્ત બે જ અયુગ્મ શિરોબિંદુ હોય. પરંતુ આ પ્રશ્નમાં 4 અયુગ્મ શિરોબિંદુ છે તેથી આમ કરવું શક્ય નથી.

ઑઇલરે તેનો પ્રમેય સાબિત કર્યા પછી કોનિગ્સબર્ગના પુલ હેઠળ ઘણું પાણી વહી ગયું છે. ઈ. સ. 1875માં કોનિગ્સબર્ગમાં ટાપુઓ અને નદીના કિનારા A તથા B ને જોડતો એક વધારાનો પુલ બાંધવામાં આવેલ છે. (આકૃતિ 4) હવે કોનિગ્સબર્ગના લોકો માટે દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને શહેરની આસપાસ ફરી શકાય ?

અહીં પરિસ્થિતિ આકૃતિ 4 પ્રમાણે છે. નવી ધાર ઉમેરવાથી બંને શિરોબિંદુઓ A અને B યુગ્મ શિરોબિંદુઓ થશે. પરંતુ D અને C અયુગ્મ શિરોબિંદુઓ છે. આમ, કોનિગ્સબર્ગના લોકો શહેરની આસપાસ દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને જઈ શકે છે.



આકૃતિ 4

જાળગૂંથણીની શોધના કારણે એક નવા સિદ્ધાંત "*ગ્રાફ થિઅરી*" *(Graph Theory)*ની શરૂઆત થઈ. આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ રેલવેના નેટવર્કનું આયોજન અને નકશો બનાવવા તેમજ બીજા ઘણા પ્રકારે થાય છે. (આકૃતિ 4)

A.2.3 ગાણિતિક નમૂના શું છે ?

અહીં આપણે ગાણિતિક નમૂના શું છે તે વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને તેમાં આવતી ભિન્ન પ્રક્રિયાઓ ઉદાહરણ દ્વારા દર્શાવીશું.

વ્યાખ્યા : ગાણિતિક નમૂના એ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાના અમુક ભાગનો ગાણિતિક શબ્દોમાં અભ્યાસ કરવાનો એક પ્રયત્ન છે.

ભૌતિક પરિસ્થિતિના યોગ્ય શરતો દ્વારા ગણિતમાં રૂપાંતરણને ગાણિતિક નમૂના તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ગાણિતિક નમૂના એ બીજું કંઈ જ નથી પરંતુ જે મૂળભૂત હોય તેવું *પ્રવિધિ* અને *અધ્યાયન શાસ્ત્ર* છે. તે વિજ્ઞાનમાંથી નહિ પરંતુ કલા-ક્ષેત્રમાંથી લેવામાં આવેલ છે.

ચાલો આપણે ગાણિતિક નમૂનામાં આવતી ભિન્ન પ્રક્રિયાઓને સમજીએ. આ પ્રક્રિયામાં ચાર સોપાન આવેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે નમૂના તરીકે સરળ લોલકની ગતિના અભ્યાસનો વિચાર કરીએ.

સમસ્યાની સમજ

ઉદાહરણ તરીકે સાદા લોલકની ગતિની પ્રક્રિયાની સમજ મેળવીએ. આપણે સાદા લોલકથી પરિચિત છીએ. આ લોલકમાં એક દોરીના છેડે વજન લગાવેલું હોય છે. (જે લોલક તરીકે ઓળખાય છે.) તેનો બીજો છેડો એક બિંદુએ નિશ્ચિત હોય છે. આપણે અભ્યાસ કર્યો છે કે સાદા લોલકની ગતિ આવર્તી હોય છે. આ આવર્તમાન દોરીની લંબાઈ અને ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે ઉત્પન્ન થતા પ્રવેગ પર આધાર રાખે છે. એટલે કે આપણે આવર્તમાન જાણવું જરૂરી છે. આના આધારે આપણે સમસ્યાને ચોક્કસ વિધાનમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

વિધાન : આપણે સાદા લોલકનું આવર્તમાન કેવી રીતે શોધી શકીએ ?

હવે પછીનું સોપાન એ સૂત્રો ઘડવાનું છે. સૂત્રો ઘડવાની પ્રક્રિયા બે મુખ્ય સોપાન ધરાવે છે.

1. સંબંધિત પરિબળો ઓળખવા

આમાં આપણે સમસ્યામાં કયાં પરિબળો/પરિમાણોનો સમાવેશ થાય છે તે શોધીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે લોલકના કિસ્સામાં આંદોલનોનું આવર્તમાન (T), લોલકનું વજન (m), આલંબન બિંદુથી લોલકના ગુરુત્વકેન્દ્ર વચ્ચેના અંતર જેટલી લોલકની અસરકારક લંબાઈ (l) છે. અહીં કોઈ સ્થળે આપણે દોરીની લંબાઈ એટલે કે લોલકની અસરકારક લંબાઈ છે અને ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે પ્રવેગ (g) અચળ છે તેમ ધારીશું.

આથી આપણે આ સમસ્યાનો અભ્યાસ કરવા માટે ચાર પરિબળો ઓળખ્યાં. હવે આપણો ઉદ્દેશ T શોધવાનો છે. આના માટે આપણે સમજવું જરૂરી છે કે, આવર્તમાન પર કયાં પરિબળો અસર કરે છે તે એક સરળ પ્રયોગ કરીને જોઈ શકાશે.

આપણે બે ભિન્ન દળવાળા ધાતુના દડા લઈશું અને દરેકને બે સરખી લંબાઈની દોરીની સાથે લટકાવીને પ્રયોગ કરીશું. આપણે આંદોલનકાળ માપીશું. આપણે નોંધીશું કે દળથી આંદોલનકાળમાં કોઈ નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો નથી. હવે, આપણે સરખા દળવાળા દડા અને ભિન્ન લંબાઈની દોરી લઈને પ્રયોગ કરીશું. આપણે અવલોકન કરીશું કે આવર્તનકાળ એ લોલકની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે. આ દર્શાવે છે કે આવર્તનકાળ શોધવા માટે દળ m એ આવશ્યક પરિબળ નથી, જ્યારે l એ આવશ્યક પરિબળ છે.

હવે પછીના સોપાન પર જતાં પહેલાં આવશ્યક પરિબળ શોધવાની પ્રક્રિયા જરૂરી છે.

2. ગાણિતિક વર્ણન

આમાં જાણીતાં પરિબળોનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણ શોધવું, અસમતા શોધવી અથવા ભૌમિતિક આકૃતિ દોરવાની ક્રિયાઓનો સમાવેશ થાય છે. સાદા લોલકના કિસ્સામાં l ની ભિન્ન કિંમતો માટે આવર્તનકાળ T માપવા માટે પ્રયોગ કર્યો. આ કિંમતો પરથી આલેખ દોરવામાં આવ્યો અને પરિણામે તે પરવલય વક્ર જેવો દેખાય તેવું જાણવા મળ્યું. આના પરથી T અને l વચ્ચેનો સંબંધ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$T^2 = kl \qquad \dots (1)$$

અગાઉથી જ્ઞાત છે કે $k = \frac{4\pi^2}{g}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \dots (2)$$

સમીકરણ (2) એ સમસ્યાનું ગાણિતિક સૂત્રો ઘડવાની પ્રક્રિયા છે.

ઉકેલ શોધવા : ગાણિતિક સૂત્રો ક્યારેક જ સીધો જવાબ આપે છે. સામાન્ય રીતે આપણે સમીકરણનો ઉકેલ, ગણતરી અથવા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરવો વગેરે કામગીરી કરવાનો સમાવેશ થાય છે. સાદા લોલકના કિસ્સામાં તેનો ઉકેલ સૂત્ર (2)નો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય છે.

ભિન્ન લંબાઈ ધરાવતા બે ભિન્ન લોલકના આવર્તનકાળની ગણતરી કોષ્ટક 1માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 1

l	225 સેમી	275 સેમી
T	3.04 સે	3.36 સે

કોષ્ટક l બતાવે છે કે $l = 225$ સેમી માટે T = 3.04 સેકન્ડ અને $l = 275$ સેમી માટે T = 3.36 સેકન્ડ

અર્થઘટન/યથાર્થતા

ગાણિતિક નમૂના એ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાની આવશ્યક લાક્ષણિકતાનો અભ્યાસ કરવાનો એક પ્રયત્ન છે. ઘણી વખત ગાણિતિક નમૂનામાં આદર્શ પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં સમીકરણ મેળવાય છે. જો ગાણિતિક નમૂના આપણે સમજવા ઇચ્છતા હોઈએ તે તમામ હકીકતો સમજાવે તો તે નમૂના ઉપયોગી થશે. અન્યથા આપણે તેને નકારી કાઢીશું, અથવા સુધારો કરીશું પછી ફરીથી પરીક્ષણ કરીશું. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, *વાસ્તવિક સમસ્યાની જાણીતી હકીકતો સાથે આપણે ગાણિતિક નમૂનાથી મેળવેલાં પરિણામોની સરખામણી કરીને તેની અસરકારકતા માપીશું. આ ક્રિયાને નમૂનાની યથાર્થતા કહે છે.* સાદા લોલકના કિસ્સામાં આપણે અમુક પ્રયોગો કરીને લોલકનો આવર્તનકાળ શોધીશું. પ્રયોગોના પરિણામ કોષ્ટક 2 માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 2

પ્રયોગો દ્વારા ચાર ભિન્ન લોલકના આવર્તનકાળ

દળ (ગ્રામ)	લંબાઈ (સેમી)	સમય (સેકન્ડ)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

હવે, આપણે કોષ્ટક 2ની માપેલી કિંમતોની કોષ્ટક 1માં ગણતરી કરીને મેળવેલી કિંમતો સાથે સરખામણી કરીશું.

પ્રયોગો દ્વારા મેળવેલ કિંમત અને ગણતરી કરીને મેળવેલી કિંમતના તફાવતને ત્રુટિ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $l = 275$ સેમી અને દળ $m = 385$ ગ્રામ માટે,

$$\text{ત્રુટિ} = 3.371 - 3.36 = 0.011 \text{ ઓછી છે અને નમૂનાને સ્વીકારીશું.}$$

એક વખત આપણે નમૂનાને સ્વીકારીએ પછી આપણે તેનું અર્થઘટન કરવું પડે. *વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં ઉકેલનું વર્ણન કરવાની ક્રિયાને ગાણિતિક નમૂનાનું અર્થઘટન કહેવામાં આવે છે.* આ કિસ્સામાં આપણે ઉકેલનું નીચે પ્રમાણે અર્થઘટન કરીશું :

(a) આવર્તમાન લોલકની લંબાઈના વર્ગમૂળના સમચલનમાં છે.

(b) તે ગુરુત્વપ્રવેગના વર્ગમૂળના વ્યસ્ત ચલનમાં છે.

આ નમૂનાની આપણી માન્યતા અને અર્થઘટન દર્શાવે છે કે, ગાણિતિક નમૂનાથી મળેલ કિંમતો પ્રયોગ દ્વારા મેળવેલ કિંમતો સાથે સુસંગત થાય છે. પરંતુ આપણે એવું શોધ્યું કે ગણતરીથી મેળવેલ કિંમતો અને પ્રયોગોથી મેળવેલ કિંમતોમાં થોડીક ત્રુટિ હોય છે. આ એટલા કારણે થાય છે કે આપણે દોરીનું વજન તથા માધ્યમના અવરોધને અવગણ્યો છે. આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે આ પ્રક્રિયાને ચાલુ રાખીને વધુ સારા નમૂનાનો વિચાર કરીએ. આ આપણને એક અગત્યના નિરીક્ષણ તરફ દોરી જાય છે. વાસ્તવિક દુનિયા સમજવી અને તેનું સંપૂર્ણપણે વર્ણન કરવું ખૂબ જ જટિલ છે. આપણે પરિસ્થિતિને પ્રભાવિત કરતા હોય તેવા સંપૂર્ણપણે સચોટ ફક્ત એક કે બે મુખ્ય પરિબળોને પસંદ કરીએ છીએ. પછી જે પરિસ્થિતિ વિશે કંઈક માહિતી આપતા હોય તેવો સરળ નમૂનો મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. આ સ્થિતિમાં વધુ સારો નમૂનો મળશે તેવી અપેક્ષા રાખીને આપણે આ નમૂના દ્વારા સરળ પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરીએ છીએ. ગાણિતિક નમૂના મેળવવા માટેની મુખ્ય પ્રક્રિયાનો સારાંશ આ મુજબ થશે :

(a) સૂત્રો ઘડવા (b) ઉકેલ (c) અર્થઘટન/યથાર્થતા

હવે પછીના ઉદાહરણમાં આપણે ગાણિતિક નમૂના દ્વારા અસમતાઓનો ઉકેલ આલેખની મદદથી મેળવી શકાય છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 3 : એક ખેત-ઘર દરરોજ ઓછામાં ઓછો 800 કિગ્રા વિશિષ્ટ ખોરાકનો ઉપયોગ કરે છે. આ વિશિષ્ટ ખોરાક મકાઈ અને સોયાબીનના મિશ્રણથી નીચે પ્રમાણે બનાવવામાં આવે છે :

કોષ્ટક 3

સામગ્રી	કિગ્રા દીઠ પોષક તત્ત્વો પ્રોટીન	કિગ્રા દીઠ પોષક તત્ત્વો રેષા	કિગ્રા દીઠ કિંમત
મકાઈ	0.09	0.02	₹ 10
સોયાબીન	0.60	0.06	₹ 20

વિશિષ્ટ ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં ઓછામાં ઓછું 30 % પ્રોટીન અને વધુમાં વધુ 5 % રેષા હોવા જોઈએ. આ ખોરાકના મિશ્રણની દૈનિક ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : પગલું 1 : અહીં આપણો હેતુ મકાઈ અને સોયાબીનમાંથી બનાવેલ ખોરાકની દૈનિક કિંમત ન્યૂનતમ હોય તે છે. આથી પૃષ્ઠ 392 પરના ચલોનો વિચાર કરીએ.

x = મકાઈનું વજન

y = સોયાબીનનું વજન

z = કિંમત

પગલું 2 : કોષ્ટક 3 નો છેલ્લો સ્તંભ z એ x, y વચ્ચેના સંબંધનું સમીકરણ સૂચવે છે.

$$z = 10x + 20y \quad \text{... (1)}$$

નીચે પ્રમાણેની શરતોને અધિન z ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધવાની સમસ્યા છે :

(a) ખેત-ઘર ઓછામાં ઓછો 800 કિગ્રા મકાઈ અને સોયાબીન મિશ્રિત ખોરાકનો ઉપયોગ કરે છે. એટલે કે,

$$x + y \geq 800 \quad \text{... (2)}$$

(b) ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં ઓછામાં ઓછું 30 % પ્રોટીન જરૂરી છે. કોષ્ટક 3 ના પહેલા સ્તંભ પરથી,

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3\ (x + y) \quad \text{... (3)}$$

(c) તે જ પ્રમાણે ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં વધુમાં વધુ 5 % રેષા જરૂરી છે. કોષ્ટક 3ના બીજા સ્તંભ પરથી

$$0.02x + 0.06\ y \leq 0.05\ (x + y) \quad \text{... (4)}$$

સમીકરણ (2), (3) અને (4) માં x, y ના સહગુણકોને એક સાથે ફરીથી નીચે પ્રમાણે રાખીને આપેલ સમસ્યાને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

વિધાન : z ની ન્યૂનતમ કિંમત નીચેની શરતોને અધિન શોધો :

$$x + y \geq 800$$

$$0\cdot21x - 0\cdot30y \leq 0$$

$$0\cdot03x - 0\cdot01y \geq 0$$

તે ગાણિતિક નમૂનાનાં સૂત્રો છે.

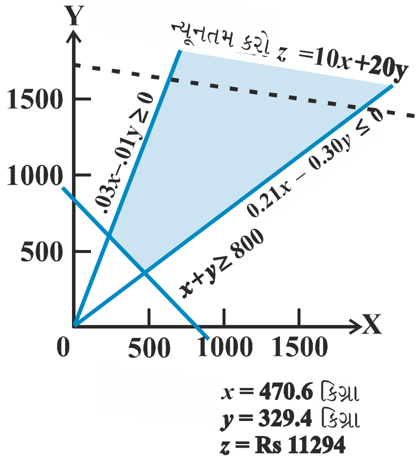
પગલું 3 : આ પ્રશ્નનો આલેખની મદદથી ઉકેલ મેળવી શકાય. આકૃતિ 5 માં સમીકરણના શક્ય ઉકેલને રંગીન કરેલ છે.

આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે (470.6, 329.4) આગળ એટલે કે x = 470.6 અને y = 329.4 આગળ ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$\therefore\ z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$

આ ગાણિતિક ઉકેલ છે.

પગલું 4 : ઉકેલનું આ રીતે અર્થઘટન કરી શકાય. ‘‘470.6’’ કિગ્રા મકાઈ અને સોયાબીન મિશ્રિત જરૂરી પ્રોટીન અને રેષાયુક્ત પોષક તત્ત્વો ધરાવતા વિશિષ્ટ ખોરાકની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 11,294 થાય.’’



આકૃતિ 5

હવે પછીના ઉદાહરણમાં આપણે એક ચોક્કસ સમયે દેશની વસતીના અભ્યાસના ગાણિતિક નમૂનાની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે વસતી-નિયંત્રણ વિભાગ ‘‘કોઈ દેશમાં 10 વર્ષ પછી કેટલા માણસો હશે.’’ એવું શોધવા માંગે છે.

પગલું 1 : સૂત્રો ઘડવા : આપણે જાણીએ છીએ કે સમયની સાથે વસતીમાં ફેરફાર થાય છે. તે જન્મ સાથે વધે છે અને મૃત્યુ સાથે ઘટે છે.

આપણે કોઈ ચોક્કસ સમયે વસતી શોધવી છે. ધારો કે t એ સમય (વર્ષમાં) દર્શાવે છે. તેથી t ની કિંમત 0, 1, 2,..., t = 0 એ વર્તમાન સમય, t = 1 એ એક વર્ષ વગેરે દર્શાવે છે. ધારો કે P (t) એ કોઈ ચોક્કસ વર્ષે t ની વસતી દર્શાવે છે.

ધારો કે આપણે ચોક્કસ વર્ષ $t_0 = 2006$ ની વસતી શોધવી છે. આપણે તે કેવી રીતે કરીશું ? આપણે પહેલી જાન્યુઆરી 2005 સુધીની વસતી શોધીશું. એ વર્ષમાં જેટલા વ્યક્તિનો જન્મ થયો હોય તેટલાને ઉમેરો અને જેટલી વ્યક્તિ મૃત્યુ પામી હોય તેટલીને બાદ કરો. ધારો કે $B(t)$ એ t થી $t+1$ વર્ષમાં જેટલી વ્યક્તિનો જન્મ થયો હોય તે દર્શાવે છે. જ્યારે $D(t)$ એ t થી $t+1$ વર્ષમાં જેટલી વ્યક્તિ મૃત્યુ પામી હોય તે દર્શાવે છે.

આથી આપણે નીચે પ્રમાણેનો સંબંધ લખી શકીએ :

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$

હવે આપણે કેટલીક ધારણાઓ અને વ્યાખ્યાઓ આપીશું.

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ ને સમય અંતરાલ t થી $t+1$ માટેનો જન્મદર કહે છે.

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ ને સમય અંતરાલ t થી $t+1$ માટેનો મૃત્યુદર કહે છે.

ધારણાઓ

1. બધા જ અંતરાલ માટે જન્મદર સરખો હોય છે. તે જ રીતે બધા જ અંતરાલ માટે મૃત્યુદર સરખો હોય છે.
   આનો અર્થ એ કે જન્મદર તરીકે ઓળખાતો દર $B(t)$ અને મૃત્યુદર તરીકે ઓળખાતો દર $D(t)$ એવા મળે છે કે જેથી પ્રત્યેક $t \geq 0$ માટે

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \quad \text{અને} \quad d = \frac{D(t)}{P(t)} \qquad \ldots (1)$$

2. વસતીમાંથી સ્થળાંતર કરીને કોઈ બહાર જતા નથી કે બહારથી કોઈ અંદર આવતા નથી. એટલે કે વસતીના ફેરફારનો સ્રોત ફક્ત જન્મ અને મૃત્યુ છે.

   ધારણા 1 અને 2 પરથી આપણે નીચે મુજબ તારવી શકીએ :

$t \geq 0$ માટે

$$\begin{aligned} P(t+1) &= P(t) + B(t) - D(t) \\ &= P(t) + bP(t) - dP(t) \\ &= (1 + b - d)\, P(t) \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

સમીકરણ (2)માં $t = 0$ મૂકતાં

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \qquad \ldots (3)$$

સમીકરણ (2)માં $t = 1$ મૂકતાં

$$\begin{aligned} P(2) &= (1 + b - d)\, P(1) \\ &= (1 + b - d)(1 + b - d)\, P(0) \qquad \text{(સમીકરણ (3) પરથી)} \\ &= (1 + b - d)^2 P(0) \end{aligned}$$

આ રીતે આગળ વધતાં,

$$P(t) = (1 + b - d)^t \, P(0), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (4)$$

અચળ $1 + b - d$ ને સંક્ષિપ્તમાં r લખાય છે અને તેને વૃદ્ધિદર અથવા આ નમૂના વિશે ધ્યાનાકર્ષણ કરવા બદલ *Robert Malthus* ના માનમાં તેને *Malthusian અચળાંક* કહે છે. r ના સંદર્ભમાં સમીકરણ (4) લખતાં,

$$P(t) = P(0)r^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (5)$$

$P(t)$ એ ઘાતાંકીય વિધેયનું ઉદાહરણ છે. કોઈ પણ વિધેય cr^t જ્યાં c અને r અચળ હોય તે પ્રકારનું હોય તે ઘાતાંકીય વિધેય છે. સમીકરણ (5) એ આપેલી સમસ્યાનું ગાણિતિક સૂત્ર છે.

પગલું 2 : ઉકેલ

ધારો કે હાલની વસતી 250,000,000 છે અને જન્મદર $b = 0.02$ તથા મૃત્યુદર $d = 0.01$ છે. 10 વર્ષ પછી કેટલી વસતી હશે ? સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને આપણે P(10) ની ગણતરી કરીશું.

$$P(10) = (1.01)^{10}\,(250{,}000{,}000)$$

$$= (1.104622125)\,(250{,}000{,}000)$$

$$= 276{,}155{,}531.25$$

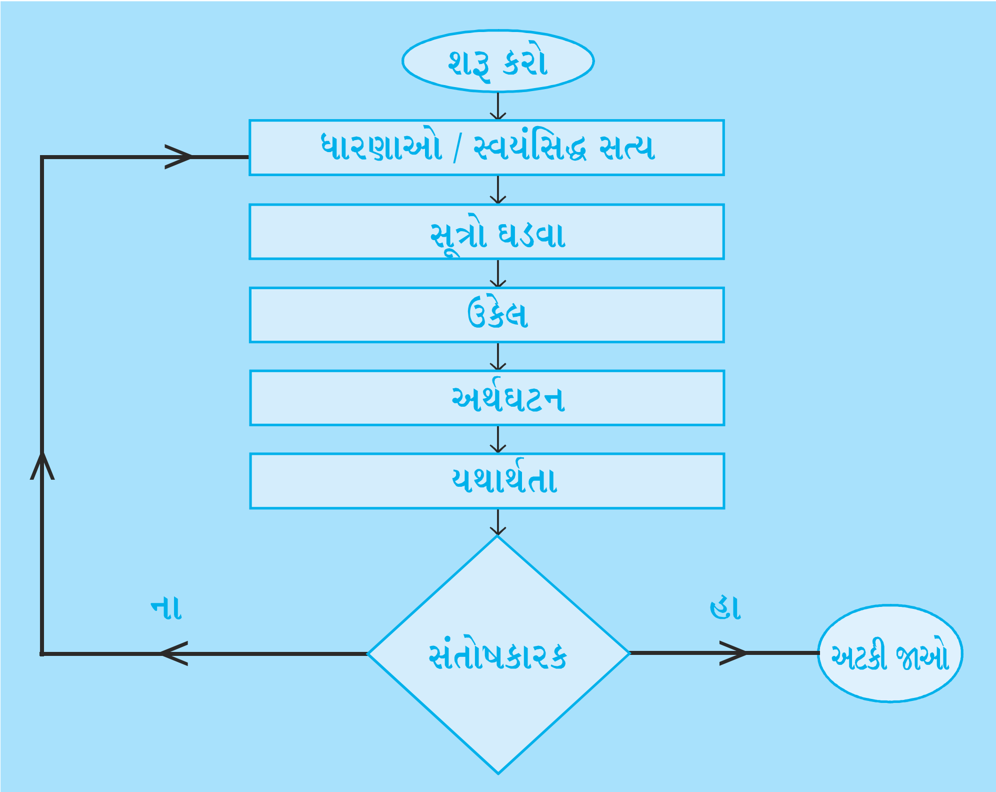
પગલું 3 : અર્થઘટન અને યથાર્થતા

સ્વાભાવિક રીતે આ પરિણામ અર્થહીન છે કારણ કે 0.25 માણસ ન હોઈ શકે. તેથી આપણે સ્થૂળ કિંમત લઈશું અને એવા નિષ્કર્ષ પર આવીશું કે વસતી 276,155,531 (આશરે) છે. આપણા ગાણિતિક નમૂનામાં ધારણાઓ રાખવાથી આપણને ચોક્કસ જવાબ મળતો નથી.

ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે, ભિન્ન ગાણિતિક રીતોના ઉપયોગથી ભિન્ન પરિસ્થિતિઓ માટે ગાણિતિક નમૂના કેવી રીતે મેળવી શકાય છે.

ગાણિતિક નમૂના એ વ્યાવહારિક પ્રશ્નનું સરળ સ્વરૂપ હોવાથી તે પાયાની રીતે અંતર્ગત ધારણાઓ અને આસન્ન મૂલ્યો ધરાવે છે. દેખીતી રીતે અગત્યનો પ્રશ્ન ગાણિતિક નમૂનો સારો છે કે નહિ તે નક્કી કરવાનો હોય છે. એટલે કે જ્યારે મેળવેલાં પરિણામોનું અર્થઘટન કરીએ ત્યારે જોઈએ છીએ કે ગાણિતિક નમૂનાથી યોગ્ય જવાબ આવે છે કે નહિ. જો ગાણિતિક નમૂનાથી સંતોષકારક પરિણામ ન મળતું હોય તો આપણે તેમાં રહેલી ખામીઓ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. એવું બની શકે કે આપણે નવાં સૂત્રો, નવી ગાણિતિક સમજૂતી અને તેથી નવા મૂલ્યાંકનની જરૂર પડે.

આમ, ગાણિતિક નમૂના એ નમૂનાકરણની પ્રક્રિયા છે, તો પૃષ્ઠ 395 પર ફ્લોચાર્ટમાં આપેલ છે.


શરૂ કરો
ધારણાઓ / સ્વયંસિદ્ધ સત્ય
સૂત્રો ઘડવા
ઉકેલ
અર્થઘટન
યથાર્થતા
ના
સંતોષકારક
હા
અટકી જાઓ