புள்ளியியல்

மேல்நிலை – முதலாம் ஆண்டு

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது.
(விற்பனைக்கு அன்று)

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்

தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்

தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

முதற் பதிப்பு – 2004
மறுபதிப்பு – 2017

குழுத்தலைவர்

முனைவர் **ஜெ. ஜோதிகுமார்**
இணைப் பேராசிரியர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005

மேலாய்வாளர்கள்

திரு **கி. நாகபூஷணம்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005.

முனைவர் **இரா. இராவணன்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 600 005.

நூலாசிரியர்கள்

திரு **கோ. ஞானசுந்தரம்**
முதுகலை ஆசிரியர்
எஸ்.எஸ்.வி.மேனிலைப்பள்ளி
பூங்கா நகர், சென்னை – 600 003.

திருமதி **என். சுசீலா**
முதுகலை ஆசிரியை
அண்ணா ஆதர்ஷ் மெ.மே.நி.பள்ளி,
அண்ணா நகர், சென்னை – 600 040.

திருமதி **பா. இந்திராணி**
முதுகலை ஆசிரியை
பெ.கா.அரசினர் மகளிர்
மேல்நிலைப் பள்ளி
அம்பத்தூர், சென்னை – 600 053.

திருமதி **சா. எழிலரசி**
முதுகலை ஆசிரியை
பெ.கா.அரசினர் மகளிர்
மேல்நிலைப் பள்ளி
அம்பத்தூர், சென்னை – 600 053.

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு : தமிழ்நாடு அரசுக்காகப் பள்ளிக் கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

வெப்ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பொருளடக்கம்

1. புள்ளியியல் வரையறைகள், நோக்கங்கள் மற்றும் வரம்புகள்

1.1 அறிமுகம் :

கணினிகளும், தகவல் தொழில் நுட்பங்களும் நிறைந்த நவீன உலகில், புள்ளியியலின் முக்கியத்துவம், மிக நன்றாக அனைவராலும் உணரப்படுகிறது. புள்ளியியலானது, அறிவியல் சார்ந்த அரசுப் பணிகளில் ஆரம்பித்து, விவசாயம், பொருளியல், வணிகவியல், உயிரியல், மருத்துவம், தொழில்துறை, திட்டமிடல், கல்வி போன்ற பல துறைகளில், அதன் பயன்பாடுகள் வளர்ந்து கொண்டே வருவதைக் காண்கிறோம். இன்றைய நிலையில் புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படாமல் மனித வாழ்விற்கு வளர்ச்சி இராது எனலாம்.

1.2 புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும் :

'புள்ளியியல்' என்ற வார்த்தை 'ஸ்டேட்டஸ்' என்ற லத்தீன் சொல்லிலிருந்து பிறந்தது. "ஸ்டேட்டஸ் என்னும் சொல்லிற்கு 'அரசு' என்பது பொருள். தற்போதைய வளர்ச்சியடைந்த நிலையை ஒப்பிடும் பொழுது, புள்ளியியல் கொள்கை, அறிவியல் முறைகளில் தனி முத்திரை பதித்து வருகிறது. குறிப்பாக புள்ளியியலில் நடத்தப்படும் கணிதக் கொள்கை ஆய்வுகள் வேகமாக வளர்ச்சியடைந்து புதிய கண்டுபிடிப்புகளை உலகம் முழுவதும் உருவாக்கி வருகிறது.

1.3 புள்ளியியலின் விளக்கம் :

விவரங்களைச் சேகரித்து, முறையாக சுருக்கி அளிப்பதுடன், ஆய்வின் அடிப்படையில் தக்க காரணத்துடன் சரியான முடிவெடுப்பதால் புள்ளியியல் அறிவியல் முறையுடன் தொடர்புடையது. எண் விவரங்களை முறையாகச் சேகரித்து மேலும் தெளிவாக்குவதுடன் புள்ளியியல் தொடர்புடையது. 'புள்ளி விவரம்' என்ற சொல்

1. ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் வசிக்கும் மக்களின் எண்ணிக்கை, அதாவது விவரம்
2. விவரங்களை சேகரித்து, பகுத்தாய்வு செய்து, தெளிவாக்கும் முறை என்பதைக் குறிப்பதற்கு பயன்படுத்தப் படுகிறது.

1.4 வரையறைகள் :

பல்வேறு கால கட்டங்களில் புள்ளியியல் வெவ்வேறு ஆசிரியர்களால் வெவ்வேறு விதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது. முன்பு புள்ளியியல் என்பது அரசு தகவலுக்கு மட்டுமே இருந்து வந்தது, இக்காலத்தில் மனித நடவடிக்கையின் ஒவ்வொரு செயலையும் சார்ந்துள்ளது. எனவே குறிப்பிட்ட துறைக்கு மட்டுமே உட்பட்ட பழைய வரையறைகளுக்குப் பதிலாக, முற்றிலும் எல்லாவற்றிற்கும் பொருந்துமாறு உள்ள புதிய வரையறைகள் உருவாக்கப்படுகின்றன. மேலும் புள்ளியியல் என்பது புள்ளியியல் விவரங்கள், புள்ளியியல் ஆய்வு முறைகள் என்று இரு விதமாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. புள்ளியியலை எண் விவரங்களாகக் கொண்ட சில வரையறைகள் பின்வருமாறு :

1. ஓர் இடத்திலுள்ள மக்களின் வாழ்க்கை நிலையைப் பொறுத்து திரட்டப்படும் தகவல்களை வகைப் படுத்தல். குறிப்பாக இவை எண்ணிக்கை அடிப்படையில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டு, வகைப்படுத்தப்பட்ட முறையில் அமைந்திருக்கும்.

2. அளவிடுதல், கணக்கிடுதல், அல்லது தினப்படி இயற்கை நிகழ்வுகளை மதிப்பிடுதல், திட்டமிடுதல் முறைப்படுத்தல், பகுத்துக் கொள்ளல் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள முக்கிய தொடர்புகளை வெளிப்படுத்தல் ஆகியன.

1.4.1 ஏ.எல்.பௌலியின் வரையறை :

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய பல்வேறு துறை சார்ந்த விசாரணை நிகழ்வின் எண் வடிவ அறிக்கை.

பௌலியின் கூற்றுப்படி புள்ளியியல் என்பது ஒரு துறையின் எண் வடிவ அறிவியல்.

இது முழுமையற்ற வரையறை என்பது தெளிவாகிறது. அத்துடன் இது விவரங்களைத் திரட்டும் முறையை மட்டும் கருத்தில் கொண்டு மற்றவற்றை குறிப்பாக பகுத்தாய்தல், விளக்கம் கூறுதல், அளித்தல் முறை போன்றவற்றை விட்டு விடுகிறது.

"சராசரிகளைக் கூறும் முறையே புள்ளியியல் என்று சரியாகக் கூறலாம்" என்று பௌலி தன்னுடைய மற்றொரு வரையரையில் கூறுகிறார். புள்ளியியல் விவரங்களைப் புரிந்து கொள்வதற்கும், ஒப்பிடுவதற்கும், சராசரி மிக முக்கியமானது. எனினும், புள்ளியியல் என்பது மற்ற அளவைகளையும் தருவதால் மேற்கண்ட வரையறையும் முழுமையானதல்ல.

1.4.2 கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனின் வரையறை :

‘புள்ளியியல் என்பது எண் விவரங்களை சேகரிப்பது, அளிப்பது, பகுத்தாய்வது, மற்றும் விளக்கமளிப்பது என வரையறுக்கப் படலாம்’ அளவையியல் பகுப்பாய்வின் படி இவர்களின் வரையறையானது, அறிவியல் பூர்வமாகவும் மிகச் சரியாகவும் உள்ளதைத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது. இவ்வரையறையின் படி நான்கு நிலைகள் உள்ளன.

1. **விவரங்களைச் சேகரித்தல் :** இதுவே முதல் படியாகவும், மற்ற முறைகளுக்கு அடித்தளமாகவும் உள்ளது. விவரங்களை சேகரிப்பதற்கு முன்னர் கவனமாகத் திட்டமிடல் வேண்டும். விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் முழுக்கணிப்பு முறை, மாதிரி கணிப்பு முறை, முதல் நிலை விவரங்களைச் சேகரித்தல், இரண்டாம் நிலை விவரங்களை சேகரித்தல் போன்ற வெவ்வேறு முறைகள் உள்ளன. ஆய்வு செய்பவர் சரியான முறையைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

2. **விவரங்களை அளித்தல் :** அடுத்து வரும் ஆய்வுகளுக்கு உதவும் முறையில், மிகச் சுருக்கமாகவும், பொறுத்தமாகவும் சேகரித்த விவரங்கள் முழுமையும் அளித்தல் வேண்டும். அவ்விவரங்களை அட்டவணையாகவோ விளக்கப்படமாகவோ, வரைபடமாகவோ அளிக்கலாம்.

3. **விவரங்களின் பகுப்பாய்வு :** மைய ஈர்ப்பு அளவைகள், மாறுபாட்டளவை, ஒட்டுறவு, உடன் மாறுபாடு போன்ற அளவைகளை உயத்துணர்வதற்கு சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் கவனமாக ஆய்வு செய்யப்பட வேண்டும்.

4. **விளக்கமளித்தல் :** இறுதியாக சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து ஒரு முடிவைப் பெறுதல் வேண்டும். இதுவே விளக்கமளித்தல் ஆகும். பகுப்பாய்வின் அடிப்படையில் ஏற்புடைய முடிவு எடுக்கப்பட வேண்டும். விளக்கமளிப்பதற்கு மிகச் சிறந்த திறமையும் அனுபவமும் அவசியம்.

1.4.3 ஹெரேஸ் செக்ரிஸ்டின் வரையறை :

'முன்னதாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நோக்கத்திற்காக ஒழுங்கான முறையில் சேகரிக்கப்பட்டதும் ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடக் கூடியதாகவும், எண்ணிக்கையில் கூற முடிவதும், நியாயமான அளவுக்கு செம்மையாக மதிப்பிடத் தக்கதும், பல்வகைக் காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்கு பாதிக்கக் கூடியதுமான விவரங்களின் மொத்தமே புள்ளி விவரம் ஆகும்.

மேற்கண்ட வரையறையே மிக முழுமையானதாகவும், புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாகவும் காணப்படுகிறது.

1.5 புள்ளியியலின் பணிகள் (Functions of Statistics) :

புள்ளியியலில் பல பணிகள் உள்ளன. முக்கியமான ஐந்து பணிகள் பின்வருமாறு.

1.5.1 சுருங்கக் கூறுதல் (Condensation) :

பொதுவாக கூறுமிடத்து 'சுருங்கக் கூறு' என்ற சொல்லுக்கு குறைப்பது அல்லது சுருக்குவது என்று பொருள். கொடுக்கப்பட்ட சில மதிப்புகளில் மிக அதிக விவரங்களின் தொகுப்பைப் புரிந்து கொள்ள வைப்பதே சுருங்கக் கூறுதலின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும். குறிப்பாக, சென்னையில் உள்ள பள்ளியில் ஒரு வகுப்பின் தேர்வு மதிப்பெண்கள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டால், நமக்குத் தெளிந்த கருத்து கிடைக்காது. அதற்கு பதிலாக அத்தேர்வின் சராசரி மதிப்பெண் ஒரு தெளிவான கருத்தைக் கொடுக்கும். இதே போல் மதிப்பெண்களின் வீச்சு அவ்விவரங்களின் மற்றொரு சிறந்த அளவையாகும். இவ்வாறாக நிறைய விவரங்கள் கொண்ட தொகுப்பைப் புரிந்து கொள்வதில் உள்ள சிக்கல்களை புள்ளியியல் அளவைகள் குறிக்கின்றன.

1.5.2 ஒப்பிடல் (Comparison) :

வகைப்படுத்துதல், அட்டவணைப்படுத்துதல் என்ற இரு முறைகளும் விவரங்களைச் சுருங்கக் கூறுவதற்கு உதவுகின்றன. இவை சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது. கூடுதல்கள், மையப் போக்கு அளவைகள், சிதறல் அளவைகள், வரைபடங்கள், விளக்கப் படங்கள், ஒட்டுறவுக் கெழு போன்றவை போதுமான அளவு ஒப்பிடுவதற்குப் பயன்படுகின்றன. விவரங்களின் ஒரு வரைபடம் இருந்தால், அவற்றின் தொடர்பை ஒப்பிட இயலும் தஞ்சை மாவட்டத்தின் அரிசி உற்பத்தி அளவு தெரிந்தால், அம்மாவட்டத்தில் உள்ள ஒரு பகுதி உற்பத்தியை மற்றொரு பகுதி உற்பத்தியுடன் ஒப்பிட இயலும். தமிழ்நாட்டில் உள்ள இரு வெவ்வேறு மாவட்டங்களின் அரிசி உற்பத்தி அளவு தெரிந்தால், ஒப்பீட்டாய்வு காண இயலும். புள்ளியியல் என்பது நிகழ்வுகள் மற்றும் எண்களின் ஒட்டு மொத்த தொகுதியாக இருப்பதால், எப்பொழுதும் ஒப்பிட இயலும். உண்மையில், ஒப்பிடுதல் விவரங்களை நல்ல முறையில் புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது.

1.5.3 முன்னறிதல் (Forecasting) :

'முன்னறிதல்' என்பதன் பொருள் முன் கூட்டியே அறிவதற்காக மதிப்பீடு செய்தல், அல்லது முன்பாகவே கணித்தல் ஆகும். தமிழ்நாட்டில் மாவட்டங்களில் கடந்த பத்தாண்டுகளில் பெய்த மழையளவு விவரம் கொடுக்கப்பட்டால், வரப்போகும் காலத்திற்கான மழையளவை முன்பாக அறிவிக்க இயலும். வணிகத் துறையில் 'முன்னறிதல்' என்பது உற்பத்தி, விற்பனை, இலாபம் போன்றவற்றுடன் மிக அதிக அளவு தொடர்புடையது, காலத்தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, உடன் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு என்பன முன்பாக மதிப்பீடு செய்து அறிவிக்க முக்கியமானவை ஆகும்.

1.5.4 முன்கூட்டி மதிப்பிடுதல் (Estimation) :

முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்கூறு பகுப்பாய்வின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி உய்த்துணர்வதே, புள்ளியியலின் முக்கிய குறிக்கோள் ஆகும். புள்ளியியல் உய்த்துணர்தலில் உள்ள முக்கிய நான்கு பிரிவுகளாவன.

1. முன்கூட்டி மதிப்பிடுதல்
2. எடுகோள் சோதனைகள்
3. பண்பளவைச் சாரா சோதனைகள்
4. தொடர் பகுப்பாய்வு

முன்கூட்டி மதிப்பிடுதலில், மாதிரிக்கூறு மதிப்புகளின் அடிப்படையில் தெரியாத தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது. ஒரு பள்ளியில் உள்ள ஏதேனும் நூறு மாணவர்களை மாதிரிக் கூறாகக் கொண்டு, அவர்களின் உயரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அப்பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி உயரத்தை மதிப்பிட இயலும்.

1.5.5 எடுகோள் சோதனைகள் (Test of Hypothesis) :

மாதிரிக்கூறு மதிப்புகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற தகவல்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளையும் நிகழ்த்தகவு பரவல்களையும் பற்றிய கூற்றுகளே புள்ளியியல் எடுகோள்கள் ஆகும். எடுகோள்களை உருவாக்குவதிலும், அவற்றை சோதனை செய்வதிலும் புள்ளியியல் முறைகள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுகிறது. புதிய உரத்தின் பயனாக விளைச்சல் அதிகரித்துள்ளதா, அல்லது புதிய மருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட நோயைத் தீர்ப்பதில் அதிக சக்தியுடன் செயல்படுகிறதா ? போன்ற கூற்றுகள் எடுகோள்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். அவை தகுந்த புள்ளியியல் முறைகள் மூலம் சோதனை செய்யப்பட வேண்டும்.

1.6 புள்ளியியலின் நோக்கம் (Scope of Statistics) :

புள்ளியியல் என்பது புள்ளி விவரங்களை சேகரிக்கும் கருவியாக மட்டுமேயல்லாமல் அதன் சரியான யுக்திகளைக் கையாள்வதன் மூலமும் பகுப்பாய்வு செய்வதன் மூலமும் அவ்விவரங்களில் இருந்து சரியான உய்த்துணர்தலைக் கொண்டு வர இயலும். மனிதச் செயல்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. உயிரியல், வணிகவியல், கல்வி, திட்டமிடல், வணிகமேலாண்மை, தகவல் தொழில்நுட்பத்துறை போன்ற சமூகம் சார்ந்த துறைகளிலும் பயன்படுகிறது. புள்ளியியல் பயன்படாத துறையே காண இயலாது எனலாம். புள்ளியியலின் பல்துறைப் பயன்பாடுகள் பற்றிச் சுருக்கமாக இங்கு காணலாம்.

1.6.1 புள்ளியியலும் தொழில் துறையும் :

புள்ளியியல் என்பது பல தொழிலகங்களில் விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொழிலகங்களில் தரக்கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட தர நிலையை நீடிக்கச் செய்ய பயன்படுகிறது. உற்பத்தி பொறியியலில், உற்பத்தியானது குறிப்பிட்ட நிலையளவை நிறைவு செய்கிறது என்பதில் ஆய்வு திட்டங்கள், தரக்கட்டுப்பாட்டு படங்கள் போன்ற புள்ளியியல் கருவிகளின் தேவை மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. ஆய்வுத் திட்டத்தில் நமக்குப் புகலிடம் அளிக்கும் மாதிரிக் கணிப்பு முறையே புள்ளியியலின் மிக முக்கிய அம்சமாகும்.

1.6.2 புள்ளியியலும் வணிகவியலும் :

வெற்றிகரமான வணிகத்திற்கு புள்ளியியலே உயிர்த்துடிப்பாகும். எந்த ஒரு வியாபாரியும், பொருள்களில் மிகக் குறைவான இருப்பையோ அல்லது மிக அதிகமான இருப்பையோ வைத்திருக்க இயலாது. ஆரம்பத்திலேயே, அவரது பொருளுக்கான தேவையையும், அதற்கான அவரது வெளியீடுகள் அல்லது வாங்குதல் மூலம் சரிசெய்யும் தன்மையையும் மதிப்பீடு செய்கிறார். எனவே வியாபாரம் மற்றும் வணிகவியலில் இருந்து புள்ளியியலைப் பிரிக்க இயலாது.

இந்திய பொருளாதாரத்தில், பல வெளிநாட்டு நிறுவனங்கள் நுழைந்திருப்பதால் வியாபாரத்தின் அளவு பெருகியுள்ளது. ஒரு புறத்தில் கடுமையான போட்டி அதிகரித்த போதிலும் மறுபுறத்தில் விருப்பங்கள் மாறுபடுவதால் புதிய நாகரீகம் நுழைகிறது. இதன் தொடர்பாக தற்போதைய நிலை மற்றும் எதிர்காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப் பற்றி அறிவதற்கும் சந்தை ஆய்வு மிக முக்கியமானது. குறியீட்டெண்கள், காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, மதிப்பீட்டுக் கொள்கை, புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனைகள் போன்ற புள்ளியியல் கருவிகள் பொருளியலில் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

1.6.3 புள்ளியியலும் விவசாயமும் :

மாறுபட்டளவை பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance) என்பது பேராசிரியர் R.A பிஷர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட புள்ளியியல் கருவியாகும். இது விவசாயத் துறை சோதனைகளில் மிகப் பிரபலமான ஒன்று. சிறு கூறுகளுக்கான சிறப்புச் சோதனைகளில், இரு மாதிரிக் கூறுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தது என்பதைக் காட்டுகிறது. மாறுபாட்டளவை பகுப்பாய்வில் பல்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளில் சமதன்மையையும் சோதிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, கோதுமை பயிரிடப்பட்ட ஐந்து நிலப்பகுதிகளுக்கு ஐந்து இரசாயன உரங்கள் இட்டு, அதன் விளை பலன்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன.

இந்த வெவ்வேறு உரங்களால் விளை பலன்களின் அளவு குறிப்பிடத் தகுந்த அளவு வேறுபடுகின்றதா அல்லது அந்த கூறு ஒரே தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்குமா என நாம் காண விழையலாம். இப்பிரச்சனைக்கான தீர்வை மாறுபாட்டளவைப் பகுப்பாய்வு அளிக்கிறது. பல தொகுதி சராசரிகளின் ஒரே தன்மையை சோதிப்பதற்கும் பயன்படுகிறது.

1.6.4 புள்ளியியலும் பொருளியலும் :

சிக்கல் நிறைந்த தொகுதியின் எண்ணளவு மாற்றங்களை அளக்கவும் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைத் தெளிவாக விளக்கவும் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுகின்றன. தற்காலத்தில் புள்ளியியலின் பயன்கள், பொருளியியல் ஆய்வில் ஏராளமாக உள்ளன. பொருளியல் கொள்கை, அதன் செயல்பாடு இரண்டிலும் புள்ளியியலின் பங்கு மிக முக்கியமானது.

ஆல்பிரட் மார்ஷெல் என்ற பொருளியலாளர், 'புள்ளியியல் என்பது சிறிய குச்சிகளை போன்றதே. இதை வைத்து கொண்டே பொருளியியல் வல்லுநர்கள் வீட்டை எழுப்ப வேண்டும் என்று விரும்புகிறேன்' என்று கூறியிருக்கிறார். பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளான ஊதியம், விலை, உற்பத்தி, வருமானம் மற்றும் செல்வம் இவற்றின் பங்கீடுகள் ஆகியவற்றைத் தீர்ப்பதில் புள்ளி விவரங்களும், புள்ளியியல் கருவிகளும் மிக அதிக அளவில் பயன்படுகின்றன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

1.6.5 புள்ளியியலும் கல்வியும்

கல்வியில், புள்ளியியல் பரவலாகப் பயன்படுத் தப்படுகிறது. எல்லாவகை செயல்பாட்டுப் பிரிவுகளிலும் ஆய்வு என்பது மிகப் பொதுவான குணமாகும். கொள்கை உருவாக்கத்திற்கும், புதிய பாடவழியை அறிமுகப் படுத்துவதற்கம் புதிய பாட வழிகளில் உள்ள வசதிகளைத் தருவதற்கும் தேவையானது புள்ளியியல். பழைய கல்வி திட்டத்தில் இருந்து புதிய கல்வி திட்டத்தை மதிப்பீடு செய்யும் சோதனை ஆய்வில் அதிகமாக மக்கள் ஈடுபடுத்தப்படுகின்றனர். இவையனைத்தும் புள்ளியியல் மூலமாக நடைபெறக் கூடியது.

1.6.6 புள்ளியியலும் திட்டமிடலும் :

புள்ளியியல், திட்டமிடலில் மிக இன்றியமையாத ஒன்றாகும். நவீன உலகமானது 'திட்டமிடப்பட்ட உலகம்' என்று அழைக்கப்படுகிறது. கொள்கை முடிவு உருவாக்கத்திற்கும் அதை அமல்படுத்தும் திறமையான வேலைக்காக அரசாங்கத்தின் அனைத்து நிறுவனங்களும் திட்டமிடுதலின் உதவியை நாடுகின்றன.

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட நோக்கத்தில் வெற்றியடைய, உற்பத்தி, நுகர்தல், தேவை, அளிப்பு, விலைகள், முதலீடுகள் வரவு செலவு போன்றவற்றுடன் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்களும், வேறு பல முன்னேற்றமடைந்த புள்ளியியல் யுக்திகளும் நடைமுறைப் படுத்துதல், பகுத்தாய்வு செய்தல், தெளிவாக்குதல் போன்ற சிக்கலான விவரங்களில் பயன்படுத்தப்படும் முன்னேற்றமடைந்த பல்வேறு புள்ளியியல் யுக்திகளும் முக்கியமானவை. இந்தியாவில் மத்திய மற்றும் மாநில அரசு இரண்டிலும் உள்ள திட்டக் குழுவில் புள்ளியியலின் பங்கு மிக முக்கியமானது.

1.6.7 புள்ளியியலும் மருத்துவமும் :

மருத்துவ அறிவிலில் புள்ளியியல் கருவிகள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு புதிய மருந்தின் செயல்திறனை அறிய t–சோதனை மேற்கொள்ளப்படுகிறது. இரு வகை மருந்துகளின் செயல் திறன்களை ஒப்பிட இரு மாதிரிக் கணிப்பிற்கான t–சோதனையைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிடப்படுகிறது. தற்போதுள்ள மருத்துவ ஆய்வுகளில் புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள் மேன் மேலும் அதிகரித்துக் கொண்டே வருகின்றன.

1.6.8 புள்ளியியலும் அதன் நவீன பயன்பாடுகளும் :

சமீபத்தில் வளர்ச்சி பெற்று வரும் கணினி மற்றும் தகவல் தொழில் நுட்பத் துறை, புள்ளியியல் பயன்பாட்டை அதிகரித்து புதிய மாதிரி வடிவங்களை ஒருங்கிணைத்து உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. இப்புள்ளியியல் மாதிரி வடிவங்களிலிருந்து பல்வேறு நிறுவனங்கள், சில முடிவுகளைப் பெற முடிகிறது. சோதனைத் திட்ட அமைப்பு, முன் மதிப்பீடு செய்தல், சூழ்நிலை உருவாக்கும் கணக்குகள் போன்றவற்றின் தீர்விற்காக நிறைய மென்பொருட்கள் கிடைக்கின்றன.

SYSTAT என்ற கணினி மென்பொருள், அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்ப வரைப்படங்களை புள்ளியியல் விவரங்ளைக் கொண்டு தருவதில் மற்றெந்த மென்பொருட்களைக் காட்டிலும் சிறந்து விளங்குகிறது.

பல்வேறுபட்ட ஆய்வுகளுக்கு SYSTAT பயன்படுத்தப்படுகிறது. அவற்றுள் சில

1. தொல்லியல் : மண்டை ஓடுகளின் தொன்மை பற்றி ஆராய்தல்.

2. தொற்று நோய் : நெஞ்சக, நுரையீரல் நோய் பற்றி ஆய்வு செய்வதற்காக.

3. புள்ளியியல் : பரவல்களின் போக்கு பற்றி ஆராய்தல்.

4. உற்பத்தி : தரம் உயர்த்துவதற்கான ஆய்வு.

5. மருத்துவம் : நோய்களைப் பற்றி ஆராய்தல்.

6. நிலவியல் : நிலத்தடி நீரில் உள்ள யுரேனியம் போன்றவற்றின் அளவினை ஆராய்தல்.

1.7 புள்ளியியலின் வரம்புகள் :

புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள், மனித செயல்களின் ஒவ்வொன்றிலும் பரவலாக இருந்தாலும், அவற்றிற்கென்று சில வரம்புகள் உள்ளன. அவற்றில் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. பண்பு விவரங்களை அறிவதற்கு புள்ளியியல் பொருந்தாது. புள்ளியியல் எண்ணிக்கையில் தெரிவிக்கக் கூடிய அளவின் விவரங்களை மட்டுமே ஆய்வு செய்கிறது. எண்ணிக்கையில் தெரிவிக்க முடியாத பண்பு விவரங்களை அழகு, அறிவு, நேர்மை, கடின உழைப்பு, உடல் நலம், துன்பம் போன்றவற்றில் நேரடியாக புள்ளியியல் பகுப்பாய்வைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆனால் இவற்றிற்குச் சமமான எண்களைக் கொடுப்பதன் மூலம் புள்ளியியல் முறைகளைக் கொண்டு இவைகளையும் ஆய்வு செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக மாணவர்கள் தேர்வில் மதிப்பெண்கள் அடிப்படையில் அவர்களின் அறிவுக் கூர்மையைப் பற்றி அறியலாம்.

2. புள்ளியியல் தனி மதிப்பை ஆய்வு செய்வது இல்லை. புள்ளியியல் அநேக புள்ளி விவரங்களடங்கிய தொகுதியை மட்டும் ஆய்வு செய்யுமே ஒழிய தனிப்பட்ட ஓர் உறுப்பைப் பற்றி ஆய்வு செய்வதில்லை. தனியாக உள்ள ஓர் உறுப்பின் விவரம் புள்ளியியல் ஆகாது. அது புள்ளியியல் ஆய்விற்குப் பயன்படாது.

3. புள்ளியியல் விதிகள் மிகச் சரியானவை என்று கூற முடியாது. கணிதம், இயற்பியல், அறிவியலில் மிகச் சரியான விதிகள் உள்ளன என்பது நாம் அறிந்ததே. ஆனால் புள்ளியியல் விதிகள் மிகச் சரியானவை அல்ல. தோராயமானதே. புள்ளியியல் முடிவுகள் உலகம் முழுவதிலும் உண்மையாக இருப்பதில்லை. சராசரி அளவில் மட்டுமே உண்மையாக உள்ளது.

4. புள்ளியியல் அட்டவணைகள் தவறாகப் பயன்படுத்தப்படலாம். புள்ளியியலை மிகத் திறமை வாய்ந்தவர்களால் மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். இல்லையெனில் புள்ளியியலில் செயல்முறைகள், சரியாகப் பயன்படுத்தத் தெரியாதவரிடம் கிடைத்த மிக மோசமான கருவியாகிவிட வாய்ப்பு உண்டு. புள்ளியியல் கருவிகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்தத் தெரியாததாலும், அல்லது உரிய நபர் வேண்டுமென்றே தவறாகப் பயன்படுத்துவதாலும் தவறான முடிவுக்கு வர நேரிடும். தவறான எண் விவரங்களால், புள்ளியியல் முறைகேடாகப் பயன்படுத்தக் கூடும். கிங் என்பவரின் சரியான கூற்றுப்படி ‘புள்ளியியல் என்பது ஒரு களிமண், ஒருவர் அதில் இருந்து அவரவர் விருப்பத்திற்கேற்ற வண்ணம் கடவுளையோ, பூதத்தையோ வடிவமாக்க இயலும்.’

5. பிரச்சினையைக் காணும் ஆய்வக் கருவிகளில் புள்ளியியலும் ஒரு ஆய்வுக்கருவியே. புள்ளியியல் முறைகள் மட்டுமே ஒரு பிரச்சினையின் முழுத்தீர்வையும் தர இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, சமூக அமைப்பைப் பற்றி ஆய்வு செய்யும் போது, புள்ளியியல் விவரங்களை மட்டும் சார்ந்திராமல், அந்நாட்டின் பண்பாடு, மதம், தத்துவம் இவற்றையும் சேர்த்தே முடிவெடுக்க வேண்டும். எனவே புள்ளியியல் ஆய்வுகள் மற்ற சான்றுகளோடு இணைத்து முடிவுகளைத் தர வேண்டும்.

பயிற்சி – 1

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. புள்ளியியல் கருத்தின் தோற்றம் காணப்பட்ட இடம்

அ) அரசு ஆ) வணிகவியல் இ) பொருளியல் ஈ) தொழில்துறை

2. ‘எண்ணுதல் புள்ளியியலில் அறிவியல் என அழைக்கப்படலாம்’ என்ற வரையறையைக் கூறியவர்

அ) கிராக்ஸ்டன் ஆ) ஏ.எல்.பௌலி இ) போடிங்டன் ஈ) வெப்ஸ்டர்

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

3. முற்காலத்தில் புள்ளியியல் கருத்து ___________ இல் பயன்படுத்தப்பட்டது.

4. விவரங்களைச் சுருக்குவதற்கு வகைப்படுத்தல் மற்றும் __________ ஆகிய இருமுறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

5. காலத் தொடர்வரிசையும், உடன் தொடர்பு போக்கும் __________ செய்வதில் பெரும் பங்கு வகிக்கிறது.

6. __________ என்ற முறை வேளாண்மை ஆய்வுகளில் முக்கிய புள்ளியியல் கருவிகளில் ஒன்றாக விளங்குகிறது.

III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி :

7. A.L. பௌலியின் புள்ளியியல் பற்றிய வரையறைகளை எழுதுக.

8. கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனால் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியியல் வரையறைகளை எழுதுக.

9. கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனால் வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியியலின் நான்கு நிலைகளை எழுதுக.

10. ஹொரேஸ் செக்ரிஸ்ட்டின் புள்ளியியல் பற்றிய வரையறையை எழுதுக.

11. புள்ளியியலின் பணிகளைக் கூறி விளக்குக.

12. புள்ளியியலின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

13. புள்ளியியலின் வரம்புகள் யாவை ?

14. புள்ளியியலின் ஏதேனும் இரு பணிகளை விளக்குக.

15. புள்ளியியலின் ஏதேனும் இரு பயன்பாடுகளை விளக்குக.

16. புள்ளியியலின் ஏதேனும் இரு குறைபாடுகளைக் கூறுக.

IV. செய்து பார்க்க:

17. செய்தித் தாள், இதழ்கள், தொலைக்காட்சி, இணைய தளம் போன்றவற்றில் இருந்து புள்ளியியல் தகவல்களைச் சேகரிக்க.

18. மிகச் சிறந்த, முக்கியமான புள்ளியியல் தகவல்களைச் சேகரித்து உனது நோட்டுப் புத்தகத்தில் (Album) ஒட்டுக.

விடைகள்

I. 1. (அ) 2. (ஆ)

II. 3. அரசு தகவல்களில் 4. அட்டவணைப்படுத்துதல்

5. முன்னறிதல் 6. மாறுபாட்டளவைப் பகுப்பாய்வு

2. மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் – அறிமுகம்

2.1 அறிமுகம் :

மாதிரிக் கணிப்பு (sampling) என்பது நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுவதாகும். கடைக்குச் சென்று தானியவகைகளை நாம் வாங்கும்போது ஒரு கைப்பிடியளவே எடுத்து அதன் தரம் அறிந்து அப்பொருட்களை வாங்குகிறோம். ஒரு மருத்துவர் ரத்தத்தின் சில துளிகளை மாதிரியாக எடுத்து சோதித்தபின் நம் உடலில் ஏற்பட்ட நோயின் தன்மையைப் பற்றிய முடிவுக்கு வருகிறார். இவ்வாறாக நடைமுறையில் பெரும்பாலான ஆய்வுகள் மாதிரிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டே அமைகின்றன.

இப்பகுதியில் மாதிரிக் கணிப்புகளின் முக்கியத்துவத்தையும், முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரி எடுப்பதற்கான பல்வேறு முறைகளையும் காண்போம்.

2.2 முழுமைத்தொகுதி (Population):

புள்ளியியல் சோதனையில் முழுமைத்தொகுதி என்பது ஓர் ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படும் அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பினைக் கொண்டதாகும். ஒரு பள்ளி அல்லது கல்லூரியில் பயிலும் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு நூலகத்திலுள்ள மொத்த நூல்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு கிராமம் அல்லது நகரத்தில் உள்ள மொத்த வீடுகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை முழுமைத்தொகதிக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

சில சமயங்களில் முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளைப் பற்றிய விவரங்களையும் சேகரித்துக் கொண்டு, நடைமுறைக்கேற்ப ஆய்வு செய்ய முடிகிறது. இதை முழுக கணிப்புமுறை (Complete enumeration or census) என்று அழைக்கிறோம். அவ்வாறு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அளந்து, எல்லா உறுப்புகளையும் எடுத்துக் கொள்ள இயலாத சமயங்களில் மாதிரிக்கணிப்பு முறையைக் கையாள்கிறோம்.

2.2.1 முடிவுறு முழுமைத் தொகுதி, முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி :

முடிவுறு முழுமைத்தொகுதி (Finite population) எனில் அதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, முடிவுறு எண்ணிக்கையைக் கொண்டதாக இருக்க வேண்டும். ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு தொழிலகத்தில் ஒரு நாளில் உற்பத்தியாகும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை போன்றவை முடிவுறு முழுமைத் தொகுதிக்கு உரிய சில எடுத்துக் காட்டுகளாகும். முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முழுமைத்தொகுதி அளவு (population size) என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு முழுமைத் தொகுதி எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டதாக இருந்தால் அது வரம்பற்ற முழுமைத்தொகுதி அல்லது முடிவுறா முழுமைத்தொகுதி (Infinite population) என்று அழைக்கப்படுகிறது. வானத்தில் உள்ள விண்மீன்களின் எண்ணிக்கை, தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்போரின் எண்ணிக்கை போன்றவை முடிவுறா முழுமைத்தொகுதிக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

2.2.2 முழுக் கணிப்பு முறை (Census method) :

முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்கள் இரு வழிகளில் சேகரிக்கப்படுகின்றன. அவை முழுக்கணிப்பு முறை மற்றும் மாதிரிக் கணிப்புமுறை ஆகும். முழுக்கணிப்பு முறையில், முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கிராமம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் உள்ள குடும்பங்களின் சராசரி ஆண்டு வருமானத்தைக் கணக்கிட வேண்டுமென்றால், அப்பகுதியில் 1000 குடும்பங்கள் இருக்குமாயின், ஆயிரம் குடும்பங்களின் வருமானத்தையும் கணக்கிட வேண்டும். இம்முறையில் ஒவ்வோர் குடும்பமும் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பாதலால் ஒன்றையும் விட்டுவிடக் கூடாது.

இந்திய மக்கட்தொகைக் கணக்கெடுப்பு :

நம் நாட்டின் மக்கட் தொகைக் கணக்கெடுப்பு 10 ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை மேற்கொள்ளப்படுகிறது. முதல் கணக்கெடுப்பு நடைபெற்ற ஆண்டு 1871–72. சமீபத்திய மக்கட்தொகைக் கணக்கெடுப்பு 2001 ஆம் ஆண்டில் எடுக்கப்பட்டது. அதன் விவரம் இப்பாட இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.

முழுக்கணிப்பு முறையின் நிறைகளும் குறைகளும் :

நிறைகள் :

1. முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்தும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன.
2. இம்முறையில் பெறப்படும் முடிவுகள் துல்லியமாகவும் நம்பிக்கைக்கு உரியதாகவும் இருக்கும்.
3. ஆழ்ந்த ஆய்வினை மேற்கொள்ள வேண்டும்.
4. இம்முறையில் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை பல்வேறு கள ஆய்வுகளுக்கும், பகுப்பாய்வுகளுக்கும் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறைகள் :

1. இம்முறைக்கு அதிக கணிப்பாளர்களின் உழைப்பு தேவைப்படுகிறது. அதனால் இது அதிக செலவு பிடிக்கும் முறையாகும்.
2. இம்முறைக்கு அதிக பணம், காலம், உழைப்பு, சக்தி தேவைப்படுகிறது.
3. முடிவுறா முழுமைத் தொகுதியாக இருப்பின், சில சமயங்களில் இம்முறை மூலம் விவரங்களைச் சேகரிக்க இயலாது.

2.3 மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Sampling) :

மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்பது சமீப காலத்தில் வளர்ச்சி பெற்றதாயினும் இது புதிய கருத்தன்று. முன்னுரையில் கூறியுள்ளபடி நம் அன்றாட வாழ்வில் நம்மை அறியாமலே மாதிரிக் கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி வருகிறோம். அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் அனைத்திலும் மாதிரிகளே முழுமைத்தொகுதிகளைப் பற்றிய சரியான கருத்தை உருவாக்குகின்றன என நம்புகிறோம். நமது பெரும்பாலான முடிவுகள், சில உறுப்புகளைச் சோதனை செய்வதின் அடிப்படையிலேயே அமைகின்றன. அதனாலேயே மாதிரிக்கணிப்பு முறை பற்றிய விவரங்களை நாம் அறிந்து கொள்வதற்கான அவசியம் ஏற்படுகிறது.

2.3.1 மாதிரி (Sample) :

புள்ளியியலாளர், முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து ஒரு பகுதியைத் தேர்வு செய்யும் முறை மாதிரி எடுத்தல் அல்லது கூறு எடுத்தல் என்கின்றனர். முழுமைத்தொகுதியில், புள்ளியியல் கணிப்பிற்காக வரையறுக்கப்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு உட்கணம் மாதிரி என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாதிரியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை மாதிரி அளவு (Sample size) என்கிறோம்.

மாதிரிக் கணிப்பு அலகு (Sampling Unit) :

ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் மாதிரி எடுக்கப்படும்போது அந்த உறுப்புகள் மேலும் பிரிக்கப்படாமல் இருப்பின் அவை மாதிரிக்கணிப்பு அலகுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வொரு குடும்பத்தின் சராசரி வருவாயைக் காண வேண்டுமெனில், குடும்பத்தலைமையே மாதிரிக் கணிப்பு அலகாகக் கருதப்படும். சராசரி நெல்விளைச்சல் பற்றிக் கருதும்போது, ஒவ்வோர் உரிமையாளர் பெறும் நெல் விளைச்சலே மாதிரிக் கணிப்பு அலகு ஆகிறது.

மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியல் (Sampling frame) :

மாதிரிக் கணிப்பு முறையை செயல்படுத்தும்போது, ஒவ்வொரு மாதிரிக் கணிப்பு அலகிற்கும் அதை அடையாளம் காண ஓர் எண் தருவது அவசியமாகிறது. அவ்வாறு பெறப்பட்ட பட்டியல், மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. வாக்களிப்போர் பட்டியல், வீடு வைத்திருப்போர் பட்டியல் ஊரிலுள்ள விவசாயிகளின் பட்டியல் போன்றவை மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியலுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

2.3.2 மாதிரி எடுப்பதற்கான காரணங்கள் :

பின்வரும் சூழ்நிலைகளில் மாதிரிக் கணிப்பு தவிர்க்க முடியாததாகும்.

1. முழுமைத்தொகுதி முடிவுறாததாக இருக்கும் போது முழுக்கணிப்பு முறை நடைமுறையில் சாத்தியமாகாது.
2. குறுகிய கால இடைவெளியில் விவரங்கள் தேவைப்படும் போது
3. ஆய்வுக்களம் பரந்து விரிந்து மிகப்பெரிதாக இருக்கும்போது
4. பணம், பயிற்சி பெற்ற கணிப்பாளர்கள் போன்ற ஆதாரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்புக்கு உட்பட்டிருப்பின்
5. ஆய்வின் போது, தேர்ந்தெடுக்கும் பொருள் அழிந்து விடக்கூடியது எனில் மாதிரிக் கணிப்பே உகந்ததாகும்.

2.3.3 முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைகள் (Parameters) மற்றும் மாதிரிப் பண்பளவைகள் (Statistics) :

சராசரி, இடைநிலையளவு, முகடு, திட்ட விலக்கம் போன்ற அளவைகளால், முழுமைத் தொகுதி மற்றும் மாதிரிகளின் பண்புகளை விளக்கலாம். மேற்கூறிய அளவைகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அளக்கப்பட்டு, அதன் பண்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவற்றை முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைகள் (Parameters) அல்லது தொகுதிப் பண்பளவைகள் என்கிறோம். அதே அளவைகள் மாதிரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டு மாதிரியின் பண்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவற்றை மாதிரிப் பண்பளவைகள் (Statistics) என்கிறோம்.

ஒரு முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவு முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளையும், ஒரு மாதிரிப் பண்பளவு மாதிரியின் பண்புகளையும் பெற்றிருக்கும்.

மாதிரிகள், முழுமைத்தொகுதியின் உட்கணங்களாக இருப்பதால், மாதிரிகளிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளைக் கணித்துக் கூற இயலும். எனவே தொகுதிப் பண்பளவைகளைப் பற்றிய விவரங்கள் தெரியாத போது, மாதிரிப் பண்பளவைகளிலிருந்தே அவற்றைக் கணிக்க முடிகிறது.

பொதுவாக, முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவைகளைக் குறிப்பதற்கு கிரேக்க எழுத்துக்கள் அல்லது ஆங்கில–பெரிய எழுத்துக்களைக் குறியீடாகப் பயன்படுத்துகிறோம். மாதிரிப் பண்பளவைகளைக் குறிப்பதற்கு ஆங்கிலத்தில் உள்ள சிறிய எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள அளவைகளான, தொகுதி அளவு, சராசரி, திட்டவிலக்கம் போன்றவற்றிற்கு முறையே N, μ, σ ஆகிய குறியீடுகளையும், மாதிரியில் அவற்றிற்கு முறையே n, $\bar{x}$, s ஆகிய குறியீடுகளையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

2.3.4 மாதிரிக் கணிப்பின் கோட்பாடுகள் :

மாதிரிகள் நன்கு கணிக்கும் திறன் கொண்டவையாக இருக்க வேண்டும். அதற்கு மாதிரிகள் கீழ்க்கண்ட கோட்பாடுகளுக்கு உட்பட்டிருக்க வேண்டும்.

1. புள்ளியியலின் ஒழுங்கு நியதி (Statistical regularity) :

ஒரு பெரிய தொகுதியினின்று, சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப, மாதிரிகளில் உள்ள ஒரு நிகழ்வின் சராசரியும், தொகுதியின் சராசரியும் அதே பண்புகளைப் பெற்றிருப்பதற்கான வாய்ப்புகள் நிச்சயமாகிறது. அதாவது, ஒரு நிகழ்விற்கான சோதனை செய்யும் போது, மாதிரிகளில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப அச்சோதனையின் முடிவுகளில் ஓர் ஒழுங்கு முறை அல்லது நிலைத் தன்மை ஏற்படுகிறது. அதனால் அம்மாதிரிகளின் சராசரிகள் பெருந்தொகுதியின் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கக் காரணமாகிறது.

2. பேரினங்களில் மாறாப் பொதுமை (Inertia of large numbers) :

மாதிரியின் அளவை அதிகரிப்பதால் மாதிரிக்குள்ளேயுள்ள வேறுபட்ட பண்புகளும் சமப்படுத்தப்பட்டு முடிவில் மாறாப் பொதுமையைப் பெறுகிறது. எனவே கிடைக்கவிருக்கும் சராசரி முடிவுகள் மிகவும் துல்லியமாகவும் நம்பிக்கைக்கு உகந்ததாகவும் இருக்கும்.

3. ஏற்புடைத் தன்மையுடைமை (Validity) :

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள், தொகுதிப் பண்பளவைகளை ஏற்புடைய அளவிற்கு உகந்ததாகக் கணிக்கும் திறன் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

4. உத்தமத் தன்மையுடைமை (Optimisation) :

உத்தம முடிவுகளைப் பெறும் வகையில் மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளை, முன்பே நன்கு வடிவமைத்துத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்று இக்கோட்பாடு கூறுகிறது. இதனால் மாதிரிக் கணிப்பை வடிவமைப்பதில் ஏற்படும் இழப்பு குறைகிறது.

மாதிரிக் கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கான மிக முக்கிய காரணம், முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய அதிகபட்ச விவரங்களை மிகக் குறைந்த அளவிலான செலவு, நேரம் மற்றும் மனித உழைப்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி சேகரிப்பதற்காகவே. எனவே மாதிரிகள், முழுமைத்

தொகுதியின் எல்லாப் பண்புகளையும் பெற்றிருக்கும் போதுதான், இவை சிறந்த முறையில் நிறைவேற்றப்படும்.

2.5 மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள் மற்றும் மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள்

(Sampling errors and non-sampling errors) :

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளை மேற்கொள்ளும் போது இருவகைப் பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்புண்டு. அவை மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள், மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் எனப்படும்.

1. மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள் (Sampling errors) :

மாதிரி என்பது முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருந்த போதிலும், முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்கள் அனைத்தையும் மாதிரிக் கணிப்பினால் பெற முடியும் என்று எதிர்பார்க்க இயலாது. எனவே பெரும்பாலான சமயங்களில் தொகுதிப் பண்பளவைகளுக்கும், மாதிரிப் பண்பளவைகளுக்கும் இடையே வித்தியாசங்களைக் காண முடிகிறது. இவ்வாறாக ஒரு தொகுதிப் பண்பளவைக்கும், மாதிரிக் கணிப்பின் மூலமாகக் கணிக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் அல்லது முரண்பாடு மாதிரிக் கணிப்புப்பிழை எனப்படுகிறது.

2. மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் (Non sampling errors) :

களப்பணி ஆய்வில், நேரிடையாக விவரங்களைச் சேகரிக்க முற்படும் போது சில பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்புகள் உண்டு. இப்பிழைகள் மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

2.3.5 மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் நன்மைகளும் வரம்புகளும் :

முழுக்கணிப்பு முறையை விட மாதிரிக்கணிப்பு முறையில் பல நன்மைகள் உள்ளன. அவை

1. மாதிரிக் கணிப்பு முறை நேரத்தையும் உழைப்பையும் சேமிக்கிறது.
2. அதனால் பணச்செலவும் மனித நேரமும் குறைவதற்குக் காரணமாகிறது.
3. மாதிரிக் கணிப்பு முறையினால் மிகத்துல்லியமான முடிவுகளைப் பெற முடிகிறது.
4. இதற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது.
5. இதை அதிக அளவில் உட்படுத்திக் கொள்ள முடிகிறது.
6. முழுமைத் தொகுதியானது மிகப் பெரியதாகவோ எடுகோள் சார்ந்ததாகவோ சோதனையின் போது அழியக் கூடியதாகவோ இருக்குமாயின் மாதிரிக் கணிப்பு முறையை மட்டுமே பயன்படுத்த இயலும்.

மாதிரிக் கணிப்பு முறையை சில வரம்புகளுக்குட்பட்டே எடுக்க வேண்டும். அவை பின்வருமாறு :

1. மாதிரிக் கணிப்பில் ஈடுபடுபவர்கள் தகுதி வாய்ந்தவர்களாகவும் நல்ல அனுபவம் பெற்றவர்களாகவும் இருக்க வேண்டும். இல்லையெனில் பெறப்படும் முடிவுகள் நம்பத் தகுந்ததாக இருக்காது.

2. மாதிரியைச் சரியாக தேர்ந்தெடுக்காவிடின் சில சமயங்களில், உகந்த மதிப்புகளைத் தருவதற்கு பதில் விளிம்பு மதிப்புகளைத் தரும்.

3. மாதிரிக் கணிப்பு செய்வதில் மாதிரிப் பிழைகள் இருக்கும். ஆனால் முழுக்கணிப்பு முறையில் மாதிரிப்பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பில்லை.

2.4 மாதிரிக் கணிப்பின் வகைகள் :

ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் உள்ள நுட்பத் திறமையே மாதிரிக்கணிப்பு முறைக்கு அடிப்படை அவசியமாகவும் புள்ளியியல் ஆய்வின் தன்மைக்கு ஏற்ப முக்கியத்துவத்தையும் பெறுகிறது.

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளில் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுபவைகளைப் பின்வருமாறு பிரிக்கலாம்.

1. நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Probability sampling)
2. நிகழ் தகவற்ற மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Non-Probability sampling)
3. கலவை மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Mixed sampling)

2.4.1 நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை :

நிகழ்தகவு மாதிரி என்பது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து நிகழ்தகவின் மூலமாக உறுப்புகள் தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரி, எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப சரியான விகித அளவில் எடுக்கப்படும் மாதிரி போன்றவை நிகழ்தகவு மாதிரிகளாகும்.

2.4.2 நிகழ்தகவற்ற மாதிரிக் கணிப்பு முறை :

இது தன்விருப்பத்தைப் பிரதிபலிக்கும் வகையில் உறுப்புகளை, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்வு செய்யும் முறையாகும். இம்முறையை நோக்கமுடையமாதிரிக் கணிப்பு (Purposive sampling) என்பர். இம்முறை பெரும்பாலும் கருத்துக் கணிப்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நோக்கமுடை மாதிரிக் கணிப்பைச் சேர்ந்த, பங்கு மாதிரிக் கணிப்பு (Judgement sampling) முறை என்பது அளவீடு செய்யும் போது பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆனால் களப்பணியாளரின் முன் தீர்மானிக்கும் எண்ணம், தவறுகள் போன்றவற்றால் பெரும்பாலும் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. இருப்பினும் களப்பணியாளர் முன் அனுபவம் பெற்றவராகவும் திறமைசாலியாகவும் இருந்தால் இக்கணிப்பின் மூலம் நல்ல முடிவுகளைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, புதிய வகை உந்துகளின் செயல் திறமையைப் பற்றிய சந்தை ஆய்வில் எடுக்கப்படும் மாதிரி, புதிய உந்துகளை வாங்குவோரைப் பங்காகக் கொண்ட மாதிரியைத் தான் எடுக்க வேண்டும்.

2.4.3 கலப்பு மாதிரிக் கணிப்பு :

இங்கு மாதிரிகளின் ஒரு பகுதி நிகழ்தகவின் படியாகவும் மற்றொரு பகுதி தேவைக்கேற்ப விதிக்கப்படும் நிலைத்த ஒரு விதியின் படியாகவு கலந்த முறையோடு மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறாக எடுக்கப்படும் மாதிரியைக் கொண்டு கணிக்கும் முறைக்கு கலப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்கிறோம்.

2.5 மாதிரிகளைத் தெரிவு செய்யும் முறைகள் :

இப்பகுதியில் பின்வரும் மூன்று வகையான முறைகளைக் காண்போம்.

1. சாதாரண சமவாய்ப்பிலான மாதிரிக் கணிப்பு முறை

2. பகுதி முறை மாதிரிக் கணிப்பு முறை

3. முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை

1. சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Simple random sampling)

ஒரு முடிவுறு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளைத் தெரிவு செய்யும் போது, ஒவ்வொரு உறுப்பும் தெரிந்தெடுக்கப்பட சமவாய்ப்பு அமையுமானால், அவ்வகையில் பெறப்பட்ட சில உறுப்புகளைக் கொண்ட மாதிரி, சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரி அல்லது சாதாரண ராண்டம் மாதிரி எனப்படும்.

2. மாதிரித்தேர்வு செய்த உறுப்பினை மீண்டும் மாதிரித் தேர்வுக்கு உட்படுத்தாமை

(Sampling without replacement) :

இம்முறையில் முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் மாதிரியில் எடுக்கப்படும்போது ஒரே ஒரு முறை தான் அமையும். அதாவது மாதிரித் தேர்வில் ஓர் உறுப்பைத் தேர்வு செய்த பிறகு அதே உறுப்பு முழுமைத்தொகுதிக்கு மறுபடியும் அனுப்பப் படுவதில்லை.

3. மாதிரித் தேர்வு செய்த உறுப்பினை மீண்டும் மாதிரி தேர்வுக்கு உட்படுத்துதல் :

(Sampling with replacement) :

இம்முறையில், முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் உறுப்புகள், மாதிரியிலிருந்து மீண்டும் அனுப்பப்படுவதால், ஒரு முறைக்கு மேல் அமையும்.

சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகள் மேற்கூறிய இரு வகையிலும் அமைகின்றன.

2.5.1 சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகளைத் தேர்வு செய்யும் முறைகள் :

கீழ்க்கண்டவை சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகளின் சில வகைகளாகும்.

(அ) குலுக்கல் முறை (Lottery method)

இம்முறை எல்லோரும் நன்கறிந்த எளிமையான முறையாகும். இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் எண்கள் தரப்பட்டு அவை ஒவ்வொன்றும் துண்டு சீட்டுகளில் குறிக்கப்படுகின்றன.

துண்டு சீட்டுகள் ஒரே அளவு, வடிவம் மற்றும் வண்ணம் கொண்டதாக இருக்க வேண்டும். அவற்றை நன்கு மடித்து ஒரு கொள்கலனில் கலந்து வைத்திருக்க வேண்டும். பிறகு அனைத்து சீட்டுகளையும் குலுக்கி மாதிரி எண்ணிக்கைக்கு ஏற்றவாறு அவற்றிலிருந்து தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்களில் 5 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமெனில், 50 துண்டு சீட்டுகளில் அம்மாணவர்களின் பெயர் அல்லது வரிசை எண்ணைக் குறிப்பிட்டு அத்தாள்களைக் கலந்துவிட வேண்டும். அவற்றிலிருந்து 5 மாணவர்களைச் சமவாய்ப்பு முறையில் நாம் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இம்முறை பரிசுச்சீட்டுக் குலுக்கல் முறையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதி முடிவுறாதிருப்பின் இக்குலுக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

(ஆ) சமவாய்ப்பில் எண்களைத் தரும் பட்டியல் முறை : (Table of Random number method)

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறாதிருப்பின், குலுக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது. இதற்க மாற்றாக சமவாய்ப்பில் எண்களைத் தரும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி மாதிரி எடுக்கலாம். தரப்படுத்தப்பட்ட பல வகை ராண்டம் எண்கள் பட்டியல்கள் உள்ளன. அவற்றுள் (i) டிப்பெட்டின் அட்டவணை (ii) ஃபிஷர், யேட்ஸ் உருவாக்கிய அட்டவணை (iii) கெண்டால், ஸ்மித் உருவாக்கிய அட்டவணை முக்கியமானவையாகும்.

இப்பட்டியல்களில் 0, 1, 2............ 9 ஆகிய எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்திராத வகையில், சமமாக பல முறை நிகழும் படி அமைக்கப்பட்டிருக்கும். $N = 100$ அளவுள்ள மாதிரியை ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்க வேண்டுமாயின், அம்மாதிரிக்கான உறுப்புகளுக்கு 001 முதல் 100 முடிய குறிக்கப்பட்டு, மும்மூன்றாக இணைத்து, தொடர்ச்சியாக எடுக்க வேண்டும்.

(ராண்டம் எண்களின் பட்டியலைப் பிற சேர்க்கையில் காண்க)

ராண்டம் எண்கள் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாதிரியைத் தேர்வு செய்யும் முறை :

மாதிரித் தேர்வு செய்யும்போது முழுமைத்தொகுதியில் உறுப்புகளை வரிசை எண் அடிப்படையில் சமமான எண்ணிக்யைுடைய எண்களாக நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். முழுமைத்தொகுதியின் அளவு 1000 அல்லது 1000க்கும் குறைவாக இருப்பின், அதிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு 000, 001, 002, ... 999 என்ற எண்கள் குறியீடாக அளிக்கப்படுகிறது. அட்டவணையில், எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க எந்த இடத்திலிருந்தும், எந்த திசையிலிருந்தும் நிரல் வரிசையாகவோ, நிரை வரிசையாகவோ சென்று தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆனால் தொடர்ச்சியாக இவ்வெண்களைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குத் தகுந்தபடியும் நம்மிடம் உள்ள ராண்டம் அட்டவணைப் படியும், நம் வசதிக்கேற்றவாறு மாதிரிகளைத் தேர்வு செய்யலாம். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் போது ஏதேனும் ஒன்று முழுமைத்தொகுதி அளவு 'N' ஐக் காட்டிலும் பெரிதாக இருந்தால், அந்த எண்ணிலிருந்து 'N' ஐக் கழித்த பின் கிடைக்கும் எண்ணை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்து மாதிரியின் உறுப்புகளை அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு பகுதியில் 500 குடும்பங்கள் உள்ளன. அவர்களின் வாழ்க்கைத் தரம் பற்றி ஆய்வு செய்ய 15 குடும்பங்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை கீழ்க்கண்ட சமவாய்ப்பில் அமைந்த எண்களின் ஒரு தொகுப்பிலிருந்து ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடு.

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	8445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950

தீர்வு :

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து மூன்றிலக்க எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க எவ்வரிசையிலிருந்தும் நாம் தொடங்கலாம் என்பதறிவோம்.

இப்போது மூன்றாம் வரிசையின் ஆரம்பத்திலிருந்து எண்களை தேர்ந்தெடுக்கத் தொடங்குவோம். அவை

203	023	277	353	600	794	109	179
272	284	450	641	148	908	280	

இங்கு சில எண்கள் 500 க்கும் மேல் உள்ளதால் அந்த எண்களிலிருந்து 500 ஐக் கழித்து அவற்றைக் கீழே பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

203	023	277	353	100	294	109	179
272	284	450	141	148	408	280	

இதுவே நாம் தேர்ந்தெடுத்த மாதிரியாகும்.

(இ) கணிப்பான் (Calculator) மற்றும் கணினியைப் (Computer) பயன்படுத்தி ராண்டம் எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல் :

ராண்டம் எண்களை, அறிவியல் கணிப்பான் (Scientific Calculator) மற்றும் கணினியைப் (Computer) பயன்படுத்தியும் உருவாக்கலாம். அவற்றில் இருக்கும் ராண்டம் எண் தரும் விசையை ஒவ்வொரு முறை அழுத்தும் போதும் வேறு வேறான ராண்டம் எண்களைப் பெறலாம். இம்முறையில் மாதிரிதேர்வு செய்வது, ராண்டம் பட்டியலில் இருந்து தேர்வு செய்யும் முறையைப் போன்றதே.

ராண்டம் மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துவதில் உள்ள நிறைகுறைகள் :

நிறைகள் :

1. தேர்வு, வாய்ப்பின் அடிப்படையில் அமைவதால் தனிப்பட்ட நபரின் விருப்பு, வெறுப்பு தவிர்க்கப்படுகிறது.
2. ராண்டம் மாதிரி, இம்முறையில் தேர்வு செய்யப்படுவதால் ஒருங்கமைந்த முழுமைத் தொகுதியை நன்கு பிரதிபலிக்கிறது.
3. முழுமைத் தொகுதியின் அனைத்து உறுப்புகளைப் பற்றியும் அறிய வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

4. முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றி அறிந்திராத போது ஒரு மாதிரியின் துல்லியத் தன்மை பற்றி அறிய, அதே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மற்றொரு மாதிரியை எடுத்து சோதனை செய்து முடிவெடுக்க முடிகிறது.

5. இம்முறை மற்ற ராண்டம் மாதிரிகளுக்கும் பயன்படுகிறது.

குறைகள் :

1. முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மிகவும் அதிகமாக இருக்கும் போது குலுக்கல் முறை அல்லது ராண்டம் எண்கள் பட்டியல் முறை போன்றவற்றைப் பயன்படுத்துவது சிரமமாக இருக்கும்.

2. முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளிடையே மிகுந்த வேறுபாடு காணப்படும் போது இம்முறைகள் முழுமைத்தொகுதியினை பிரதிபலிப்பதாக அமையாது.

3. பகுதி முறை மாதிரித் தேர்வைக் காட்டிலும், இம்முறை மாதிரித் தேர்வின் உறுப்புகள் அதிக அளவில் இருக்க வேண்டியுள்ளது.

4. மிகுந்த பரப்பளவைக் கொண்ட பகுதியில் ராண்டம் மாதிரித் தேர்வு செய்ய, கூடுதலான செலவும், நேரமும் தேவைப்படுகிறது.

2.5.2 படுகை முறை மாதிரியெடுக்கும் முறை (Stratified sampling) :

மாதிரி எடுத்தலின் பல முறைகளில், பொதுவாக படுகைமுறை மாதிரியெடுத்தலே அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையில் முழுமைத்தொகுதி பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொருவர் பிரிவும் படுகை (Stratum) என்று கூறப்படுகிறது. இப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றுக்குள்ளே முடிந்தவரை ஒருங்கமைந்து இருக்கும்படியாகப் பகுக்கப்படுகிறது. பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சம வாய்ப்பு முறையில் அமைந்த மாதிரி எடுக்கப்பட்ட பின் அவை ஒன்றாக இணைக்கப்பட்டு நமக்குத் தேவையான படுகை முறை மாதிரி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. படுகை முறை மாதிரி முறையை, பகுதி முறை மாதிரி எடுத்தல் என்றும் கூறுவர்.

படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலின் வகைகள் :

இரு வகையான படுகை முறை மாதிரியெடுத்தல் உள்ளன. அவை விகிதசமமுடையது மற்றும் விகித சமமற்றது ஆகும். விகித சமமுடைய படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலில், உட்பிரிவுகளின் விகிதசம எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப உறுப்புகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படும். அதாவது அதிக எண்ணிக்கை உள்ள பிரிவுகளில் எடுக்கப்படும் மாதிரிகளில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்.

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு N என்றும், மாதிரியின் அளவு n என்றும் குறிக்கப்படும் போது ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் பெறக் கூடிய மாதிரிப் பின்னம் ஒரு மாறாத எண்ணாகும். இது $\frac{n}{N} = c$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. எனவே இம்முறையில் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் பெறப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அப்படுகையைப் பிரதிபலிப்பதாக அமைகிறது.

விகித சமமற்ற படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள படுகைகளின் அளவைக் கருதாமல் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சம எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

500 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் **50** பேரைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை எடுக்க வேண்டும். அவர்கள் **300** பேரைக் கொண்ட A என்ற கல்வி நிறுவனத்திலும் **200** பேரைக் கொண்ட B என்ற கல்வி நிறுவனத்திலும் உள்ளனர் எனில் விகித சமமுடைய படுகைமுறை மாதிரியெடுத்தல் முறையில் எவ்வாறு மாதிரி எடுப்பாய் **?**

தீர்வு :

இங்கு இரு படுகைகள் $N_1 = 200$ மற்றும் $N_2 = 300$ ஆகவும், மொத்த முழுமைத்தொகுதியின் அளவு $N = N_1 + N_2 = 500$ ஆகவும் இருக்கிறது. மாதிரியின் அளவு $n = 50$

n_1, n_2 என்பவை இரு படுகைகளின் அளவுகள் என்றால்

$$n_1 = \frac{n}{N} \times N_1 = \frac{50}{100} \times 200 = 20 \qquad n_2 = \frac{n}{N} \times N_2 = \frac{50}{500} \times 300 = 30$$

எனவே A யிலிருந்து **20** பேரையும் B யிலிருந்து **30** பேரையும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவர்களை பிறகு சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரி முறை மூலம் தேர்வு செய்து கொள்ள வேண்டும்.

படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலின் நிறை குறைகள் :

நிறைகள் :

1. இது முழுமைத்தொகுதியை அதிகம் பிரதிபலிப்பதாக அமையும்.
2. இது அதிக துல்லியத் தன்மைக்கு உறுதி செய்கிறது.
3. முழுமைத் தொகுதி பகுக்கப்பட்டிருந்தால் எளிதில் செயல்படுத்த முடியும்.
4. இடம் மற்றும் பரப்பளவைப் பொறுத்துப் படுகைகளாகப் பிரித்திருந்தால் நேரம் மற்றும் செலவைக் குறைக்க முடிகிறது
5. முழுமைத் தொகுதியானது சீராக இல்லாமல் இருக்கும்போது இம்முறையே பொருத்தமானதாகும்.
6. ஒருங்கமைவற்ற முழுமைத்தொகுதியில் இம்முறையில் மாதிரி எடுத்தால் அது நல்ல முடிவுகளைத் தரும்.

குறைகள் :

1. முழுமைத்தொகுதியை ஒருங்கமைந்த படுகைகளாகப் பிரிப்பது என்பது கடினமான செயலாகும். அதற்கு அதிகச் செலவு, நேரம் மற்றும் புள்ளியியல் அனுபவம் பெற்றோரின் உழைப்பு தேவைப்படுகிறது.
2. தவறான பகுதிகளாகவோ சில இடங்களில் ஒன்றுக்கொன்று பொதுவான படுகைகளாக பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், தவறான முடிவுகளைப் பெற நேரிடும்.

2.5.3 முறை சார்ந்த மாதிரியெடுக்கும் முறை (Systematic Sampling) :

இதன் எளிமையான நடைமுறையாலும், வசதியாக மாதிரி எடுக்க முடிவதாலும், இம்முறை பரந்த அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளின் முழுப்பட்டியலும் இருந்தால், முறை சார்ந்த மாதிரி எடுத்தலை அடிக்கடிப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். இதை ராண்டம் மாதிரி சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Quasi - random sampling) என்றும் கூறுவர்.

தேர்ந்தெடுக்கும் முறை :

இம்முறை ராண்டம் முறையில் தொடங்கி, அதன் அடிப்படையில் மாதிரி முழுவதும் அமைத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. முதல் உறுப்பு ராண்டம் எண்களைக் கொண்டு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. பிறகு மற்றைய உறுப்புகள் நாம் வரையறுத்த வடிவத்திற்கு உட்பட்டு முதல் உறுப்பைச் சார்ந்து முறையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இம்முறையை முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் என்கிறோம்.

இம்முறையில் பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு K ஆவது உறுப்பும் மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன. முதல் உறுப்பு மட்டும் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இம்முறையில், 500 மாணவர்களில் 50 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமென்றால் முதலில் K ஆவது உறுப்பை பட்டியலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். K என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளி ஆகும்.

$$\text{இடைவெளி } K = \frac{N}{n} = \frac{\text{முழுமைத் தொகுதி அளவு}}{\text{மாதிரியின் அளவு}}$$

$$K = \frac{500}{50} = 10$$

$K = 10$ என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளியாகும். இந்த 10 எண்களுக்குள் ஓர் எண் $i \leq K$ ஆகுமாயின், ஒவ்வொரு K ஆவது உறுப்பும் அம்மாதிரிக்குள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும், $i = 5$ எனில், நாம் 5, 15, 25, 35, ... ஆகிய எண்களை நாம் தேர்வு செய்து கொள்ள வேண்டும்.

இங்கு i என்னும் எண் ராண்டம் தொடக்க எண் எனப்படும். இம்முறை மூலம் K வகையான முறை சார்ந்த மாதிரிகள் தொடக்க எண்ணைப் பொறுத்து உருவாகிறது.

நிறைகள் :

1. இம்முறை எளிதானதும் வசதியானதுமாகும்.
2. நேரமும் வேலையும் பெருமளவில் குறைகிறது.
3. மிகச் சரியான முறையில் இதை மேற்கொண்டால் முடிவுகள் துல்லியமாகக் கிடைக்கும்.
4. இதை முடிவுறா முழுமைத்தொகுதியில் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறைகள் :

1. முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் முறையில் முழுமைத்தொகுதி முழுவதையும் பிரதிபலிக்காது.

2. கணிப்பாளர்களின் விருப்பு வெறுப்புகளுக்கு வாய்ப்பிருக்கிறது.

முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் காடுகளில் மரங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல், தொகுதியில் உள்ள வீடுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல், பதிவேட்டில் தொடர்ச்சியாக உள்ள பதிவுகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்தல் போன்றவற்றிற்குப் பயன்படுகிறது.

பயிற்சி – 2

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. மாதிரிக் கணிப்பு என்பது கீழ்க்கண்டவற்றுள் தவிர்க்க முடியாத சூழ்நிலையுடையது

அ) ஒருவரின் இரத்தப் பரிசோதனை

ஆ) முழுமைத்தொகுதி முடிவற்றதாயிருக்கும் போது

இ) பசை மின்கலங்களின் ஆயுளைச் சோதித்தல்

ஈ) மேற்கூறிய எல்லா காரணங்களுக்கும்

2. தொகுதிப் பண்பளவைக்கும், மாதிரி பண்பளவைக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு

அ) மனிதப் பிழை ஆ) மாதிரிக் கணிப்புப் பிழை

இ) மாதிரிக் கணிப்பில்லாத பிழை ஈ) ஏதுமில்லை

3. முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் மாதிரியில் இடம் பெறுவதற்கான சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கும் மாதிரிக் கணிப்பு முறை

அ) வரையுடைய மாதிரிக்கணிப்பு ஆ) நோக்கமுடை மாதிரிக் கணிப்பு

இ) சாதாரண ராண்டம் மாதிரிக் கணிப்பு ஈ) ஏதுமில்லை

4. சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பிற்குத் தேவையானது

அ) துண்டு சீட்டு முறை ஆ) ராண்டம் எண் பட்டியல்

இ) கணிப்பான் ஈ) மேற்கூறிய எல்லாம்

5. நிகழ்தகவு சார்ந்திராத மாதிரிக் கணிப்பு முறை

அ) நோக்கமுடை மாதிரிக் கணிப்பு ஆ) பங்கு கணிப்பு முறை

இ) பொருள் சார்ந்த கணிப்பு முறை ஈ) மேற்கூறிய எல்லாம்

6. 50 பேர் கொண்ட நிறுவனத்தின் ஒரு பட்டியலிலிருந்து 5 பேரை, முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அம்முறையில் முதல் எண் 7 எனில் அடுத்த எண்

அ) 8 ஆ) 16 இ) 17 ஈ) 21

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

7. எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத்தொகுதி, __________ முழுமைத்தொகுதி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

8. ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் களப்பணி ஆய்வுக்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால் அது __________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.

9. தொகுதிப்பண்பளவைக்கும், மாதிரிப் பண்பளவைக்கும் இடையில் உள்ள முரண்பாடு __________ என்று அழைக்கப்படும்.

10. முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அடக்கிய பட்டியலை __________ என்கிறோம்.

11. முழுமைத்தொகுதி __________ இருக்கும் போது படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு பொருத்தமானது ஆகும்.

12. ஆய்வின் போது உறுப்புகள் அழியும் தன்மை பெற்றிருந்தால் __________ செய்ய முடியாது.

13. முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் தொடர்ச்சியாக அமைக்கப்பட்டிருந்தால், பொருத்தமான மாதிரிக் கணிப்பு முறை __________ ஆகும்.

14. ஒருங்கமைந்த முழுமைத்தொகுதியில், எடுக்க வேண்டிய மாதிரி முறைகளில், படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு முறையைக் காட்டிலும் __________ முறை சிறந்தது.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க :

15. முழுமைத் தொகுதி – வரையறு ?

16. முடிவுறு முழுமைத் தொகுதி, முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி இவற்றை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் வரையறு.

17. மாதிரிக் கணிப்பு என்றால் என்ன ?

18. பின்வருவனவற்றை வரையறு ?

    (அ) மாதிரி (ஆ) மாதிரி அளவு (இ) முழுக் கணிப்பு (ஈ) மாதிரிக்கணிப்பு அலகு (உ) மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியல்

19. முழுக் கணிப்பு, மாதிரிக் கணிப்பு இவற்றிற்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைக் கூறுக.

20. முழுமைக் கணிப்பு முறையை விட, மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் எவ்வகை நன்மைகள் உள்ளன என்பதைக் கூறுக.

21. ஏன் நாம் மாதிரிக் கணிப்பை நாடுகிறோம் ?

22. மாதிரிக் கணிப்பு எடுப்பதின் வரம்புகள் யாவை ?

23. மாதிரிக் கணிப்பின் கோட்பாடுகளைக் கூறுக.

24. நிகழ்தகவுடைய மாதிரிக் கணிப்பு, நிகழ் தகவற்ற மாதிரிக் கணிப்பு என்றால் என்ன ?

25. நோக்கமுடை மாதிரிக்கணிப்பு என்றால் என்ன ? இது எங்கு பயன்படுத்தப்படுகிறது ?

26. கலப்பு மாதிரிக் கணிப்பு என்றால் என்ன ?

27. சாதாரண சமவாய்ப்பில் அமையும் மாதிரிக் கணிப்பு என்பதை வரையறு ?

28. சாதாரண சமவாய்ப்பில் அமையும் மாதிரிக் கணிப்பு முறையைத் தேர்ந்தெடுக்கும் விதத்தை விவரி.

29. சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பின் ஏதேனும் இரு முறைகளை விவரி.

30. சமவாய்ப்பு எண்கள் பட்டியல் என்பது என்ன ? அதிலிருந்து எவ்வாறு எண்களைத் தேர்ந்தெடுப்பாய் ?

31. சமவாய்ப்பு மாதிரிக் கணிப்பிலுள்ள நிறை குறைகள் யாவை ?

32. எச்சூழ்நிலைகளில் படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு பயன்படுத்தப்படுகிறது ?

33. படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு எடுக்கும் முறையை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

34. முழுமைத்தொகுதிகளைப் படுகைகளாகப் பிரிப்பதின் நோக்கம் என்ன ?

35. படுகைமுறை மாதிரிக் கணிப்பின் நிறை குறைகளை எழுதுக.

36. முறைசார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பை விளக்குக.

37. முறைசார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பின் நிறை குறைகளை எழுதுக.

38. முறைசார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு பயன்படுத்தப்படும் இடங்களுக்கு எடுத்துக் காட்டுகள் தருக.

39. ஒரு முழுமைத்தொகுதியின் அளவு 800 ஆகும். அது 300, 200, 300 ஆகிய மூன்று படுகைகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து 160 எண்ணிக்கையுடைய ஒரு படுகைமுறை மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் விகிதசமமாக எவ்வளவு எண்ணிக்கை கொண்ட மாதிரி எடுக்க வேண்டும் ?

40. ராண்டம் எண்களைப் பயன்படுத்தி, ஒரு படுகையில் உள்ள 80 மனைகளிலிருந்து 8 மனைகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை அமைக்க.

41. ஒரு தெருவில் 50 வீடுகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து 10 வீடுகளை ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய்விற்காக முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறையில் தேர்வு செய்க.

IV செய்து பார்க்க :

42. உன்னைச் சுற்றியுள்ள சூழ்நிலையில் (அ) மாதிரிக் கணிப்பு பயன்படுத்தப்படும் இடங்கள் ஏதேனும் ஐந்தினைக் கூறுக. (ஆ) முழுக்கணிப்பு பயன்படுத்தப்படும் இடங்கள் ஏதேனும் ஐந்தினைக் கூறுக.

43. உமது பள்ளியில் உள்ள தொடக்க நிலை, இடைநிலை, மேல்நிலை பிரிவுகளில் பயிலும் மாணவர்களைக் கொண்டு விகிதசமமுறையில், படுகை முறை மாதிரிக் கணிப்பு (ஒரு போட்டித் தேர்விற்காக) ஒன்றினை அமைக்க.

44. உமது வகுப்பு வருகைப் பதிவேட்டிலிருந்து 5 மாணவர்களை முறைசார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு மூலம் தேர்வு செய்க.

விடைகள்

I. 1. (ஈ) 2. (ஆ) 3. (இ) 4. (ஈ) 5. (ஈ) 6. (இ)

II. 7. முடிவுறாத 8. முழுக்கணிப்பு முறை 9. மாதிரிக் கணிப்புப் பிழை

10. மாதிரிப் பட்டியல் 11. ஒருங்கமையாத 12. முழுமைக் கணிப்பு முறை

13. முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு

14. சாதாரண ராண்டம் மாதிரிக் கணிப்பு

இந்திய மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பு 2001

இந்திய/ மாநிலங்கள் யூனியன் பிரதேசங்கள்	இந்திய மக்கள் தொகை 2001			மக்கள் தொகை 1991–2001	பால் விகிதம் (ஆயிரம் ஆண்களுக்கு பெண்களின் எண்ணிக்கை
	மக்கள்	ஆண்கள்	பெண்கள்		
இந்தியா 1, 2	1,027,015,247	531,277,078	495,738,169	21.34	933
அந்தமான், நிக்கோபர் தீவுகள்*	356,265	192,985	163,280	26.94	846
ஆந்திர பிரதேசம்	75,727,541	38,286,811	37,440,730	13.86	978
அருணாசல பிரதேசம்	1,091,117	573,951	517,166	26.21	901
அஸ்ஸாம்	26,638,407	13,787,799	12,850,608	18.85	932
பீகார்	82,878,796	43,153,964	39,724,832	28.43	921
சண்டிகார்	900,914	508,224	392,690	40.33	773
சாட்டிஸ்கர்	20,795,956	10,452,426	10,343,530	18.06	990
தாத்ரா நகர் ஹவேலி	220,451	121,731	98,720	59.20	811
டாமன் டையூ	158,059	92,478	65,581	55.59	709
டெல்லி*	13,782,976	7,570,890	6,212,086	46.31	821
கோவா	1,343,998	685,617	658,381	14.89	960
குஜராத்	50,596,992	26,344,053	24,252,939	22.48	921
ஹரியானா	21,082,989	11,327,658	9,755,331	28.06	861
இமாசல பிரதேசம்	6,077,248	3,085,256	2,991,992	17.53	970
ஜம்மு, காஷ்மீர்	10,069,917	5,300,574	4,769,343	29.04	900

ஜார்கண்ட்	26,909,428	13,861,277	13,048,151	23.19	941
கர்நாடகா	52,733,958	26,856,343	25,877,615	17.25	964
கேரளா	31,838,619	15,468,664	16,369,955	9.42	1.058
லட்சத்தீவுகள்*	60,595	31,118	29,477	17.19	947
மத்தியப் பிரதேசம்	60,385,118	31,456,873	28,928,245	24.34	920
மஹாராஷ்டிரா	96,752,247	50,334,270	46,417,977	22.57	922
மணிப்பூர்	2,388,634	1,207,338	1,181,296	30.02	978
மேகாலயா	2,306,069	1,167,840	1,138,229	29.94	975
மிசோராம்	891,058	459,783	431,275	29.18	938
நாகாலாந்து	1,988,636	1,041,686	946,950	64.41	909
ஒரிசா	36,706,920	18,612,340	18,094,580	15.94	972
பாண்டிச்சேரி*	973,829	486,705	487,124	20.56	1,001
பஞ்சாப்	24,289,296	12,963,362	11,325,934	19.76	874
ராஜஸ்தான்	56,473,122	29,381,657	27,091,465	28.33	922
சிக்கிம்	540,493	288,217	252,276	32.98	875
தமிழ்நாடு	62,110,839	31,268,654	30,842,185	11.19	986
திரிபுரா	3,191,168	1,636,138	1,555,030	15.74	950
உத்திரபிரதேசம்	166,052,859	87,466,301	78,586,558	25.80	898
உத்ராஞ்சல்	8,479,562	4,316,401	4,163,161	19.20	964
மேற்கு வங்காளம்	80,221,171	41,487,694	38,733,477	17.84	934

குறிப்புகள் :

1. இயற்கைப் பேரழிவின் பொருட்டு, 2001 ஆம் ஆண்டின் இந்திய மக்கட் தொகை கணக்கெடுப்பு குஜராத்தின் சில பகுதிகளிலும், இமாச்சல பிரதேசத்தின் சில பகுதிகளிலும், எடுக்கப்படவில்லை. இப்பகுதிகளின் மதிப்பீட்டுக் கணிப்புகளே சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. இதே காரணத்தால் 0–6 வயதுடையோரைப் பற்றியும், படித்தவர் நிலை பற்றியும் இப்பகுதிகளில் உள்ள விவரங்கள் சேகரிக்கப்படவில்லை.

2. இந்தியாவின் அடர்த்தியைக் கணக்கிடும் போது, பாகிஸ்தான் மற்றும் சீனாவின் ஆக்கிரமிப்பில் உள்ள சில பகுதிகள் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை.

ஆதாரம் : இந்திய மக்கட் தொகை கணக்கெடுப்பு இணையதளத்திலிருந்து

3. புள்ளி விவரம் சேகரித்தல், வகைப்படுத்துதல் மற்றும் அட்டவணைப்படுத்துதல்

3.1 அறிமுகம் :

தினசரி வாழ்க்கையில் அனைவரும் விவரங்களை சேகரித்து, பகுத்தாராய்ந்து மற்றும் பயன்படுத்தி வருகின்றனர். மக்கள் அதிக அளவில் விவரங்களை தினசரி உரையாடல்கள், தொலைக்காட்சிகள், வானொலி, கணினி, சுவரொட்டிகள் மூலம் தெரிந்து கொள்வதையே வழக்கமாகக் கொண்டிருக்கின்றனர். இவை எதனால் என்றால் மக்களுக்கு நிறைய விவரங்களை உற்று நோக்கி, தேர்ந்தெடுப்பதையோ, மறுப்பதையோ செய்ய வேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. தினசரி வாழ்க்கையில் தொழில் மற்றும் தொழிற்சாலை ஆகியவற்றிற்கு சில புள்ளியியல் விவரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. மற்றும் அவற்றை எங்கேயிருந்து எப்படி சேகரிப்பது என்பதும் தெரிய வேண்டியிருக்கிறது. இதன் விளைவாக ஒவ்வொருவரும் ஒரு பொருளை வாங்குவதற்கு முன்பு அதன் தரத்தையும், விலையையும் ஒப்பிட்டு பார்த்து ஒரு முடிவுக்கு வர வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நிறுவனத்தில் பணிபுரிய தொழிலாளர்கள் தங்கள் ஊதியம், விதிமுறைகள், பதவி உயர்வு வாய்ப்புகள் மற்றும் பல விவரங்களை ஒப்பிட விரும்புவார்கள், அதே சமயம் நிறுவன முதலீட்டாளர்களும் அவர்களின் செலவினங்களை குறைத்து லாபத்தை அதிகப்படுத்த விரும்புவர்.

புள்ளியியலில் மிக முக்கியமான பயன்களில் ஒன்று, முடிவுகளை உருவாக்க விவரங்களை அளிப்பதாகும். கடந்த காலத்தின் தோற்றத்தையும், நிகழ்காலத்தின் விளக்கத்தையும் மற்றும் எதிர்காலத்தைப் பற்றிய முன் மதிப்பீடுகளையும் புள்ளியியல் தருகிறது.

புள்ளியியல் விவரங்கள் சேகரிப்பதன் நோக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

1. முதல் நிலை புள்ளியியல் விவரங்களை சேகரிக்கும் முறையை பற்றி விளக்கம் அளிக்க.
2. நடத்தும் ஆய்வு எந்த நிலையில் உள்ளது என்பதை தீர்மானிக்க.
3. பகுப்பாய்வின் போது அதன் வழி முறைகளைப் பற்றி கண்டறிவதற்கும், கணிப்பதற்கும்.
4. மாதிரிக் கணிப்பை வரையறுக்கவும், விளக்கவும்.
5. மாதிரிக் கணிப்பின் அடிப்படையை பகுப்பாய்வு செய்ய.

புள்ளியியல் ஆய்வு என்பது மக்களின் பல்வேறு பிரிவுகளைப் பற்றிய விவரங்களை சுருக்கமாகவும் ஒழுங்கு முறையிலும் அளிப்பதாகும். விவரத்தை விளக்குவதற்கும் முறைப்படுத்துவதற்கும், ஆய்வு செய்வதற்கும் பலவகையான புள்ளியியல் முறைகள் உதவுகின்றன. அவ்வாறு ஆய்வு செய்த முடிவுகளை முன் கூட்டியே அறிவதற்கும், தீர்மானிப்பதற்கும் இதைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

முதலில் விவரத்தை எவ்வளவு நல்ல முறையில் சேகரிக்கப்பட்டது என்பதைப் பொருத்து இறுதி முடிவின் ஏற்புடைத் தன்மையையும், துல்லியமும் அமையும். விவரங்களின் தரமானது இருக்கும் சூழ்நிலையை பெரிதும் பாதிக்கிறது. எனவே அதை முறைப்படுத்துவதற்கு மிக அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்க வேண்டும்.

விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது அதன் துல்லியத் தன்மையை உறுதிபடுத்திக் கொள்ள போதிய எச்சரிக்கை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

3.2 விவரங்களின் தன்மை :

வெவ்வேறு நோக்கங்களுக்காக பலவிதமான விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் காலத்தையோ, இடத்தையோ, இரண்டையுமோ சார்ந்ததாக இருக்கிறது.

மூன்று விதமான விவரங்கள் பின்வருமாறு.

1. காலத் தொடர் வரிசை (Time series data)
2. இடத் தொடர் வரிசை (Spatial data)
3. கால இடத் தொடர் வரிசை (Spatio-Temporal data)

3.2.1 காலத்தொடர் வரிசை :

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் சேகரிக்கப்பட்ட எண் மதிப்புகளின் கணம் காலத்தொடர் வரிசையாகும். இவ்விவரமானது முறையான கால இடைவெளிகளிலோ, முறையற்ற கால இடைவெளிகளிலோ சேகரிக்கப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

2001 லிருந்து 2004 வரை உள்ள நான்கு வருடங்களுக்கான ஒரு குடும்பத்தின் மூன்று வகைச் செலவினங்களின் (ரூபாயில்) விவரங்கள் பின்வருமாறு.

வருடம்	உணவு	கல்வி	மற்றவை	மொத்தம்
2001	3000	2000	3000	8000
2002	3500	3000	4000	10500
2003	4000	3500	5000	12500
2004	5000	5000	6000	16000

3.2.2 இடத்தொடர் வரிசை :

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஒரு இடத்துடன் தொடர்புடையது எனில் அது இடத்தொடர் வரிசை என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. பல்வேறு இடங்களில் நடைபெற்ற கிரிக்கெட் தொடர் போட்டிகளில் ஒரு மட்டையாளர் பெற்ற ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை விவரம்.
2. தமிழ்நாட்டில் உள்ள மாவட்ட வாரியான மழையளவு.
3. நான்கு மாநகரங்களில் உள்ள வெள்ளியின் விலை விவரம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

1991 ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவில் உள்ள தென் மாநிலங்களின் மக்கட் தொகை.

மாநிலம்	மக்கட் தொகை
தமிழ்நாடு	5,56,38,318
ஆந்திரப் பிரதேசம்	6,63,04,854
கர்நாடகா	4,48,17,398
கேரளம்	2,90,11,237
பாண்டிச்சேரி	7,89,416

3.2.3 கால இடத்தொடர் வரிசை :

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் காலத்தையும் இடத்தையும் தொடர்புப் படுத்தி வரிசைப்படுத்தப்பட்டால் அவை கால இடத்தொடர் வரிசை எனப்படும்.

மாநிலம்	மக்கட் தொகை	
	1981	1991
தமிழ்நாடு	4,82,97,456	5,56,38,318
ஆந்திரப் பிரதேசம்	5,34,03,619	6,63,04,854
கர்நாடகா	3,70,43,451	4,48,17,398
கேரளம்	2,54,03,217	2,90,11,237
பாண்டிச்சேரி	6,04,136	7,89,416

3.3 விவரங்களின் பிரிவுகள் :

புள்ளியியல் விவரமானது அவை பயன்படுத்தும் முறையின் அடிப்படையில் இரு பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தப்படுகிறது. அவையாவன.

1. முதல் நிலை விவரங்கள்
2. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்

3.3.1 முதல் நிலை விவரங்கள் :

ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்காக விசாரணையின் மூலம் ஒரு ஆய்வாளர் தாமே நேரடியாக சேகரிக்கும் விவரம் முதல் நிலை விவரம் என்று அழைக்கப்படும். இவ்வகை விவரங்கள் உண்மையானவை. இவ்விவரங்களை களப்பணியாளர்கள் மூலமாகவோ, ஆய்வுத்துறை மூலமாகவோ, நிறுவனம் மூலமாகவோ சேகரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

ஒரு ஆய்வாளர் பள்ளிக் குழந்தைகளுக்கான மதிய உணவுத் திட்டம் எவ்வாறு நடைமுறைப் படுத்தப்படுகிறது என அறிய விரும்பினால் ஒரு களப்பணி ஆய்வினை மேற்கொள்ள வேண்டும். அப்போது பெற்றோர் மற்றும் குழந்தைகளிடம் தேவையான வினாக்களை எழுப்பி அவர்கள் கருத்தினை அறிந்து விவரங்களை சேகரிக்க வேண்டும். இவ்வாறு சேகரிக்கும் விவரங்கள் முதல் நிலை விவரங்கள் எனப்படும்.

முதல் நிலை விவரங்களை கீழ்கண்ட ஐந்து முறைகளில் பிரிக்கலாம் :

1. நேரிடையாக விவரங்களைச் சேகரித்தல் (Direct Personal Interview)
2. மறைமுக வாய்மொழி முறை மூலம் சேகரித்தல் (Indirect Oral Interview)
3. செய்தியாளர்கள் மூலம் விவரங்கள் சேகரித்தல் (Information from respondents)
4. தபால் வாயிலாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி சேகரிக்கும் முறை (Mailed Questionnaire Method)
5. கணிப்பாளர்கள் மூலம் பட்டியலை அனுப்பி விவரங்கள் சேகரித்தல் (Schedules sent through enumerators)

1. நேரிடையாக விவரங்களை சேகரித்தல் :

இம்முறையில் யாரிடம் விவரங்களை பெற வேண்டுமோ அவர்களே விவரங்களைச் சொல்பவர் ஆவர். ஆய்வாளர் நேரிடையாக அவர்களிடம் சென்று வினாக்களை எழுப்பி விவரங்களைப் பெறுகின்றனர். ஆய்வை மேற்கொள்ளும் பகுதி அதிக அளவில் இல்லாமல் குறைந்த நிலையில் உள்ளபோது இம்முறையே உகந்த முறையாக உள்ளது.

நிறைகள் :

1. விவரங்கள் சேகரிப்பவர்கள் நேரிடையாக விவரம் கொடுப்பவர்களை அணுகி விவரங்கள் பெறுவதால் விவரங்களை வேறு முறைகளை விட இம்முறையின் மூலம் அதிகமானவர்களிடம் விவரம் பெற முடிகிறது. கொடுப்பவர்களின் விருப்பத்துடன் செய்திகளை பெறும் நிலை உள்ளது.
2. கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்கள் சீரானதாகவும் துல்லியமானதாகவும் அமைகிறது. விவரங்கள் கொடுப்பவர்களின் சந்தேகங்களை ஆய்வாளர் நிவிர்த்தி செய்கிறார்.
3. விவரங் கொடுப்பவர்களின் தொடர்பான விவரங்களைப் பெற முடிகிறது. நடத்தை மற்றும் பொதுவான செய்திகளையும் பெற்று ஆய்வின் முடிவுகளுக்கு பயன்படுத்த ஏதுவாகிறது.
4. வினாக்களில் உள்ள வார்த்தைகளை சூழ்நிலைக்கு ஏற்ற வகையில் மாற்றியமைத்துக் கேட்க முடிகிறது. மாற்று மொழிகளில் வினாக்களை கொடுக்க முடிகிறது விவரங்கள் கொடுப்பவருக்கு ஏற்படும் தொந்தரவுகள், புரிந்து கொள்ளும் தன்மை ஆகியவற்றை தீர்க்க முடிகிறது.

குறைகள் :

1. நேரிடையாக விவரங்களை சேகரிக்கும் முறை அதிக செலவையும் அதிக நேரத்தையும் உட்கொள்கிறது.
2. விவரங்கள் கொடுப்பவர்களின் எண்ணிக்கை மிகக் கூடுதலாகவும், வசிக்கும் இடம் விரிவான நிலையில் இருக்கும் போது இம்முறை மிகவும் சிரமமாக அமையும்.
3. இம்முறையில் தனிநபர் விருப்பு வெறுப்பு அதிகளவில் இருக்கும்.

2. மறைமுக வாய்மொழி முறை :

விவரங்களைக் கொடுப்பவர்களை நேரிடையாக அணுகாமல் அவர்கள் வீட்டிற்கு அருகில் வசிப்பவர்கள் அல்லது அவர்களின் நண்பர்கள் அல்லது மற்றவர்களிடம் இருந்து விவரங்கள் பெறுவதை இம்முறை குறிக்கும். இம்முறையில் திருட்டு அல்லது கொலை பற்றிய விவரங்களை சேகரிக்க முடிகிறது.

விவரங்கள் கொடுப்பவரின் வீடு தீயினால் பாதிக்கப்படும் பொழுது அவர்களது நண்பர்கள் அல்லது அவர்களின் வீட்டிற்கு அருகே வசிப்பவர்கள் அல்லது அவரைச் சார்ந்தவர்கள் மூலம் தீயின் காரணம் பற்றிய விவரங்களை சேகரிக்கின்றனர்.

சில வழக்குகளில் காவல் துறையினர் திருட்டு, கொலை சம்மந்தப்பட்ட விசாரணைக்கு மூன்றாம் நிலையில் உள்ளவர்களிடம் சில விளக்கங்கள் பெறுகின்றனர். அரசால் நியமிக்கப்படும் விசாரணைக் குழு இம்முறையைக் கையாண்டு விசாரணை சம்மந்தப்பட்டவற்றைப் பற்றி மக்களின் எண்ணங்களையும், ஏனைய அனைத்து செய்திகளையும் சேகரிக்கின்றனர்.

நேரடி விசாரணை முறை செயல்பட முடியாத சூழ்நிலையிலும் விவரங்கள் கொடுப்பவர் கொடுக்க மறுக்கும் சூழ்நிலையிலும், மறைமுக வாய்மொழி முறையே உகந்ததாக அமைகிறது. விவரம் கொடுப்பவர்களின் விவரங்கள் எந்த சூழ்நிலையில் பதிவு செய்யப்படுகிறது என்பதை பொறுத்தும் விவரங்கள் சேகரிப்பவரின் திறமையைப் பொறுத்தும் விவரங்களின் தன்மை அமையும். மூன்றாம் இனத்தார்கள் என்பவர்கள் தகுதியான வினாகட்கு விவரங்கள் அளிப்பவராகவும் குறுக்கு விசாரணைக்கட்கு நல்ல முறையில் விவரங்கள் அளிப்பவர்களாகவும் இருப்பார்கள் என்பது பொருளாகும். விவரங்கள் சேகரிப்பவர் விவரங்கள் கொடுப்பவர்களிடம் கேட்கும் வினாக்களை குழப்பமான நிலையில் கேட்கக் கூடாது. விவரங்கள் கொடுக்கும் ஒருவர் அல்லது ஒரு குழுவினர் நம்பத்தகுந்தவர்களாக இருக்கும் சூழ்நிலையிலேயே இம்முறையின் முடிவுகள் சிறப்புடையதாக இருக்கும்.

3. செய்தியாளர்கள் மூலம் விவரங்கள் சேகரித்தல் :

ஆய்வாளர்கள் தமக்கு சில உதவியாளர்களை நியமித்து, அவர்கள் மூலம் சேகரித்த செய்திகளை பெறுதல் ஆகும். செய்தித்தாள்கள் மூலம் கிடைக்கும் செய்திகள் மற்றும் சில அரசுத் துறை நிறுவனங்கள் மூலமாக கிடைக்கும் செய்திகள் இம்முறையில் அடங்கும். மிக எளிமையாகவும் விரிந்த ஆய்விற்கு உகந்ததாகவும் இம்முறை அமைகிறது. ஆனால் இம்முறையில் கிடைக்கும் முடிவுகள் துல்லியமானவை என்று கூற இயலாது. நீண்ட காலத்தில் விரிந்த பரப்பில் தொடர்ந்து விவரங்கள் சேகரிக்க வேண்டிய சூழ்நிலையில் இம்முறை உகந்ததாக அமைகிறது.

4. அஞ்சல் வழியாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி விவரங்கள் சேகரிக்கும் முறை :

இம்முறையில் பல வினாக்களைத் தொகுத்து அவற்றை அஞ்சல் வழியாக விவரங்கள் தருபவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. தொழில் நுணுக்கத்தின் அடிப்படையில் இவ்வினாக்கள் அடங்கிய தொகுதியை வினாப்பட்டியல் என்று கூறுகிறோம். வினாப்பட்டியலைப் பார்த்து விவரங்கள் தருபவர்களுக்கு ஒரு கடிதத்தினை இவ்வினாப் பட்டியலோடு இணைத்து அனுப்புதல் வேண்டும். இக்கடிதத்தில் ஆய்வின் நோக்கத்தையும், காலியிடத்தில் பூர்த்தி செய்வதற்கான முக்கியத்துவத்தையும், குறித்த காலத்திற்குள் பூர்த்தி செய்யப்பட்ட வினாப்பட்டியலை திருப்பி அனுப்புவதற்கான வேண்டுகோள்களையும் குறிப்பிட்டிருத்தல் வேண்டும்.

விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் படித்தவர்களாகவும் பரந்த பரப்பில் வசிப்பவர்களாகவும் இருக்கும் சூழ்நிலையில் இம்முறை உகந்ததாக அமைகிறது.

நிறைகள் :

1. அஞ்சல் வழியாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி விவரங்கள் சேகரிக்கும் முறையில் செலவு குறைவு.
2. இம்முறையில் விரைவில் விவரங்களைப் பெறுதல் எளிது.
3. விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் பரந்த பரப்பில் வசிக்கும் போது இம்முறை உகந்ததாக உள்ளது.

குறைகள் :

1. வினாப்பட்டியலில் உள்ள விவரங்களைப் புரிந்து கொண்டு பதிலளிப்பவர் கல்வி அறிவு உடையவராக இருத்தல் வேண்டும்.
2. சிலர் வினாப்பட்டியலைப் பெற்று திரும்ப அனுப்பாமல் இருக்கலாம்.
3. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் அனைத்தும் சரியானவையா என்று அறிவது கடினம்.

5. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களை சேகரித்தல் :

கணிப்பாளர்கள், விவரங்கள் தருபவரை அணுகி விவரங்களைப் பெற்று வினாத் தொகுதியை பூர்த்தி செய்வதை குறிக்கும். விரிவான ஆய்விற்கு உகந்ததாக இம்முறை அமைகிறது.

நிறைகள் :

1. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறையை விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் கல்லாதவராயினும் பின்பற்றலாம்.
2. தனிநபரின் இரகசியத்தைப் பற்றியும் மற்றும் பொருள் விவரம் பற்றியும் உள்ள வினாக்களுக்கு பதிலைப் பெறலாம்.
3. விவரங்கள் தருபவர்களை நேரிடையாக அணுகுவதால் இணக்கமின்மை என்பது கிடையாது.
4. இம்முறையில் சேகரித்த விவரங்கள் நம்பத்தகுந்தவை. இதற்கேற்ப கணிப்பாளர்களுக்கு நல்ல பயிற்சி அளிக்கலாம்.
5. இம்முறை பலராலும் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது.

குறைகள் :

1. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களைச் சேகரித்தலுக்கு கூடுதலாக செலவாகும்.
2. சரியான மற்றும் முறையான விவரங்களைப் பெறுவதற்கு கணிப்பாளர்களுக்கு நல்ல பயிற்சி கொடுக்க வேண்டியுள்ளது.
3. நேர்காணலுக்கு நல்ல முன் அனுபவம் தேவையாகிறது.

வினாப்பட்டியல் (Questionnaire) மற்றும் வினாத் தொகுதி (Schedule) தயாரிப்பு :

வினாப்பட்டியலிலிருந்து வினாத் தொகுதி வேறுபடுகிறது. வினாப்பட்டியல் என்பது விவரங்களைக் கொடுப்பவர்களே நேரிடையாக பட்டியலில் குறிப்பதைக் குறிக்கும். வினாத்தொகுதி என்பது கணிப்பாளர்கள் விவரங்கள் தருபவர்களை நேரிடையாக அணுகி விவரங்கள் பெறுவதைக் குறிக்கும். சிலர் இவ்விரண்டையும் வேற்றுமைப்படுத்துவதில்லை. உண்மையான ஆய்விற்கு முன்பாக மாதிரி ஆய்வினை (Pilot Survey) நடத்துதல் வேண்டும். வினாப்பட்டியல் அல்லது வினாத்தொகுதியை மாதிரி ஆய்வினைப் பயன்படுத்தி சரி செய்தல் வேண்டும். யாரிடமிருந்து விவரங்கள் தேவைப்படுகிறதோ அவர்களை அழைத்து விவரங்களைப் பெறுதல் வேண்டும். அவர் வினாக்களை தவறாகவோ, புரிந்து கொள்ளாமலோ அல்லது வார்த்தை வடிவில் கூற இயலாமலோ இருக்கும் நிலையில் வினாக்களை மாற்றியமைக்க வேண்டும். அனைத்து வினாக்களுக்கும் தேவையான பதில்கள் கிடைக்கப் பெற்று விட்டனவா என்பதையும் முடிவு செய்து கொள்ளுதல் வேண்டும்.

சிறந்த வினாப்பட்டியலின் பொதுப்பண்புகள் ஆவன.

1. வினாக்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.
2. எளிமையான வினாக்களிலிருந்து கடினமான வினாக்களுக்குச் செல்லும் வண்ணமாக அமைதல் வேண்டும்.
3. வினாக்கள் சுருக்கமாகவும் எளிமையாகவும் இருத்தல் வேண்டும். புரியாத வார்த்தைகளைத் தவிர்த்தல் நன்று.
4. வினாக்கள் ஆம், இல்லை என்ற பதிலை பெறுமாறு சுருக்கமாக அமைதல் நன்று.
5. தனிமனிதனின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துமாறும், யோசித்து பதில் கூறுமாறும், கணக்கிட்டு பதில் கூறுமாறும் உள்ள வினாக்களை தவிர்த்தல் நன்று.
6. வினாக்களை முழுமையாக சோதனைக்குட்படுத்த வேண்டும். வெளிப்படையான அல்லது நமது செயல்களுக்கு உட்படாத தவறுகளை முடிந்த அளவுக்கு ஒதுக்குதல் நன்று.
7. ஆய்வின் நோக்கத்தை முழுமையாக பூர்த்தி செய்யும் நிலைக்கு ஏற்ற வகையில் வினாப்பட்டியலை அமைத்தல் வேண்டும்.
8. வினாக்களின் வார்த்தைகள் ஒருவருடைய மனதைப் புண்படுத்தக் கூடாது.
9. ஒருவரின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துமாறு உள்ள வினாக்களைத் தவிர்த்தல் வேண்டும்.
10. வினாக்களுக்கு பதில் எழுத போதுமான அளவுக்கு இடம் ஒதுக்குதல் வேண்டும்.
11. நேரடியாக நல்ல பதில்களை தருபவர்களைத் தடுக்கும் வண்ணம் வினாக்கள் அமைதல் கூடாது.
12. வினாப்பட்டியலின் தோற்றம் நல்ல முறையில் இருத்தல் வேண்டும்.

முதல் நிலை விவரங்களின் நிறை குறைகள் :

1. ஆய்வாளரால் ஆய்வு மேற்கொள்ளப்படும் இடப்பரப்பு சிறியதாக இருக்கும் போது மட்டுமே இம்முறையில் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும். பிரதிநிதிகளை அனுப்பி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கு செலவு அதிகரிக்கும். மேலும் தகவல் தருவோர் அளித்த விவரங்கள் சரியாக பிரதிநிதிகளால் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளனவா என்பதில் ஒரு முறைக்கு இரு முறையாக கவனம் செலுத்துதல் வேண்டும்.

2. வினாத் தொகுதி மூலம் முதல் நிலை விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டாலோ அல்லது தபால் மூலம் வினாப்பட்டியலை அனுப்பி விவரங்களை சேகரித்தாலோ, குறைவான செலவிலோ குறைவான நேரத்திலோ முடிக்க இயலும்.

3. கேள்விகள் தர்ம சங்கடமாகவோ, மிகச் சிக்கலாகவோ ஒருவரின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துவதாகவோ அமையுமானால் அவ்வினாத் தொகுதியில் உள்ள விவரங்கள் துல்லிமாகவும் சரியாகவும் நிரப்பப்பட்டிருக்காது எனவே இம்முறை பொருத்தமற்றது.

4. இரண்டாம் நிலை விவரங்களை விட முதல் நிலை விவரங்கள் மூலம் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் மிகுந்த நம்பகத் தன்மையுடையன.

3.3.2 இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் :

பலவித நோக்கங்களுக்காக முன்பே சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து தற்போதைய விசாரணைக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் எனப்படும். W.A. நெய்ஸ்வாங்கர் கூற்றுப்படி "விவரத்தை நேரடியாகச் சென்று சேகரித்து பகுத்தாய்வு செய்யும் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டவரால் வெளியிடப்பட்ட விவரங்களின் பதிப்பு முதல் நிலை ஆதாரமாக இருக்கும். அவ்விவரங்களைப் பற்றிய குறிப்புகளை ஆய்வு செய்வதற்காக பொறுப்பேற்றுக் கொண்டவரால் சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்டவையே இரண்டாம் நிலை ஆதாரமாகும்."

இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் ஆதாரம் :

எல்லா ஆய்வுகளுக்கும் ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சென்று முதன் முறையாக விவரங்களைச் சேகரிப்பது நடைமுறையில் சாத்தியமில்லை. அந்நிலையில் மற்றவர்களால் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை பயன்படுத்துகிறார்.

புள்ளியியல் ஆய்வுகள் மேற்கொள்வதற்காக மிக அதிக அளவில் தகவல்கள் வெளியிடப்படுகின்றன. அதிலிருந்து புதிது புதிதாக புள்ளி விவரங்கள் வெளியிடப்படுகின்றன.

இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட தலைப்புகளில் இருவகைத் தலைப்பில் வெளியிடப்படுகின்றன.

1. வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள்

2. வெளியிடப்படாத ஆதாரங்கள்

1. வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள் :

வெளியிடப்பட்ட பல்வேறு வகையிலான ஆதாரங்கள் பின்வருமாறு :

1. பன்னாட்டு அளவில் வரும் அதிகார பூர்வ வெளியீடுகளும், அறிக்கைகளும்

i) உலக நிறுவனங்களான பன்னாட்டு நிதியம் ஐக்கிய நாடுகள் அவை, பன்னாட்டு நிதிக் கழகம் போன்றவையும்

ii) மத்திய மற்றும் மாநில அரசுகளின் அறிக்கைகள், டாண்டன் குழு அறிக்கை ஊதியக் குழு அறிக்கைகள் போன்றவை.

2. அரசு கலப்புடைய நிறுவனங்களின் வெளியீடுகள் நகராட்சிகள், மாநகராட்சிகள், ஊராட்சி அளவில் வெளியிடப்படும் அறிக்கைகள்.

3. தனியார் வெளியீடுகள்

i) வணிக மற்றும் தொழில் துறை சார்ந்த வெளியீடுகள் இந்திய வணிகக் கழகம், இந்திய வணிகக் கணக்காளர் நிறுவம் போன்றவற்றின் அறிக்கைகள்.

ii) நிதி மற்றும் பொருளியல் சார்ந்த இதழ்கள்

iii) நிறுவனங்களின் ஆண்டறிக்கைகள்

iv) ஆய்வு நிறுவனங்கள் மற்றும் ஆய்வு மேற்கொள்ளும் மாணவரின் வெளியீடுகள் போன்றவை.

குறிப்பாக, மேற்குறிப்பிட்ட வெளியீடுகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளி மாறக் கூடியவை என்பதைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். சில வெளியீடுகள் சமமான கால இடைவெளிகளில் (ஆண்டு, மாதம், வாரம், தினசரி) வெளியிடப்படுகின்றன. ஆனால் சில வெளியீடுகள் தற்காலிகமானவை.

குறிப்பு : இரண்டாம் நிலை விவரங்கள், இணைய தளத்தில் ஏராளமாகக் கிடைக்கின்றன. அவற்றை எந்த நேரத்திலும், மேல் ஆய்வுகளுக்கும் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

2. வெளியிடப்படாத ஆதாரங்கள் :

எப்போதும் எல்லா புள்ளியியல் விவரங்களும் வெளியிடப்படுவதில்லை. அரசு மற்றும் தனியார் அலுவலகங்களால் பதிவுசெய்யப்பட்ட விவரங்கள், கல்வி நிறுவனங்களால் மேற்கொள்ளப்பட்ட ஆய்வு முடிவுகள் போன்றவையே பல்வேறு வெளியிடப்படாத விவரங்களாகும்.

இவ்வகை விவரங்கள் எங்கெங்கு தேவையோ அங்கு பயன்படுத்தலாம். இரண்டாம் நிலை விவரங்களைக் கையாளுவதில் தேவையான முன்னெச்சரிக்கை.

இரண்டாம் நிலை விவரங்களைக் கையாளுவதற்கு முன் பின்வருவனவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

1. விவரங்கள் சேகரிப்பதற்குக் கையாளப்பட்ட வழிமுறைகள்.
2. விவரங்கள் துல்லியத்தன்மை
3. எந்த அளவிற்கு விவரங்கள் தொகுக்கப்பட்டன.
4. முன்னர் சேகரித்த விவரங்களோடுள்ள ஒப்புதல் அல்லது ஒப்பீடு.
5. விவரங்களைச் சேகரித்த நிறுவனம் பற்றியும், விவரங்கள் சேகரித்த நோக்கம் பற்றியும் அறிய வேண்டும்.

பொதுவாக கூறுமிடத்து இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பொருத்த அளவில் மக்களுக்கு எது தேவையோ, எதைக் காண முடிகிறதோ அவற்றுக்கு மத்தியில் நின்று திருப்திப்பட்டுக் கொள்ள வேண்டும்.

இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் நிறை குறைகள் :

1. மிகக் குறைந்த செலவில் இரண்டாம் நிலை விவரங்களை சேகரிக்க இயலும். அரசு வெளியீடுகளும் மிகக் குறைந்த செலவில் கிடைக்கின்றன. அரசு மற்றும் தனியார் நிறுவனங்களால் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் நூலகங்களில் கிடைக்கும்.

2. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் இணைய தளத்தில் அதிக அளவில் கிடைக்கின்றன.

3. கிடைக்கும் நிறைய இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் பல வருடங்களாக சேகரிக்கப்பட்டவை. அவற்றைக் கொண்டு போக்குகளைக் (trend) குறிக்கலாம்.

4. இரண்டாம் நிலை விவரத்தின் மதிப்பு

   – அரசாங்கம் – முடிவுகள் எடுப்பதற்கும் எதிர்கால கொள்கை முடிவுகளுக்கும் பயன்படுகிறது.

   – வியாபாரம் மற்றும் தொழில் துறை – சந்தை மற்றும் விற்பனைப் பிரிவுகளில் உள்ள பொருளாதார மற்றும் சமூக நிலைமை மற்றும் போட்டியாளர்களைப் பற்றிய விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.

   – ஆய்வு நிறுவனங்கள் – சமூக, பொருளாதார மற்றும் தொழில்துறை விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.

3.4 வகைப்படுத்துதல் :

சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் செப்பனிடா விவரங்கள் அல்லது தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் என்று அழைக்கப்படும். இவ்விவரங்கள் ஒழுங்கற்ற முறையில் இருப்பதனால் அதனை முறைப்படுத்தி தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் அளித்தல் இன்றும் பல (மேல்நிலை) புள்ளியியல் ஆய்வுகளுக்கு பயன்படும். எனவே ஆய்வாளர் தேவையற்ற விவரங்களை நீக்கிவிட்டு மற்ற விவரங்களைப் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் மேன்மேலும் சுருக்கித் தருவது மிகவும் முக்கியமானதாகும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை அவைகளின் பல்வேறு வகையான பண்புகளுக்கேற்ப பிரிவுகளில் அல்லது உட்பிரிவுகளில் பாகுபாடு செய்யும் முறைக்கு வகைப்படுத்துதல் என்று பெயர். அட்டவணைப் படுத்துதல் என்பது சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்கு முறையில் வரிசைப்படுத்தப்பட்டு வகைப்படுத்தலே ஆகும். எனவே அட்டவணைப்படுத்தலில் முதற்படி வகைப்படுத்தல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக தபால் அலுவலகத்தில் உள்ள கடிதங்களை டெல்லி, மதுரை, பெங்களூர், மும்பை இன்னும் பல இடங்களுக்குச் செல்லும் வகையில் வகைப்படுத்தி (பிரித்து) அனுப்புகின்றனர்.

வகைப்படுத்தலின் நோக்கங்கள் :

பின்வருவனவை விவரங்களை வகைப்படுத்துதலின் உள்ள முக்கிய நோக்கங்கள்

1. வகைப்படுத்தலானது விவரங்களைச் சுருக்கமாகவும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் இருக்க வேண்டும்.
2. தேவையற்ற விளக்கங்களைத் தவிர்க்க வேண்டும்.
3. வகைப்படுத்தலானது ஒப்பிடக்கூடிய வகையிலும் விவரங்களின் முக்கியத்துவத்தை வெளிக்காட்டக் கூடியதாகவும் இருக்க வேண்டும்.
4. வகைப்படுத்தலானது ஒருவர் தன் மனதிலே அவ்விவரங்களை உணர்ந்து கொள்வதற்கும், அதனதன் தன்மையை உருவகப்படுத்திக் கொள்வதற்கும் ஏதுவாக இருக்க வேண்டும்.
5. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் புள்ளியியல் செயல்பாடுகளுக்கு பயன்படக்கூடிய வகையில் இருக்க வேண்டும்.

வகைப்படுத்தலின் வகைகள் :

புள்ளியியல் விவரங்கள் அவற்றின் சிறப்பு இயல்புகளைப் பொருத்து வகைப்படுத்தப் படுகின்றன. வகைப்படுத்தல் என்பது நான்கு வகைப்படும்.

அ) காலம் சார் வகைப்படுத்தல் (Chronological classification)

ஆ) இடம் சார் வகைப்படுத்தல் (Geographical classification)

இ) பண்பின் வகைப்படுத்தல் (Qualitative classification)

ஈ) அளவின் வகைப்படுத்தல் (Quantitative classification)

அ) காலம் சார் வகைப்படுத்தல் :

குறிப்பிட்ட காலங்களுக்குரிய அதாவது வருடம், மாதம், வாரம், நாள், மணி போன்வற்றின் விவரங்களிலுள்ள வரிசையான தொகுப்பிற்கு காலம் சார் வகைப்படுத்தல் என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டாக மக்கள் தொகை ஒரு நிறுவனத்தின் விற்பனை, ஒரு நாட்டின் இறக்குமதி மற்றும் ஏற்றுமதி போன்ற விவரங்கள் காலம் சார் வகைப்படுத்தலில் அடங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

1970–76 ஆம் ஆண்டிற்கான பிறப்பு விகிதம் கீழ்கண்டவாறு :

வருடம்	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
பிறப்பு விகிதம்	36.8	36.9	36.6	34.6	34.5	35.2	34.2

(ஆ) இடம் சார் வகைப்படுத்தல் :

விவரங்களை இடப்பகுதிகளுக்குத் தக்கவாறு பாகுபாடு செய்வதற்கு இடம் சார் வகைப்படுத்தல் என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக இந்தியாவில் உள்ள பல்வேறு மாநிலங்களில் பயிராகும் நெல்லின் உற்பத்தி, பல்வேறு நாடுகளில் உள்ள கோதுமை உற்பத்தி.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

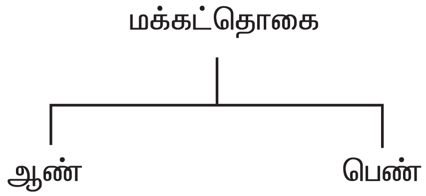
நாடு	அமெரிக்கா	சீனா	டென்மார்க்	பிரான்ஸ்	இந்தியா
கோதுமை உற்பத்தி (கி.கி/ஏக்கர்)	1925	893	225	439	862

(இ) பண்பின் வகைப்படுத்தல் :

சேகரித்த விவரங்களை பாலினம், அறிவுக் கூர்மை, படிப்பறிவு, மதம், தொழில் இன்னும் பல பண்புகளுக்கேற்ப வகைப்படுத்தலுக்கு பண்பின் வகைப்படுத்தல் என்று பெயர். இவ்வகை பண்புகளை அளவுகோல் கொண்டு அளக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டாக மக்கட் தொகை கணக்கெடுப்பு பாலினம் என்ற பண்பை பொருத்து வகைப்படுத்தப்படும்பொழுது ஆண், பெண் என இரு பிரிவுகளாக பிரிக்கலாம். இதைப்போல் மீண்டும் பணிபுரிபவர், பணி புரியாதவர் என்ற பண்பை (தொழில்) அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்தலாம்.

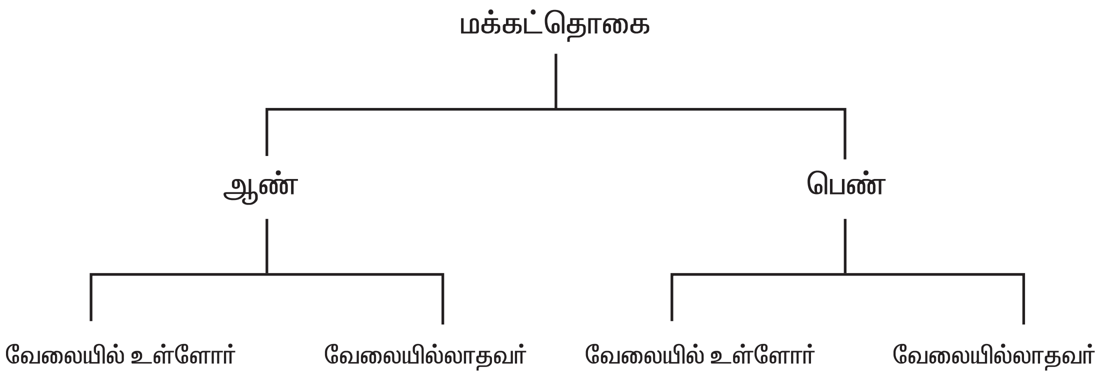
ஒரு பண்பை பொறுத்து வகைப்படுத்தலின் போது அதன் தன்மைக்கு ஏற்ப இரு பிரிவுகள் ஏற்படுகின்றன. ஒன்று பண்பைப் பெற்றிருக்கும் மற்றொன்று அப்பண்பைப் பெற்றிருக்காது. இந்த வகை வகைப்படுத்துதல் எளிய அல்லது இரு பண்பு வகைப்படுத்தல் என வழங்கப்படும் எடுத்துக்காட்டாக,



வகைப்படுத்துதலில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பண்புகளை மற்றும் பல பிரிவுகள் அமைந்து இருந்தால் அதற்கு பல பண்பின் வகைப்படுத்தல் என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக மக்கள் தொகையை ஆண், பெண் என்ற வகைப்படுத்திய பிறகு தனித்தனியே மீண்டும் வேலை செய்பவர், வேலை செய்யாதவர் எனப் பிரிக்கலாம். இவ்வாறாக மக்கட் தொகையை 4 பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தலாம்.

1. வேலையில் உள்ளோர் – ஆண்
2. வேலையில்லாதவர் – ஆண்
3. வேலையில் உள்ளோர் – பெண்
4. வேலையில்லாதவர் – பெண்

இவை பின்வரும் அட்டவணையின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



இன்னும் இவ்வகைப்படுத்தலை மற்றும் ஒரு பண்பினைக் (மணம் புரிந்தவர்) கொண்டு மேலும் விரிவு படுத்தலாம்.

(ஈ) அளவின் வகைப்படுத்தல் :

உயரம், எடை போன்ற எண்சார் அளவிற்குத் தக்கவாறு விவரங்கள் பல்வேறு பிரிவுகளாகப் பாகுபாடு செய்யப்படுகின்ற வகைப்படுத்தலுக்கு அளவின் வகைப்படுத்தல் என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக கல்லூரியில் பயிலும் மாணவர்களை அவர்களின் எடையின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தப்பட்ட அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடை (பவுண்டுகளில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
90-100	50
100-110	200
110-120	260
120-130	360
130-140	90
140-150	40
மொத்தம்	1000

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் எடை மாறியாகவும், மாணவர்களின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண்ணாகவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 90 லிருந்து 100 பவுண்டு எடையுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 50 ஆகவும், 100 லிருந்து 110 பவுண்டு எடையுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 200 ஆகவும் உள்ளது. இவற்றைப் போல் மற்ற பிரிவுகளுக்கு ஏற்ப மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

3.5 அட்டவணைப்படுத்துதல் :

அட்டவணை என்பது புள்ளியியல் விவரங்களை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் ஒழுங்காக வரிசைப்படுத்தி எழுதத்தக்கவாறு நிரல்களையும், நிரைகளையும் கொண்ட ஓர் அமைப்பாகும். இவ்வாறாக விவரங்களை ஒப்பு நோக்குவதற்கும், விவரங்களைத் தெளிவாக புரிந்து கொள்வதற்கும் புள்ளியியல் அட்டவணையானது ஆய்வாளர்களுக்கு துணை

புரிகிறது. "வகைப்படுத்துதல் மற்றும் அட்டவணைப்படுத்துதல்" இரண்டுமே ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையவை. இரண்டுமே அடுத்தடுத்துச் செய்யப்பட வேண்டிய செயல்களாகும். விவரங்கள் வகைப்படுத்தப்பட்ட பின்னர் பல்வேறு நிரல்களையும், நிரைகளையும் கொண்ட ஓர் அமைப்பாக விவரங்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்படுகின்றன.

அட்டவணைப்படுத்துதலின் நோக்கங்கள் :

அட்டவணைப்படுத்துதலின் பயன்கள் பின்வருமாறு

1. கலப்பு விவரங்களைச் சுருக்கி எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்கும் பயன்படுகிறது.
2. விவரங்களை ஒப்பு நோக்குவதற்கும் பயன்படுகிறது.
3. புள்ளியியல் அளவைகளான சராசரி மாறுபாட்டளவை. ஒட்டுறவு போன்றவற்றை எளிதில் கணக்கிடுவதற்கு பயன்படுகிறது.
4. குறைவான இடத்தில் விவரங்களை அளிக்க இயலும். மீண்டும் மீண்டும் வருவதையும் தேவையற்ற விளக்க குறிப்புகளையும் தவிர்க்க பயன்படுகிறது. மேலும் தேவையான விவரங்களை எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலும்.
5. வரைபடம் மற்றும் விளக்கப்படம் மூலம் அளிப்பதற்கு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் பயன்படுகிறது.

அட்டவணை அமைத்தல் :

அட்டவணை அமைப்பது என்பது ஒரு கலை. சிக்கனமான இடத்தில் தேவையான அனைத்து விவரங்களையும் பெற்றிருக்க வேண்டும். புள்ளியியல் அட்டவணை தயாரிக்கும் போது அட்டவணை தயாரிப்பதன் நோக்கமும், தயாரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் எதற்காக பயன்படுகின்றன என்ற இரு கருத்துக்களையும் மனதிற் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு சிறந்த அட்டவணை என்பது பின்வரும் முக்கிய பகுதிகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. அட்டவணை எண்
2. தலைப்பு
3. நிரல் தலைப்பு
4. நிரைத் தலைப்பு
5. அட்டவணை உட்பகுதி
6. அடிக்குறிப்பு
7. ஆதாரக் குறிப்பு

1. அட்டவணை எண் :

ஒவ்வொரு அட்டவணைக்கும் ஒரு எண் கொடுக்கப்பட வேண்டும். இது மிக எளிதாக புரிந்து கொள்வதற்கும் பின் ஒப்பிடுதலுக்கும் உபயோகப்படும். இந்த அட்டவணை எண் அட்டவணையின் மேல் பகுதியில் எழுதப்பட வேண்டும். சில நேரங்களில் அட்டவணைத் தலைப்பிற்கு சிறிது முன்பாக எழுதப்பட வேண்டும்.

2. அட்டவணைத் தலைப்பு :

ஒரு சிறந்த அட்டவணை என்பது அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களையும் அதன் தன்மைகளையும் சுருக்கமாக குறிப்பதாக இருக்க வேண்டும். குறிப்பிட்ட காலத்தில் எடுக்கப்பட்ட விவரங்களை முறைப்படுத்துவதாக அமைய வேண்டும். அட்டவணை தலைப்பு அட்டவணை மேல் பகுதியின் மையத்தில், அட்டவணை எண்ணிற்கு சிறிதளவு கீழே எழுதப்பட வேண்டும் (அல்லது அதே வரியில் அட்டவணை எண்ணிற்கு பிறகு எழுத வேண்டும்)

3. நிரல்களின் தலைப்பு :

அட்டவணையில் அமைந்துள்ள நிரல்களுக்குத் தலைப்பு கொடுக்கப்பட வேண்டும். இவை சுருக்கமாகவும், சுய விளக்கம் தருபவையாகவும் இருத்தல் வேண்டும். தலைப்புகளும், துணைத் தலைப்புகளும் கொடுக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு நிரலிலும் விவரங்களுக்கான அலகுகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். வழக்கமாக அட்டவணையின் நிரல்களின் தலைப்பு சுருக்கமாக வகைப்படுத்தி கொடுக்கப்படுகிறது.

4. நிரைகளின் தலைப்பு :

அட்டவணையின் இடது பக்கத்தில் நிரைகளின் தலைப்புகளுக்கு மேலே உள்ள இடத்தில் தலைப்புகளைப் பற்றிய விளக்கம் தரப்பட வேண்டும்.

அதிக எண்ணிக்கை பிரிவுகள் வழக்கமாக நிரைகளில் குறிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வகுப்பின் மதிப்பெண்களின் விவரத்தைக் குறிக்கும் போது மதிப்பெண்கள் நிரைகளாகவும், பாலினங்கள் நிரல்களாகவும் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வகை அமைப்பில் மதிப்பெண் பிரிவுகள் அதிக நிரைகளிலும், மாணவர்களில் ஆண்கள், பெண்கள் என்ற பிரிவுகள் இரு நிரல்களில் மட்டுமே அமைகின்றன.

5. அட்டவணையின் உட்பகுதி :

இப்பகுதி புள்ளி விவரங்களைக் கொண்ட முக்கிய பகுதியாகும். இவை இடமிருந்து வலமாக நிரைகளாகவும், மேலிருந்து கீழாக நிரல்களாகவும் அமைக்கப்பட்டிருக்கும்.

6. அடிக்குறிப்பு :

ஏதேனும் விவரத்திற்கு விளக்கங்கள் தேவைப்பட்டால் அவற்றை அடிக்குறிப்பாக அமைக்கலாம். நிரல், நிரை தலைப்பில் விடுபட்ட விவரங்களை விளக்குவதற்கு இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

7. ஆதாரக் குறிப்பு :

புள்ளி விவரங்கள் எங்கிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்ற விவரத்தை இதில் குறிக்க வேண்டும். இத்துடன் வெளியீடுகளின் ஆசிரியர் பெயர், பகுதியின் விவரம், பக்கங்களின் எண்ணிக்கை,

வெளியிடப்பட்ட வருடம் ஆகியவற்றை சேர்த்துக் கொள்ளலாம். இதில் முதல் நிலை விவரம் அல்லது இரண்டாம் நிலை விவரம் என்ற தன்மையையும் குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணையின் மாதிரி தோற்றம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை எண் **அட்டவணை தலைப்பு**

<table>
<tr><td rowspan="2">துணை தலைப்புகள்</td><td>நிரல் தலைப்புகள்</td><td rowspan="2">மொத்தம்</td></tr>
<tr><td>நிரல் துணை தலைப்புகள்</td></tr>
<tr><td>நிரை தலைப்புகள்</td><td>அட்டவணையின் உட்பகுதி</td><td></td></tr>
<tr><td>மொத்தம்</td><td></td><td></td></tr>
</table>

அடிக்குறிப்பு
ஆதாரக் குறிப்பு

குறைவான இடத்தில் எல்லா விவரங்களையும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் சுருக்கி நிரை, நிரல்கள் வடிவில் கவனமாக தயாரிக்கப்படுவதே சிறந்த புள்ளியியல் அட்டவணை ஆகும். அட்டவணை தயாரிக்கும் பொழுது அளிக்கப்படும் தகவல்கள், ஒப்பிடப்பட வேண்டிய விவரங்கள், முக்கியத்துவம் வாய்ந்த கருத்துகள் ஆகியனவற்றை கருத்திற் கொண்டு அமைக்க வேண்டும். அட்டவணைகளை அமைப்பதற்கென்று குறிப்பிட்ட விதிமுறைகள் எதுவும் இல்லை. இருந்த போதிலும் அட்டவணை அமைக்கும் போது கவனிக்க வேண்டிய சில விதிகள்

1. புள்ளியியல் விசாரணையின் நோக்கங்களைக் கருத்தில் கொண்டு அட்டவணை அமைக்கப்பட வேண்டும்.

2. அட்டவணை எளிதாக புரிந்து கொள்ளுமாறு கவனமாகத் தயாரிக்கப்பட வேண்டும்.

3. அட்டவணை அளவு காகிதத்தின் அளவுக்கேற்றாற் போல் இருக்க வேண்டும்.

4. அட்டவணை எண்கள் மிகப் பெரியதாக இருக்கும் பொழுது அதை தோராய மதிப்பு தருதல் வேண்டும். தோராயமாக்கப்பட்ட முறையும் அளவீடுகளின் அலகும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

5. அட்டவணையின் நிரை, நிரல்களுக்கு வரிசை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டு, குறிப்பிட்ட முக்கியத்துவம் வாய்ந்த எண்கள் கட்டமிட்டோ, வட்டமிட்டோ காட்டுதல் வேண்டும்.

6. அட்டவணையில் நிரைகளும், நிரல்களும் முறையாக வரிசைப்படுத்த வேண்டும். விவரங்களை வரிசை எண் அடிப்படையில் அல்லது புவியியல் அடிப்படையில் அல்லது அகர எழுத்து வரிசை அடிப்படையில் பிரித்துக் காட்ட வேண்டும்.

7. பெரும் பிரிவுகளைப் பிரிக்கும் கோடுகள் பெரியதாகவும், உட்பிரிவுகளைப் பிரிக்கும் கோடுகள் சிறியதாகவும் இருக்க வேண்டும்.

8. ஒரு நிரையில் உள்ள விவரங்களின் சராசரி அல்லது மொத்தம் அட்டவணையின் வலது ஓரத்திலும் நிரல்களின் மொத்தம் அல்லது சராசரி அட்டவணையின் அடிப்பகுதியிலும் கொடுக்கப்பட வேண்டும். உட்பிரிவுகளின் மொத்தமும் தனியாகக் குறிப்பிட வேண்டும்.

9. விவரங்கள் அதிகமாக இருந்தால் அவைகள் அனைத்தையும் ஒரே அட்டவணையில் குறிக்காமல் பல அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணையின் வகைகள் :

அட்டவணைகள் அவற்றின் தன்மைகளுக்கும், பயன்பாடுகளுக்கும் ஏற்றவாறு வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. பல விதமான அட்டவணைகள் பொதுவாக உபயோகப்படுத்தப்படுகின்றன. அட்டவணைகள் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தப்படுகின்றன.

1. எளிய அல்லது ஒரு வழி அட்டவணை

2. இரு வழி அட்டவணை

3. பலநோக்கு அட்டவணை (Manifold table)

1. எளிய அட்டவணை :

ஒரு மாறியின் ஒரே ஒரு இயல்பைப் பற்றிய விவரங்களை மட்டும் விளக்கிக் காட்டும் அட்டவணை எளிய அட்டவணை எனப்படும். இவ்வகை அட்டவணை உருவாக்குவதும் அதைப் படிப்பதும் மிக எளிமையானது.

ஒரு இடத்தில் வெவ்வேறு தொழில்களில் ஈடுபட்டிருப்பவர்களின் எண்ணிக்கையைப் பிரித்து காட்டும் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு இடத்தில் வெவ்வேறு தொழில்களில் ஈடுபட்டு இருக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை.

தொழில்கள்	எண்ணிக்கை
மொத்தம்	

2. இரு வழி அட்டவணை :

ஒரு மாறியின் இரு இயல்பைப் பற்றிய விவரங்களை விளக்கிக் காட்டும் அட்டவணை இரு வழி அட்டவணை எனப்படும். இவ்வகைகளில் நிரை அல்லது நிரல் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக கீழே உள்ள அட்டவணையில் தொழில் செய்பவர்களின் எண்ணிக்கை இனவாரியாக நிரலில் பிரிக்கப்பட்டு இரு வழி அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்டவணை தொழில், இனம் என்ற இரு இயல்புகளைக் கொண்டுள்ளது.

தொழில்கள்	எண்ணிக்கை		மொத்தம்
	ஆண்	பெண்	
மொத்தம்			

3. பல நோக்கு அட்டவணை :

பல நோக்கு அட்டவணை என்பது மிகவும் விரிவான அட்டவணையாகும். எடுத்துக்காட்டாக மேற்கண்ட அட்டவணையின் நிரலில் துணை தலைப்பில், திருமண விவரம், மதம், சமூகப் பொருளாதார நிலை போன்ற பிரிவுகளாகப் பிரித்து காட்டுவது. கீழே தொழில், இனம், திருமண விவரம் என்ற மூன்று பண்புகளைப் பிரித்து காட்டும் அட்டவணை.

தொழில்கள்	எண்ணிக்கை						மொத்தம்
	ஆண்			பெண்			
	M	U	மொத்தம்	M	U	மொத்தம்	
மொத்தம்							

அடிக்குறிப்பு : M – மணமானவர்

U – மணமாகாதவர்

ஆய்வுக்காக சேகரிக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் யாவும் முழுமையாக இவ்வட்டவணையில் குறிப்பிடப் பட்டிருக்கும். இது விவரங்களைக் கொண்ட ஒரு பட்டியலாக அமைந்திருக்கமேயன்றி இதிலிருந்து ஆய்வு பற்றிய எந்த விளக்கத்தையும் எளிதில் பெற முடியாது. பொதுவாக குழப்பத்தை தவிர்ப்பதற்கு நான்கு பண்புகள் மட்டுமே ஒரு அட்டவணையில் பிரித்துக் காட்டப்படுகின்றன. மீதமுள்ள பண்புகளைக் கூறுவதற்கு தொடர்புடைய வேறு அட்டவணைகளை உருவாக்கலாம்.

பயிற்சி – 3

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. சேகரிக்கப்பட்ட விவரம், நேரத்தைக் கொண்டு தொகுக்கப்பட்டால் நமக்கு __________ ஆகும்.

அ) அளவின் வகைப்படுத்தல் ஆ) பண்பின் வகைப்படுத்தல்

இ) இடம் சார் வகைப்படுத்தல் ஈ) காலம் சார் வகைப்படுத்தல்

2. பெரும்பாலான அளவின வகைப்படுத்தல்

அ) காலம் சார்ந்தது ஆ) இடம் சார்ந்தது

இ) அலைவெண் பரவல் ஈ) இவற்றில் எதுவுமில்லை

3. நிரல்கள் __________ ஆகும்.

அ) எண் விவரங்கள் ஆ) நிரல்களின் தலைப்பு

இ) நிரைகளின் தலைப்பு ஈ) அட்டவணையின் தலைப்பு

4. ஒரு எளிய அட்டவணையில் உள்ள விவரங்கள் __________ இருக்கும்.

அ) இரு சிறப்பியல்களோடு ஆ) பல சிறப்பியல்புகளோடு

இ) ஒரு சிறப்பியல்போடு ஈ) மூன்று சிறப்பியல்புகளோடு

5. ஒரு அட்டவணையில் முதல் நிரலில் உள்ள தலைப்பு

அ) நிரைகளின் தலைப்பு ஆ) நிரல்களின் தலைப்பு

இ) அட்டவணை தலைப்பு ஈ) குறிப்பு

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

6. விவரங்களை வகைப்படுத்தலில் இடம்சார் வகைப்படுத்தல் என்பது __________ ஐச் சார்ந்தது.

7. கல்வியறிவு அற்றவர்கள், தொடக்கக் கல்வி, இடைநிலைக் கல்வி, பட்டப்படிப்பு, தொழில் கல்வி, போன்றவற்றைப் பொருத்து கல்வி நிலையின் விவரங்களை பதிவு செய்யும் முறை __________ வகைப்படுத்துதல் ஆகும்.

8. ஒரு விவரத்தை நிரை நிரல்களாக வகைப்படுத்தும் முறைக்கு __________.

9. __________ ஐத் தொடர்வது அட்டவணைப்படுத்துதல்

10. பல்நோக்கு அட்டவணையில் விவரங்கள் __________ ஐப் பெற்றிருக்கும்

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி :

11. மூன்று வகை விவரங்களை கூறுக.

12. முதல் நிலை, இரண்டாம் நிலை விவரங்களை வரையறுக்க.

13. இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பயன்படுத்தும் போது மனதில் கொள்ள வேண்டிய கருத்துக்கள் யாவை ?

14. இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் ஆதாரங்கள் யாவை ?

15. முதல் நிலை விவரங்களின் நிறை குறைகளைக் கூறுக.

16. ஒரு சிறந்த வரைபட்டியலின் சிறப்பியல்புகளைக் கூறு.

17. வகைப்படுத்துதலை வரையறு.

18. வகைப்படுத்துதலின் முக்கிய நோக்கங்கள் யாவை ?

19. வகைப்படுத்துதலின் வகைகளைப் பற்றி விளக்கமான குறிப்பு வரைக.

20. அட்டவணைப்படுத்துதலை விவரி.

21. அட்டவணைப்படுத்துதலின் பயன்கள் யாது ?

22. ஒரு சிறந்த அட்டவணையின் முக்கியப் பகுதிகள் யாவை ?

23. ஒரு சிறந்த அட்டவணையின் முக்கிய சிறப்பியல்புகளை எழுதுக ?

24. ஒரு வழி, இரு வழி அட்டவணையை வரையறுக்க.

25. பல்நோக்கு அட்டவணையை எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

IV செய்து பார்க்க :

26. உன் பள்ளி மாணவர்கள் எவ்வகை போக்குவரத்து சாதனங்களைப் பயன்படுத்துகின்றனர் என்ற முதல் நிலை விவரங்களை சேகரிக்க. அவ்விவரங்களை அட்டவணைப்படுத்துக.

27. பல்வகை ஆதாரங்களிலிருந்து முக்கியமானதும், பொருத்தமானதுமான அட்டவணைகளை சேகரித்து ஆல்பம் தயாரிக்கவும்.

விடைகள்

I. 1. (ஈ) 2. (இ) 3. (ஆ) 4. (இ) 5. (ஈ)

II. 6. இடம் 7. பண்புசார் 8. அட்டவணைப்படுத்துதல் 9. வகைப்படுத்தல்

10. பல சிறப்பியல்புகளை

4. அலைவெண் பரவல்

4.1 அறிமுகம் :

ஓர் அலைவெண் பரவலில் ஒரே மாதிரியான அல்லது ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய விவரங்கள் பல தொகுதிகளாக எடுக்கப்படும். ஒவ்வொரு தொகுதியும் அளவுகளின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்ட தொடர்களாகும். அலைவெண் பரவல் என்பது ஒரு அட்டவணை. இதில் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பிரிவுகளாகவும், மற்றும் ஒவ்வொரு பிரிவின் கீழ் அடங்கும் விவரங்களின் தொகுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும். இந்த அலைவெண் பரவலானது பல்வேறு மதிப்புகளின் நிகழ்வுகளை ஒரே நிகழ்வாகக் காட்டுகிறது.

அலைவெண் பரவல் மூன்று முக்கிய காரணங்களுக்காக அமைக்கப்படுகிறது.

i) விவரங்களின் பகுப்பாய்விற்கு துணை புரிகிறது.

ii) மாதிரி பரவலிலிருந்து தெரியாத தொகுதி பரவலின் அலைவெண்ணை மதிப்பீடு செய்வதற்கும்,

iii) பலவகைப்பட்ட புள்ளியியலின் அளவுகளைக் கணக்கீடு செய்வதற்கும் துணை புரிகிறது.

4.2 தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் :

சேகரிக்கப்படும் புள்ளி விவரங்கள் செப்பனிடா அல்லது தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் என பொதுவாக கொள்ளப்படும். ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் 30 தொழிலாளர்களின் தினக்கூலி (ரூபாயில்) எடுத்துக் கொள்வோம்.

80	70	55	50	60	65	40	30	80	90
75	45	35	65	70	80	82	55	65	80
60	55	38	65	75	85	90	65	45	75

மேலே குறிப்பிட்ட விவரங்கள் அனைத்தும் செப்பனிடா அல்லது தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் ஆகும். ஏனெனில் விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்ட அதே நிலையில் எந்த விதமான அமைப்பு மாற்றமுமின்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. விவரங்கள் அனைத்தும் ஒழுங்கற்ற முறைப்படி இருப்பதனால் சரியான விளக்கம் அல்லது கருத்துக் கணிப்பு கடினமாவதோடு மட்டுமின்றி குழப்பத்தையும் ஏற்படுத்தும். எனவே இவ்விவரங்களை அளவுகளின் அடிப்படையில் ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ மாற்றி அமைக்க வேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட விவரங்கள் வரிசை (array) எனப்படும். வரிசை எனப்படுவது விவரங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்காது. மேலே குறிப்பிட்டுள்ள விவரங்கள் ஏறு வரிசையில் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கப்படுகிறது.

30	35	38	40	45	45	50	55	55	55
60	60	65	65	65	65	65	65	70	70
75	75	75	80	80	80	80	85	90	90

விவரங்களில் உள்ள மிகப் பெரிய அளவையும் மிகக் குறைந்த அளவையும் உடனே அறிந்து கொள்ள வரிசை, உதவியாக இருக்கும். மேலும் பரவலின் தன்மையையும் ஒருவாறு ஊகித்து அறிந்து கொள்ள உதவும். ஆனால் விவரங்கள் அதிகமாக இருக்கும் போது வரிசை அமைப்பதென்பது கடினமான பணியாகும். எனவே எளிய முறையில் வரிசையைச் சுருக்குவது, விவரங்களின் அமைப்பிற்கு தகுந்தாற்போலும். நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கும் ஆக இரு வழிகளில் இருத்தல் வேண்டும்.

(அ) தொடர்ச்சியற்ற அல்லது தொகுக்கப்படாத அலைவெண் பரவல் :

இந்த வகையான பரவலில் அலைவெண்கள் தனித்த மதிப்பைக் குறிப்பதாக இருக்கும். இங்கு விவரங்கள், அலகுகளின் அதே அளவுகள் சரியாக குறிக்கப்பட்டு வழங்கப்படுகின்றது. பல்வேறு குழுக்களின் மாறிகளுக்கு இடையே வேறுபாடுகள் உறுதியாக இருக்கும் ஒவ்வொரு பிரிவும் மற்ற பிரிவுகளிலிருந்து வேறுபட்டு தனித்து இருக்கும். ஒரு பிரிவு மற்ற பிரிவுகளிலிருந்து தொடர்ச்சியற்று இருக்கும். உதாரணமாக ஒரு வீட்டில் உள்ள அறைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு நாட்டில் பதிவு செய்யப்பட்ட நிறுவனங்கள், ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் பலவாகும்.

இவ்வகைப் பரவல் தயாரிக்கும் முறை மிகவும் எளியது. ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு எத்தனை முறை வருகிறது என்பதைக் கண்டுபிடித்து அவ்வெண்ணிக்கை அலைவெண் என குறிக்கப்படும். எண்ணிக்கையை எளிதாக கணக்கிட ஒப்புக் குறிக்கான நிரல் ஒன்று தயார் செய்தல் வேண்டும். மற்றொரு நிரலில் மாறியின் மதிப்பு குறைந்ததிலிருந்து அதிக அளவில் இருக்குமாறு அமைத்தல் வேண்டும். குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்குரிய (Vertical line) சாய்வு கோட்டினை அதன் எதிரே இட வேண்டும். இவ்வாறாக ~~||||~~ ஐந்து கோடுகளைக் கொண்டதை ஒரு கூறாகவும், ஒவ்வொரு கூறுக்கும் இடையில் இடம் சிறிது விடுதல் எண்ணுவதற்கு எளிதாகும். முடிவில் கூறுகளின் எண்ணிக்கையை கணக்கிட்டு அலைவெண்ணைக் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு கிராமத்தில் உள்ள **40** குடும்பங்கள் ஆய்வு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு குடும்பத்திலும் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை பதிவு செய்யப்பட்டு பின்வரும் விவரங்கள் பெறப்பட்டன.

1	0	3	2	1	5	6	2
2	1	0	3	4	2	1	6
3	2	1	5	3	3	2	4
2	2	3	0	2	1	4	5
3	3	4	4	1	2	4	5

இவ்விரங்களைக் கொண்டு தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண் பரவலை அமைக்கவும்.

தீர்வு :

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை கொண்ட அலைவெண் பரவல்

<table>
<tr><th>குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை</th><th>குறியீடுகள்</th><th>அலைவெண்</th></tr>
<tr><td>0</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>𝍸 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>𝍸 𝍸</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>𝍸 |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>𝍸 |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>மொத்தம்</td><td>40</td></tr>
</table>

ஆ) தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் :

இவ்வகை பரவலில் அலைவெண் என்பது தொகுதிகளின் மதிப்பை குறைக்கின்றது. மாறிகளின் மதிப்பு பின்னமாக அமையும் போது அல்லது மாறிகள் முழு எண்ணாக அமையாவிடத்து தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் இன்றியமையாததாகிறது. எனவே தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளையும் தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் வடிவில் வழங்க இயலும். 100 தொழிலாளர்களின் சம்பள விவரத்தின் பரவல்

வாரக்கூலி (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
50-100	4
100-150	12
150-200	22
200-250	33
250-300	16
300-350	8
350-400	5
மொத்தம்	100

4.3 பிரிவுகளின் தன்மை :

தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் அமைத்தலில் அல்லது விவரங்களைப் பிரிவு இடைவெளிகளாக வகைப்படுத்தலில் சில அடிப்படை அம்சங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அ) பிரிவெல்லைகள் :

பிரிவில் சேர்க்க முடிந்த குறைந்த மற்றும் அதிக மதிப்புகளே பிரிவெல்லைகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக 30–40 என்ற பிரிவை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் 30 குறைந்த மதிப்பையும் 40 அதிக மதிப்பையும் குறிக்கும். பிரிவின் இந்த இரண்டு வரம்புகளும் கீழ் எல்லை மற்றும் மேல்

எல்லை எனப்படும். பிரிவின் கீழ் எல்லைக்கு கீழ் எந்த மதிப்பும் வராது. அதே போல் பிரிவின் மேல் எல்லைக்கு மேலும் எந்த மதிப்பும் வராது. 60–79 என்ற பிரிவினை எடுத்துக் கொண்டால் இதன் கீழ் எல்லை 60, மேல் எல்லை 79 அதாவது பிரிவில் எந்த மதிப்பும் 60க்கு கீழாகவோ அல்லது 79க்கு மேலாகவோ இருக்காது. சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் தன்மையைப் பொருத்தே பிரிவெல்லைகள் வரையறுக்கப்படும். புள்ளி விவர ஆய்வில் 'L' என்பது கீழ் பிரிவு எல்லையையும், 'U' என்பது மேல் பிரிவு எல்லையையும் குறிக்கும்.

ஆ) பிரிவு இடைவெளிகள் :

ஒவ்வொரு தொகுதியாக பிரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் அளவே பிரிவு இடைவெளி எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக 50–75, 75–100, 100–125 என்பன பிரிவு இடைவெளிகள் ஆகும். ஒவ்வொரு பிரிவும் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையில் ஆரம்பித்து அதற்கு அடுத்து வரும் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையில் முடிவடையும்.

இ) பிரிவு இடைவெளியின் அளவு (அல்லது) பிரிவுத் தூரம்

ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லைக்கும் கீழ் எல்லைக்கும் உள்ள வித்தியாசமே பிரிவு இடைவெளியின் அளவு அல்லது பிரிவுத்தூரம் ஆகும். இது 'C' எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

ஈ) வீச்சு :

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய அளவிற்கும் மிகச் சிறிய அளவிற்கும் உள்ள வித்தியாசமே வீச்சு எனப்படும். இது 'R' என்று குறிக்கப்படுகிறது.

R = மிகப் பெரிய மதிப்பு – மிகச் சிறிய மதிப்பு

$R = L - S$

உ) மைய மதிப்பு அல்லது மையப் புள்ளி

பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளியே மைய மதிப்பு அல்லது மையப் புள்ளி எனப்படும். இது பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையையும் மேல் எல்லையையும் கூட்டி பெறக் கூடிய மதிப்பை இரண்டால் வகுப்பதனால் கிடைக்கும்.

அதாவது

மைய மதிப்பு = $\frac{L + U}{2}$

எடுத்துக்காட்டாக பிரிவு இடைவெளி 20–30 எனில் அதன் மைய மதிப்பு $\frac{20 + 30}{2} = 25$

ஊ) அலைவெண் :

ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவு இடைவெளியில் கிடைக்கும் எண்ணிக்கையே அப்பிரிவின் அலைவெண் எனப்படும்.

ஒரு நிறுவனத்தில் பணிபுரிபவர்களின் எடைகளின் அலைவெண் பரவலை எடுத்துக் கொள்வோம்.

எடை (கிலோ கிராமில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
30-40	25
40-50	53
50-60	77
60-70	95
70-80	80
80-90	60
90-100	30
மொத்தம்	420

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் 25, 53, 77, 95, 80, 60, 30 என்பன பிரிவு அலைவெண்கள் ஆகும். மொத்த அலைவெண் 420 ஆகும். எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட அலைவெண் பரவலில் உள்ள மொத்த எண்ணிக்கை மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கிறது.

ஏ) பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை :

அலைவெண் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் முக்கியமானதாகும். பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கக் கூடாது. சிறந்த அலைவெண் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை 5லிருந்து 15 வரை தான் இருக்க வேண்டும். முழு விவரங்களைக் கொண்ட அலைவெண் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட மிகப்பெரிய மதிப்பையும் சிறிய மதிப்பையும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இவற்றிற்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம், பிரிவு இடைவெளியைத் தீர்மானிக்க பெரிதும் பயன்படும்.

கணக்கின் தன்மையைப் பொறுத்து பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையை கட்டுப்படுத்த முடியும் அல்லது "ஸ்டார்ஜஸ் நியதி"யின் உதவியோடு பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்க இயலும். ஸ்டார்ஜஸ் நியதிப்படி பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையை பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் கணக்கிட முடியும்.

$$K = 1 + 3.322 \log_{10} N$$

இதில் K = மொத்த பிரிவு இடைவெளிகள்

N = அளவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$\log$ = எண்ணின் மடக்கை

இவ்வாறாக கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை 10 எனில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை

$$K = 1 + 3.322 \log 10 = 4.322 = 4$$

அளவுகளின் எண்ணிக்கை 100 எனில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையானது $K = 1 + 3.322 \log 100 = 7.644 = 8$ என அமையும்.

ஏ) பிரிவு இடைவெளியின் அளவு :

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் பிரிவு இடைவெளியின் அளவும் பிரிவு இடைவெளியின் எண்ணிக்கையும் தலைகீழ் விகிதாச்சாரமாக இருப்பதனால் ஸ்டர்ஜஸ் நியதியைப் பயன்படுத்தி பிரிவு இடைவெளி அளவு 'C' யின் தோராயமான மதிப்பைக் கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$\text{பிரிவின் அளவு (C)} = \frac{\text{வீச்சு}}{\text{பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$C = \frac{\text{வீச்சு}}{1 + 3.322 \log_{10} N}$$

இதில் வீச்சு = பரவலில் மிகப் பெரிய மதிப்பு – மிகச் சிறிய மதிப்பு

4.4 பிரிவு இடைவெளிகளின் வகைகள்

விவரங்களைப் பிரிவு இடைவெளிகளாக வகைப்படுத்தலில் மூன்று முறைகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு

அ) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

ஆ) சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

இ) திறந்த விரிவுகள்

அ) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை :

ஒரு பிரிவு இடைவெளியில் முதல் பிரிவின் மேல் எல்லையும், அடுத்த பிரிவின் கீழ் எல்லையும் ஒன்றே எனில் இதனையே தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை என்கிறோம்.

பின்வரும் விவரங்கள் தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையின் படி அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

செலவீனம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0-5000	60
5000-10000	95
10000-15000	122
15000-20000	83
20000-25000	40
மொத்தம்	400

தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவு இடைவெளியின் முதல் பிரிவின் மேல் எல்லையானது அடுத்த பிரிவின் கீழ் எல்லையாக இருப்பதனால் விவரங்களின் தொடர்ச்சியை எளிதாக காணலாம். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் 60 குடும்பங்களின் செலவானது ரூ.0 லிருந்து ரூ. 4999.99க்கு இடையில் அமைகிறது. ரூ.5000 செலவு செய்யும் குடும்பம் 5000–10000 பிரிவில் அமைகிறது. நடைமுறையில் இந்த முறை விரிவாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

ஆ) சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை :

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவு இடைவெளிகள் ஒன்றன் மேல் மற்றொன்று படிவது தவிர்க்கப்படுகிறது. அதாவது மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை இரண்டுமே பிரிவு இடைவெளியில் சேர்க்கப்படுகிறது. குடும்பத்தின் நபர்களின் எண்ணிக்கை, தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை போன்ற தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்கு சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை பயன்படுகிறது. இந்த வகையான மாறியானது முழு எண்களையே கொண்டிருக்கும். இம்முறையானது முழு எண்களையும் பின்ன எண்களையும் உடைய தொடர்ச்சியான மாறியான வயது, உயரம், எடை போன்றவற்றிற்குப் பயன்படாது. இந்த முறை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
5-9	7
10-14	12
15-19	15
20-29	21
30-34	10
35-39	5
மொத்தம்	70

மாறிகளின் மதிப்பு தொடர்ச்சியானதா அல்லது தொடர்ச்சியற்றா எனத் தெரிந்த பிறகே சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை அல்லது தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையைப் பயன்படுத்துவதா என தீர்மானிக்கப்பட வேண்டும். தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில் கண்டிப்பாக தவிர்த்துக் கணக்கிடு முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும். தொடர்ச்சியற்ற மாறி எனில் சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

இ) திறந்த பிரிவுகள் :

முதல் பிரிவு இடைவெளிப் பிரிவின் கீழ் எல்லையோ அல்லது கடைசிப் பிரிவு இடைவெளிப் பிரிவின் மேல் எல்லையோ அல்லது இரண்டுமே இல்லாமல் இருக்கும் நிலையில் திறந்த பிரிவுகளை அமைக்கலாம். பொருளாதாரம் மற்றும் மருத்துவப் புள்ளி விவரங்களில் சில சமயங்களில் மிக அதிக அல்லது மிகக் குறைந்த விவர மதிப்புகள் தோன்றும் பொழுது திறந்த பிரிவுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

திறந்த பிரிவுகளுக்கான எடுத்துக்காட்டு பின்வருமாறு :

சம்பள வீச்சு	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
2000 க்கு கீழ்	7
2000-4000	5
4000-6000	6
6000-8000	4
8000 மற்றும் அதற்கு மேல்	3

4.5 அலைவெண் அட்டவணை அமைத்தல் :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் தன்மையைப் பொறுத்து அலைவெண் பரவல் அமைக்கப்பட வேண்டும். விவரங்களைப் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் வகைப்படுத்துவதற்கு பின்வரும் பொதுவான வழி முறைகளை மனதிற் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

1. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 5 லிருந்து 20க்குள் இருக்க வேண்டும். எனினும் இது ஒரு கண்டிப்பான நியதி அல்ல.
2. பிரிவு இடைவெளியின் மதிப்புகள் 3, 7, 11, 26........ இவற்றை முடிந்தவரையில் தவிர்க்க வேண்டும். பிரிவு இடைவெளியின் மதிப்புகள் 5 அல்லது 5ன் மடங்காக அதாவது 5, 10, 15, 20....... ஆக இருக்கலாம்.
3. முதல் பிரிவின் ஆரம்ப மதிப்பு அதாவது கீழ் எல்லையானது பூச்சியமாகவோ அல்லது 5 அல்லது 5ன் மடங்காகவோ இருந்தால் நல்லது.
4. சரியான பிரிவு இடைவெளி அமைவதற்கும், தொடர்ச்சியாக இருப்பதற்கும் தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.
5. முடிந்தவரையில் சம அளவுகளுடன் கூடிய பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும்.

4.6 அலைவெண் அட்டவணை தயாரித்தல் :

விவரங்களை நிகழ்வெண் பரவல் வடிவத்தில் அமைத்தல் என்பது அதன் அடிப்படை வடிவத்தையும், அத்தொகுதி முழுமையையும் விளக்குவதாக இருக்க வேண்டும். விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் பொழுது, அலைவெண் பரவல் விவரங்களின் அமைப்பை தெளிவாக படம் பிடித்து காட்டுகிறது. தொடர்பற்ற தனிப்பட்ட விவரங்களை எடுத்துக் கொள்கையில் அவற்றைக் காண முதற்படி, கண்டிறிந்த மாறியின் வீச்சிற்கு ஏற்றவாறு பொருத்தமான பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையில் பிரித்து, ஒவ்வொரு பிரிவில் அடங்கும் எண்ணிக்கையின் அளவைப் பதிவு செய்தல் வேண்டும்.

50 கல்லூரி மாணவர்களின் எடை (கிலோ கிராமில்) எடுத்துக் கொள்வோம்.

42	62	46	54	41	37	54	44	32	45
47	50	58	49	51	42	46	37	42	39
54	39	51	58	47	64	43	48	49	48
49	61	41	40	58	49	59	57	57	34
56	38	45	52	46	40	63	41	51	41

இங்கு ஸ்டர்ஜஸ் நியதியைப் பயன்படுத்தி பிரிவு இடைவெளியின் அளவு பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\text{பிரிவின் அளவு } C = \frac{\text{வீச்சு}}{1 + 3.322 \log N}$$

$$= \frac{64 - 32}{1 + 3.322 \log (50)} = \frac{32}{6.64} \approx 5$$

இதில் பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை 7 ஆகவும் பிரிவின் அளவு 5 ஆகவும் உள்ளது. குறியீடுகளை அமைத்து தேவையான அலைவெண் பரவலை கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	குறியீடுகள்	அலைவெண்
30-35	II	2
35-40	卌 I	6
40-45	卌 卌 II	12
45-50	卌 卌 IIII	14
50-55	卌 I	6
55-60	卌 I	6
60-65	IIII	4
மொத்தம்		50

எடுத்துக்காட்டு: 2

ஒரு தொழிற்சாலையில் தொழிலாளர்கள் உற்பத்தி செய்த உபகரணங்கள் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

43	18	25	18	39	44	19	20	20	26
40	45	38	25	13	14	27	41	42	17
34	31	32	27	33	37	25	26	32	25
33	34	35	46	29	34	31	34	35	24
28	30	41	32	29	28	30	31	30	34
31	35	36	29	26	32	36	35	36	37
32	23	22	29	33	37	33	27	24	36
23	42	29	37	29	23	44	41	45	39
21	21	42	22	28	22	15	16	17	28
22	29	35	31	27	40	23	32	40	37

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவு இடைவெளி அமைத்து அலைவெண் பரவல் அட்டவணை அமைக்கவும்.

1. எவ்வளவு தொழிலாளர்கள் 38க்கும் மேற்பட்ட உபகரணங்கள் தயார் செய்கிறார்கள்.

2. எவ்வளவு தொழிலாளர்கள் 23க்கும் குறைவான உபகரணங்கள் தயார் செய்கிறார்கள்.

தீர்வு :

ஸ்டார்ஜஸ் வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடலாம்.

$$\text{பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை} = 1 + 3.322 \log_{10} N$$

$$= 1 + 3.322 \log_{10} 100$$

$$= 7.6$$

$$\text{பிரிவுகளின் அளவு} = \frac{\text{வீச்சு}}{\text{பிரிவு இடைவெளியின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{46-13}{7.6} \approx 5$$

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் 7 பிரிவுகளையும், பிரிவு இடைவெளியின் அளவு 5 ஆகவும் எடுத்துக் கொண்டால் **13–17, 18–22, ... 43–47** என்ற வகையில் பிரிவு இடைவெளிகள் அமையும். பின்வரும் அட்டவணையின் மூலம் குறியீடுகளை பயன்படுத்தி அலைவெண் பரவலை அமைக்கலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	குறியீடுகள்	தயாரிக்கப்பட்ட மொத்த உபகரணங்கள் (அலைவெண்)
13-17		6
18-22		11
23-27		18
28-32		25
33-37		22
38-42		11
43-47		7
மொத்தம்		100

4.7 சதவீத அலைவெண் அட்டவணை :

மொத்தப் புள்ளி விவரங்களின் அளவு ஒரு பரவலுக்கும் மற்றொன்றுக்கும் இடையே விரிவாகவும் அதிக வேறுபாட்டுடனும் இருக்கும் பொழுது ஒப்பிடுதல் மிகவும் கடினமாகவும், முடியாமலும் போகலாம். இந்த சூழ்நிலையில் சுலபமான ஒப்பிடுதலுக்கு சதவீத அலைவெண் பரவல் பயன்படுகிறது. சதவீத அலைவெண் அட்டவணையில் உண்மையான அலைவெண் சதவீதமாக மாற்றி அமைக்கப்படுகிறது.

சதவீதங்களை கீழ்க்காணும் வாய்ப்பாட்டைக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.

$$\text{அலைவெண் சதவீதம்} = \frac{\text{பிரிவு இடைவெளி அலைவெண்}}{\text{அலைவெண்களின் மொத்தம்}} \times 100$$

கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டு சதவீத அலைவெண் அட்டவணையாக அமைக்கப் பெற்றது.

மதிப்பெண்கள்	மொத்த மாணவர்கள்	அலைவெண் சதவீதம்
0-10	3	6
10-20	8	16
20-30	12	24
30-40	17	34
40-50	6	12
50-60	4	8
மொத்தம்	50	100

4.8 குவிவு அலைவெண் அட்டவணை :

குவிவு அலைவெண் பரவலில் அடுத்தடுத்த பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்களின் கூடுதல் குவிவு அலைவெண் எனப்படும். குவிவு அலைவெண்ணானது ஒரு பிரிவு இடைவெளியில் முதல் பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்ணுடன் இரண்டாவது பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்ணை கூட்ட வேண்டும். மீண்டும் இக்கூடுதலுடன் மூன்றாவது பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்ணை கூட்ட வேண்டும். இதைப் போல் கூடுதலை தொடர்ச்சியாக, கடைசி பிரிவு இடைவெளிக்கு எதிராக மொத்த அலைவெண் வரும் வரை கூட்டிக் கொண்டே வர வேண்டும்.

குவிவு அலைவெண் குறைந்து கொண்டோ அல்லது உயர்ந்து கொண்டோ இருக்கலாம். குறைந்த நிலை குவிவு அலைவெண் எப்பொழுதும் பிரிவின் மேல் எல்லை அளவின் (அடுத்து வரும் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை) அடிப்படையிலும், உயர்ந்த நிலை குவிவு அலைவெண் எப்பொழுதும் பிரிவின் கீழ் எல்லை அளவின் அடிப்படையிலும் (முந்தைய பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லை) கணிக்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: 3

வயது தொகுதி (வருடத்தில்)	பெண்களின் எண்ணிக்கை	கீழ்இனக் குவிவு அலைவெண்	மேல் இனக் குவிவு அலைவெண்
15-20	3	3	64
20-25	7	10	61
25-30	15	25	54
30-35	21	46	39
35-40	12	58	18
40-45	6	64	6

அ) கீழ் இனக் குவிவு அலைவெண் பட்டியல் :

கடைசி மதிப்புகள் (மேல் எல்லை)	கீழ் இனக் குவிவு அலைவெண்கள்
20 க்கும் கீழ்	3
25 க்கும் கீழ்	10
30 க்கும் கீழ்	25
35 க்கும் கீழ்	46
40 க்கும் கீழ்	58
45 க்கும் கீழ்	64

ஆ) மேல் இனக் குவிவு அலைவெண் பட்டியல் :

கடைசி மதிப்புகள் (கீழ் எல்லை)	மேல் இனக் குவிவு அலைவெண்கள்
15 மற்றும் அதற்கு மேல்	64
20 மற்றும் அதற்கு மேல்	61
25 மற்றும் அதற்கு மேல்	54
30 மற்றும் அதற்கு மேல்	39
35 மற்றும் அதற்கு மேல்	18
40 மற்றும் அதற்கு மேல்	6

4.8.1 குவிவு அலைவெண்ணிலிருந்து எளிய அலைவெண் கணித்தல்

நம்மிடம் குவிவு அலைவெண் மட்டும் (மேலினக் குவிவு அல்லது கீழ் இனக் குவிவு) இருந்தால் அதனை எளிய அலைவெண்களாக மாற்றலாம். உதாரணமாக கீழே கீழ் இனக் குவிவு அலைவெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கீழ்காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி எளிய அலைவெண்களைக் காணலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	கீழ்இனக் குவிவு அலைவெண்	எளிய அலைவெண்
15-20	3	3
20-25	10	10 – 3 = 7
25-30	25	25 – 10 = 15
30-35	46	46 – 25 = 21
35-40	58	58 – 46 = 12
40-45	64	64 – 58 = 6

மேலினக் குவிவு அலைவெண்களை எளிய அலைவெண்களாக மாற்ற கீழ்காணும் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	மேலினக் குவிவு அலைவெண்	எளி அலைவெண்
15-20	64	64 – 61 = 3
20-25	61	61 – 54 = 7
25-30	54	54 – 39 = 15
30-35	39	39 – 18 = 21
35-40	18	18 – 6 = 12
40-45	6	6 – 0 = 6

4.9 குவிவு சதவீத அலைவெண் அட்டவணை :

குவிவு அலைவெண்களுக்கு பதிலாக குவிவு சதவீதங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அது "குவிவு சதவீத அலைவெண் பரவல்" எனப்படும். அலைவெண்களை சதவீதமாக மாற்றிய பிறகு குவிவு படுத்துவதன் மூலம் அல்லது கொடுக்கப்பட்ட குவிவு அலைவெண்களை சதவீதமாக மாற்றுவதன் மூலம் இந்த அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: 4

வருமானம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு அலைவெண்	குவிவு சதவீத அலைவெண்
2000-4000	8	8	5.7
4000-6000	15	23	16.4
6000-8000	27	50	35.7
8000-10000	44	94	67.1
10000-12000	31	125	89.3
12000-14000	12	137	97.9
14000-20000	3	140	100.0
மொத்தம்	140		

4.10 இருமாறி அலைவெண் பரவல் :

முந்தைய பிரிவில் அலைவெண் பரவல்களில் ஒற்றை மாறியைப் பயன்படுத்துவதைப் பற்றி விளக்கப்பட்டிருந்தது. அத்தகைய அலைவெண் பரவல் ஒற்றை மாறி அலைவெண் பரவல் என்று கூறப்படும். சில சமயங்களில் இரு மாறிகளைப் பயன்படுத்தி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் தேவை ஏற்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, தனி நபர் தொகுதிகளின் எடை மற்றும் உயரம், வரவு மற்றும் செலவு, கணவன் மற்றும் மனைவி வயது போன்ற விவரங்களைப் பிரிவுபடுத்த இது பயன்படுகிறது.

ஒரே சமயத்தில் இரு மாறிகளையும் பல பிரிவுகளையும் பிரித்து அமைக்கும் பரவலுக்கு இரு மாறி அலைவெண் பரவல் என்று பெயர். இப்பரவலைக் கொண்டு அட்டவணை அமைத்தலே இருமாறி அலைவெண் அட்டவணை ஆகும். இருமாறி அலைவெண் பரவலில் ஒவ்வொரு மாறியும் பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இரு மாறிகளுக்கும் ஒரே மாதிரியான மற்றும் ஒரே அளவான பிரிவுகள் தேவையில்லை.

இரு மாறி புள்ளி விவரங்களில் X - எனப்படும் ஒரு மாறியை 'm' பிரிவுகளாகவும், Y என்ற அடுத்த மாறியை 'n' பிரிவுகளாகவும் தொகுக்கலாம். இரு மாறி அட்டவணை $m \times n$ கூறுகளாக இருக்கும். வேறுபட்ட மதிப்புகளுக்கான (x, y) ஒப்புக் குறிகளை இட்டு ஒவ்வொரு கூறுக்கும் உள்ள அலைவெண்ணைக் காணலாம். இரு மாறி அலைவெண் அட்டவணையின் தோற்ற மாதிரி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இரு மாறி அலைவெண் அட்டவணையின் மாதிரி வடிவம்

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">X வரிசை
Y வரிசை</td><td>பிரிவு மதிப்புகள்</td><td rowspan="2">Y–ன் மார்ஜினல் அலைவெண்</td></tr>
<tr><td>நடு மதிப்புகள்</td></tr>
<tr><td>பிரிவு இடைவெளிகள்</td><td>நடுமதிப்புகள்</td><td>$f(x, y)$</td><td>f_y</td></tr>
<tr><td colspan="2">X–ன் மார்ஜினல் அலைவெண்</td><td>f_x</td><td>மொத்தம்
$\Sigma f_x = \Sigma f_y = N$</td></tr>
</table>

இங்கு $f(x, y)$ என்பது (x, y) என்ற சோடியின் அலைவெண் ஆகும். அலைவெண் பரவலில் உள்ள X என்ற மாறியின் மொத்த அலைவெண்கள் (fx) என்பது X - என்ற மாறியின் விளிம்பு அலைவெண் பரவல் ஆகும். அதே போல் அலைவெண் பரவலில் உள்ள Y என்ற மாறியின் மொத்த அலைவெண்கள் (fy) என்பது y என்ற மாறியின் விளிம்பு அலைவெண் பரவல் ஆகும். விளிம்பு அலைவெண்களின் கூடுதல் மொத்த கூடுதல் (N) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

20 நபர்களின் உயரம் மற்றும் எடை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. உயரத்திற்கான இடைவெளிகள் 62-64, 64-66… மற்றும் எடைக்கான இடைவெளிகள் 115-125,125-135, எனக் கொண்டு ஒரு இரு மாறி அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்க. மற்றும் X, Y ன் விளிம்பு பரவலைக் காண்க.

வரிசை எண்	உயரம்	எடை	வரிசை எண்	உயரம்	எடை
1	70	170	11	70	163
2	65	135	12	67	139
3	65	136	13	63	122
4	64	137	14	68	134
5	69	148	15	67	140
6	63	121	16	69	132
7	65	117	17	65	120
8	70	128	18	68	148
9	71	143	19	67	129
10	62	129	20	67	152

தீர்வு :

நபர்களின் உயரம் மற்றும் எடைகளின் இருமாறி அலைவெண் அட்டவணை

உயரம் (X) / எடை (Y)	62-64	64-66	66-68	68-70	70-72	மொத்தம்
115-125	II (2)	II (2)				4
125-135	I (1)		I (1)	II (2)	I (1)	5
135-145		III (3)	II (2)		I (1)	6
145-155			I (1)	II (2)		3
155-165					I (1)	1
165-175					I (1)	1
மொத்தம்	3	5	4	4	4	20

X–இன் மற்றும் Y - இன் விளிம்பு பரவல் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(X) இன் விளிம்பு பரவல் உயரம்		(Y) இன் விளிம்பு பரவல் எடை	
பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
62-64	3	115-125	4
64-66	5	125-135	5
66-68	4	135-145	6
68-70	4	145-155	3
70-72	4	155-165	1
மொத்தம்	20	165-175	1
		மொத்தம்	20

பயிற்சி – 4

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. தவிர்த்துக் கணக்கிடும் பிரிவு இடைவெளியில்

அ) மேல் பிரிவு எல்லை உள்ளடங்காது

ஆ) கீழ் பிரிவு எல்லை உள்ளடங்காது

இ) கீழ், மேல் பிரிவு எல்லைகள் உள்ளடங்காது

ஈ) இதில் ஒன்றும் இல்லை

2. ஒரு பிரிவின் கீழ், மேல் எல்லை முறையே 10, 40 எனில், அதன் மைய மதிப்பு

அ) 15.0 ஆ) 12.5 இ) 25.0 ஈ) 30.0

3. 30–39, 40–49, 50–59 என்ற பிரிவு இடைவெளிகளின் வகை

அ) சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

ஆ) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை

இ) திறந்த பிரிவுகள்

ஈ) இதில் ஒன்றும் இல்லை

4.

10-19	20-29	30-39	40-49	50-59

என்ற தொடர்ச்சியான தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் பிரிவு இடைவெளி

அ) 9 ஆ) 10 இ) 4.5 ஈ) 14.5

5. செப்பனிடா விவரங்கள் என்பது

அ) முதல் நிலை விவரம் ஆ) இரண்டாம் நிலை விவரம்

இ) ஆய்விற்காக சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள்

ஈ) நன்கு சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

6. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண உதவும் H.A. ஸ்டர்ஜஸ் வாய்ப்பாடு __________

7. ஒரு பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பு 20 ஆகவும், இரண்டு அடுத்தடுத்த மைய மதிப்புகளின் வேறுபாடு 10 ஆகவும் இருந்தால் அப்பிரிவு எல்லைகள் __________, __________ ஆக இருக்கும்.

8. பிரிவின் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லையின் வேறுபாட்டிற்கு __________ என்று பெயர்.

9. பிரிவின் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லையின் சராசரிக்கு __________ என்று பெயர்.

10. குறிப்பிட்ட பிரிவு இடைவெளியில் விழும் எண்ணிக்கையே அப்பிரிவின் __________ எனப்படும்.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க :

11. அலைவெண்பரவல் என்றால் என்ன ?

12. வரிசை என்றால் என்ன ?

13. தொடர்ச்சியற்ற, தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல் என்றால் என்ன ?

14. சரியான உதாரணங்களைக் கொண்டு வேறுபடுத்துக.

    i) தொடர்ச்சியான மற்றும் தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண்.

    ii) தவிர்த்துக் கணக்கிடும் முறை மற்றும் சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறை பிரிவு இடைவெளி.

    iii) குறைந்த நிலை மற்றும் உயர்ந்த நிலை அலைவெண் அட்டவணை.

    iv) எளிய மற்றும் இருமாறி அலைவெண் அட்டவணை.

15. 50 குடும்பங்களில் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைப் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு உள்ளது. இவற்றைக் கொண்டு ஒரு தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்க.

4	2	0	2	3	2	2	1	0	2
3	5	1	1	4	2	1	3	4	2
6	1	2	2	2	1	3	4	1	0
1	3	4	1	0	1	2	2	2	5
2	4	3	0	1	3	6	1	0	1

16. ஆய்வில், குறிப்பிட்ட மாதத்தில் 64 குடும்பங்கள் வாங்கிய பாலின் அளவு (லிட்டரில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றைக் கொண்டு 5–9, 10–14... என்ற பிரிவு இடைவெளிகளில் ஒரு தொடர்ச்சியான அலை எண் பரவலை தயார் செய்க.

19	16	22	9	22	12	39	19
14	23	6	24	16	18	7	17
20	25	28	18	10	24	20	21
10	7	18	28	24	20	14	23
25	34	22	5	33	23	26	29
13	36	11	26	11	37	30	13
8	15	22	21	32	21	31	17
16	23	12	9	15	27	17	21

17. X, Y என்ற இரு மாறிகளின் 25 மதிப்புகள் கீழ்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த இரு மாறிகளின் உறவைக் காட்டும் ஒரு இருமாறி அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்க. இதில் X–ன் பிரிவு இடைவெளிகள் 10–20, 20–30.... ஆகவும், Y ன் பிரிவு இடைவெளி 100–200, 200–300.... ஆகவும் எடுத்துக் கொள்க.

X	Y	X	Y	X	Y
12	140	36	315	57	416
24	256	27	440	44	380
33	360	57	390	48	492
22	470	21	590	48	370
44	470	51	250	52	312
37	380	27	550	41	330
29	280	42	360	69	590
55	420	43	570		
48	390	52	290		

18. 20 கணவன், மனைவிகளின் வயது கீழ்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பிரிவு இடைவெளிகள் 20–25, 25–30.... ஆகவும், கணவன், மனைவி வயதைப் பொருத்தும் ஒரு இருமாறி அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்க.

கணவனின் வயது	மனைவியின் வயது
28	23
37	30
42	40
25	26
29	25
47	41
37	35
35	25
23	21
41	38

கணவனின் வயது	மனைவியின் வயது
27	24
39	34
23	20
33	31
36	29
32	35
22	23
29	29
38	34
48	47

IV. செய்து பார்க்க :

19. வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண் பட்டியலைக் கொண்டு குறைந்த நிலை மற்றும் உயர்ந்த நிலை குவிவு அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்க.

விடைகள்

I. 1. (அ) 2. (இ) 3. (அ) 4. (ஆ) 5. (அ)

II. 6. $k = 1 + 3.322 \log_{10} N$

7. 15, 25

8. பிரிவின் அளவு அல்லது பருமன் 9. மைய மதிப்பு 10. அலைவெண்

5. விளக்கப் படங்களும் வரைபடங்களும்

5.1 அறிமுகம் :

முந்தைய பாடத்தில் நாம் பார்த்த வகுப்பாக்கமும், பட்டியல் அமைத்தலும், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்கு முறையில் சுருக்கமாக அளிப்பதற்கு உதவி செய்கின்றன. எனினும் இம்முறை சராசரி மனிதனுக்கு ஆர்வத்தை ஏற்படுத்தாது.

விளக்கப் படங்கள் மூலமாக புள்ளியியல் முடிவுகளை அளித்தல் என்பது திருப்திகரமாக ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட வழிமுறைகளுள் ஒன்று. ஒரு விவரத்தை ஆயிரம் வார்த்தைகளால் விளக்குவதை விட ஒரு விளக்கப்படம் மூலம் மிக நன்றாக உணர்த்த முடியும். மேலும் எண்ணறிவு இல்லாத பாமர மனிதனால் கூட விளக்கப்படங்களைப் புரிந்து கொள்ள முடியும். இதற்கு ஆதாரமாக செய்தித் தாள்கள், மாத இதழ்கள், விளம்பரங்கள் ஆகியவற்றைக் கூறலாம் புள்ளி விவரங்களை அளிப்பதில் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படும் சில முக்கிய விளக்கப் படங்கள் மற்றும் வரைபடங்களை விளக்கமாக எடுத்துரைப்பதில் இந்த அத்தியாயத்தில் முயற்சி மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

5.2 விளக்கப் படங்கள் :

புள்ளி விவரங்களைப் பற்றிய முக்கியமான தன்மைகளையும் பல்வேறு புள்ளி விவரத் தொடர்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் படம் பிடித்துக் காட்டுகிறது. எளிதில் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் அடிப்படையில் விளக்கப்படங்கள் வரையும் போது அது சுலபமாக எல்லோராலும் புரிந்து கொள்ளப்படுகிறது. நேரத்தையும் உழைப்பையும் மிச்சப்படுத்தி புள்ளி விவரங்களை நுட்பமாக ஆயத்த நிலையில் தருகிறது.

5.3 விளக்கப்படங்கள் மற்றும் வரைபடங்களின் சிறப்புத் தன்மைகள் :

கீழ்க்கண்ட காரணங்களால் விளக்கப் படங்கள் மற்றும் வரைபடங்கள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. அவை மனதைக் கவர்வதாகவும் ஆழமாகப் பதிய வைப்பதாகவும் உள்ளன.
2. விவரங்களை எளிமையாகவும் நுட்பமாகவும் அளிக்கின்றன.
3. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்கு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
4. நேரத்தையும், வேலையையும் குறைக்கின்றன.
5. உலகளாவிய பயன்பாடு உடையதாக உள்ளது.
6. கூடுதல் செய்தியைத் தருகின்றன.
7. சிறந்த முறையில் நினைவில் நிறுத்துவதற்கு உதவுகின்றன.

5.4 விளக்கப்படங்கள் வரைவதற்கான சில பொது விதிகள் :

படங்கள் வரைவது என்பது ஒரு கலை. அது பழக்கத்தின் மூலமே வரக் கூடியது. எனினும் சில பொது வழிமுறைகளைப் பின்பற்றினால் மிக அழகாகவும் தெளிவாகவும் வரைய இயலும்.

விளக்கப் படங்கள் வரையும் போது கீழ்க்கண்ட விதிகளைப் பின்பற்றினால் புள்ளியியல் விவரங்களை வரைபடமாக அளிப்பதற்கு பயனுள்ளதாக அமையும்.

1. ஒரு விளக்கப்படம் என்பது தெளிவாகவும் கண்ணைக் கவரும் முறையிலும் வரையப்பட வேண்டும்.

2. விளக்கப்படங்களில் உள்ள வடிவியல் உருவங்களின் அளவீடுகள் சரியான விகிதாச் சாரத்தில் அமைய வேண்டும்.

3. நாம் வரைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் தாளின் அளவிற்கு ஏற்றதாக விளக்கப் படங்கள் அமைய வேண்டும்.

4. ஒவ்வொரு படத்திலும் கட்டாயமாக பொருத்தமான, ஆனால் சிறிய தலைப்பு இருக்க வேண்டும்.

5. விளக்கப்படத்தின் அளவுத் திட்டம் குறிப்பிடப்படல் வேண்டும்.

6. இவை வரைபடக் கருவிகளைப் பயன்படுத்தி சரியாகவும் தெளிவாகவும் வரையப்பட வேண்டும்.

7. படிப்போர் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் அளவிற்கு குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

8. அடிக்குறிப்பு படத்தின் அடியில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

9. பணத்தையும், உழைப்பையும் சிக்கனப்படுத்தும் முறையில் விளக்கப் படங்கள் வரையப்பட வேண்டும்.

5.5 விளக்கப் படங்களின் வகைகள் :

நடைமுறையில், பல்வேறு விளக்கப் படங்கள் புதிது, புதிதாக பயன்படுத்தப்படுவது, கூடிக் கொண்டே வருகிறது. வசதிக்காகவும், எளிமைப்படுத்துவதற்காகவும் அவை கீழ்க்கண்ட தலைப்புகளில் பிரிக்கப்படுகின்றன.

அவையாவன

i) ஒரு பரிமான விளக்கப் படங்கள்

ii) இரு பரிமான விளக்கப் படங்கள்

iii) முப்பரிமான விளக்கப் படங்கள்

iv) உருவ விளக்கப் படங்கள், மற்றும் புள்ளி விவர வரைபடங்கள் (Cartograms)

5.5.1 ஒரு பரிமான விளக்கப் படங்கள் :

இம்மாதிரியான படங்களில் ஒரு பரிமாண அளவு, அதாவது அகலம் கருதப்படாமல் உயரம் (நீளம்) மட்டும் கருதப்படுகிறது. பொதுவாக இப்படங்கள் கோடுகளாகவோ அல்லது பட்டைகளாகவோ இருக்கலாம். மேலும், இவை கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுகின்றன.

i) கோட்டு விளக்கப் படம்

ii) சாதாரண பட்டை விளக்கப் படம்

iii) பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம்

iv) கூறு பட்டை விளக்கப்படம் (பகுதி பட்டை)

v) சதவீத பட்டை விளக்கப் படம்

i) கோட்டு விளக்கப் படம் :

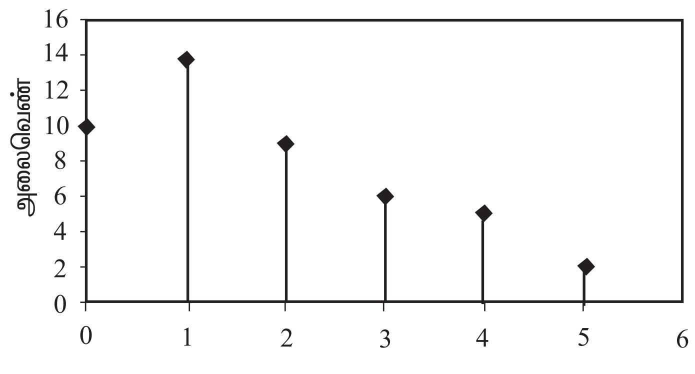
மதிப்பளவுகளில் அதிகம் வேறுபடாத பல உருப்படிகள் கொடுக்கப்படும் பொழுது அவற்றை விளக்க இப்படங்கள் உபயோகப்படுத்தப் படுகின்றன. ஒவ்வொரு உருப்படிகளின் அளவிற் கேற்றவாறு நிலைக் குத்துக் கோடுகள் வரைந்து இப்படங்கள் வரையப்பட வேண்டும். கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட இடைவெளி ஒரே சீராக அமைய வேண்டும். கோட்டு விளக்கப் படங்கள், ஒன்றோடு ஒன்று ஒப்பிடுதலுக்கு எளிமையாக இருப்பினும், அவை குறைந்த ஈர்ப்பு தன்மை கொண்டவை.

எடுத்துக்காட்டு 1

கீழ்க்கண்ட விவரத்தை கோட்டு விளக்கப்படம் மூலம் குறிப்பிடுக.

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
அலைவெண்	10	14	9	6	4	2

கோட்டு விளக்கப் படம்



ii) சாதாரண பட்டை விளக்கப் படம் :

சாதாரண பட்டை விளக்கப் படங்கள், கிடையாகவோ அல்லது நிலைக்குத்தாகவோ வரையப்படுகின்றன. பட்டைகள் ஒரே சீரான அகலத்திலும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட இடைவெளிகள் சமமாகவும் அமைய வேண்டும். சாதாரண பட்டை விளக்கப்படங்கள் வரையப்படும் பொழுது, அத்தொடரில் உள்ள மிகப்பெரிய அளவிற்கு ஏற்றவாறு அளவுத்திட்டம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். அவை கவன ஈர்ப்புடன் அமைய பட்டைகள் வண்ணங்கள் தீட்டப்பட வேண்டும். வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத் துறையில் இவ்வகைப் பட்டை விளக்கப்படங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப்படங்கள் மூலம் விவரங்களின் ஒரு வகையையோ அல்லது ஒரு

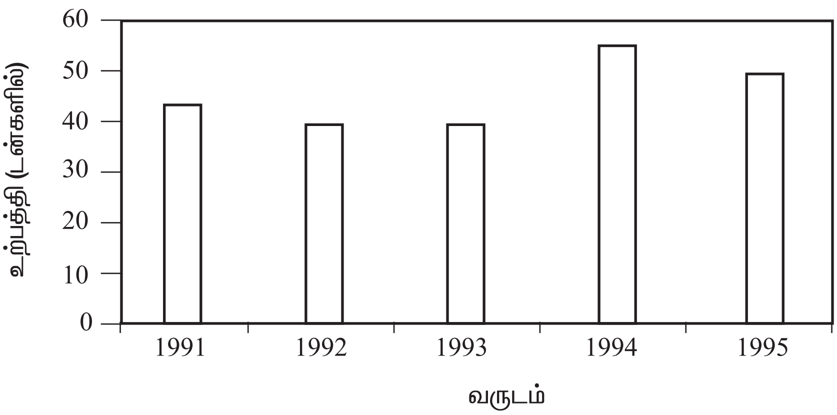
பிரிவையோ மட்டும் தான் விளக்க முடியும் என்பது இதன் குறைபாடாகும். எடுத்துக்காட்டாக, கடந்த ஐம்பதாண்டுகளில் பத்தாண்டுகளுக்கு ஒரு முறை எடுக்கப்படும் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பை இவ்வகைப் படங்கள் மூலம் விளக்கும் பொழுது, ஒருவரால் மொத்த மக்கட் தொகையை மட்டும் குறிக்க இயலுமேயன்றி, பாலின வாரியாக அலைவெண் பரவலை விளக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழ்க்கண்ட விவரங்களை எளிய பட்டை விளக்கப் படத்தின் மூலம் குறிக்கவும்.

வருடம்	உற்பத்தி (டன்களில்)
1991	45
1992	40
1993	42
1994	55
1995	50

சாதாரண பட்டை விளக்கப் படம்



iii) பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம் (Multiple-Bar Diagram)

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்கு இவ்வகை விளக்கப்படங்கள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. ஒப்பிடுவதற்காக புள்ளி விவர மதிப்புகள் அடுத்தடுத்து வரையப்படும் பட்டைகள் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றன.

வெவ்வேறு பட்டைகளுக்கு வெவ்வேறு வண்ணங்கள் தீட்டியோ அல்லது குறுக்குக் கோடுகள் மூலமாகவோ அல்லது புள்ளிகள் மூலமாகவோ அவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டலாம். இவற்றைப் பற்றிய குறிப்புகள் தயாரிக்கப் பட வேண்டும்.

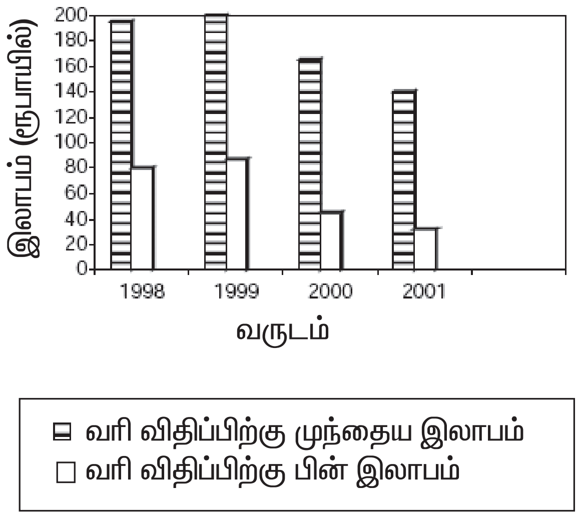
எடுத்துக்காட்டு 3

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

வருடம்	வரிவிதிப்பிற்கு முந்தைய இலாபம்	வரி விதிப்பிற்கு பின் இலாபம்
1998	195	80
1999	200	87
2000	165	45
2001	140	32

தீர்வு :

பல் அங்க பட்டை விளக்கப் படம்



iv) கூறுபட்டை விளக்கப் படம் :

கூறுபட்டை விளக்கப் படத்தில், கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள மதிப்புகளின் விகிதத்திற்கிணங்க, ஒவ்வொரு பட்டையும் பல கூறுகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. மேலும், முழுப் பகுதியும் முழுப் பட்டையால் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்வகை விளக்கப்படங்கள் பகுதிப் பட்டை விளக்கப் படங்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட கூறுகள் பல வண்ணங்களால் அல்லது குறுக்குக் கோடுகளால், அல்லது புள்ளிகளால் வேறுபடுத்தி காட்டப் படுகின்றன.

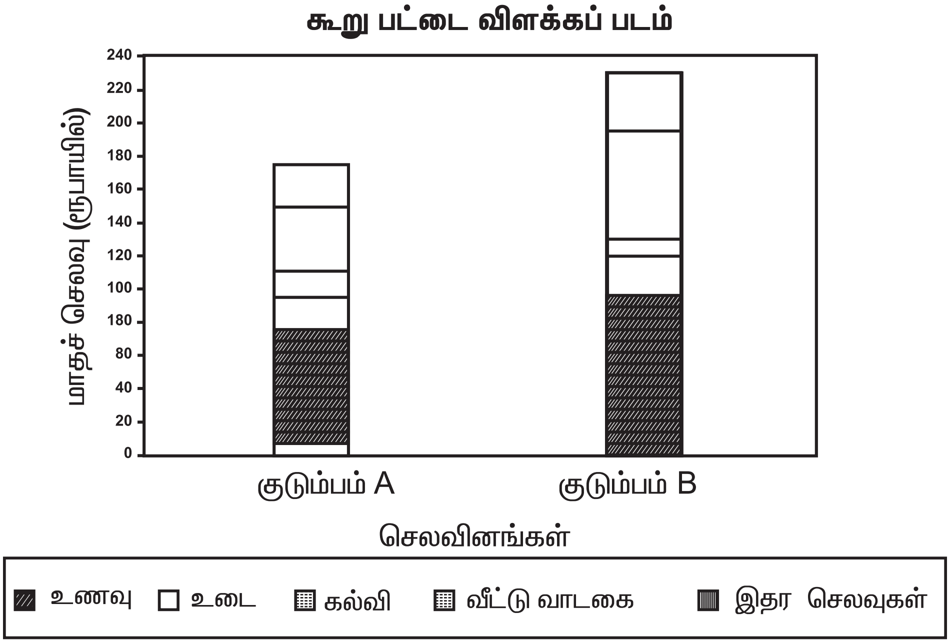
இவ்வகைப் படங்களின் முக்கிய குறைபாடு என்னவெனில், வெவ்வேறு பட்டைகளும் பொதுவான அடிக்கோட்டின் மீது வரையப்படாததால், புள்ளி விவரங்களின் வெவ்வேறு பிரிவுகளை ஒப்பிட இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 4

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கூறு பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

செலவினங்கள்	மாதச் செலவு (ரூபாயில்)	
	குடும்பம் A	குடும்பம் B
உணவு	75	95
உடை	20	25
கல்வி	15	10
வீட்டு வாடகை	40	65
இதர செலவுகள்	25	35

தீர்வு :



v) சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம் :

இது கூறு பட்டை விளக்கப்படத்தின் மற்றொரு வடிவம். இங்கு புள்ளி விவரத்தின் வெவ்வேறு கூறுகள் மொத்த மதிப்பின் சதவீதமாக மாற்றப்பட்டு சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம் வரையப்படுகிறது.

கூறு பட்டை விளக்கப் படங்களுக்கும், சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படங்களுக்கும் உள்ள முக்கிய வேறுபாடு என்னவெனில், முதலாவதில் விவரங்களே வெவ்வேறானவையாக இருப்பதால், பட்டைகள் வெவ்வேறு உயரங்களைப் பெற்றிருக்கும். பின்னதில் எல்லா விவரங்களும் நூற்றுமானத்திற்கு மாற்றப்படுவதால், பட்டைகள் சம உயரத்தைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவங்களை சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படத்தில் குறிக்கவும்.

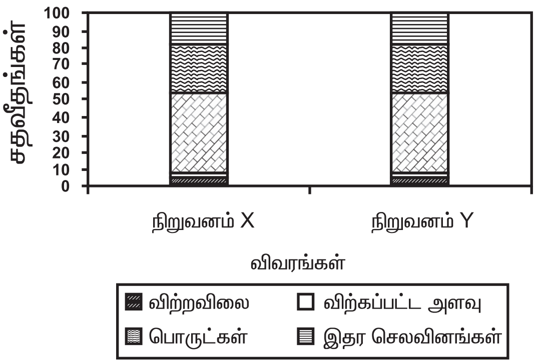
இனங்கள்	நிறுவனம் X	நிறுவனம் Y
விற்றவிலை	400	650
விற்கப்பட்ட அளவு	240	365
ஊதிய அளவு	3500	5000
பொருட்கள்	2100	3500
இதர செலவினங்கள்	1400	2100

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை கீழ்க்கண்டவாறு சதவீதமாக மாற்றுக.

இனங்கள்	நிறுவனம் X		நிறுவனம் Y	
	Rs.	%	Rs.	%
விற்றவிலை	400	5	650	6
விற்கப்பட்ட அளவு	240	3	365	3
ஊதிய அளவு	3500	46	5000	43
பொருட்கள்	2100	28	3500	30
இதர செலவினங்கள்	1400	18	2100	18
மொத்தம்	7640	100	11615	100

சதவீதபட்டை விளக்கப் படம்



5.5.2 இருபரிமான விளக்கப் படங்கள் :

ஒரு பரிமாணப் படங்களில் நீளம் மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது. ஆனால் இரு பரிமான விளக்கப்படங்களில் விவரங்களின் பரப்பு குறிப்பிடப்படுவதால் நீளம், அகலம் இரண்டுமே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. இம்மாதிரியான படங்கள் பரப்பளவு விளக்கப்படங்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. இவையாவன.

1. செவ்வகங்கள் 2. சதுரங்கள் 3. வட்ட விளக்கப் படங்கள்

செவ்வக விளக்கப்படம் :

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளின் எண்சார் தொடர்புகளைக் காட்டுவதற்கு செவ்வக விளக்கப் படங்கள் பயன்படுகின்றன. மதிப்புகளின் விகிதாச்சாரத்திற்கேற்ப, செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் அமையும். விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்காக செவ்வகங்கள் அடுத்தடுத்ததாக வரையப்படுகின்றன.

இரு தொகுதியின் விவரங்களை செவ்வகங்களில் குறிப்பிட கீழ்க்கண்ட இரு முறைகளில் எதை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை, கொடுக்கப் பட்டவாறோ அல்லது சதவீதங்களாக மாற்றியோ மொத்த நீளத்தை வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரித்து குறிப்பிடலாம். பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட செவ்வகங்களை விட சதவீதங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டவையே மிகவும் பழக்கத்தில் உள்ளது. ஏனெனில் சதவீதங்களடிப்படையில் உள்ளவற்றில் தான் ஒப்பிடுவது எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 6

கீழ்க்கண்ட விவரங்களை சதவீத செவ்வக விளக்கப் படங்களாகக் குறிக்கவும்.

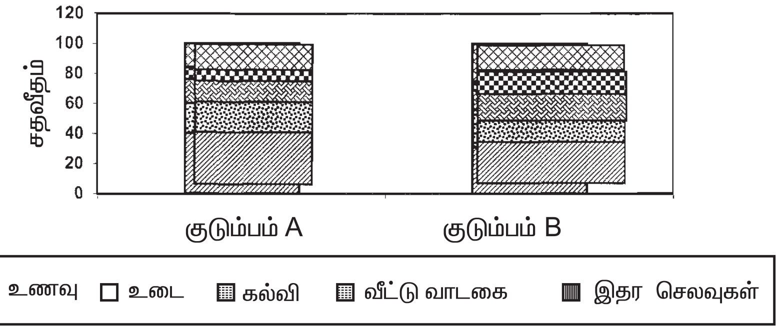
செலவினங்கள்	குடும்பம் A (வருமானம் ரூ.5000)	குடும்பம் B (வருமானம் ரூ.8000)
உணவு	2000	2500
உடை	1000	2000
வீட்டு வாடகை	800	1000
எரிபொருள், மின்செலவு	400	500
இதர செலவுகள்	800	2000
மொத்தம்	5000	8000

தீர்வு :

செலவினங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு சதவீதங்களாக மாற்றப்படுகின்றன.

செலவினங்கள்	குடும்பம் A		குடும்பம் B	
	ரூ.	Y	ரூ.	Y
உணவு	2000	40	2500	31
உடை	1000	20	2000	25
வீட்டு வாடகை	800	16	1000	13
எரிபொருள், மின்செலவு	400	8	500	6
இதர செலவுகள்	800	16	2000	25
மொத்தம்	5000	100	8000	100

பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்ட சதவீத செவ்வக விளக்கப் படம்



சதுரங்கள் :

கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று அதிக வித்தியாசத்திலிருந்தால் செவ்வக முறையில் குறிப்பிடுவதை விட சதுரங்களின் மூலம் மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒப்புமையை நன்கு காட்ட முடியும். ஏனெனில் சதுரங்கள் வரைவது மிக எளிது. சதுரங்களின் பக்கங்களை அவை குறிப்பிடுகின்ற மாறிகளின் மதிப்புகளின் வர்க்க மூலங்களுக்கு விகித சமமாக எடுத்துக் கொண்டு சதுரங்கள் வரைவது ஒருவருக்கு எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 7:

5 நாடுகளின் அரிசி உற்பத்தி (கிலோ கிராமில்) ஏக்கருக்கு கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

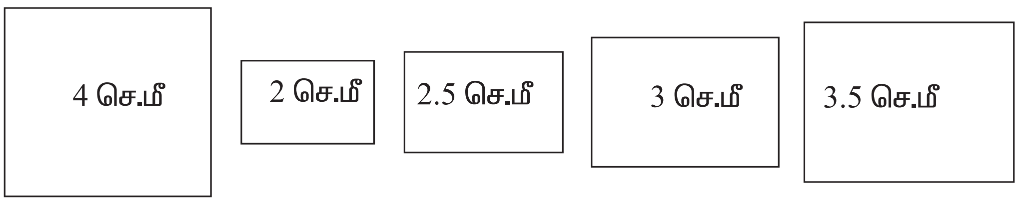
நாடு	U.S.A	ஆஸ்திரேலியா	U.K	கனடா	இந்தியா
அரிசி உற்பத்தி (ஏக்கரில்)	6400	1600	2500	3600	4900

மேற்கண்ட விவரத்திற்கு ஒரு சதுர விளக்கப்படம் வரைக.

தீர்வு :

சதுர விளக்கப்படம் வரைவதற்கான கணக்கீடு, பின்வருமாறு.

நாடுகள்	விளைச்சல்	வர்க்கமூலம்	சதுரத்தின் பக்க அளவு (செ.மீ)
U.S.A	6400	80	4
ஆஸ்திரேலியா	1600	40	2
U.K	2500	50	2.5
கனடா	3600	60	3
இந்தியா	4900	70	3.5



வட்டவிளக்கப் படம் :

இரு பரிமானப் படங்களை வரைவதில் வட்டவடிவில் வரைவது மற்றொரு முறையாகும். இப்படங்களில் முழுப்பகுதியும், மற்ற கூறுகளும் வட்ட கோணப் பகுதிகளாக பிரித்துக் காட்டப்படுகின்றன. வட்டத்தின் பரப்பளவு ஆரத்தின் வர்க்கத்தின் விகிதாச்சாரத்தில் உள்ளது.

விவரங்களை ஒப்பிடும்பொழுது, நேரடியான மதிப்புகளை ஒப்பிடாமல், சதவீதங்கள் அடிப்படையில் ஒப்பிட வட்ட வடிவ விளக்கப்படங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

விளக்கப்படம் வரைவதன் முதல் படியாக பல்வேறு மதிப்புகளும் அவற்றிற்கொத்த வட்ட கோணங்களாக மாற்றப்பட வேண்டும்.

அடுத்தபடியாக, கவராயம் (Compass) பயன்படுத்தி சரியான அளவிற்கு வட்டம் வரைய வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட இடம், மற்ற காரணிகளையும் பொறுத்து வட்டத்தின் ஆரம் தேர்ந்தெடுக்கப் பட வேண்டும்.

மூன்றாவது படியாக கோணமானியைப் பயன்படுத்தி வட்ட கோண அளவைக் குறித்து வட்ட கோண பகுதிகளை வரைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்வேறு நாடுகளின் சர்க்கரை உற்பத்தி விவரங்களுக்கு வட்ட விளக்கப்படம் வரைக.

நாடுகள்	சர்க்கரை உற்பத்தி (குவிண்டால்கள்)
கியூபா	62
ஆஸ்திரேலியா	47
இந்தியா	35
ஜப்பான்	16
எகிப்து	6

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் கீழ்கண்டவாறு கோணங்களாக மாற்றப்பட வேண்டும்.

நாடுகள்	சர்க்கரை உற்பத்தி (குவிண்டால்கள்)	
	குவிண்டால்	கோணங்களில்
கியூபா	62	134
ஆஸ்திரேலியா	47	102
இந்தியா	35	76
ஜப்பான்	16	35
எகிப்து	6	13
மொத்தம்	166	360

வட்ட விளக்கப் படம்

5.5.3 முப்பரிமாண விளக்கப்படங்கள் :

முப்பரிமாண படங்கள் என்பன கனவடிவப் படங்கள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இவற்றில் கனசதுரங்கள், உருளைகள், கோளங்கள் ஆகியவை அடங்கும். இவ்வகைப் படங்களில் நீளம், அகலம், உயரம் என்ற மூன்றும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

இவை அனைத்திலும் கன சதுரம் அமைப்பதே சுலபமானது. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அளவின் கனசதுரத்தின் விகிதத்திற்கேற்றவாறு கனசதுரத்தின் பக்கம் அமையும். மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எண்களின் கனமூலம் காண இயலும். அம்மடக்கையை மூன்றால் வகுத்து எதிர் மடக்கைக் கண்டுபிடித்தால் அந்த எண்ணின் கனமூலம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

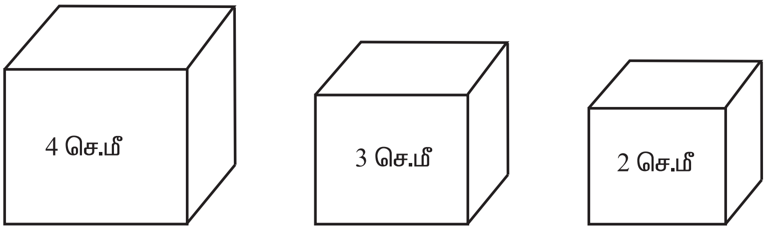
கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கன உருவ விளக்கப் படம் வரைக.

பிரிவுகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
பட்டதாரி	64000
முதுகலை பட்டதாரி	27000
தொழில் வல்லுநர்கள்	8000

தீர்வு :

கனசதுரத்தின் பக்க அளவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு காணப்படுகின்றன.

பிரிவுகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	கனமூலம்	கனசதுரத்தின் பக்கம்
பட்டதாரி	64000	40	4 செ.மீ
முதுகலை பட்டதாரி	27000	30	3 செ.மீ
தொழில் வல்லுநர்கள்	8000	20	2 செ.மீ



5.5.4 சித்திர விளக்கப் படம், மற்றும் உருவகப் படங்கள் (Cartograms) :

சித்திர விளக்கப்படம் என்பது சில வகை விவரங்களை கோடுகள் மூலமாகவோ, பட்டைகளாகவோ குறிப்பிடாமல், சித்திரங்கள் மூலம் காட்டப்படுவது. சித்திரங்கள் கவன ஈர்ப்பு உடையனவாக இருப்பதால், இம்முறை பாமர மனிதனுக்கும் புள்ளி விவரங்களை தெளிவாக விளக்குகிறது. சித்திரப் படங்களைப் பயன்படுத்தும் பொழுது, விவரங்கள், சித்திர வடிவமாகக் காட்டப்படுவதால், சித்திரங்களை கவனமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

உருவகப் படங்கள் (Cartograms) அல்லது புள்ளியியல் வரைபடங்கள் என்பன புவியியல் அடிப்படையிலான விவரங்களின் அளவைக் குறிக்கப் பயன்படுகின்றன. அவை இடம் சார் பரவலைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது. ஒவ்வொரு புவியியல் பகுதியின் வரைபட அளவுகளை, நிழலிட்டுக் காட்டியோ, வண்ணங்கள் தீட்டியோ புள்ளிகள் மூலமாகவோ காட்டலாம்.

5.6 வரைபடங்கள் :

புள்ளி விவரத்தை காட்சி வடிவில் தருவது வரைபடங்கள் ஆகும். எண் விவரங்களை அட்டவணைப் படுத்துதலை விட வரைபடமாகக் காட்டுவது கவன ஈர்ப்பு தன்மை உடையதாகவும், பாமர மனிதனாலும் புள்ளி விவரங்களை புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாகவும் அமையும். வரைபடத்தின் உதவியால் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விவரங்களை ஒப்பிட இயலும். எனினும் நாம் இங்கு வழக்கத்தில் உள்ள சில முக்கிய வரைபடங்களைப் பற்றி மட்டும் பார்க்கலாம்.

1. பரவல் செவ்வகப் படம்
2. நிகழ்வெண் பல கோண வடிவம்
3. நிகழ்வெண் வளைகோடு
4. வளர் நிகழ் வளைவரைகள் (ஓகைவ்)
5. லாரன்ஸ் வளைவரை

5.6.1 பரவல் செவ்வகப் படம் :

எடுத்துக் கொண்ட மாறிகளில் ஒவ்வொரு மதிப்பின் நிகழ்விற்குரிய அலைவெண்களை பட்டை வடிவமாக அல்லது வரைபடமாக பரவல் செவ்வகப் படத்தில் குறிக்கப்படுகிறது. பரவல் செவ்வகப் படத்தில் விவரங்கள் தொடர்ச்சியான செவ்வகங்களாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு பிரிவு எல்லைகள் X அச்சிலும் அவற்றின் அலைவெண்கள் Y அச்சிலும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் உயரமும் பிரிவின் அலைவெண்ணைக் குறிக்கின்றது. ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் உயரமும் பிரிவின் அலைவெண்ணைக் குறிக்கின்றது. ஒவ்வொரு செவ்வகமும் அடுத்தடுத்த செவ்வகத்துடன் இணைக்கப்பட்டு ஒரு தொடர்ச்சியான படம் கிடைக்கின்றது. இவ்வகை வரைபடங்கள் படிக்கட்டு படங்கள் அல்லது கட்ட விளக்கப் படங்கள் (Stair case or block diagram) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

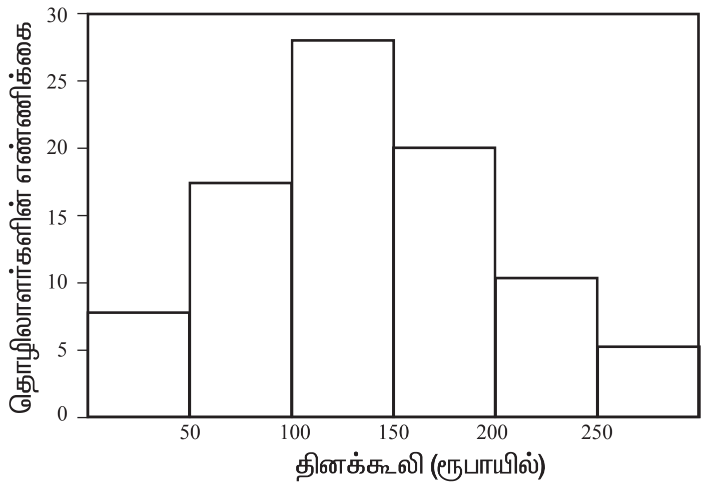
எடுத்துக்காட்டு 10

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு பரவல் செவ்வகப் படம் வரைக.

தினக்கூலி (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
0-50	8
50-100	16
100-150	27
150-200	19
200-250	10
250-300	6

தீர்வு :

பரவல் செவ்வகப் படம்



எடுத்துக்காட்டு 11

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு, பரவல் செவ்வகப் படம் வரைக.

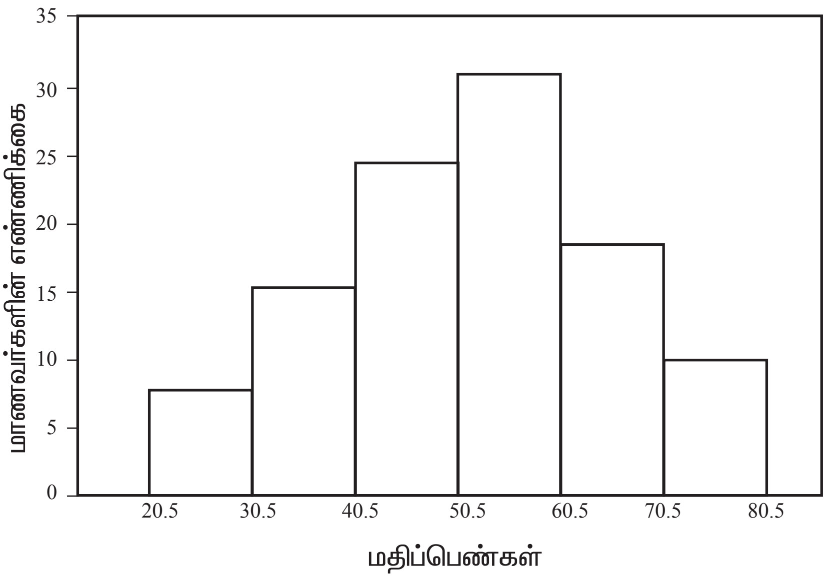
மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
21-30	6
31-40	15
41-50	22
51-60	31
61-70	17
71-80	9

தீர்வு :

பரவல் செவ்வகப் படம் வரைவதற்கு அலைவெண் பரவல் தொடர்ச்சியானதாக அமைய வேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில் முதலில் அலைவெண் பரவலை கீழ்க்கண்டவாறு தொடர்ச்சியானதாக மாற்ற வேண்டும்.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
20.5-30.5	6
30.5-40.5	15
40.5-50.5	22
50.5-60.5	31
60.5-70.5	17
70.5-80.5	9

பரவல் செவ்வகப் படம்



எடுத்துக்காட்டு 12

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு பரவல் செவ்வகப் படம் வரைக.

இலாபம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
0-10	4
10-20	12
20-30	24
30-50	32
50-80	18
80-90	9
90-100	3

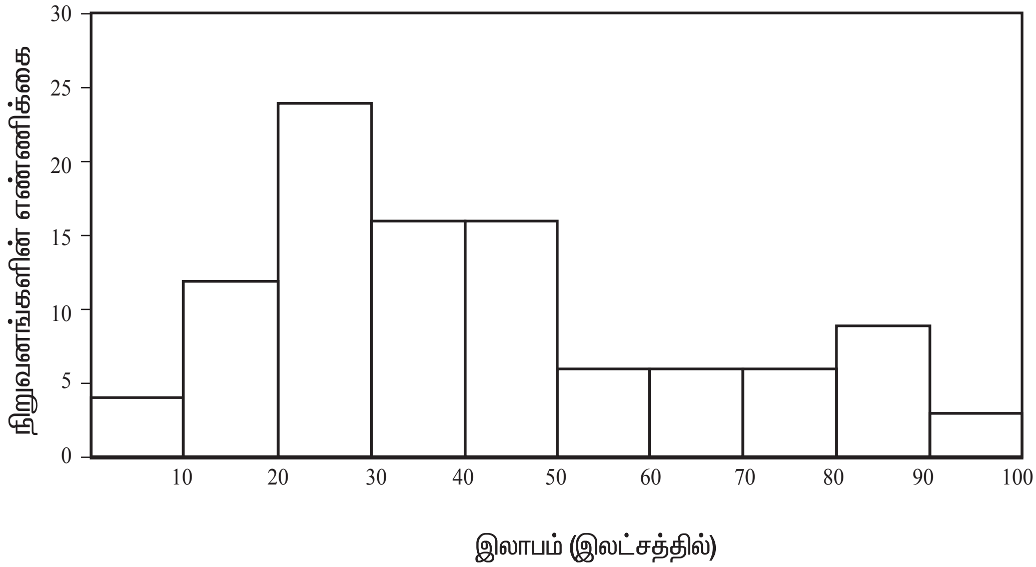
தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி சமமற்று இருப்பின் ஒரு திருத்தம் அவ்விடைவெளிகளில் ஏற்படுத்தி அலைவெண்களை கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி அமைக்க வேண்டும்.

30–50 இடைவெளியின் அகலம் இரு மடங்காக இருப்பதால் அலைவெண் இரண்டால் வகுக்கப்பட வேண்டும். இதே போல் **50–80** இடைவெளி மூன்றால் வகுக்கப்பட வேண்டும். அதன் பிறகு பரவல் செவ்வகப் படம் வரையப்பட வேண்டும்.

இலாபம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
0-10	4
10-20	12
20-30	24
30-40	16
40-50	16
50-60	6
60-70	6
70-80	6
80-90	9
90-100	3

பரவல் செவ்வகப் படம்



5.6.2 நிகழ்வெண் பல கோணம் :

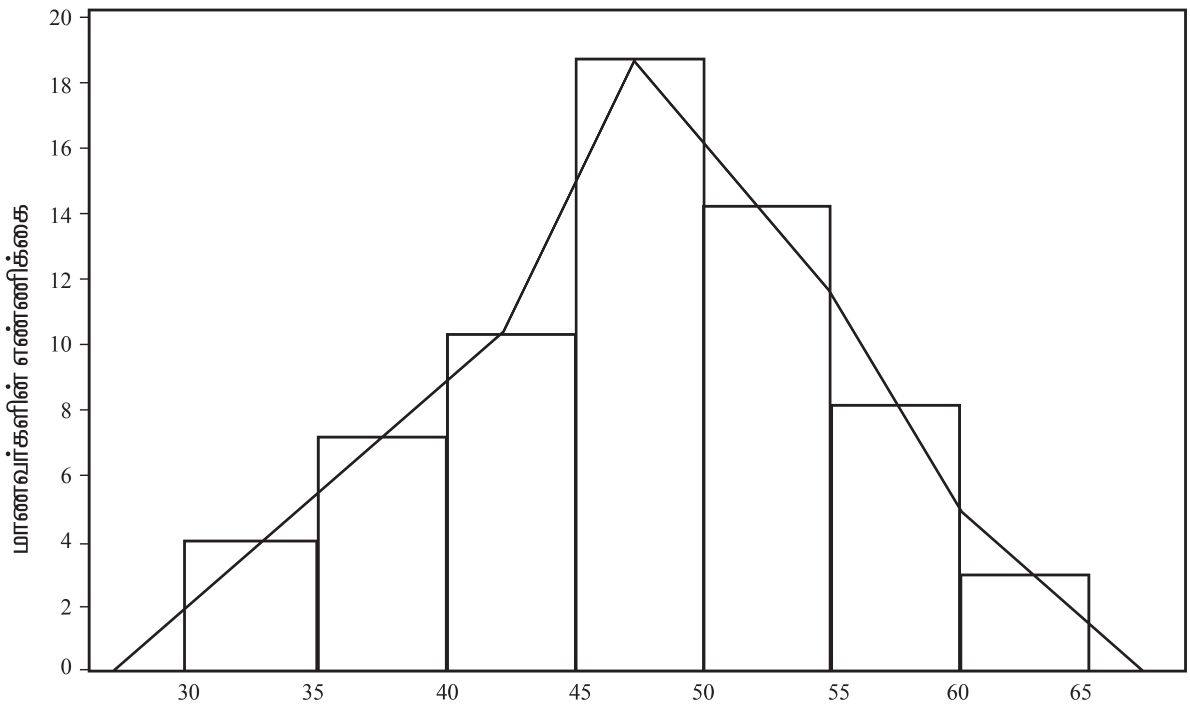
பரவல் செவ்வகப் படத்தில் உள்ள செவ்வகத்தின் மேல் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடுகளால் இணைத்து நிகழ்வெண் பல கோணம் உருவாக்கப்படுகிறது. ஒரு பிரிவில் உள்ள நிகழ்வெண் அந்தப் பிரிவு முழுவதும் ஒரே சீராகப் பரவி உள்ளது என்ற எடுகோளின் அடிப்படையில் இப்பல கோண வடிவம் பெறப்படுகிறது. இந்தப் பல கோணத்தின் பரப்பு, பரவல் செவ்வகப் படத்தின் பரப்பிற்கு சமம். ஏனெனில் பல கோணத்திற்கு உட்பட்ட பரப்பு, பலகோணத்திற்கு உட்படாத பரப்பிற்கு சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 13

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு நிகழ்வெண் பல கோணம் வரைக.

எடை (கி.கி)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
30-35	4
35-40	7
40-45	10
45-50	18
50-55	14
55-60	8
60-65	3

நிகழ்வெண் பலகோணம்



5.6.3 நிகழ்வெண் வளைகோடு :

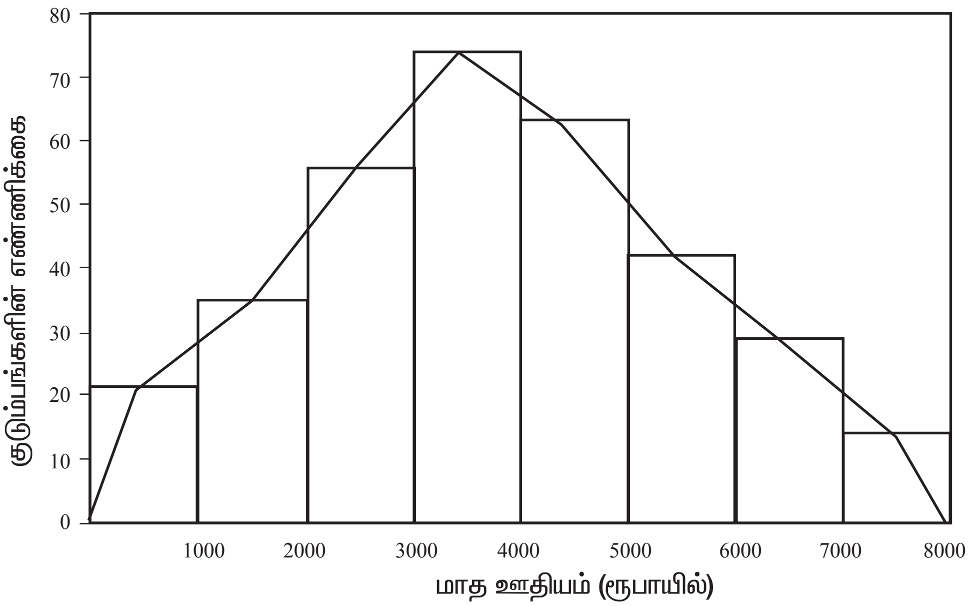
பரவல் செவ்வகத்தின் மேல் பகுதியின் நடுப்புள்ளிகளை தொடர்ச்சியான வளைகோட்டால் இணைக்கும் பொழுது கிடைக்கும் வளைவரை, நிகழ்வெண் வளைவரை எனப்படுகிறது. இவ்வளைவரை அடிக்கோட்டில் ஆரம்பித்து அடிக்கோட்டிலேயே முடிய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 14

மாதச் சம்பளம் (ரூ) **5000–6000 40**	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0-1000	21
1000-2000	35
2000-3000	56
3000-4000	74
4000-5000	63
5000-6000	40
6000-7000	29
7000-8000	14

தீர்வு :

நிகழ்வெண் வளைகோடு



5.6.4 ஓகைவ் :

கண்டறியப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து அலைவெண் பரவல் அமைப்பதைப் பற்றிப் பார்த்தோம். சில நிகழ்ச்சிகளில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பை விட குறைவாக உள்ள நிகழ்வெண்கள் அல்லது அதிகமாக உள்ள நிகழ்வெண்கள் நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. இது கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்கள் வரை உள்ள நிகழ்வெண்களைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும். இவ்வாறு பெறப்படும் வளர் நிகழ்வெண்களை அட்டவணைப்படுத்திக் கிடைப்பது வளர் நிகழ்வெண் அட்டவணை எனப்படும். இவ்வட்டவணைப்படி வளர் நிகழ்வெண்கள் குறிக்கப்பட்டு பெறப்படும் வளைவரை வளர் நிகழ்வெண் வளைவரை அல்லது "ஓகைவ்" எனப்படும். ஓகைவ் வரைவதற்கு இருமுறைகள் உள்ளன அவையாவன.

i) கீழின வளர் நிகழ்வெண் முறை

ii) மேலின வளர் நிகழ்வெண் முறை

கீழின வளர் நிகழ்வெண் முறையில் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லையில் ஆரம்பித்து நிகழ்வெண்களைக் கூட்டிக் கொண்டே வர வேண்டும். இந் நிகழ்வெண்கள் வரைபடத்தில் குறிக்கப்படும் பொழுது ஒரு வளரும் வளைவரை கிடைக்கின்றது. மேலின வளர் நிகழ்வரையில், பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையில் ஆரம்பித்து மொத்த நிகழ்வெண்களிலிருந்து ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்களை கழித்துக் கொண்டே வர வேண்டும். இந்நிகழ்வெண்கள் வரைபடத்தில் குறிக்கப்படும் பொழுது ஒரு குறை வளைவரை கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15

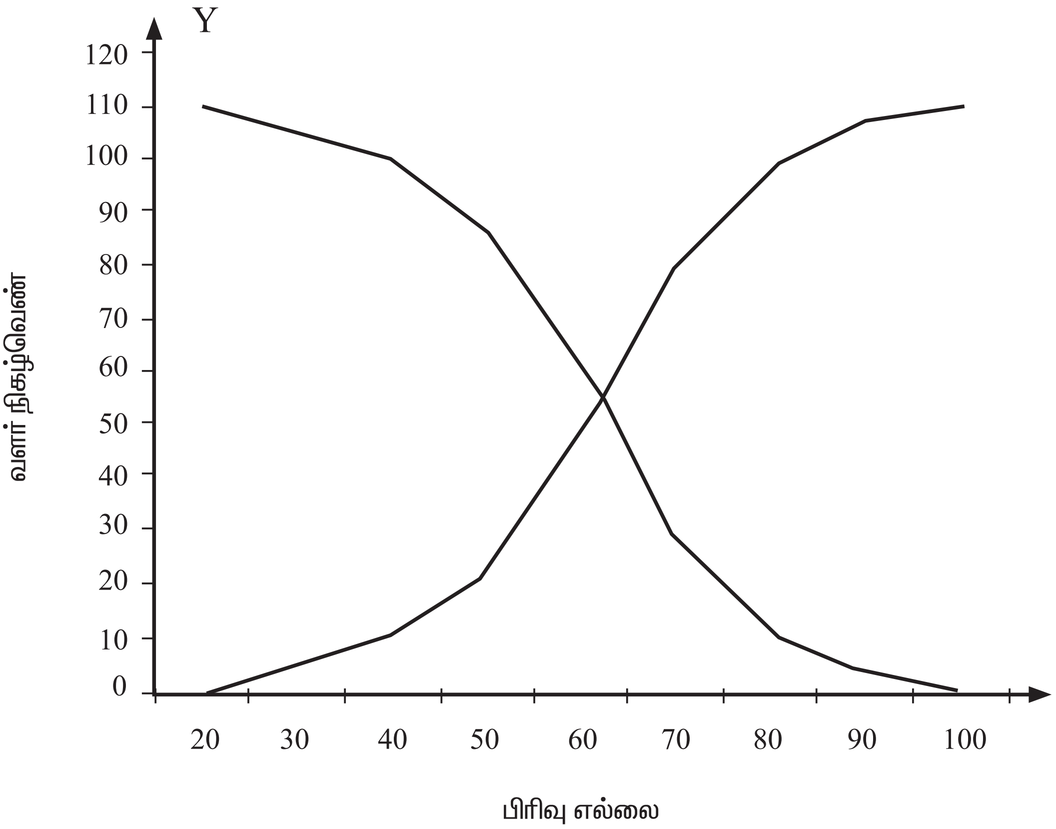
பின்வரும் விவரங்களுக்கு "ஓகைவ்" வளைவரைகள் வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
20-30	4
30-40	6
40-50	13
50-60	25
60-70	32
70-80	19
80-90	8
90-100	3

தீர்வு :

பிரிவு எல்லை	கீழின வளர் ஓகைவ்	மேலின வளர் ஓகைவ்
20	0	110
30	4	106
40	10	100
50	23	87
60	48	62
70	80	30
80	99	11
90	107	3
100	110	0

ஓகைவ் வளைவரைகள்



5.6.5 லாரன்ஸ் வளைவரை :

மாறுபட்டளவைகளை வரைபட மூலம் அறிய வைப்பது லாரன்ஸ் வளைவரை ஆகும். இது புகழ்பெற்ற பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் நிபுணருமான மேக்ஸ். ஓ. லாரன்ஸ் என்பவரால் வருவாய் மற்றும் செல்வம் இவற்றின் பரவலைப் பற்றி தெளிவாக்க அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. மேலும் இலாபம், வருவாய், ஊதியம் இன்னும் பிற இவற்றிற்கிடையிலான மாறுபாட்டளவைகளை அறிந்து கொள்ளப் பயன்படுகிறது.

இது சிறப்பாக, நாடுகளுக்கிடையே வெவ்வேறு கால கட்டங்களில் வருவாய் மற்றும் செல்வம் இவற்றின் பங்கீடுகளின் சமனின்மையை அறிந்து கொள்ளப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு மாறியின் சதவீத வளர் மதிப்புகளை, மற்றொரு மாறியின் சதவீத வளர் மதிப்போடு இணைத்து லாரன்ஸ் வளைவரை வரையப்படுகிறது.

இவ்வளைவரை (0, 0) வில் ஆரம்பித்து (100, 100)ல் முடிவடைகிறது. செல்வம், வருவாய், நிலம், சமமாக நாட்டு மக்களிடையேயும் பரவியிருந்தால், லாரன்ஸ் வளைவரை ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டமாக அமையும். ஆனால் இது நடைமுறையில் இயலாத ஒன்று.

மூலை விட்டத்தில் இருந்து விலகியிருக்கும் லாரன்ஸ் வளைவரை மூலம், செல்வம், வருவாய், நிலம் ஆகியன மக்களிடையே எவ்வாறு சமமின்றி பரவியுள்ளது என்பதை விளக்குகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 16

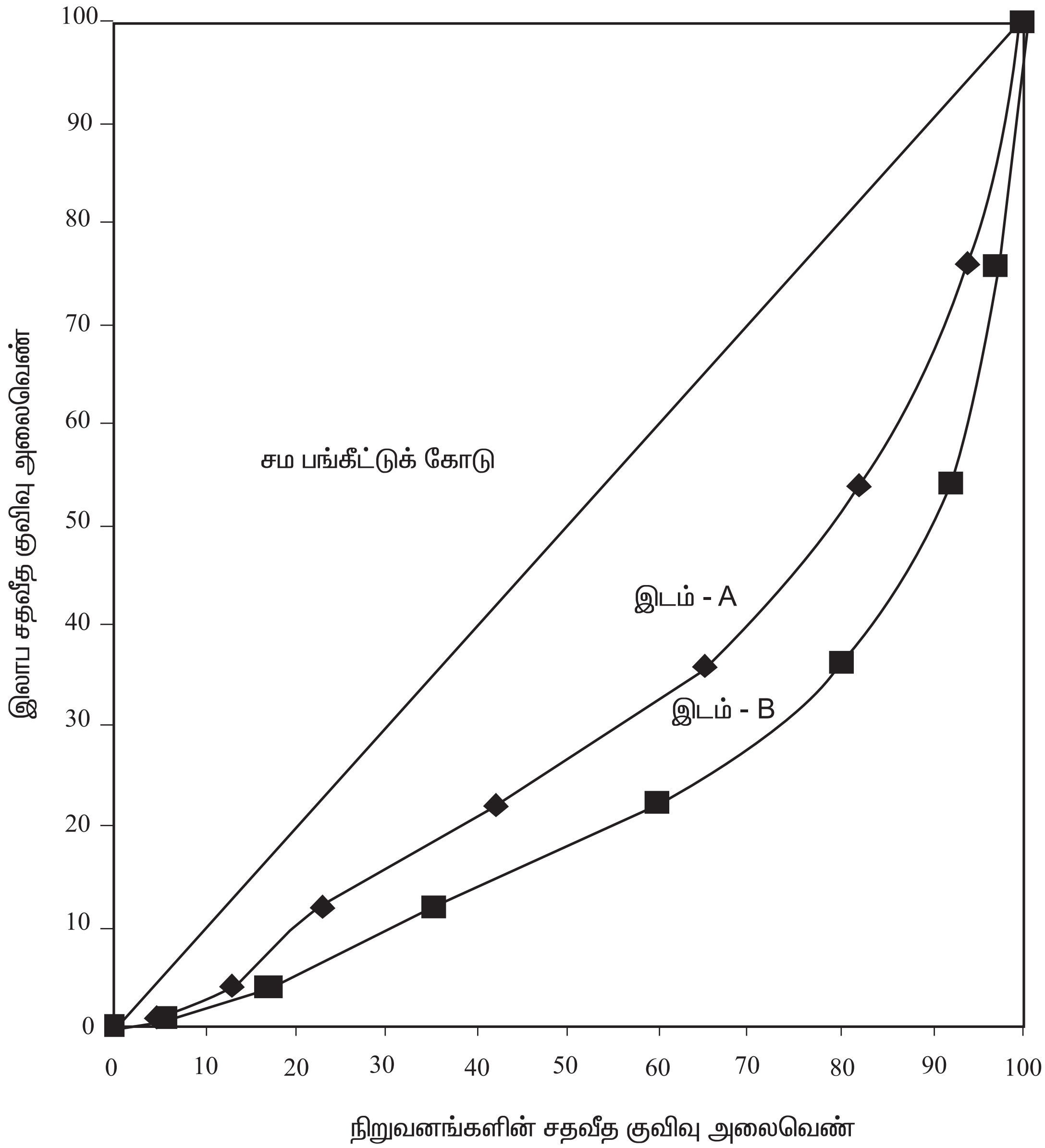
A, B என்ற இடங்களில் உள்ள நிறுவனங்களால் ஈட்டப்பட்ட இலாபம் பின்வருமாறு, ஒரே வரைபடத்தில் அவற்றிற்கு லாரன்ஸ் வளைவரை வரைந்து அதில் இருந்து கருத்து தெரிவிக்க.

ஈட்டிய இலாபம் (ரூ. ஆயிரத்தில்)	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	
	இடம் A	இடம் B
5	7	13
26	12	25
65	14	43
89	28	57
110	33	45
155	25	28
180	18	13
200	8	6

தீர்வு :

இலாபம்			இடம் A			இடம் B		
ரூபாயில்	இலாபத்தின் வளர் நிகழ்வுகள்	வளர் நிகழ்வென் சதவீதம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	வளர் நிகழ்வென்	வளர் நிகழ்வென் சதவீதம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	வளர் நிகழ்வென்	வளர் நிகழ்வென் சதவீதம்
5	5	1	7	7	5	13	13	6
26	31	4	12	19	13	25	38	17
65	96	12	14	33	23	43	81	35
89	185	22	28	61	42	57	138	60
110	295	36	33	94	65	45	183	80
155	450	54	25	119	82	28	211	92
180	630	76	18	137	94	13	224	97
200	830	100	8	145	100	6	230	100

லாரன்ஸ் – வளைவரை



100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
இலாப சதவீத குவிவு அலைவெண்
சம பங்கீட்டுக் கோடு
இடம் - A
இடம் - B
நிறுவனங்களின் சதவீத குவிவு அலைவெண்

பயிற்சி – 5

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. பின்வருவனவற்றுள் எது ஒரு பரிமான விளக்கப்படம் ஆகும்

அ) பட்டை விளக்கப்படம் ஆ) வட்டவடிவ விளக்கப்படம்

இ) உருளை ஈ) பரவல் செவ்வகம்

2. சதவீத பட்டை விளக்கப்படமானது

அ) விவரங்கள் சதவீதத்தில் தரப்படுகின்றன

ஆ) சம அகலம் உடையவை

இ) சம இடைவெளிகள் உடையவை

ஈ) சம அகலம், சம இடைவெளி உடையவை

3. நிகழ்வெண் வளைகோடு

அ) ஆதியில் ஆரம்பிக்கும்

ஆ) ஆதிவழிச் செல்லும்

இ) அடிக்கோட்டில் ஆரம்பிக்கிறது

ஈ) அடிக்கோட்டில் ஆரம்பித்து அதிலேயே முடிவடைகிறது

4. பரவல் செவ்வகப் படத்தின் மூலம், நாம் வரையலாம்

அ) நிகழ்வெண் பலகோணம் ஆ) நிகழ்வெண் வளைகோடு

இ) நிகழ்வெண் பரவல் ஈ) மேலே கூறிய அனைத்தும்

5. ஒரு பரவலின் கீழின வளர் மற்றும் மேலின வளர் ஓகைவ்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் இடம்

அ) சராசரி ஆ) இடைநிலை இ) முகடு ஈ) ஆதி

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

6. கூறு பட்டை விளக்கப் படங்கள் ___________ விளக்கப் படங்கள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

7. செவ்வக விளக்கப் படங்களில், ஒப்பிடல் செவ்வகங்களின்___________ அடிப்படையாகக் கொண்டது.

8. சதுரங்கள் என்பன ___________ பரிமான விளக்கப் படங்கள்.

9. கீழின வளர் நிகழ்வரையும், மேலின நிகழ் வளைவரையும் வெட்டிக் கொள்ளும் இடம் ___________ .

10. ___________ வளைவரையானது, மாறுபாட்டளவை அறிந்து கொள்வதற்கான வரைபட முறையாகும்.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க :

11. விளக்கப் படங்கள் என்றால் என்ன ?

12. புள்ளியியல் விவரங்களைக் குறிப்பதில் விளக்கப் படங்கள் எவ்வாறு உதவுகின்றன ?

13. விளக்கப்படங்களின் சிறப்புகள் யாவை ?

14. விளக்கப்படங்கள் வரைவதற்கான பொதுவான விதிகள் யாவை ?

15. பல்வேறு வகையான விளக்கப் படங்கள் யாவை ?

16. (அ) பட்டை விளக்கப் படங்கள்

    (ஆ) நிகழ்வெண் பலகோணம்

    (இ) நிகழ்வெண் வளைகோடு

    (ஈ) ஒகைவ் ஆகியவற்றைப் பற்றி குறிப்பு வரைக.

17. கீழின வளர் நிகழ்வரை, மேலின வளர் நிகழ்வரை என்றால என்ன ? அவை வரையப்படுவதன் நோக்கம் யாவை ?

18. லாரன்ஸ் வளைவரை என்றால் என்ன ? அதன் முக்கியத்துவம் பற்றி குறிப்பிடுக.

19. சிறு குறிப்பு வரைக.

    (அ) சாதாரண பட்டை விளக்கப்படம்

    (ஆ) கூறுபட்டை விளக்கப்படம்

20. வட்ட விளக்கப்படம் என்றால் என்ன ?

21. பின்வரும் விவரத்திற்கு பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

வருடம்	இலாபம் (ரூ. ஆயிரங்களில்)
1995	2
1996	6
1997	11
1998	15
1999	20
2000	27

22. பின்வரும் விவரத்திற்கு பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படம் வரைக.

நிறுவனம்	தொழிலாளர்கள்	
	ஆண்	பெண்
A	125	100
B	210	165
C	276	212

23. பின்வரும் விவரத்தை கூறு சதவீத பட்டை விளக்கப்படத்தில் குறிக்க.

உணவு பயிர்கள்	Area A (in 000, 000 acres)	Area B (in 000, 000 acres)
அரிசி	18	10
கோதுமை	12	14
பார்லி	10	8
சோளம்	7	6
மற்றவை	12	15

24. நாட்டிலுள்ள இறப்பிற்கான காரணங்களை வட்ட வடிவ படம் வரைந்து காட்டுக.

இறப்பிற்கான காரணங்கள்	எண்ணிக்கை
வயிற்றுப் போக்கு	60
குறை பிரசவம்	170
நெஞ்சு நோய்கள் மற்றும் நிமோனியா	90

25. பின்வரும் விவரத்திற்கு பரவல் செவ்வகப் படம் மற்றும் நிகழ்வெண் பல கோணம் வரைக.

எடைகள் (கி.கி)	ஆண்களின் எண்ணிக்கை
40-45	8
45-50	14
50-55	21
55-60	18
60-65	10

26. பின்வரும் விவரத்திற்கு நிகழ்வெண் வளைகோடு வரைக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-20	7
20-40	15
40-60	28
60-80	17
80-100	5

27. ஒரு நிறுவனத்தின் தினக்கூலியின் நிகழ்வெண் பரவல் பின்வருமாறு

கூலி (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
0-500	10
500-1000	19
1000-1500	28
1500-2000	15
2000-2500	6

28. இரு வெவ்வேறு பகுதிகளின் உள்ள குடும்பங்களின் மாத வருமானம் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. லாரன்ஸ் வளைவரை வரைந்து இரண்டு பகுதி வருமானங்களையும் ஒப்பிடுக.

வருமானம் (ரூ.)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	
	பகுதி A	பகுதி B
1000	12	5
1250	18	10
1500	29	17
1750	42	23
2000	20	15
2500	11	8
3000	6	3

IV. செய்து பார்க்க :

29. முந்தைய பாடங்களின் செயல்முறைகளை அதற்கு உகந்த விளக்கப்படங்களில் குறிப்பிடுக.

30. உன் குடும்பத்தில் கடந்த மாத செலவிற்கு ஒரு பட்டை விளக்கப்படமும் மற்றும் வட்ட விளக்கப்படமும் வரைக. இவ்விவரங்களின் அடிப்படையில் அடுத்த மாதத்திற்குரிய வரவு, செலவுத் திட்டத்தை தயார் செய்து, அதற்கு பட்டை விளக்கப்படம், மற்றும் வட்ட விளக்கப்படத்தை வரைக.

இரண்டு மாத செலவினங்களை இப்படங்களின் மூலமாக ஒப்பிடுக.

விடைகள்

I. 1. (அ) 2. (அ) 3. (ஈ) 4. (ஈ) 5. (ஆ)

II. 6. பகுதிப் பட்டை விளக்கப்படம்

7. பரப்பளவு

8. இரண்டு

9. இடைநிலை அளவு

10. லாரன்ஸ்

6. மையப் போக்கு அளவைகள்

மையப்போக்கு அளவைகள் :

முழுமைத் தொகுதி பற்றி அறிய பெரும் அளவிலான கண்டறிந்த புள்ளி விவரங்களை நாம் பெற முடியும். கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களிலிருந்து அதன் சிறப்பியல்புகள் குறித்து எந்த முடிவுக்கு வருவதும் நமக்கு இயலாத ஒன்றாக உள்ளது. எனவே ஒரு தொகுதிக்காக ஒரு எண் பெறுதல் நல்லது. அந்த எண்ணானது கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களின் சிறப்பு இயல்புகளைத் தெளிவாக படம் பிடித்து காட்ட கூடியதாக இருக்க வேண்டும். அந்த எண்ணே கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களின் மைய மதிப்பாக இருக்க கூடும். இந்த மைய மதிப்பே மையப் போக்கு அளவைகள் அல்லது சராசரிகள் அல்லது அளவைகளின் இடம் என்று அழைக்கப்படுகின்றது. ஐந்து வகையான சராசரிகளில் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு எளிய சராசரிகள் என்றும், பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச் சராசரி சிறப்புச் சராசரிகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

சராசரி என்பதன் பொருள் பின்வரும் விளக்கங்களாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

"சேகரிக்கப்பட்ட எண்களைச் சுற்றி அமைந்திருக்கும் மைய மதிப்பே மையப் போக்களவைகள்".

"சராசரி என்பது முழுத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருப்பினும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக் கூடியது"

"மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தும் எண்களின் தொகுப்பே அளவைகளின் இடம்" என்றவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

சிறந்த சராசரியின் முக்கிய சிறப்பியல்புகள் :

சிறந்த சராசரியானது பின்வரும் சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. தெளிவான முறையில் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்க வேண்டும்.
2. எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்கும், கணக்கிடுவதற்கும் ஏற்ற வகையில் இருக்க வேண்டும்.
3. விவரங்களில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாக வைத்து கண்டுபிடிக்கப்படுவதாக இருக்க வேண்டும்.
4. சராசரியின் விளக்கமானது கணித வாய்ப்பாட்டின் வடிவில் இருக்க வேண்டும்.
5. இயற்கணித செயல்பாடுகளில் பயன்படுத்தக் கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.
6. மாதிரி நிலைத் தன்மை பெற்றுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும்.
7. சராசரியானது புள்ளியியல் கணக்கிடுதலுக்கு அல்லது அதன் செயல்முறைக்கும் பயன்படும் வகையில் இருக்க வேண்டும்.

சிறந்த சராசரியானது மேற்கூறிய சிறப்பியல்புகளை நிறைவு செய்வதோடு, விவரங்களின் பெரும்பாலான அம்சங்களை தெரியப்படுத்துவதாக இருக்க வேண்டும். அதன் மதிப்பு ஆனது கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் உள்ள உறுப்புகளுக்கு அருகாமையில் இருக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி :

ஒரு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி என்பது அம்மாறியின் மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் ஆகும். X என்ற மாறியின் n மதிப்புகள் x_1, x_2 ...... x_n எனவும், இதன் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$, எனவும் கொண்டால்

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

இந்த வாய்ப்பாடு தொகுக்கப்படாத அல்லது செப்பனிடா விவரங்களுக்குப் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

2, 4, 6, 8, 10 இவற்றின் சராசரி காண்க.

தீர்வு :

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5}$$

$$= \frac{30}{5} = 6$$

சுருக்கு முறை :

இந்த முறையில் தனிப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து விலக்கங்களைக் கணக்கிட்டு கூட்டுச் சராசரியைக் காண ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை அல்லது உத்தேச முறையில் சராசரியை (A என்ற குறியீடு) எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இதன் வாய்ப்பாடு $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$

இதில் A = உத்தேச சராசரி அல்லது X–ல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

d = உத்தேச கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பின் விலக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 2 :

5 பாடங்களில் மாணவன் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 75, 68, 80, 92, 56 அவனுடைய சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

தீர்வு :

X	d = x-A
75	7
A $\boxed{68}$	0
80	12
92	24
56	-12
மொத்தம்	31

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= 68 + \frac{31}{5}$$

$$= 68 + 6.2$$

$$= 74.2$$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரம் :

பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு சராசரி காணலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

இதில் $x =$ பிரிவின் மைய மதிப்பு

$f =$ பிரிவின் அலைவெண்

N = அலைவெண்களின் கூடுதல் அல்லது மொத்த அலைவெண்கள்

சுருக்கு முறை :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$

இதில் $d = \frac{x - A}{c}$

A = 'X' ல் ஏதேனும் அல்லது நடுமதிப்பு

N = மொத்த நிகழ்வெண்

c = பிரிவு இடைவெளியின் பிரிவுத் தூரம்

எடுத்துக்காட்டு 3:

கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலைக் கொண்டு கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	64	63	62	61	60	59
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	18	12	9	7	6

தீர்வு :

X	f	fx	d = x-A	Fd
64	8	512	2	16
63	18	1134	1	18
62	12	744	0	0
61	9	549	–1	–9
60	7	420	–2	–14
59	6	354	–3	–18
	60	3713		–7

நேரடி முறை :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{3713}{60} = 61.88$$

சுருக்கு முறை :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 62 - \frac{7}{60} = 61.88$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

வேறுபட்ட வருமானப் பிரிவுகளைக் கொண்ட நபர்களின் பரவல் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றிற்கு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வருமானம் ரூபாயில் (100)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நபர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	10	12	7	4	3

தீர்வு :

வருமானம் பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை (f)	நடு மதிப்பு (x)	$d = \frac{x-A}{c}$	fd
0-10	6	5	–3	–18
10-20	8	15	–2	–16
20-30	10	25	–1	–10
30-40	12	A $\boxed{35}$	0	0
40-50	7	45	1	7
50-60	4	55	2	8
60-70	3	65	3	9
	50			–20

சராசரி = $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$$= 35 - \frac{20}{50} \times 10$$

$$= 35 - 4$$

$$= 31$$

கூட்டுச்சராசரியின் நிறை, குறைகள் :

1. திடமாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்கும், கணக்கிடுவதற்கும் எளிதானது.

3. உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்த போதிலும் இதன் மதிப்பு நம்பத் தகுந்ததாகவும், சரியாகவும் இருக்கும்.

4. சராசரியானது கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு மற்றும் இது தொடரில் உள்ள உறுப்புக்களின் இடத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைவதில்லை.

5. விவரங்களில் சில விடுபட்டு இருப்பினும் இவற்றை கணக்கிட இயலும்.

6. மாதிரியின் வேறுபாட்டால் எல்லா சராசரிகளை விட கூட்டுச் சராசரி குறைவாகவே பாதிக்கப்படுகின்றது.

7. ஒப்பிடுவதற்கு நல்ல அடிப்படையாக உள்ளது.

குறைகள் :

1. ஆய்வின் மூலமாகவோ அல்லது அலைவெண் வரைபட மூலமாகவோ இதனைப் பெற முடியாது.

2. அறிவுக் கூர்மை, அழகு, நேர்மை போன்ற எண் அளவுகளால் குறிக்க இயலாத பண்புகளை இக்கூட்டுச் சராசரியின் மூலம் காண இயலாது.

3. இதன் துல்லியத் தன்மைக்கு ஏற்றவாறு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை விட்டு விடலாம்.

4. சராசரியானது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படக் கூடியது.

5. திறந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் இதனை கணக்கிட இயலாது.

6. விவரங்கள் கணக்கிடப்பட்டதை விளக்கமாக கொடுக்கப்படவில்லை எனில் இது தவறான முடிவுக்கு வழிவகுக்கும்.

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி :

ஒரு விவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடும் போது அவ்விவரத்தின் மதிப்புகள் எல்லாமே சம முக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளன என எடுத்துக் கொள்கிறோம். செயலளவில் அவ்விதம் இருக்க இயலாது. ஆகவே பரவலில் உள்ள சில மதிப்புகள் மற்ற மதிப்புகளை விட அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை எனில் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து நிறை அல்லது எடை கொடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தொகுதி மக்களின் வாழ்க்கைத் தர மாற்றங்களைக்காணும் பொழுது, உபயோகப்படுத்தப்படும் பொருட்களின் விலைகளை எளிய சராசரி மட்டுமே நிர்ணயிக்க இயலாது. ஏனெனில் எல்லா பொருட்களும் சம முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததில்லை. எடுத்துக்காட்டாக அரிசி, கோதுமை, பருப்பு வகை, டீ, மிட்டாய் வகைகளைக் காட்டிலும் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியானது ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் சரியான எடை கொடுக்கப்பட்ட பின்னர், தொடரின் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட பயன்படுகிறது.

வரையறை :

நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியானது, மதிப்புகள் அதன் எடைகளால் பெருக்கப்பட்டு, பெருக்கி வரும் கூடுதலை எடைகளின் மொத்த கூடுதலால் வகுத்து கிடைப்பது அகும்.

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்படும் நிறைகள் முறையே $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ எனில் அம்மதிப்புகளின் நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரி

$$\overline{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots.. + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots.. + w_n}$$

$$= \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியின் பயன்கள் :

அ) குறியீட்டு எண்களை அமைக்கவும்.

ஆ) இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட பல்கலைக் கழகங்களில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வேறுபடுதலின் போது முடிவுகளை ஒப்பிடவும்.

இ) இறப்பு, பிறப்பு விகிதங்களைக் கணக்கிடவும், நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரி பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியைக் காண்க.

பதவி	மாத வருமானம் (ரூபாயில்)	பிரிவின் எண்ணிக்கை
முதல் நிலை அலுவலர்	1500	10
இரண்டாம் நிலை அலுவலர்	800	20
சார்நிலை பணியாளர்	500	70
எழுத்தர் பணியாளர்	250	100
கடைநிலை ஊழியர்	100	150

தீர்வு :

பதவி	மாத வருமானம் (ரூபாயில்) (x)	பிரிவின் எண்ணிக்கை (w)	wx
முதல் நிலை அலுவலர்	1,500	10	15,000
இரண்டாம் நிலை அலுவலர்	800	20	16,000
சார்நிலை பணியாளர்	500	70	35,000
எழுத்தர் பணியாளர்	250	100	25,000
கடைநிலை ஊழியர்	100	150	15,000
		350	1,06,000

நிறையிட்ட சராசரி $\overline{x_w} = \dfrac{\sum wx}{\sum w}$

$$= \frac{106000}{350}$$

$$= \text{ரூ. } 302.86$$

இசைச்சராசரி :

ஒரு மாறியின் மதிப்புகளின் தலைகீழிகளின் சராசரியின் தலைகீழ் அதன் இசைச்சராசரி எனப்படும். X என்ற மாறியின் n மதிப்புகள் $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ எனில்

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

அலைவெண் பரவலுக்கான இசைச்சராசரி $H.M. = \dfrac{N}{\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{x_i}\right)}$

எடுத்துக்காட்டு 6:

5, 10, 17, 24, 30 இவற்றின் இசைச்சராசரி காண்க.

X	$\frac{1}{x}$
5	0.2000
10	0.1000
17	0.0588
24	0.0417
30	0.0333
மொத்தம்	0.4338

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{n}{\sum\left[\frac{1}{x}\right]}$$

$$= \frac{5}{0.4338} = 11.526$$

எடுத்துக்காட்டு 7:

ஒரு வகுப்பில் சில மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் இசைச்சராசரி காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	21	22	23	24	25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	2	7	1	3	1

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள் x	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	$\frac{1}{x}$	$f\left(\frac{1}{x}\right)$
20	4	0.0500	0.2000
21	2	0.0476	0.0952
22	7	0.0454	0.3178
23	1	0.0435	0.0435
24	3	0.0417	0.1251
25	1	0.0400	0.0400
	18		0.8216

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{N}{\Sigma f\left[\frac{1}{x}\right]}$$

$$= \frac{18}{0.1968} = 21.91$$

இசைச்சராசரியின் நிறை, குறைகள் :

நிறைகள் :

1. இது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இசைச் சராசரி வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
3. இது இயற்கணித செயல்பாடுகளுக்கு இணக்கமாக உள்ளது.
4. இது சிறிய மதிப்புகளுக்கு அதிக முக்கியத்துவத்தையும், பெரிய மதிப்புகளுக்கு குறைந்த முக்கியத்துவத்தையும் கொடுக்கும் இடங்களில், மிக பொருத்தமான சராசரியாக உள்ளது.

குறைகள் :

1. இதனை எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலாது.
2. இதனைக் கணக்கிடுதல் கடினம்.
3. இது ஒரு சுருக்கமான எண்ணேத் தவிர அத்தொடரின் சரியான உறுப்பாக இருக்க இயலாது.
4. சிறிய மதிப்புகளுக்கு, அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கும் இடங்களில் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பெருக்குச்சராசரி :

'n' மதிப்புகளைக் கொண்ட தொடரின் பெருக்குச்சராசரி என்பது n மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n–வது படி மூலம் ஆகும்.

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி = $\sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n}$

$$= (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)^{1/n}$$

$$\log GM = \frac{1}{n} \log (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

$$= \frac{1}{n} (\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots + \log x_n)$$

$$= \frac{\sum \log x_i}{n}$$

பெருக்குச்சராசரி = எதிர் மடக்கை $\left[\frac{\sum \log x_i}{n} \right]$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கான பெருக்குசராசரி

பெருக்குச்சராசரி = எதிர் மடக்கை $\left[\frac{\sum f \log x_i}{N} \right]$

எடுத்துக்காட்டு 8:

குடும்பங்களில் ஒரு பிரிவின் மாதவருமானம் முறையே **180, 250, 490, 1400, 1050** எனில் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

X	log x
180	2.2553
250	2.3979
490	2.6902
1400	3.1461
1050	3.0212
	13.5107

பெருக்குச்சராசரி = எதிர் மடக்கை $\left[\frac{\sum \log x}{n} \right]$

= எதிர் மடக்கை $\frac{13.5107}{5}$

= எதிர் மடக்கை 2.7021

= 503.6

எடுத்துக்காட்டு 9

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து ஒரு நபரின் சராசரி வருமானத்தைக் கணக்கிடுக. பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்துக.

மக்களின் பிரிவுகள்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	ஒருவரின் வருட வருமானம்
நிலக்கிழார்	2	5000
பயிரிடுபவர்கள்	100	400
நிலமில்லா தொழிலாளர்கள்	50	200
கடன் கொடுப்பவர்கள்	4	3750
அலுவலக உதவியாளர்	6	3000
கடை முதலாளிகள்	8	750
மரவேலை செய்பவர்கள்	6	600
நெசவாளர்கள்	10	300

தீர்வு :

மக்களின் பிரிவுகள்	ஒருவரின் வருட வருமானம் (ரூபாயில்) X	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (f)	log x	f log x
நிலக்கிழார்	5000	2	3.6990	7.398
பயிரிடுபவர்கள்	400	100	2.6021	260.210
நிலமில்லா தொழிலாளர்கள்	200	50	2.3010	115.050
கடன் கொடுப்பவர்கள்	3750	4	3.5740	14.296
அலுவலக உதவியாளர்	3000	6	3.4771	20.863
கடை முதலாளிகள்	750	8	2.8482	22.786
மரவேலை செய்பவர்கள்	600	6	2.7782	16.669
நெசவாளர்கள்	300	10	2.4771	24.771
		186		482.043

பெருக்குச்சராசரி $= \text{எதிர் மடக்கை} \left[\frac{\sum f \log x}{N} \right]$

$= \text{எதிர் மடக்கை} \left[\frac{482.257}{186} \right]$

= எதிர் மடக்கை (2.5928)

= ரூ. 391.50

பெருக்குச்சராசரியின் நிறை, குறைகள் :

நிறைகள் :

1. இது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. இது எல்லா உறுப்புகளையும் சார்ந்துள்ளது.
3. விகிதங்கள், வீதங்கள், சதவீதங்கள் இவற்றின் சராசரி காண்பதில் இது பொருத்தமான ஒன்று.
4. இது மேன்மேலும் பல கணித செயல்பாடுகளுக்கு உகந்தது.
5. கூட்டுச் சராசரியைப் போல இது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

குறைகள் :

1. ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை மதிப்புகளாகவோ இருக்கும் இடங்களில் இதனைப் பயன்படுத்த இயலாது.
2. உறுப்புகள் அதிகமாக இருந்தாலோ அல்லது அலைவெண் பரவலாக இருந்தாலோ இதனைக் கணக்கிடுவது கடினம்.
3. விகிதங்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய இயலுமே தவிர, கூட்டுச் சராசரியைப் போல் மாற்றங்களில் ஏற்படும் சரியான வித்தியாசத்தை தர இயலாது.
4. தொடரில் உள்ள சரியான மதிப்பாக பெருக்குச் சராசரி இருக்க முடியாது.

இணைந்த கூட்டுச்சராசரி :

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழுக்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அக்குழுக்களின் இணைந்த தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரியைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

இணைந்த கூட்டுச்சராசரி $\overline{\overline{X}} = \left[\dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} \right]$

இணைந்த தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியின் பயனானது, மூல விவரத்திற்கு மறுபடியும் செல்லாமல் இணைந்த விவரங்கள் முழுமைக்கும் ஆன சராசரியைக் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 10:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு இணைந்த கூட்டுச்சராசரியைக் காண்க.

$n_1 = 20, \bar{x}_1 = 4, n_2 = 30, \bar{x}_2 = 3$

தீர்வு :

இணைந்த கூட்டுச்சராசரி $\overline{\overline{X}} = \left[\dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} \right]$

$$= \left[\frac{20 \times 4 + 30 \times 3}{20 + 30} \right]$$

$$= \left[\frac{80 + 90}{50} \right] = \left[\frac{170}{50} \right] = 3.4$$

இடக்குறியிட்ட சராசரிகள் :

இச்சராசரிகள் ஒரு தொடரில் ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இதற்கு வரிசையிலோ அமைக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் இடத்தைச் சார்ந்துள்ளது. கூட்டுச் சராசரியைக் காண்பது போலவே மதிப்புகளின் எண்ணளவு அல்லது அளவினைப் பொருத்தது. இந்த அடிப்படை வேறுபாட்டின் காரணமாக இடைநிலை அளவு, முகடு சராசரியின் இடக்குறியிட்ட அளவுகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இடைநிலை அளவு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மதிப்பு இடைநிலை அளவு எனப்படும். ஒரு விவரத்தின் எந்த ஒரு மதிப்பானது, அம்மதிப்பின் கீழ் அவ்விவரத்தின் பாதி மதிப்புகளையும் அம்மதிப்பின் மேல் பாதி மதிப்புகளையும் கொண்டதாக சமமாகப் பிரிக்கின்றதோ அம்மதிப்பு அவ்விவரத்தின் இடைநிலை அளவு எனப்படும்.

வகைப்படுத்தப்படாத விவரம் அல்லது செப்பனிடா விவரம் :

இடைநிலை அளவைக் காண முதலில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுத வேண்டும். மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண் எனில், இடைநிலை அளவு நடு உறுப்பாகும். மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை எனில் இடைநிலை அளவு இரு நடு உறுப்புகளின் சராசரி ஆகும்.

இடைநிலை = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

எடுத்துக்காட்டு 11:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க.

25, 18, 27, 10, 8, 30, 42, 20, 53

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை 8, 10, 18, 20, 25, 27, 30, 42, 53 என ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

நடுமதிப்பு **5**ஆவது உறுப்பு. அதன் இடைநிலை **25.** வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி

இடைநிலை = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= $\left(\frac{10}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= 5 ஆவது உறுப்பு = 25

எடுத்துக்காட்டு 12

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இரட்டை எண்களில் உள்ளன. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 5, 8, 12, 30. 18, 10, 2, 22 இடைநிலை காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

2, 5, 8, 10, 12, 18, 22, 30

இங்கு இரு நடு உறுப்புகளின் (10, 12) சராசரி

$$=\left(\frac{10+12}{2}\right)=11$$

$\therefore$ இடைநிலை = 11

வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி இடைநிலை = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$=\left(\frac{8+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$=\left(\frac{9}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

= 4.5 ஆவது உறுப்பு

= 4 ஆவது உறுப்பு + $\left(\frac{1}{2}\right)$(5 ஆவது உறுப்பு – 4 ஆவது உறுப்பு)

$$=10+\left(\frac{1}{2}\right)[12-10]$$

$$=10+\left(\frac{1}{2}\right)\times 2$$

$$=10+1$$

$$=11$$

எடுத்துக்காட்டு 13:

10 மாணவர்கள் வகுப்புத் தேர்வில் புள்ளியியலிலும், கணக்கியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவர்களது அறிவுத் திறன் எந்த பாடப்பகுதியில் அதிகமாக உள்ளது என்பதனை சுட்டிக் காட்டுக.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் (புள்ளியியல்)	53	55	52	32	30	60	47	46	35	28
மதிப்பெண்கள் (கணக்குப் பதிவியல்)	57	45	24	31	25	84	43	80	32	72

தீர்வு :

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் (புள்ளியியல்)	28	30	32	35	46	47	52	53	55	60
மதிப்பெண்கள் (கணக்குப் பதிவியல்)	24	25	31	32	43	45	57	72	80	84

மையப் போக்கு அளவைகளின் இடைநிலை பொருத்தமான அளவை ஆகும். இரு பாடங்களின் மதிப்பை முதலில் ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

இடைநிலை $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு $= \left(\dfrac{10+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 5.5$ ஆவது உறுப்பு

$= \dfrac{\text{5வது உறுப்பின் மதிப்பு + ஆறாவது உறுப்பின் மதிப்பு}}{2}$

இடைநிலை (புள்ளியியல்) $= \dfrac{46+47}{2} = 46.5$

இடைநிலை (கணக்குப் பதிவியல்) $= \dfrac{43+45}{2} = 44$

எனவே கணக்குப் பதிவியலைக் காட்டிலும் புள்ளியியலில் அறிவுத் திறன் அதிகமாக உள்ளது.

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரம் :

வகைப்படுத்தப்பட்ட பரவலில் மதிப்புகள் அலைவெண்ணுடன் சேர்ந்து இருக்கும். தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண் பரவலாக அல்லது தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவலாக வகைப்படுத்தப்பட்டு இருப்பினும், உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண குவிவு அலைவெண்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

குவிவு அலைவெண் :

ஒரு பிரிவின் குவிவு அலைவெண்ணானது அப்பிரிவு அலைவெண்ணுடன் முந்தைய பிரிவின் அலைவெண்ணும் சேர்ந்த கூடுதல் ஆகும். கடைசி குவிவு அலைவெண் என்பது மொத்த உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும்.

தொடர்ச்சியற்ற வரிசைக்கு இடைநிலை அளவு காண படிகள் :

1. விவரங்களை ஏறுவரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ எழுதுக.
2. குவிவு அலைவெண்களை எழுதுக.
3. $\left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பைக் காண்க.
4. $\left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பிற்கு அருகே உள்ள குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.
5. அக்குவிவு அலைவெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X–இன் மதிப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14:

ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் விவரங்கள் தெரிவிக்கின்றன. அக்குடும்பத்தின் நபர்களின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

நபர்களின் எண்ணிக்கை x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
அலைவெண் f	1	3	5	6	10	13	9	5	3	2	2	1

தீர்வு :

X	f	cf
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	6	15
5	10	25
6	13	38
7	9	47
8	5	52
9	3	55
10	2	57
11	2	59
12	1	60
	60	

இடைநிலை $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{60+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு $= 30.5$ ஆவது உறுப்பு

30.5 ஆவது உறுப்புக்கு சற்று அதிகமாக வரும் குவிவு நிகழ்வெண் 38. அதற்கு ஒத்த X–இன் மதிப்பு 6. எனவே ஒரு குடும்பத்திற்கான உறுப்பினர்களின் இடைநிலை அளவு 6.

குறிப்பு : இம்முறையே மிகப் பொருத்தமான முறையாகும். ஏனெனில் கூட்டுச்சராசரியால் பெறப்படும் பின்ன மதிப்பானது உறுப்பினர்களின் சரியான சராசரி அளவைக் குறிப்பதில்லை.

தொடர்ச்சியான வரிசைக்கு இடைநிலை அளவு காணல் :

தொடர்ச்சியான வரிசையில் இடைநிலை அளவு கணக்கிட பின்வரும் படிகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

படிகள் :

1. குவிவு அலைவெண்களைக் காண்க.

2. $\left(\frac{N}{2}\right)$ன் மதிப்பு காண்க.

3. $\left(\frac{N}{2}\right)$க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிக குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க. அக்குவிவு அலைவெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி இடைநிலைப் பிரிவு ஆகும். பிறகு வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.

இடைநிலை = $l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$

l = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m = இடைநிலை பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்.

c = இடைநிலை பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்

N = மொத்த அலைவெண்

குறிப்பு : சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவு இடைவெளிகள் கொடுக்கப்படின், அதனைத் தவிர்த்து கணக்கிடும் முறையாக மாற்ற வேண்டும். அதுவே உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி எனப்படும். இடைநிலை அளவைக் காண உண்மைப் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

பின்வரும் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் 325 தொழிலாளர்களின் ஒரு வருடத்திற்குரிய சராசரி மாத வருமானத்தைக் குறிக்கிறது. இவற்றைக் கொண்டு இடைநிலை வருமானத்தைக் கணக்கிடுக.

வருமான பிரிவு (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
100 க்கு குறைவாக	1
100-150	20
150-200	42
200-250	55
250-300	62
300-350	45
350-400	30
400-450	25
450-500	15
500-550	18
550-600	10
600 மற்றும் அதற்கு மேல்	2
	325

தீர்வு :

வருமான பிரிவு (பிரிவு இடைவெளி)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை (அலைவெண்)	குவிவு அலைவெண் c.f
100 க்கு குறைவாக	1	1
100-150	20	21
150-200	42	63
200-250	55	118
250-300	62	180
300-350	45	225
350-400	30	255
400-450	25	280
450-500	15	295
500-550	18	313
550-600	10	323
600 மற்றும் அதற்கு மேல்	2	325
	325	

$$\frac{N}{2}=\frac{325}{2}=162.5$$

இங்கு $l = 250$

N = 325

f = 62

c = 50

m = 118

$$\text{இடைநிலை} = 250+\left(\frac{162.5-118}{62}\right)\times 50$$
$$= 250 + 35.89 = 285.89$$

எடுத்துக்காட்டு 16:

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்.

மதிப்பு	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
அலைவெண்	5	8	10	12	7	6	3	2

தீர்வு :

மதிப்பு	f	உண்மையான பிரிவு இடைவெளி	c.f
0-4	5	0.5-4.5	5
5-9	8	4.5-9.5	13
10-14	10	9.5-14.5	23
15-19	12	14.5-19.5	35
20-24	7	19.5-24.5	42
25-29	6	24.5-29.5	48
30-34	3	29.5-34.5	51
35-39	2	34.5-39.5	53
	53		

$$\left(\frac{N}{2}\right)=\left(\frac{53}{2}\right)=26.5$$

இடைநிலை $= l+\left(\dfrac{\frac{N}{2}-m}{f}\right)\times c$

$$= 14.5+\frac{26.5-23}{12}\times 5=14.5+1.46=15.96$$

எடுத்துக்காட்டு 17:

ஒரு துணிக்கடையில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்களின் நாள் கூலி பின்வருமாறு : இதிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காண்க.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
100 க்கு குறைவாக	5
200 க்கு குறைவாக	12
300 க்கு குறைவாக	20
400 க்கு குறைவாக	32
500 க்கு குறைவாக	40
600 க்கு குறைவாக	45
700 க்கு குறைவாக	52
800 க்கு குறைவாக	60
900 க்கு குறைவாக	68
1000 க்கு குறைவாக	75

தீர்வு :

இதில் பிரிவின் மேல் எல்லை மற்றும் குறைந்த நிலை குவி அலைவெண் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. முதலில் பிரிவு இடைவெளிகள் மற்றும் அலைவெண்களைக் காண்க. மதிப்புகள் நூறு நூறாக அதிகரிப்பதால் பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் 100க்கு சமம்.

பிரிவு இடைவெளி	f	c.f
0-100	5	5
100-200	7	12
200-300	8	20
300-400	12	32
400-500	8	40
500-600	5	45
600-700	7	52
700-800	8	60
800-900	8	68
900-1000	7	75
	75	

$\left(\frac{N}{2}\right) = \left(\frac{75}{2}\right) = 37.5$ இடைநிலை $= l + \left(\frac{\frac{N}{2} - m}{f}\right) \times \text{c}$

$$= 400 + \left(\frac{37.5 - 32}{8}\right) \times 100 = 400 + 68.75 = 468.75$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
10 க்கு மேல்	70
20 க்கு மேல்	62
30 க்கு மேல்	50
40 க்கு மேல்	38
50 க்கு மேல்	30
60 க்குமேல்	24
70 க்கு மேல்	17
80 க்கு மேல்	9
90 க்கு மேல்	4

தீர்வு :

இதில் பிரிவின் கீழ் எல்லை மற்றும் உயர்ந்த நிலை குவிவு அலைவெண் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவு இடைவெளி	F	உயர்ந்த நிலை குவிவு அலைவெண்	குறைந்த நிலை குவிவு அலைவெண்
10-20	8	70	8
20-30	12	62	20
30-40	12	50	32
40-50	8	38	40
50-60	6	30	46
60-70	7	24	53
70-80	8	17	61
80-90	5	9	66
90-100	4	4	70
	70		

$$\left(\frac{N}{2}\right)=\left(\frac{70}{2}\right)=35$$

இடைநிலை $= l+\left(\dfrac{\frac{N}{2}-m}{f}\right)\times \mathrm{C}$

$$= 40+\left(\frac{35-32}{8}\right)\times 10$$
$$= 40+3.75$$
$$= 43.75$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

நடுமதிப்பு	5	15	25	35	45	55	65	75
அலைவெண்	7	10	15	17	8	4	6	7

தீர்வு :

இதில் மதிப்புகள் 10 இன் மடங்காக இருப்பதால் பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் 10 ஆக உள்ளது.

நடுமதிப்பு	பிரிவு இடைவெளி	F	c.f
5	0-10	7	7
15	10-20	10	17
25	20-30	15	32
35	30-40	17	49
45	40-50	8	57
55	50-60	4	61
65	60-70	6	67
75	70-80	7	74
		74	

$$\left(\frac{N}{2}\right)=\left(\frac{74}{2}\right)=37$$

இடைநிலை $= l+\dfrac{\left(\dfrac{N}{2}-m\right)}{f}\times c$

$$= 30+\left(\frac{37-32}{17}\right)\times 10 = 30+2.94 = 32.94$$

இடைநிலை அளவை வரைபடம் மூலம் காணல் :

குவிவு அலைவெண் வளைவரை அல்லது ஓகைவ் மூலம் இடைநிலை அளவைப் பெற முடியும். வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களில் இடைநிலை அளவை பின்வரும் வழிமுறைகளில் காணலாம்.

படிகள்:

1. அடுத்தடுத்த பிரிவுகளுக்கு இடையில் இடைவெளி இல்லாமல் தொடர்ச்சியாக அமைந்துள்ள பிரிவு எல்லைகள் X - அச்சில் குறிக்கப்பட வேண்டும்.
2. குவிவு நிகழ்வெண்கள் Y - அச்சில் குறிக்கப்பட வேண்டும்.
3. புள்ளிகளைச் சேர்த்து கையை எடுக்காமல் ஒரு வளைவரை வரையப்பட வேண்டும். அவ்வளைவரைக்கு ஓகைவ் என்று பெயர். இவ்வளைவரையானது கீழின குவிவு வளைவரையாகவோ அல்லது மேலின குவிவு வளைவரையாகவோ இருக்கலாம்.
4. $\frac{N}{2}$ அல்லது $\frac{N+1}{2}$ வின் மதிப்பு Y– அச்சில் குறிக்கப்பட வேண்டும். இங்கு N என்பது மொத்த நிகழ்வெண்கள்.
5. $\frac{N}{2}$ அல்லது $\frac{N+1}{2}$ என்ற புள்ளியிலிருந்து X – அச்சிற்கு இணையாக, Y அச்சிலிருந்து கிடைமட்டமாக ஒரு நேர்க்கோடு ஓகைவை வெட்டுமாறு வரைய வேண்டும்.
6. வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து X அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும்.
7. X - அச்சிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோடு X - அச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு :

1. கீழின, மேலின குவிவு வளைவரை வெட்டும் புள்ளியில் இருந்து X –அச்சிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு, X –அச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவைக் கொடுக்கிறது.
2. குவிவு சதவிகித அலைவெண்ணைக் கொண்டு ஓகைவ் வரையப்படும் போது, Y அச்சில் 50 சதவித குவிவு அலைவெண்ணைக் கொண்ட புள்ளியில் இருந்து X – அச்சிற்கு இணையாக ஒரு நேர்க்கோடு ஓகைவை வெட்டுமாறு வரைய வேண்டும். வெட்டும் புள்ளியில் இருந்து வரையப்பட்ட ஒரு குத்துக்கோடு X – அச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவைக் கொடுக்கிறது.

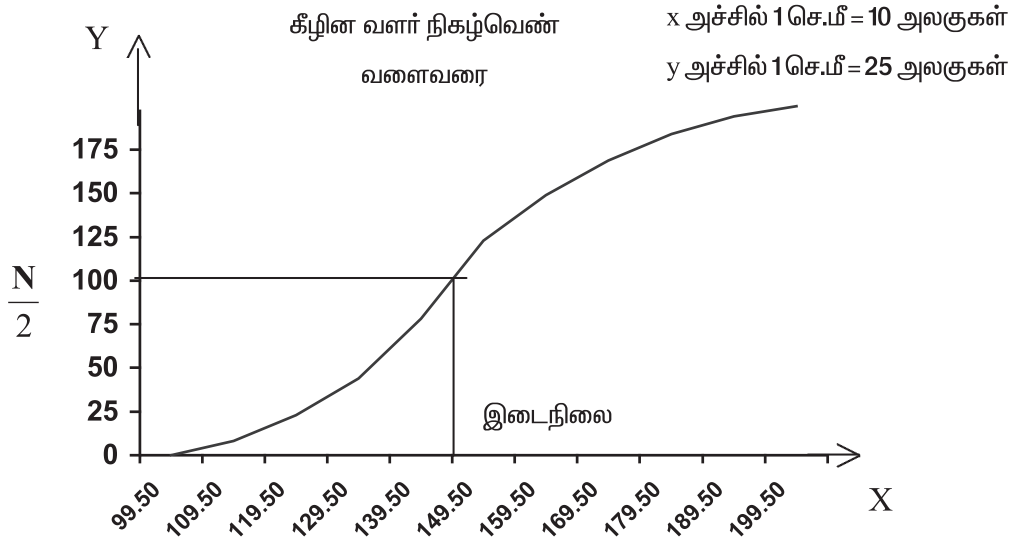
எடுத்துக்காட்டு 20:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு கீழின ஓகைவ் வரைந்து இடைநிலை அளவைக் காண்க.

எடை (பவுண்டில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
100-109	8
110-119	15
120-129	21
130-139	34
140-149	45
150-159	26
160-169	20
170-179	15
180-189	10
190-199	6

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி	நபர்களின் எண்ணிக்கை	உண்மையான பிரிவு இடைவெளி	குறைந்த நிலை குவிவு அலைவெண்
100-109	8	99.5-109.5	8
110-119	15	109.5-119.5	23
120-129	21	119.5-129.5	44
130-139	34	129.5-139.5	78
140-149	45	139.5-149.5	123
150-159	26	149.5-159.5	149
160-169	20	159.5-169.5	169
170-179	15	169.5-179.5	184
180-189	10	179.5-189.5	194
190-199	6	189.5-199.5	200



எடுத்துக்காட்டு 21 :

பின்வரும் அலைவெண் பரவலைக் கொண்டு ஓகைவ் வரைந்து இடைநிலை அளவைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	5
10-20	4
20-30	8
30-40	12
40-50	16
50-60	25
60-70	10
70-80	8
80-90	5
90-100	2

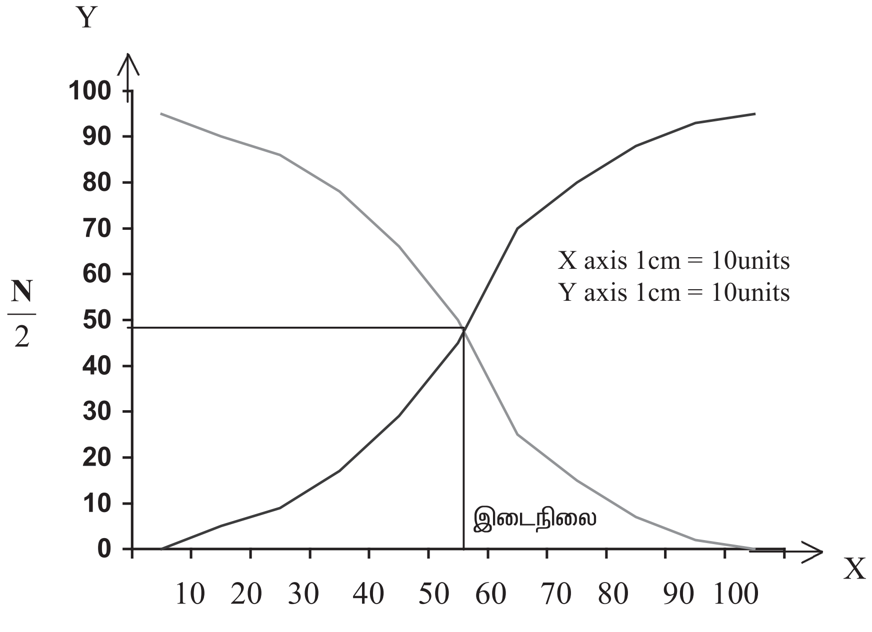
தீர்வு :

பிரிவு எல்லை	குவிவு அலைவெண்	
	குறைந்த நிலை	உயர்ந்த நிலை
0	0	95
10	5	90
20	9	86
30	17	78
40	29	66
50	45	50
60	70	25
70	80	15
80	88	7
90	93	2
100	95	0

இடைநிலை அளவின் நிறை குறைகள் :

1. இடைநிலை முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஏனெனில் இது ஒரு இடக் குறியீட்டு சராசரி ஆகும்.
2. திறந்த பிரிவு இடைவெளிக்கான பரவலுக்கு கூட இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.
3. விவரமானது முழுமையற்றதாக இருந்தாலும் கூட இடைநிலை அளவைக் காணலாம்.
4. திறன், நேர்மை பண்பளவு காரணிகளுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.

ஒகைவ் வளைவரைகள்



குறைகள் :

1. தொடரில் சிறு மாற்றம் இருப்பினும் இடைநிலை அளவின் மதிப்பில் பெரிய அளவில் மாற்றம் ஏற்படும்.
2. தொடர்ச்சியான வரிசை அல்லது இரட்டை எண்ணிக்கை உறுப்புக்களாக இருக்கும்போது இடைநிலையானது, மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட மதிப்பே தவிர தொடரில் உள்ள எதேனும் ஒரு மதிப்பு ஆகாது.
3. சராசரி விலக்கம் காண மட்டுமே பயன்படுகிறதே தவிர மற்ற கணித செயல்பாடுகளுக்கு இது பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

கால்மானங்கள் :

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விவரத்தை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் மூன்று அளவைகள் கால்மானங்கள் எனப்படும். இரண்டாம் கால்மானம் விவரத்தை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிப்பதால் இடைநிலை எனப்படும். முதல் (கீழ்) கால்மானம் (Q_1) முதல் கால் பகுதியையும், மூன்றாம் (மேல்) கால்மானம் (Q_3) மூன்று கால் பகுதியையும் குறிக்கின்றது.

செப்பனிடா அல்லது வகைப்படுத்தப்படாத விவரம் :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை ஏறு வரிசையில் அமைத்து, பிறகு Q_1 மற்றும் Q_3 க்கான வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி கால்மான விளக்கத்தைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

கால்மான விலக்கம் = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

இதில் $Q_1 = \left(\dfrac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

மற்றும் $Q_3 = 3\left(\dfrac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

எடுத்துக்காட்டு 22 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு கால்மானங்களைக் காண்க.

25, 18, 30, 8, 15, 5, 10, 35, 40, 45

தீர்வு :

5, 8, 10, 15, 18, 25, 30, 35, 40, 45

$Q_1 = \left(\dfrac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\dfrac{10+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= (2.75)$ ஆவது உறுப்பு

$= 2$ ஆவது உறுப்பு + $\left(\frac{3}{4}\right)$ (3ஆவது உறுப்பு – 2 ஆவது உறுப்பு)

$$= 8+\frac{3}{4}(10-8)$$

$$= 8+\frac{3}{4}\times 2$$

$$= 8+1.5 = 9.5$$

Q_3 $= 3\left(\frac{n+1}{4}\right)^{th}$ உறுப்பு

$= 3 \times (2.75)$ ஆவது உறுப்பு $= (8.25)$ ஆவது உறுப்பு

$= 8$ ஆவது உறுப்பு + $\frac{1}{4}$ (9ஆவது உறுப்பு – 8 ஆவது உறுப்பு)

$$= 35+\frac{1}{4}[40-35] = 35+1.25 = 36.25$$

தொடர்ச்சியற்ற வரிசை : (கால்மானங்களைக் காணுதல்)

படிகள்

1. குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.
2. $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
3. $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.

   அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X இன் மதிப்பு Q_1 ஆகும்.

4. $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ மதிப்பு காண்க.
5. $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.

   அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X –ன் மதிப்பு Q_3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 23:

X	5	8	12	15	19	24	30
F	4	3	2	4	5	2	4

தீர்வு :

X	f	c.f
5	4	4
8	3	7 ←
12	2	9
15	4	13
19	5	18
24	2	20 ←
30	4	24
	24	

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ உறுப்பு

$= \left(\frac{24+1}{4}\right) = \left(\frac{25}{4}\right)$

$= 6.25$ ஆவது உறுப்பு $Q_1 = 8;$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th}$ உறுப்பு $= 3\left(\frac{24+1}{4}\right) = 18.75$ ஆவது உறுப்பு

$\therefore Q_3 = 24$

தொடர்ச்சியான வரிசைக்கு கால்மானங்களைக் காணுதல்,

1. குவிவு அலைவெண்களைக் காண்க.
2. $\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
3. $\left(\frac{N}{4}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் கண்டு, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி முதல் கால்மான பிரிவு எனப்படும்.
4. $3\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
5. $3\left(\frac{N}{4}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் கண்டு, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி மூன்றாம் கால்மான பிரிவு எனப்படும். பிறகு பின்வரும் வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி Q_1, Q_3 வைக் காணவும்.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times c_3$$

இதில் l_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் அலைவெண்

c_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

m_1 = முதல் கால்மான பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்

l_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் அலைவெண்

c_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

m_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்

எடுத்துக்காட்டு 24:

தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் கால்மானங்களைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	11
10-20	18
20-30	25
30-40	28
40-50	30
50-60	33
60-70	22
70-80	15
80-90	12
90-100	10

தீர்வு :

C.I.	F	cf
0-10	11	11
10-20	18	29
20-30	25	54
30-40	28	82
40-50	30	112
50-60	33	145
60-70	22	167
70-80	15	182
80-90	12	194
90-100	10	204
	204	

$$\left(\frac{N}{4}\right) = \left(\frac{204}{4}\right) = 51\,;\, 3\left(\frac{N}{4}\right) = 153$$

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$= 20 + \frac{51-29}{25} \times 10 = 20 + 8.8 = 28.8$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$= 60 + \frac{153-145}{22} \times 12 = 60 + 4.36 = 64.36$$

பதின்மானங்கள் :

மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையை **10** சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவைகள் பதின் மானங்கள் எனப்படும். D_1, D_2 .... D_9 என்ற ஒன்பது பதின்மானங்கள் முறையே முதல் பதின்மானம் .... ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 25:

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு D_5 வைக் காண்க.

5, 24, 36, 12, 20, 8

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

5, 8, 12, 20, 24, 36

$D_5 = \left(\frac{5(n+1)}{10}\right)^{th}$ மதிப்பு = $\left(\frac{5(6+1)}{10}\right)^{th}$ மதிப்பு = $(3.5)^{th}$ மதிப்பு

$= 3$ ஆவது உறுப்பு $+ \frac{1}{2}$ (4ஆவது உறுப்பு – 3 ஆவது உறுப்பு)

$= 12 + \frac{1}{2}[20 - 12]$

$= 12 + 4 = 16$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு பதின்மானங்கள் :

எடுத்துக்காட்டு 26:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு D_3 மற்றும் D_7 காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
அலைவெண்	5	7	12	16	10	8	4

தீர்வு :

C.I.	f	c.f
0-10	5	5
10-20	7	12
20-30	12	24
30-40	16	40
40-50	10	50
50-60	8	58
60-70	4	62
	62	

D_3 உறுப்பு $= \left(\frac{3N}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{3 \times 62}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பு = (18.6) ஆவது உறுப்பு

18.6 ஆவது உறுப்பு 20-30 என்ற இடைவெளியில் உள்ளது

$$\therefore D_3 = l + \frac{3\left(\frac{N}{10}\right) - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{18.6 - 12}{12} \times 10 = 20 + 5.5 = 25.5$$

D_7 உறுப்பு $\left(\frac{7 \times N}{10}\right)^{th}$ உறுப்பு = $\left(\frac{7 \times 62}{10}\right)^{th}$ உறுப்பு

$$= \left(\frac{434}{10}\right)^{th} \text{ உறுப்பு} = (43.4) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

43.4 ஆவது உறுப்பு 40–50 என்ற இடைவெளியில் உள்ளது.

$$D_7 = l + \frac{\left(\frac{7N}{10}\right) - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{43.4 - 40}{10} \times 10 = 40 + 3.4 = 43.4$$

நூற்றுமானங்கள் :

நூற்றுமான மதிப்புகளானது பரவலை 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொன்றும் 1 சதவீத அளவினைக் குறிக்கும். நூற்றுமானம் (P_k) மதிப்பானது மொத்த மதிப்புகளில் சரியாக k% வரை அமையும் மாறியின் மதிப்பாகும்.

தொடர்பு :

$P_{25} = Q_1$; $P_{50} = D_5 = Q_2 =$ இடைநிலை மற்றும் $P_{75} = Q_3$

எடுத்துக்காட்டு 27:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு P_{15} யைக் கணக்கிடுக.

5, 24, 36, 12, 20, 8

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

5, 8, 12, 20, 24, 36

$$P_{15} = \left(\frac{15(n+1)}{100}\right)^{th} \text{ உறுப்பு}$$

$$= \left(\frac{15 \times 7}{100}\right)^{th} \text{ உறுப்பு}$$

$$= (1.05) \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= 1 \text{ ஆவது உறுப்பு} + 0.05\,(2 \text{ ஆவது உறுப்பு} - 1 \text{ ஆவது உறுப்பு})$$

$$= 5 + 0.05\,(8-5)$$

$$= 5 + 0.15 = 5.15$$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு நூற்றுமானங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 28:

பின்வரும் அலைவெண் பரவலைக் கொண்டு P_{53} யைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
அலைவெண்	5	8	12	16	20	10	4	3

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
0-5	5	5
5-10	8	13
10-15	12	25
15-20	16	41
20-25	20	61
25-30	10	71
30-35	4	75
35-40	3	78
மொத்தம்	78	

$$P_{53} = l + \frac{\frac{53N}{100} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{41.34 - 41}{20} \times 5$$

$$= 20 + 0.085 = 20.085$$

முகடு :

ஓர் பரவலில் எந்த மதிப்பு அதிக முறை வருகிறதோ, அம்மதிப்பே முகட்டைக் குறிக்கும். எந்த மதிப்பைச் சுற்றி ஏனைய மதிப்புகள் அனைத்தும் அடர்ந்திருக்கின்றனவோ அம்மதிப்பே **முகடு** எனப்படும்.

கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனின் வரையறைப்படி, "எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு மதிப்பைச் சுற்றி மிகவும் அடர்ந்திருக்குமே யானால் அந்த மதிப்பே ஒரு பரவலின் முகட்டு மதிப்பாகும். இதுவே தொடரில் உள்ள மதிப்புகளில் முக்கிய மதிப்பாக கருதப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைச் சுற்றி அலைவெண்கள் அதன் மையப்பகுதியில் அடர்ந்திருக்கின்றன என்பதை இது காட்டுகிறது. ஆகையால் அதிக அடர்வு உடைய புள்ளியைக் காண இவற்றை பயன்படுத்துகிறோம். எனவே இது இடக்குறியிட்ட அளவை ஆகும்.

சந்தை ஆய்வுகளின் போது ஒரு மேலாளர் பொருட்களின் எந்த அளவு அதிக அடர்வுள்ளதாக உள்ளது என்பதை அறிய முகட்டைப் பயன்படுத்துகிறார். எடுத்துக்காட்டாக பாதணிகள், மற்றும் ஆயத்த ஆடைகளைத் தயாரிக்கும் போது முகட்டளவு மற்றும் அதனை ஒட்டிய அளவுகளும் பெரிதும் தேவைப்படுகிறது.

முகட்டைக் கணித்தல் :

செப்பனிடா விவரங்கள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்கள் :

ஒரு தொடரில் உள்ள தனிப்பட்ட மதிப்புகள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்களின் முகட்டை ஆய்வின் மூலம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 29:

2, 7, 10, 15, 10, 17, 8, 10, 2

$\therefore$ முகடு = $M_0 = 10$

சில இடங்களில் முகட்டைக் காண இயலாது. ஒரு சில இடங்களில் ஒன்று, அதற்கு மேற்பட்ட முகட்டைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 30

12, 10, 15, 24, 30 (முகடு இல்லை)

7, 10, 15, 12, 7, 14, 24, 10, 7, 20, 10

முகட்டின் மதிப்புகள் 7 மற்றும் 10

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் :

தொகுக்கப்பட்ட விவரத்தில் முகடு என்பது மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணை ஒத்த X - ன் மதிப்பு ஆகும்.

தொடர்ச்சியான பரவல் :

மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி முகட்டுப் பிரிவு எனப்படும். பிறகு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முகட்டை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

முகடு = $M_0 = l + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$

$\Delta_1 = f_1 - f_0 \qquad \Delta_2 = f_1 - f_2$

இதில் l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_1 = முகட்டுப்பிரிவின் நிகழ்வெண்

f_0 = முகட்டுப்பிரிவின் முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 = முகட்டுப்பிரிவின் அடுத்த நிகழ்வெண்

C = முகட்டுப்பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

மேற்கூறிய வாய்ப்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

முகடு = $l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

குறிப்புகள் :

1. $2(f_1 - f_0 - f_2)$ மதிப்பு பூச்சியம் எனில் முகட்டை, பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் பெறலாம்.

$$\text{முகடு} = \quad M_0 = l + \frac{(f_1 - f_0)}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times c$$

2. முதல் பிரிவு இடைவெளியில் முகடு அமைந்தால் f_0 வின் மதிப்பை பூச்சியமாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.
3. திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலில் முகடானது திறந்த பிரிவு இடைவெளியில் அமையாத வரையில், முகட்டைக் கணிப்பதில் எந்த ஒரு சிக்கலும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 31

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
0-50	5
50-100	14
100-150	40
150-200	91
200-250	150
250-300	87
300-350	60
350-400	38
400 க்கு மேல்	15

தீர்வு :

உயர்ந்த நிகழ்வெண் **150** அதற்கு ஒத்த பிரிவு இடைவெளி **200–250.**

அதுவே முகட்டு பிரிவாகும். இதில் $l = 200$, $f_1 = 150$, $f_0 = 91$, $f_2 = 87$, $C = 50$

$$\text{முகடு} = M_0 = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$= 200 + \frac{150 - 91}{2 \times 150 - 91 - 87} \times 50$$

$$= 200 + 24.18 = 224.18$$

முகட்டுப் பிரிவை நிர்ணயித்தல் :

மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணே அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டுப் பிரிவாகும். ஆனால் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இடங்களில் முகட்டுப் பிரிவு பின்வரும் நிலைகளில்.

1. மிக உயர்ந்த அலைவெண் அடிக்கடி வருமேயானால்
2. பரவலின் ஆரம்பத்தில் அல்லது முடிவில் மிக உயர்ந்த அலைவெண் நிகழுமேயானால்
3. பரவலின் மதிப்புகள் ஒழுங்கற்ற முறையில் இருக்குமேயானால், தொகுப்பு முறையில் முகட்டு பிரிவு காணப்படுகிறது.

முகட்டைக் கணக்கிடுவதற்கான படிகள் :

6 நிரல்கள் கொண்ட ஓர் தொகுப்பு முறை அட்டவணை தயார் செய்தல் வேண்டும்.

1. முதல் நிரலில் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களை எழுதுக.
2. இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 2வது நிரலில் எழுதுக.
3. முதல் நிகழ்வெண்ணை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள அலைவெண்களை இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி 3வது நிரலில் எழுதுக.
4. மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 4வது நிரலில் எழுது.
5. முதல் நிகழ்வெண்ணை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள நிகழ்வெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 5வது நிரலில் எழுதுக.
6. முதல் இரு நிகழ்வெண்களை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள நிகழ்வெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி 6வது நிரலில் எழுதுக.

ஒவ்வொரு நிரலிலும் உள்ள அதிகபட்ச நிகழ்வெண்களைக் கோடிட்டு காட்டவும். பிறகு முகட்டுப் பிரிவைக் காண ஓர் ஆய்வுப் பட்டியல் தயார் செய்ய வேண்டும். முகட்டுப் பிரிவைக் கண்டு பிடித்த பின்னர் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முகட்டின் மதிப்பை கணக்கிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 32

பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டை கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
அலைவெண்	9	12	15	16	17	15	10	13

தீர்வு :

தொகுப்பு முறை அட்டவணை :

C.I.	f	2	3	4	5	6
0-5	9	21				
5-10	12		27	36		
10-15	15	31			**43**	
15-20	16		**33**			**48**
20-25	**17**	**32**		**48**		
25-30	15		25		42	38
30-35	10	23				
35-40	13					

பகுப்பாய்வு அட்டவணை :

நிரல்கள்	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
1					1			
2					1	1		
3				1	1			
4				1	1	1		
5		1	1	1				
6			1	1	1			
மொத்தம்		1	2	4	5	2		

அதிக பட்ச மதிப்பு **20–25** ல் இருப்பதால் அதுவே முகட்டு பிரிவாகும்.

முகடு = $M_0 = l + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$

இங்கு $l = 20$; $\Delta_1 = f_1 - f_0 = 17 - 16 = 1$

$\Delta_2 = f_1 - f_2 = 17 - 15 = 2$

$$\therefore M_0 = 20 + \frac{1}{1+2} \times 5 \qquad = 20 + 1.67 = 21.67$$

வரைபடம் மூலம் முகடு கணக்கிடல் :

படிகள் :

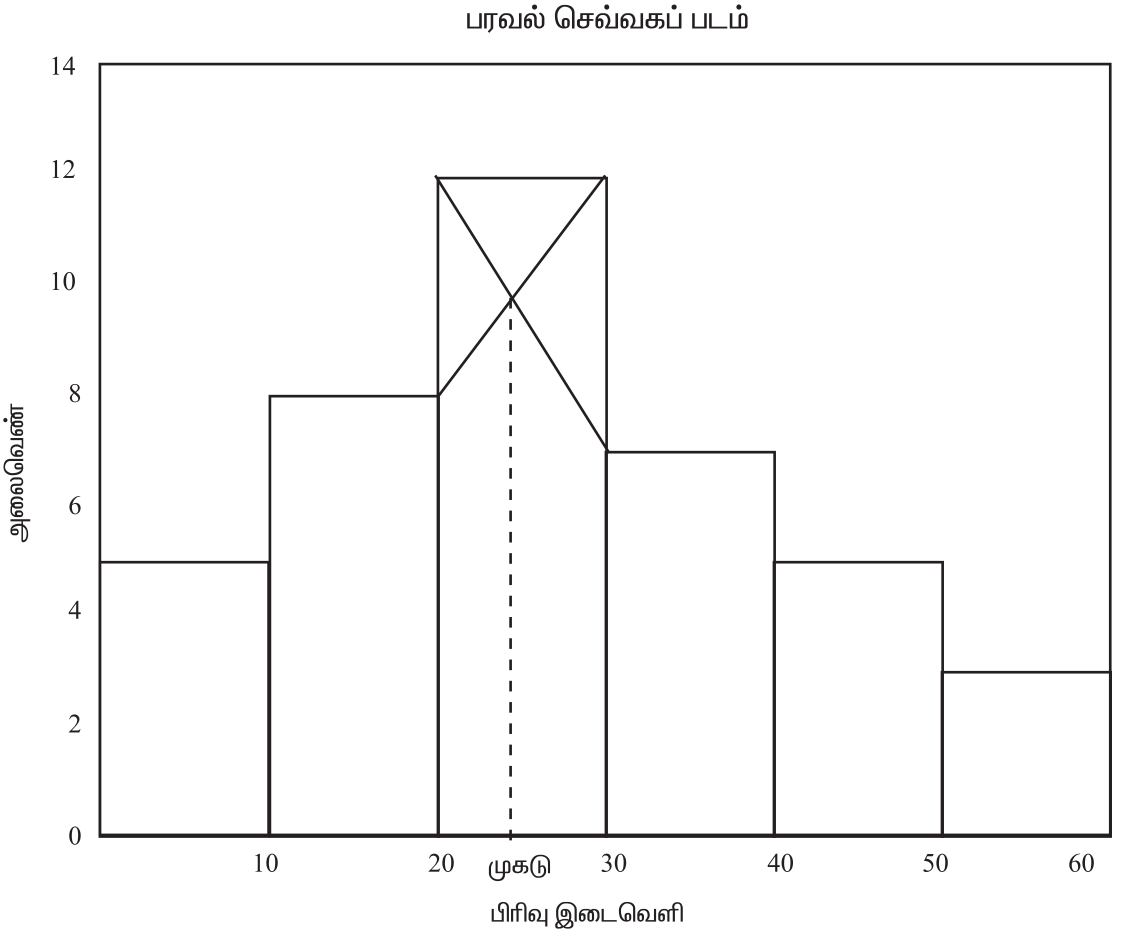
1. கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு ஒரு பரவல் செவ்வக படம் வரையவும்.
2. மிக உயர்ந்த செவ்வகம் முகட்டுப் பிரிவைக் குறிக்கும்.
3. இச்செவ்வகத்தின் மேல் வலது முனையை முந்தின செவ்வகத்தின் வலது முனையோடும் மேல் இடது முனையை அடுத்த செவ்வகத்தின் இடது முனையோடும் இணைக்கவும்.
4. இவ்விரு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து X - அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடு வரைக. X - அச்சை வெட்டும் புள்ளி முகட்டைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 33:

பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டின் மதிப்பை வரைபடம் மூலம் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
அலைவெண்	5	8	12	7	5	3

தீர்வு :



முகடு :

நிறைகள் :

1. இதனைக் கணக்கிடுவது எளிது. மேலும் சில இடங்களில் பார்த்த அளவிலே முகட்டைக் காண இயலும்.
2. முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
3. திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலுக்கும் இதனைக் கணக்கிட முடியும்.
4. இது பொதுவாக தொடரின் முக்கிய பகுதியின் சரியான மதிப்பைத் தருகிறது.
5. விவரத்தை சிறந்த முறையில் பிரதிபலிக்கும் ஓர் இட மதிப்பாக உள்ளது.

குறைகள் :

1. எல்லா மதிப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்படுவதில்லை.
2. கணித செயல்பாடுகளுக்கு இதனை பயன்படுத்த முடியாது.
3. சில இடங்களில் பொதுவாகவே முகடு சரியாக வரையறுக்கப்படாவிடில் முகட்டைக் காண இயலாது.

4. கூட்டுச் சராசரியை ஒப்பிடும் போது மாதிரி கணக்கெடுப்பின் ஏற்றத்தாழ்வுகளால் முகடு மிக அதிக அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது.

5. உறுப்புகளின் முக்கிய தொடர்பை கருத வேண்டிய இடங்களில் இது பொருந்தாது.

அனுபவத் தொடர்பு :

சமச்சீரான பரவலில் சராசரி = இடைநிலை = முகடு என இருக்கும். சமச்சீரற்ற பரவலுக்கான சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை பேராசிரியர் கார்ல் பியர்சன் (Prof. Karl Pearson) என்பவர் பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடுகிறார்.

முகடு = 3 இடைநிலை அளவு – 2 சராசரி

எடுத்துக்காட்டு 34:

சமச்சீரற்ற தொடரில் சராசரி மற்றும் இடைநிலைகள் முறையே **26.8** மற்றும் **27.9** எனில் சரியான முகடு என்ன ?

தீர்வு :

அனுபவத் தொடர்பிற்கான வாய்ப்பாடு

முகடு = 3 இடைநிலை – 2 சராசரி

$$= 3 \times 27.9 - 2 \times 26.8 = 30.1$$

எடுத்துக்காட்டு 35

சமச்சீரற்ற பரவலில் முகடு மற்றும் சராசரி முறையே **32.1** மற்றும் **35.4** எனில் இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

அனுபவத் தொடர்பிற்கான வாய்ப்பாடு

$$\text{இடைநிலை} = \frac{1}{3}\,[2\ \text{சராசரி} + \text{முகடு}] = \frac{1}{3}\,[2 \times 35.4 + 32.1] = 34.3$$

பயிற்சி – 6

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. பின்வருவனவற்றில் இடைநிலை எதைக் குறிக்கிறது ?

   அ) முதல் கால்மானம் ஆ) ஆறின் பதின்மானம்

   இ) 50வது நூற்று மானம் ஈ) மூன்றாம் கால்மானம்

2. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரமானது திறந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் அமைந்திருந்தால் பின்வருவனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை கணக்கிட முடியாது.

   அ) இடைநிலை ஆ) முகடு இ) கூட்டுச்சராசரி ஈ) கால்மானம்

3. $\left(\frac{1}{16}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{4}{25}\right)$ என்ற இரு எண்களின் பெருக்குச் சராசரியானது

அ) $\left(\frac{1}{10}\right)$ ஆ) $\left(\frac{1}{100}\right)$ இ) 10 ஈ) 100

4. சமச்சீரான பரவலில்

அ) சராசரி = இடைநிலை = முகடு

ஆ) சராசரி $\neq$ இடைநிலை $\neq$ முகடு

இ) சராசரி $>$ இடைநிலை $>$ முகடு

ஈ) சராசரி $<$ இடைநிலை $<$ முகடு

5. ஓர் பரவலில் முகட்டின் மதிப்பு தெளிவாக இல்லை எனில் பின்வரும் ஏதேனும் ஒரு முறையில் மூலம் முகட்டை பெற முடியும்.

அ) தொகுப்பு முறை ஆ) யூகிப்பு முறை

இ) சுருக்கு முறை ஈ) தட்டுத்தடுமாறி கற்றல் முறை

6. இந்தியாவில் உள்ள பெரும்பாலான மக்களின் பாதணியின் அளவு எண் 7 எனில் இது மைய மதிப்புகளில் எந்த அளவைக் குறிப்பிடுகிறது ?

அ) சராசரி ஆ) இரண்டாம் கால்மானம்

இ) எட்டாவது பதின்மானம் ஈ) முகடு

7. ஓர் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட தொடரில் நடு மதிப்பு என்பது

அ) இரண்டாம் கால்மானம் ஆ) ஐந்தாவது பதின்மானம்

இ) 50வது நூற்றுமானம் ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

8. ஒரு தொடரின் எந்த மதிப்பானது 10 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது.

அ) கால்மானங்கள் ஆ) பதின்மானங்கள்

இ) இடைநிலை ஈ) நூற்றுமானங்கள்

9. நூற்றுமானத்தில் பிரிவுகளின் மதிப்பின் மொத்த எண்ணிக்கை

அ) 10 ஆ) 59 இ) 100 ஈ) 99

10. முதல் கால்மானம் ஓர் அலைவெண் பரவலை பின்வரும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது

அ) 4 : 1 ஆ) 1 : 4 இ) 3 : 1 ஈ) 1 : 3

11. சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் கூடுதல்

அ) பூச்சியம் ஆ) குறைந்தபட்சம் இ) அதிகபட்சம் ஈ) 1

12. பரவல் செவ்வகபடம் என்ற வரைபடத்தின் மூலம் இதன் மதிப்பை கணக்கிடலாம்.

அ) சராசரி ஆ) இடைநிலை இ) முகடு ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

13. இடைநிலை அளவை பின்வரும் வரைபடத்தின் மூலம் கணக்கிட முடியும்.

அ) பரவல் செவ்வகப் படம் ஆ) ஓகைவ்

இ) பட்டை விளக்கப்படம் ஈ) சிதறல் விளக்கப்படம்

14. ஆறாவது பதின்மானம் என்பது

அ) இடைநிலை ஆ) 50வது நூற்றுமானம்

இ) 60வது நூற்றுமானம் ஈ) முதல் கால்மானம்

15. எந்த சதவீத மதிப்பு 5 ஆவது மற்றும் 25 ஆவது நூற்றுமானங்களுக்கு இடையில் அமையும் ?

அ) 5 % ஆ) 20 % இ) 30 % ஈ) 75 %

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

16. ஒவ்வொரு மதிப்புகளிலிருந்தும் 5 ஐ கழித்தோமேயானால் மதிப்புகளின் சராசரியும் __________ ஆக குறையும்.

17. 1 லிருந்து n வரையுள்ள 'n' இயல் எண்களின் கூட்டுச் சராசரியானது __________.

18. ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு __________ எனில் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட இயலாது.

19. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் __________ கொடுக்கப்பட்டால் இடைநிலை அளவே மிகப் பொருத்தமான சராசரி ஆகும்.

20. மூன்றாம் கால்மானம் மற்றும் __________ நூற்றுமானம் இரண்டும் ஒன்றே.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி :

21. மையப்போக்கு அளவைகள் பற்றி நீவிர் அறிவது என்ன ?

22. மையப்போக்கு அளவைகளில் சிறந்த அளவையின் சிறப்பு இயல்புகள் யாவை ?

23. சராசரி என்பதன் பொருள் என்ன ?

24. பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச் சராசரிகள் பொருத்தமான சராசரியாக இருப்பதற்கான இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

25. இடைநிலை அளவை வரையறுக்க ? இதன் நிறை, குறைகளை விவரிக்கவும்.

26. 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G
வருமானம் (ரூபாயில்)	30	70	60	100	200	150	300

இவற்றைக் கொண்டு (அ) நேரடி முறை மற்றும் (ஆ) சுருக்கு முறையில் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

27. விவரங்களுக்கான கூட்டுச்சராசரியைக் கணக்கிடுக.

X	5	8	12	15	20	24
F	3	4	6	5	3	2

28. ஓர் நிறுவனத்தில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்களின் வார வருமானத்தை பின்வரும் அட்டவணை விளக்குகிறது.

வார ஊதியம் (ரூபாய் 100 இல்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	15	18	7	8	5	3

இவற்றின் சராசரி வார வருமானத்தைக் காண்க.

29. 20 மதிப்புகளின் சராசரி 45, 46 என்ற மதிப்பிற்கு பதிலாக 64 என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டதால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.

30. பின்வரும் விவரங்களின் சராசரி 15.38 எனில் விடுபட்ட அலைவெண்ணைக் காண்க.

அளவு	10	12	14	16	18	20
அலைவெண்	3	7	-	20	8	5

31. ஒரு குறிப்பிட்ட வணிக நிறுவனத்தில் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியம் (ரூபாயில்) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 49–52 என்ற பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் விடுபட்டுள்ளது. அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி ரூபாய் 47.2 எனில் விடுபட்ட நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.

வார ஊதியம் (ரூபாய்)	40-43	43-46	46-49	49-52	52-55
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	31	58	60	-	27

32. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இணைந்த கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

$X_1 = 2\overline{10}$ $\quad n_1 = 50 \quad X_2 = 150 \quad n_2 = 100$

33. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இணைந்த கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

குழு	1	2	3
எண்ணிக்கை	200	250	300
சராசரி	25	10	15

34. ஒரு தொழிற்சாலையில் முதல் ஒன்பது மாதங்களின் சராசரி மாத உற்பத்தி 2584 அலகுகள் மேலும் மீதமுள்ள 3 மாதங்களின் சராசரி மாத உற்பத்தி 2416 அலகுகள் வருடத்திற்கான சராசரி மாத உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

35. A, B, C என்ற பாடங்களில் ஒரு மாணவனின் எழுத்து மற்றும் வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு: எழுத்து தேர்வின் மொத்த மதிப்பெண் 75 எனவும், வாய்மொழித் தேர்வின் மொத்த மதிப்பெண் 25 எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்ணை எடையாக கொண்டு எழுத்துத் தேர்வின் மதிப்பெண்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க. எழுத்து மற்றும் வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு.

27, 24, 43, 5, 10, 15

36. எட்டு குடும்பங்களின் மாத வருமானம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G	H
வருமானம் (ரூபாயில்)	70	10	500	75	8	250	8	42

37. மாதிரிக்காக எடுக்கப்பட்ட திருகாணிகளின் விட்டங்களின் அளவை பின்வரும் அட்டவணைத் தருகிறது. பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்தி விட்ட சராசரியைக் காண்க.

விட்டம் (மி.மீ)	130	135	140	145	146	148	149	150	157
திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	3	4	6	6	3	5	2	1	1

38. ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு முதலீட்டாளர் ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ. 1200 மதிப்புள்ள பங்குகளை வாங்குகிறார். முதல் 5 மாதங்களில் ஒரு பங்கின் விலை முறையே ரூ.10, ரூ.12, ரூ.15, ரூ.20 மற்றும் ரூ.24 என்றவாறு வாங்கினார். 5 மாதங்களுக்கு பிறகு அவர் வாங்கிய பங்குகளின் சராசரி விலை என்ன ?

39. பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

25, 20, 15, 45, 18, 7, 10, 38, 12

40. பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	60-70	50-60	40-50	30-40	20-30
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	21	11	6	5

41. ஒரு நகரத்தில் 100 சிறிய சில்லறை நிறுவனத்தின் வருட சம்பள பட்டியல் தொடர்பான அலைவெண் பரவலின் அட்டவணைத் தருகிறது. இவற்றின் இடைநிலை சம்பள பட்டியலைக் காண்க.

வருடாந்திர சம்பள பட்டியல்	நிறுவனங்கள்
10 க்கு குறைவாக	8
10 மற்றும் 20 க்கு குறைவாக	12
20 மற்றும் 30 க்கு குறைவாக	18
30 மற்றும் 40 க்கு குறைவாக	30
40 மற்றும் 50 க்கு குறைவாக	20
50 மற்றும் 60 க்கு குறைவாக	12
	100

42. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலிருந்து முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்கள், இடைநிலை ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	ஊதியம்	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
30 க்கு மேல்	520	70 க்கு மேல்	105
40 க்கு மேல்	470	80 க்கு மேல்	45
50 க்கு மேல்	399	90 க்கு மேல்	7
60 க்கு மேல்	210		

43. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து முதல் மற்றும் மூன்றாம், இடைநிலை D_6, P_{20} ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
10 க்கு குறைவாக	5	40-50	90
10-20	25	50-60	40
20-30	40	60-70	20
30-40	70	70 க்கு மேல்	10

44. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஓகைவ் வளைவரைகள் வரைந்து அதன் மூலம் இடைநிலை அளவு முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்களைக் காண்க.

பிரிவுகள்	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160
அலைவெண்	16	22	45	60	50	24	10

45. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து முகடு மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

வருமானம் (ரூபாயில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	24	42	56	66	108	130	154

46. பின்வரும் விவரங்களுக்கு பரவல் செவ்வக படம் வரைந்து அதிலிருந்து முகடு மதிப்பினைக் காண்க.

வார ஊதியம் (ரூபாயில்)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	9	27	15	12	12	8

IV செய்து பார்க்க :

47. உனது வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் உயரங்கள் மற்றும் எடைகளை அளவீடு செய்க. அவற்றின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவற்றை கணக்கிட்டு அவற்றை ஒப்பிடுக.

48. உனது வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் பல்வேறு பாடங்களில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களைக் காண்க.

விடைகள்

I. 1. (ஆ) 2. (இ) 3. (அ) 4. (அ) 5. (அ)

6. (ஈ) 7. (ஈ) 8. (ஆ) 9. (இ) 10. (ஈ)

11. (அ) 12. (இ) 13. (ஆ) 14. (இ) 15. (ஆ)

II. 16. 5 17. $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ 18. 0 மற்றும் எதிரிடை 19. திறந்த பிரிவு 20. 75வது

III. 26. 130 27. 13.13 28. 35 29. 44.1

30. 12 31. 44 32. 170 33. 16

34. 2542 35. 34 36. பெருக்கு சராசரி = 45.27

37. 142.5 மி.மீ 38. ரூ.14.63 39. இடைநிலை = 18 40. 51.42

41. 34 42. 57.3

43. $Q_1 = 30.714$; $Q_2 = 49.44$; இடைநிலை = 41.11; D_6=44.44; P_{20}=27.5

44. இடைநிலை = 125.08 ; $Q_1 = 114.18$; $Q_3 = 135.45$

45. முகடு = 71.34

7. சிதறல் அளவைகள் – கோட்ட அளவை மற்றும் தட்டை அளவை

7.1 அறிமுகம் :

மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் ஒரு பரவலின் மையத் தன்மையை அறிய உதவுகின்றன. ஆனால் பரவலின் மதிப்புகள் மைய நிலைப் போக்கு அளவையினின்று இரு புறமும் எவ்வாறு சிதறி உள்ளன என்பதை அவை வெளிப்படுத்துவதில்லை. அலைவெண் பரவலின் இத்தகைய பண்பை பொதுவாக ‘சிதறல்’ என்று குறிப்பிடுவர். பரவலின் மதிப்புகளின் இடையே வேறுபாடுகள் அல்லது மாறுபாடுகள் உள்ளன. இந்த மாறுபாடுகளின் அளவை அளக்க வெவ்வேறு வகை சிதறல் அளவைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு பரவலின் சிதறல் அளவை மதிப்பு குறைந்து காணப்பட்டால் அப்பரவலின் மதிப்புகள் அதிக சீரானவை என்றும், சிதறல் அளவை மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால் அதன் மதிப்புகள் சீரற்றவை என்றும் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

மாணவர் I	மாணவர் II
68	85
75	90
65	80
67	25
70	65

மாணவர் ஒவ்வொருவரின் மதிப்பெண் கூடுதல் 345 மற்றும் சராசரி 69 ஆகவும் உள்ளன. உண்மை என்னவென்றால் இரண்டாவது மாணவன் ஒரு பாடத்தில் தோல்வி அடைந்துள்ளான். சராசரிகளை மட்டும் கணக்கில் கொண்டால் இரண்டு மாணவர்களுமே சமம். ஆனால் இரண்டாவது மாணவனை விட முதல் மாணவன் குறைந்த மாறுபாட்டளவை கொண்டவன். குறைந்த மாறுபாடு என்பது கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய பண்பாகும்.

சிறந்த சிதறல் அளவைக்குரிய குணாதிசயங்கள் :

ஒரு விழுமிய சிதறல் அளவையிடம் எதிர்பார்க்கப்படும் பண்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. இது நன்கு வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.
2. இது பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைதல் வேண்டும்.
3. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்க வேண்டும்.
4. இது மேலும் கணித விரிவாக்கத்திற்கு உட்படுத்திக் கொள்வதாக இருத்தல் வேண்டும்.
5. இது சாதாரணமாக புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாக மற்றும் எளிதாக கணக்கிட கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.

7.2 தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் :

இங்கு இரண்டு வகை சிதறல் அளவைகள் உள்ளன. அவை

1. தனித்த சிதறல் அளவைகள்
2. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்

ஒரு தொகுதி மதிப்புகளின் மாறுபாட்டு அளவையை அந்த மதிப்புகளின் அலகுகளைக் கொண்டே குறிப்பது தனித்த சிதறல் அளவைகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக வெவ்வேறு நாட்களில் பெய்த மழை அளவுகள் மி.மீ என்ற அலகில் கிடைக்கப் பெற்றால் அவற்றின் மாறுபாட்டளவையும், எந்த ஒரு சிதறல் அளவையும் மி.மீ என்ற அலகிலேயே இருக்கும். இதற்கு மாறாக ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் அலகினை கொள்ளாமல் மூல அலகில்லாத ஓர் எண்ணாகிறது. வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொகுதிகளின் மாறுபாட்டை ஒப்பிடுவதற்கு இவை பயன்படுகின்றன.

வெவ்வேறு தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள். கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

	தனித்த அளவை	ஒப்பீட்டு அளவை
1.	வீச்சு	வீச்சுக் கெழு
2.	கால்மான விலக்கம்	கால்மான விலக்கக் கெழு
3.	சராசரி விலக்கம்	சராசரி விலக்கக் கெழு
4.	திட்ட விலக்கம்	மாறுபாட்டுக் கெழு

7.3 வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு :

7.3.1 வீச்சு :

இது மிகவும் சாதாரண சிதறல் அளவையாகும். இது மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறியீட்டில், வீச்சு = $L - S$

இங்கு L = மிகப் பெரிய மதிப்பு ; S = மிகச் சிறிய மதிப்பு

தனித்தொகுதி மற்றும் தொடர்ச்சியற்ற தொகுதிகளில் L மற்றும் S எளிதாக அறியப்படுகிறது. தொடர் தொகுதியில் கீழ்கண்ட இரண்டு முறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

முறை 1 :

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை

முறை 2 :

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு

7.3.2 வீச்சுக் கெழு :

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வீச்சு மற்றும் அதன் கெழுவை காண்க.

7, 9, 6, 8, 11, 10

தீர்வு :

$L = 11, \quad S = 4$

வீச்சு $= L - S = 11 - 4 = 7$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{11-4}{11+4} = \frac{7}{15}$$

$$= 0.4667$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

கீழ்கண்ட பரவலிலிருந்து வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

அளவு	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75
எண்ணிக்கை	5	18	42	27	8

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை $= 75$

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை $= 60$

வீச்சு $= L - S = 75 - 60 = 15$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{75-60}{75+60}$$

$$= \frac{15}{135} = 0.1111$$

7.3.3 வீச்சின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் :

சிறப்பியல்புகள் :

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானது.
2. இது கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது.
3. தரக்கட்டுப்பாடு, தட்ப வெப்பநிலை முன்னறிதல், மற்றும் பங்கு விலை ஆய்வு போன்ற பல வகை கணக்குகளில் வீச்சு பெரிதும் பயன்படுகிறது.

குறைபாடுகள் :

1. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றது.
2. இது இரு விளிம்பு மதிப்புகளை மட்டும் சார்ந்துள்ளது.
3. திறந்த–வெளி பிரிவு இடைவெளிகளில் இதை கணக்கிட முடியாது.
4. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்ததல்ல.
5. இது எப்போதாவது பயன்படுத்தப்படும் அளவை.

7.4 கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு :

7.4.1 கால்மான விலக்கம் : (Q.D)

வரையறை :

கால்மான விலக்கமானது, முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மான விலக்கங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தில் பாதியாகும். எனவே இது அரை இடைக் கால்மான வீச்சு எனப்படுகிறது.

குறியீடுகளில், $Q.D = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$. Q_1, Q_2 மற்றும் Q_3 என்ற கால்மானங்களில், $Q_3 - Q_1$ என்பது இடைக்கால்மான வீச்சு எனவும், $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ அரை இடைக் காலமான வீச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

7.4.2 கால்மான விலக்கக் கெழு :

கால்மான விலக்கக் கெழு $Q.D = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

எடுத்துக்காட்டு 3:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தை காண்க.

391, 384, 591, 407, 672, 522, 777, 733, 1490, 2488

தீர்வு :

கொடுத்திருக்கும் மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்கவும்.

384, 391, 407, 522, 591, 672, 733, 777, 1490, 2488

Q_1 மதிப்பு, $\dfrac{n+1}{4} = \dfrac{10+1}{4} = 2.75$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_1 = 2 ஆவது மதிப்பு + 0.75 (3 ஆவது மதிப்பு – 2 ஆவது மதிப்பு)

$= 391 + 0.75\,(407 - 391)$

$= 391 + 0.75 \times 16$

$= 391 + 12 = 403$

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\,\frac{n+1}{4} = 3 \times 2.75 = 8.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_3 = 8 ஆவது மதிப்பு + 0.25 (9 ஆவது மதிப்பு – 8 ஆவது மதிப்பு)

$= 777 + 0.25\,(1490 - 777)$

$= 777 + 0.25\,(713)$

$= 777 + 178.25$

$= 955.25$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{955.25 - 403}{2}$$

$$= \frac{552.25}{2}$$

$$= 276.125$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

கூலித் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு இவற்றை கணக்கிடுக.

வார ஊதியம் (ரூ)	100	200	400	500	600
வாரங்களின் எண்ணிக்கை	5	8	21	12	6

தீர்வு :

வார ஊதியம் (ரூ)	வாரங்களின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் திறள் எண்ணிக்கை
100	5	5
200	8	13
400	21	34
500	12	46
600	6	52
மொத்தம்	N = 52	

Q_1 இன் மதிப்பு, $\frac{N+1}{4} = \frac{52+1}{4} = 13.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_1 = 13 ஆவது மதிப்பு + 0.25 (14 ஆவது மதிப்பு – 13 ஆவது மதிப்பு)

= 13 ஆவது மதிப்பு 0.25 (400 – 200)

$= 200 + 0.25\,(400 - 200)$

$= 200 + 0.25\,(200)$

$= 200 + 50 = 250$

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\left(\frac{N+1}{4}\right) = 3 \times 13.25 = 39.75$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_3 = 39 ஆவது மதிப்பு + 0.75 (40 ஆவது மதிப்பு – 39 ஆவது மதிப்பு)

= 500 + 0.75 (500 – 500)

= 500 + 0.75 × 0 = 500

கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{500-250}{2} = \frac{250}{2} = 125$

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{500-250}{500+250}$

$= \frac{250}{750} = 0.3333$

$= 150$

எடுத்துக்காட்டு 5:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு காண்க.

C.I	351-500	501-650	651-800	801-950	951-1100
f	48	189	88	4	28

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	உண்மை பிரிவு இடைவெளிகள்	குவிவு அலைவெண்
351 - 500	48	350.5 - 500.5	48
501 - 650	189	500.5 - 650.5	237
651 - 800	88	650.5 - 800.5	325
801 - 950	47	800.5 - 950.5	372
951 - 1100	28	950.5 - 1100.5	400
மொத்தம்	N = 400		

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$\frac{N}{4} = \frac{400}{4} = 100$$

Q_1 பிரிவு 500.5 – 650.5

$l_1 = 500.5$, $m_1 = 48$, $f_1 = 189$, $c_1 = 150$

$$\therefore Q_1 = 500.5 + \frac{100-48}{189} \times 150$$

$$= 500.5 + \frac{52 \times 150}{189}$$

$$= 500.5 + 41.27 = 541.77$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\frac{N}{4} - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$3\frac{N}{4} = 3 \times 100 = 300$$

Q_3 பிரிவு 650.5 – 800.5

$l_3 = 650.5$, $m_3 = 237$, $f_3 = 88$, $c_3 = 150$

$$\therefore Q_3 = 650.5 + \frac{300-237}{88} \times 150$$

$$= 650.5 + \frac{63 \times 150}{88}$$

$$= 650.5 + 107.39$$

$$= 757.89$$

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{757.89 - 541.77}{2}$$

$$= \frac{216.12}{2}$$

$$= 108.06$$

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{757.89 - 541.77}{757.89 + 541.77}$$

$$= \frac{216.12}{1299.66}$$

$$= 0.1663$$

7.4.3 கால்மான விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் :

சிறப்பியல்புகள் :

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு சுலபமாகவும் மற்றும் கணக்கிடுவதற்கு எளிதானதாகவும் உள்ளது.
2. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாது.
3. இதை திறந்த வெளி பிரிவு விவரங்களிலும் கணக்கிட இயலும்.

குறைபாடுகள் :

1. இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைவதில்லை. இது Q_1 மற்றும் Q_3 இரண்டை மட்டும் சார்ந்து அமையும். மேலும் 50 சதவீத விளிம்பு மதிப்புகளை இது தவிர்க்கிறது.
2. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது அல்ல.
3. இது, மாதிரி முறை ஏற்றத் தாழ்வுகளால் பாதிக்கப்படுகிறது.

7.5 சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக் கெழு :

7.5.1 சராசரி விலக்கம் :

வீச்சு மற்றும் கால்மான விலக்கம் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தவை அல்ல. அவை இடம் அமைவதைக் குறிக்கும் அளவைகளாகும். ஒரு சராசரியிலிருந்து பரவலின் மதிப்புகள் எந்த அளவு சிதறி உள்ளன என்பதை இவை வெளிப்படுத்துவதில்லை. சிதறல் அளவையான சராசரி விலக்கம் பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து உள்ளது.

வரையறை :

ஏதாவது ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்து, தொடரின் மதிப்புகள் ஏற்படுத்தும் விலக்கங்களின் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும். மையப் போக்கு அளவையானது கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது முகடு ஆகும். எல்லா விலக்கங்களும் நேரிடை மதிப்புகளாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. அதாவது குறிகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. கிளார்க் மற்றும் சேக்கடே கூற்றின் படி

'சராசரி விலக்கமானது, பரவலின் மதிப்புகள் சராசரியாக எந்த அளவு கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலையிலிருந்து சிதறி உள்ளன என்பதை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கூறுவதாகும்'.

நாம் பொதுவாக சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இதில் ஏதாவதொன்றிலிருந்து கணக்கிடுவோம். சில நேரங்களில் முகட்டை வரையறுக்க இயலாது. ஆகவே சராசரி விலக்கம் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. கூட்டுச்சராசரி மற்றம் இடைநிலையில் இடைநிலையே விரும்பத்தக்கது. ஆனால் பொதுவான வழக்கத்தில், கூட்டுச்சராசரியின் பயன்பாடுகள் அதிகமாக உள்ளதால், சராசரி விலக்கம் பொதுவாக கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை குறிப்பிட M.D என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

7.5.2 சராசரி விலக்கக் கெழு :

எந்த ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்தும் கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கமானது ஒரு தனித்த சிதறல் அளவையாகும். இரண்டு வெவ்வேறு தொடர்களின் மாறுபாட்டை ஒப்பிட்டு பார்க்க, ஒரு ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை தேவைப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை பயன்படுத்தப்படும் சராசரியால் வகுத்து, ஒப்பீட்டு சராசரி விலக்கத்தை பெறலாம். சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}}$$

வேண்டிய மதிப்பு சதவீதத்தில் பெறப்பட வேண்டுமாயின், சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச்சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}} \times 100$$

7.5.3 சராசரி விலக்கத்தை கணக்கிடல் :

தனித் தொகுதிகள் :

1. தொகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இவற்றை கணக்கிடவும்.
2. சராசரியிலிருந்து மதிப்புகளின் விலக்கங்களை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் எடுக்கவும். அவற்றை $|D|$ என்று குறிப்பிடவும்.
3. அந்த விலக்கங்களின் மொத்தத்தை கணக்கிடவும் அதாவது $\Sigma |D|$
4. கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மொத்தத்தை, மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் = $\frac{\Sigma |D|}{n}$

எடுத்துக்காட்டு 6:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டு சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடு. மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுக்களையும் காண்க.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி = $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{3321}{9} = 369$

இப்பொழுது விவரங்களை ஏறுவரிசையில் அமைக்கவும்.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்புன் மதிப்பு

= 5ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 360

X	$\lvert \mathbf{D} \rvert = \lvert \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \rvert$	$\lvert D \rvert = \lvert x -$ இடைநிலை$\rvert$
100	269	260
150	219	210
200	169	160
250	119	110
360	9	0
490	121	130
500	131	140
600	231	240
671	302	311
3321	1570	1561

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum \lvert D \rvert}{n}$

$= \dfrac{1570}{9}$

$= 174.44$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\dfrac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\bar{x}}$

$= \dfrac{174.44}{369}$

$= 0.47$

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum \lvert D \rvert}{n}$

$= \dfrac{1561}{9}$

$= 173.44$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\dfrac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

$= \dfrac{173.44}{360}$

$= 0.48$

7.5.4 சராசரி விலக்கம் – தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி :

படிகள் :

1. ஒரு சராசரியைக் காண்க (கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு)
2. சராசரியிலிருந்து மாறியின் மதிப்புகளுக்கு விலக்கங்களை, குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கண்டுபிடித்து அவற்றை |D| எனக் குறிப்பிடுக.

3. ஒவ்வொரு மதிப்பின் விலக்கத்தையும், அதற்கரிய அலைவெண்ணைப் பெருக்கி, அவற்றின் மொத்தம் $\sum f\,|D|$ கண்டுபிடி.

4. $\sum f\,|D|$ ஐ N ஆல் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் = $\dfrac{\sum f\,|D|}{N}$

எடுத்துக்காட்டு 7:

கீழ்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச்சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடுக.

உயரம் (செ.மீ)	158	159	160	161	162	163	164	165	166
நபர்களின் எண்ணிக்கை	15	20	32	35	33	22	20	10	8

மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

உயரம் X	நபர்களின் எண்ணிக்கை f	d = x – A A = 162	Fd	|D| = |X – கூட்டுச்சராசரி|	f |D|
158	15	-4	-60	3.51	52.65
159	20	-3	-60	2.51	50.20
160	32	-2	-64	1.51	48.32
161	35	-1	-35	0.51	17.85
162	33	0	0	0.49	16.17
163	22	1	22	1.49	32.78
164	20	2	40	2.49	49.80
165	10	3	30	3.49	34.90
166	8	4	32	4.49	35.92
	195		-95		338.59

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 162 + \frac{-95}{195} = 162 - 0.49 = 161.51$$

சராசரி விலக்கம் = $\dfrac{\sum f|D|}{N} = \dfrac{338.59}{195} = 1.74$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\overline{X}} = \frac{1.74}{161.51} = 0.0108$

உயரம் X	நபர்களின் எண்ணிக்கை f	c.f.	$\lvert D\rvert = \lvert X -$ இடைநிலை$\rvert$	$f\lvert D\rvert$
158	15	15	3	45
159	20	35	2	40
160	32	67	1	32
161	35	102	0	0
162	33	135	1	33
163	22	157	2	44
164	20	177	2	60
165	10	187	4	40
166	8	195	5	40
	195			334

இடைநிலை $= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{195+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் அளவு

= **98**ஆவது உறுப்பின் அளவு

= **161**

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum f\lvert D\rvert}{N} = \frac{334}{195} = 1.71$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}} = \frac{1.71}{161} = .0106$

7.5.5 சராசரி விலக்கம் – தொடர் தொகுதி :

தொடர் தொகுதியில் சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறை, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் கணக்கிடும் முறைக்கு ஒத்ததாகும். தொடர் தொகுதியில் வெவ்வேறு பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து, தேர்ந்தெடுத்த சராசரியிலிருந்து அவற்றிற்கு விலக்கங்களைக் காண வேண்டும்.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum f\lvert D\rvert}{N}$

இங்கு $D = m -$ சராசரி $m =$ மையப்புள்ளி

எடுத்துக்காட்டு 8:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	20
10-20	25
20-30	32
30-40	40
40-50	42
50-60	35
60-70	10
70-80	8

மேலும் சராசரி விலக்க கெழுவை கணக்கிடுக.

தீர்வு :

X	M	f	$d = \frac{m-A}{c}$ (A=35, C=10)	fd	$\lvert D\rvert = \lvert m-\bar{x})\rvert$	f $\lvert D\rvert$
0-10	5	20	-3	-60	31.5	630.0
10-20	15	25	-2	-50	21.5	537.5
20-30	25	32	-1	-32	11.5	368.0
30-40	**35**	40	0	0	1.5	60.0
40-50	45	42	1	42	8.5	357.0
50-60	55	35	2	70	18.5	647.5
60-70	65	10	3	30	28.5	285.0
70-80	75	**8**	4	32	38.5	308.0
		212		32		3192.5

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N} \times c$$

$$= 35 + \frac{32}{212} \times 10 = 35 + \frac{320}{212} = 35 + 1.5 = 36.5$$

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\sum f\lvert D\rvert}{N} = \frac{3192.5}{212} = 15.06$

இடைநிலை மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடல்

X	m	F	திரள் அலைவெண்	$\|D\| =$ $\|m -$ இடைநிலை$)\|$	$f\|D\|$
0-10	5	20	20	32.25	645.00
10-20	15	25	45	22.25	556.25
20-30	25	32	77	12.25	392.00
30-40	35	40	117	2.25	90.00
40-50	45	42	159	7.75	325.50
50-60	55	35	194	17.75	621.25
60-70	65	10	204	27.75	277.50
70-80	75	**8**	212	37.75	302.00
		212		மொத்தம்	3209.50

$$\frac{N}{2} = \frac{212}{2} = 106$$

$l = 30, m = 77, f = 40, c = 10$

இடைநிலை $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$

$$= 30 + \frac{106 - 77}{40} \times 10$$

$$= 30 + \frac{29}{4} = 30 + 7.25 = 37.25$$

சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum f|D|}{N}$

$$= \frac{3209.5}{212} = 15.14$$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\dfrac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

$$= \frac{15.14}{37.25} = 0.41$$

7.5.6 சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் :

சிறப்பியல்புகள் :

1. இது புரிந்து கொள்ளவும் மற்றம் கணக்கிடவும் எளிதானது.
2. இது தீர்மானமாக வரையறுக்கப்பட்டது.
3. இது தொடரின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தது.

4. இது மாதிரி கூறின் ஏற்றத்தாழ்வுகளால் அதிகமாக பாதிக்கப்படாதது.

5. இது விளிம்பு உறுப்புகளால் குறைந்த அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது.

6. இது எளிதில் கையாளக் கூடியது. ஏனென்றால் இதை எந்தவொரு சராசரியிலிருந்தும் கணக்கிடலாம்.

7. ஒப்பிடுதலுக்கு இந்த அளவை சிறந்தது.

குறைபாடுகள் :

1. இது மிகவும் துல்லியமான சிதறல் அளவையன்று.

2. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்ததல்ல.

3. இது எப்போதாவது பயன்படும் அளவை இது திட்ட விலக்கத்தை போன்று சிறப்பு பெற்றதல்ல.

4. இதைக் கணக்கிடுவதில் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து மதிப்புகளுக்குள்ள விலக்கங்களின் குறி புறக்கணிக்கப்படுவதால் அது இயற்கணிப்புக்கு இணங்காத அளவையாகிறது.

7.6 திட்டவிலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு :

7.6.1 திட்டவிலக்கம் :

கார்ல் பியர்சன் **1893**–ஆம் ஆண்டு திட்ட விலக்கம் என்ற கொள்கையை அறிமுகப்படுத்தினார். சிதறல் அளவைகளில் இது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. மேலும் பல புள்ளியியல் சூத்திரங்களில் அதிக அளவில் பயன்படுத்துவதுமாகும். திட்ட விலக்கம், விலக்க வர்க்க சராசரியின் வர்க்க மூலம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. காரணம் என்னவென்றால் இது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட வர்க்க விலக்கங்களின் சராசரியின் வர்க்க மூலமாகும். இது துல்லியமாக மதிப்பை அளிக்கிறது. திட்ட விலக்கத்தின் வர்க்கம் மாறுபாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

வரையளவு :

இது கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு பெறப்படும் விலக்கங்களின் சராசரியின் நேரிடை வர்க்க மூலம் என்றும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

திட்டவிலக்கம் σ (sigma) என்ற கிரீக் (Greek) எழுத்து மூலம் குறிப்பிடப்படுகிறது.

7.6.2 திட்டவிலக்கம் கணக்கிடல் – தனித்தொடர் :

தனித்தொடரில் திட்ட விலக்கத்தை கணக்கிட இரண்டு முறைகள் உள்ளன.

அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

(அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல் :

கூட்டுச் சராசரி முழு எண்ணாக இருக்கும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள் :

1. தொடரின் கூட்டுச் சராசரியை காண்க ($\bar{x}$) .

2. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் விலக்கத்தை காண்க ($x = X - \bar{X}$).

3. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை கண்டுபிடித்து அதன் மொத்தத்தையும் காண் Σx^2.

4. மொத்தம் (Σx^2) ஐ மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும் $\left(\frac{\sum x^2}{n}\right)$.

5. $\left(\frac{\sum x^2}{n}\right)$ இன் வர்க்க மூலம் திட்ட விலக்கமாகும். ஆகவே

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n}\right)} \text{ அல்லது } \sqrt{\left(\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}\right)}$$

(ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல் :

கூட்டுச்சராசரி பின்ன எண்ணாக இருக்கும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம். பின்ன மதிப்பிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுவது கடினமான வேலையாகும். நேரத்தையும், உழைப்பையும் மிச்சப்படுத்த சுருக்கு முறையான ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறும் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

அதற்கான சூத்திரம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ இங்கு d என்பது ஊக சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்கள் $(X - A)$ ஆகும்.

படிகள் :

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை சராசரியாக ஊகம் செய்க (A)

2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறுக. அதாவது, $X - A$ அதை d என்று குறிப்பிடுக மற்றும் அதன் மொத்தத்தை காண்க Σd.

3. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை காண்க. அதாவது d^2 மற்றும் அதன் மொத்தம் Σd^2 ஐ காண்க.

4. பிறகு இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

குறிப்பு : நாம் மேலும் திட்ட விலக்கத்திற்கு எளிதான சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2}$$

அலைவெண்பரவலுக்கு $\sigma = \frac{c}{N}\sqrt{N\sum fd^2 - \left(\sum fd\right)^2}$

எடுத்துக்காட்டு 9:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

14, 22, 9, 15, 20, 17, 12,11

தீர்வு :

உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்

மதிப்புகள் (X)	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$
14	–1	1
22	7	49
9	–6	36
15	0	0
20	5	25
17	2	4
12	–3	9
11	–4	16
120		140

$$\overline{X} = \frac{120}{8} = 15$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{140}{8}}$$

$$= \sqrt{17.5} = 4.18$$

எடுத்துக்காட்டு 10:

10 மாணவர்களின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன**.** திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக**.**

மாணவர்கள் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் :	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

தீர்வு : (ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்)

மாணவர்கள்	மதிப்பெண்கள் (x)	d = x – A (A = 57)	d^2
1	43	-14	196
2	48	-9	81
3	65	8	64
4	57	0	0
5	31	-26	676
6	60	3	9
7	37	-20	400
8	48	-9	81
9	78	21	441
10	59	2	4
n = 10		Σd = - 44	$\Sigma d^2 = 1952$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1952}{10} - \left(\frac{-44}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{195.2 - 19.36}$$

$$= \sqrt{175.84}$$

$$= 13.26$$

7.6.3 திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல் – தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

அ) உண்மையான சராசரி முறை

ஆ) ஊக சராசரி முறை

இ) படி – விலக்க முறை

(அ) உண்மையான சராசரி முறை

படிகள் :

1. தொடரின் சராசரியை காண்க.
2. சராசரியிலிருந்து எல்லா மதிப்புகளுக்கும் விலக்கங்களை காண்க. அதாவது $x - \bar{x} = d$.
3. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை ($= d^2$) கண்டுபிடித்து, உரிய அலைவெண்களால் (f) பெருக்கினால் fd^2 ஐ பெறலாம்.
4. அதன் மொத்தத்தை (Σfd^2) அடைந்து, பின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துக $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

உண்மையான சராசரி பின்னத்தில் இருந்தால், கணக்கிடுதல் அதிக நேரத்தையும், உழைப்பையும் செலவு செய்ய வேண்டி உள்ளது. ஆகவே இந்த முறை எல்லா நேரத்திலும் பயன்படாது.

(ஆ) ஊக சராசரி முறை :

இங்கு விலக்கங்கள் உண்மையான சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படாமல் ஊக சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. மேலும் இந்த மாறியின் மதிப்புகள் சமமான இடைவெளியில் அமையாத நேரத்தில் பயன்படுத்தப்படும்.

படிகள் :

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.
2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை காண்க. அதாவது X – A அதை d என்று குறிப்பிடுக.
3. இந்த விலக்கங்களை அதற்கு உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, Σfd பெறுக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை காண்க $(d)^2$.
5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை $(d)^2$ உரிய அலைவெண்களால் (f) பெருக்கி, Σfd^2 பெறுக.
6. அந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \quad \text{இங்கு } d = X - A,\ N = \Sigma f.$$

எடுத்துக்காட்டு 11

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

X :	20	22	25	31	35	40	42	45
f :	5	12	15	20	25	14	10	6

தீர்வு :

ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்.

X	f	d = x – A (A = 31)	d^2	fd	fd^2
20	5	-11	121	-55	605
22	12	-9	81	-108	972
25	15	-6	36	-90	540
31	20	0	0	0	0
35	25	4	16	100	400
40	14	9	81	126	1134
42	10	11	121	110	1210
45	6	14	196	84	1176
	N = 107			$\Sigma fd = 167$	$\Sigma fd^2 = 6037$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6037}{107} - \left(\frac{167}{107}\right)^2}$$

$$= \sqrt{56.42 - 2.44}$$

$$= \sqrt{53.98} = 7.35$$

(இ) படி–விலக்க முறை :

மாறியின் மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அமையும் இருந்தால், இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள் :

1. தொடரின் மைய மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய் A.
2. $d^t \frac{x-A}{C}$ ஐ கண்டுபிடி. இங்கு C என்பது மதிப்புகளின் இடையே உள்ள இடைவெளி.
3. இந்த விலக்கங்கள் d' ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\Sigma fd'$ அடைக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் d'^2 ஐ காண்க.
5. இந்த விலக்க வர்க்கங்கள் (d'^2) ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\Sigma fd'^2$ பெறுக.
6. இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு, திட்ட விலக்கத்தை பெறுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

எடுத்துக்காட்டு 12:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள் :	10	20	30	40	50	60
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை :	8	12	20	10	7	3

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள் X	f	$d' = \frac{x-30}{10}$	fd'	fd'^2
10	8	-2	-16	32
20	12	-1	-12	12
30	20	0	0	0
40	10	1	10	10
50	7	2	14	28
60	3	3	9	27
	N = 60		$\Sigma fd' = 5$	$\Sigma fd'^2 = 109$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{109}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{1.817 - 0.0069} \times 10$$

$$= \sqrt{1.8101} \times 10$$

$$= 1.345 \times 10$$

$$= 13.45$$

7.6.4 திட்டவிலக்கம் கண்டுபிடித்தல் – தொடர் தொகுதி :

தொடர் தொகுதியில் திட்ட விலக்கம் கண்டுபிடித்தல் என்பது, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் காணும் முறையை ஒத்ததாகும். ஆனால் தொடர் தொகுதியில், பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் காண வேண்டும். படி–விலக்க முறை பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அதற்கான சூத்திரம் :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$d' = \frac{m - A}{C}$, C – பிரிவு இடைவெளி.

படிகள் :

1. ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய புள்ளியையும் காண்க.
2. நடு மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.
3. $d' = \frac{m - A}{C}$ ஐ காண்க.
4. விலக்கங்கள் d' ஐ, உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\Sigma fd'$ ஐ அடைக.
5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் காண்க d'^2.
6. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை (d'^2) உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\Sigma fd'^2$ ஐ அடைக.
7. இந்த மதிப்புகளை, கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு, திட்டவிலக்கத்தை அடைக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

எடுத்துக்காட்டு 13:

ஒரு நகரில் ஒரு ஆண்டின் தினசரி தட்பவெப்பம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தட்பவெப்பம் ^{o}C	நாட்களின் எண்ணிக்கை
- 40 to - 30	10
- 30 to - 20	18
- 20 to - 10	30
- 10 to 0	42
0 to 10	65
10 to 20	180
20 to 30	20
	365

திட்ட விலக்கத்தை காண்க.

தீர்வு :

தட்பவெப்பம்	மைய புள்ளி (m)	நாட்களின் எண்ணிக்கை f	$d' = \frac{m-(-5^n)}{10^n}$	fd	fd^2
- 40 to - 30	-35	10	-6	-30	90
- 30 to - 20	-25	18	-4	-36	72
- 20 to - 10	-15	30	-2	-30	30
- 10 to 0	-5	42	0	0	0
0 to 10	5	65	2	65	65
10 to 20	15	180	4	360	720
20 to 30	25	20	6	60	180
		N = 365		$\Sigma fd = 389$	$\Sigma fd^2 = 1157$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{1157}{365} - \left(\frac{389}{365}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{3.1699 - 1.1358} \times 10$$

$$= \sqrt{2.0341} \times 10$$

$$= 1.4262 \times 10$$

$$= 14.26^{o}c$$

7.6.5. இணைந்த திட்ட விலக்கம் :

N_1 உறுப்புக்களைக்கொண்ட தொடரின் சராசரி $\overline{X}_1$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ_1, N_2 உறுப்புக்களைக் கொண்ட தொடரின் சராசரி $\overline{X}_2$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ_2 என்றால், நாம் இணைந்த கூட்டுச்சராசரி மற்றும் இணைந்த திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி காணலாம்.

$$\overline{X}_{12} = \frac{N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2}{N_1 + N_2}$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1\, \sigma_1^2 + N_2\, \sigma_2^2 + N_1\, d_1^2 + N_2\, d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

இங்கு $d_1 = \overline{X}_{12} - \overline{X}_1$

$d_2 = \overline{X}_{12} - \overline{X}_2$

எடுத்துக்காட்டு 14:

இரண்டு கிராமங்களின் வருமான விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	கிராமம்	
	A	B
மக்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரி வருமானம்	175	186
வருமானத்தின் திட்ட விலக்கம்	10	9

இணைந்த கூட்டு சராசரி மற்றும் இணைந்த திட்ட விலக்கத்தை காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை $N_1 = 600, X_1 = 1\overline{75}, \sigma_1 = 10$

$N_2 = 5\overline{00}, \overline{X}_2 = 186, \sigma_2 = 9$

இணைந்த கூட்டு சராசரி

$$= \frac{600 \times 175 + 500\ \ 186}{600 + 500}$$

$$= \frac{105000 + 93000}{1100} = \frac{198000}{1100}$$

$$= 180$$

இணைந்த திட்ட விலக்கம் :

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1\, \sigma_1^2 + N_2\, \sigma_2^2 + N_1\, d_1^2 + N_2\, d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

$$d_1 = \overline{X}_{12} - \overline{X}_1$$
$$= 180 - 175$$
$$= 5$$

$$d_2 = \overline{X}_{12} - \overline{X}_2$$
$$= 180 - 186$$
$$= -6$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{600 \times 100 + 500 \times 81 + 600 \times 25 + 500 \times 36}{600 + 500}}$$

$$= \sqrt{\frac{60000 + 40500 + 15000 + 18000}{1100}}$$

$$= \sqrt{\frac{133500}{1100}}$$

$$= \sqrt{121.364}$$

$$= 11.02$$

7.6.6. திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் :

சிறப்பியல்புகள் :

1. இது தீர்மானமாக வரையறுக்கப்பட்டது. மேலும் இதன் மதிப்பு உறுதியானது, மேலும் இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தது. இங்கு விலக்கங்களின் உண்மையான குறிகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.
2. இது கூட்டுச்சராசரியை சார்ந்தது. அதனால் கூட்டுச் சராசரியின் எல்லா சிறப்பியல்புகளும் இதற்கும் உண்டு.
3. சிதறல் அளவைகளில் இது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததும், பெரும்பாலும் பயன்படுத்துவதும் ஆகும்.
4. மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது.
5. மாதிரிக்கூறு ஏற்றத் தாழ்வுகளால், குறைந்த அளவு பாதிக்கப்படுவதால், இது நிலைத் தன்மையுடையது.
6. ஒட்டுறவுக் கெழுவை அளவிடுவதற்கும் மற்றும் மாதிரி முறைக்கும் இது அடித்தளமாகும்.

குறைபாடுகள் :

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானதல்ல. மேலும் இது கணக்கிடுவதற்கு கடினமானது.
2. இது மிகை மதிப்புகளுக்கு அதிக நிறையைத் தருகின்றது. ஏனென்றால் மதிப்புகள் வர்க்கமாக்கப்படுகின்றன.
3. இது தனித்த சிதறல் அளவையாதலால், ஒப்பிடுதலுக்கு இது பயன்படாது.

7.6.7. மாறுபாட்டுக் கெழு :

திட்டவிலக்கம் ஒரு தனித்த சிதறல் அளவை. இது, சேகரிக்கப்பட்ட விவர மதிப்புகளின் அலகுகளாலேயே அழைக்கப்படுகிறது. மாணவர்களின் எடைகளின் திட்ட விலக்கத்துடன் மாணவர்களின் உயரங்களின் திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பிட முடியாது. ஏனென்றால் இரண்டுமே வெவ்வேறு அலகுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அதாவது உயரங்கள் செ.மீட்டரிலும், எடைகள் கிலோ கிராமிலும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒப்பிடும் நோக்கத்திற்காக, திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவையாக மாற்ற வேண்டும். இந்த ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை மாறுபாட்டுக் கெழு என அறியப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரியில் வகுத்து, **100** ஆல் பெருக்கி மாறுபாட்டுக் கெழு பெறப்படுகிறது.

குறியீட்டில், மாறுபாட்டுக் கெழு (C.V.) = $\frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட தொடர்களின் மாறுபாடுகளை ஒப்பிட, மாறுபாட்டுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம். விவரங்களின் தொடர்கள் அல்லது குழுக்கள் இவற்றில் எதன் மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாக உள்ளதோ, அந்த குழு, அதிக மாறுபாடு, குறைந்த நிலைத் தன்மை, குறைந்த சீரான்மை, குறைந்த மாறாத்தன்மை, குறைந்த ஒருபடித் தன்மை உடையது என்றும், மாறுபாட்டுக் கெழு குறைந்து உள்ள குழு, குறைந்த மாறுபாடு, அதிக நிலைத்தன்மை, அதிக சீரான்மை, அதிக மாறாத்தன்மை, அதிக ஒருபடித்தன்மை உடையது என்றும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 15

ஒரே தொழிற் பேட்டையில் அமைந்துள்ள A மற்றும் B நிறுவனங்களின் சராசரி வார ஊதியங்கள் (ரூபாயில்) மற்றும் திட்ட விலக்கங்கள் கீழே உள்ளன.

நிறுவனம்	சராசரி	திட்டவிலக்கம்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை
A	34.5	5	476
B	28.5	4.5	524

1. A அல்லது B, எந்த நிறுவனம், அதிக தொகையை வார ஊதியமாக கொடுக்கிறது ?
2. A அல்லது B, எந்த நிறுவனம் தனி நபர் ஊதியத்தில் அதிக மாறுபாட்டை உடையது ?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை $N_1 = 476, \overline{X}_1 = 34.5, \sigma_1 = 5$

$N_2 = 524, \overline{X}_2 = 28.5, \sigma_2 = 4.5$

1. நிறுவனம் A ஆல் வழங்கப்படும் மொத்த ஊதியத் தொகை

$= 34.5 \times 476$

= ரூ. 16,422

நிறுவனம் B ஆல் வழங்கப்படும் மொத்த ஊதியத் தொகை

$= 28.5 \times 524$

= ரூ. 14,934.

ஆகவே நிறுவனம் A அதிக தொகையை, வார ஊதியமாக வழங்குகிறது.

2. நிறுவனம் A மற்றும் B இன் வார ஊதியப் பரவலுக்கு மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

மாறுபாட்டுக் கெழு (A) $= \frac{\sigma_1}{\overline{X}_1} \times 100$

$= \frac{5}{34.5} \times 100 = 14.49$

மாறுபாட்டுக் கெழு (B) $= \frac{\sigma_2}{\overline{X}_2} \times 100$

$$= \frac{4.5}{28.5} \times 100 = 15.79$$

நிறுவனம் B தனிநபர் ஊதியத்தில் அதிக அளவு மாறுபாடு உடையது. ஏனென்றால் B நிறுவனத்தில் மாறுபாட்டுக் கெழு, A நிறுவனத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழுவை விட அதிகமாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 16

இரு நகரங்களில், ஐந்து ஆண்டுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்டத்தின் விலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விலை நகரம் A	விலை நகரம் B
20	10
22	20
19	18
23	12
16	15

எந்த நகரத்தின் விலைகளில் அதிக நிலைத்தன்மை காணப்படுகிறது ?

தீர்வு :

உண்மையான சராசரி முறை

நகரம் A			நகரம் B		
விலைகள் (X)	$\overline{X} = 20$ யிலிருந்து விலக்கங்கள் dx	dx^2	விலைகள் (Y)	$\overline{Y} = 15$ யிலிருந்து விலக்கங்கள் dy	dy^2
20	0	0	10	-5	25
22	2	4	20	5	25
19	-1	1	18	3	9
23	3	9	12	-3	9
16	-4	16	15	0	0
$\Sigma x = 100$	$\Sigma dx = 0$	$\Sigma dx^2 = 30$	$\Sigma y = 75$	$\Sigma dy = 0$	$\Sigma dy^2 = 68$

நகரம் A :

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \sqrt{6} = 2.45$$

மாறுபாட்டுக் கெழு (x) = $\frac{\sigma_x}{\overline{x}} \times 100$

$$= \frac{2.45}{20} \times 100 = 12.25\,\%$$

நகரம் B :

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{75}{5} = 15$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\overline{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}} = \sqrt{\frac{68}{5}} = \sqrt{13.6} = 3.69$$

மாறுபாட்டுக்கெழு (y) = $\frac{\sigma_y}{\overline{y}} \times 100$

$$= \frac{3.69}{15} \times 100 = 24.6\,\%$$

நகரம் A இன் மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக உள்ளதால், நகரம் A, நகரம் B யை விட விலைகளில் நிலைத்த தன்மை காணப்படுகிறது.

7.7. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Moments) :

7.7.1. வரையறை :

ஒரு பரவலின் கூட்டு சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் கூட்டுச் சராசரியை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கீழே வரையறுக்கப் படுகின்றன.

	தனித்தொகுதி	தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி
கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_1	$\frac{\sum(x-\overline{x})}{n} = 0$	$\frac{\sum f\,(x-\overline{x})}{N} = 0$
இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_2	$\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n} = \sigma^2$	$\frac{\sum f\,(x-\overline{x})^2}{N}$

மூன்றாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_3	$\frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n}$	$\frac{\sum f\,(x-\bar{x})^3}{N}$
நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_4	$\frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n}$	$\frac{\sum f\,(x-\bar{x})^4}{N}$

μ ஒரு கிரேக்க எழுத்து, அதை மியூ என்று உச்சரிக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி பின்ன மதிப்பாக இருந்தால், விலக்கப் பெருக்கத் தொகை காணுதல் என்பது கடின வேலையாகும். இந்த நேரங்களில், ஒரு ஆதியிலிருந்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கண்டுபிடித்து பின் அவற்றை மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளாக மாற்ற வேண்டும். இந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் எனப்படும். ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் – தனித் தொகுதி.

$$\mu'_1 = \frac{\sum(X-A)}{N} = \frac{\sum d}{N} \qquad \mu'_2 = \frac{\sum(X-A)^2}{N} = \frac{\sum d^2}{N}$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum(X-A)^3}{N} = \frac{\sum d^3}{N} \qquad \mu'_4 = \frac{\sum(X-A)^4}{N} = \frac{\sum d^4}{N}$$

இங்கு A – ஏதாவது ஆதி, $d = X - A$.

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் – தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி (படி – விலக்க முறை)

$$\mu'_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times C \qquad \mu'_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times C^2$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times C^3 \qquad \mu'_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times C^4$$

இங்கு $d' = \frac{X-A}{C}$ A, – ஆதி, C – பிரிவு இடைவெளி தூரம்

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் – தொடர் தொகுதி.

$$\mu'_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times C \qquad \mu'_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times C^2$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times C^3 \qquad \mu'_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times C^4$$

இங்கு $d' = \frac{m-A}{C}$, A – ஆதி, C – பிரிவு இடைவெளி தூரம்,

m – பிரிவின் மையப் புள்ளி.

7.8 ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை இவற்றினிடையே உள்ள உறவு.

$\mu_1 = \mu'_1 - \mu'_1 = 0$ $\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\,\mu'_2 + 2(\mu'_1)^3$

$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\,\mu'_1 + 6\mu'_2 - \mu'^2_1 - 3\mu'^4_1$

எடுத்துக்காட்டு 17:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து, முதலில் ஏதாவது ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடித்து பிறகு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை கண்டுபிடி.

X :	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F :	5	10	15	20	25	20	15	10	5

தீர்வு :

X	f	fx	$d = x - \overline{x}$ (x - 4)	fd	fd^2	fd^3	fd^4
0	5	0	-4	-20	80	-320	1280
1	10	10	-3	-30	90	-270	810
2	15	30	-2	-30	60	-120	240
3	20	60	-1	-20	20	-20	20
4	25	100	0	0	0	0	0
5	20	100	1	20	20	20	20
6	15	90	2	30	60	120	240
7	10	70	3	30	90	270	810
8	5	40	4	20	80	320	1280
	N = 125	Σfx = 500	$\Sigma d = 0$	$\Sigma fd = 0$	$\Sigma fd^2 = 500$	$\Sigma fd^3 = 0$	Σfd^4 = 4700

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{500}{125} = 4$$

$$\mu_1 = \frac{\sum fd}{N} = \frac{0}{125} = 0 \qquad \mu_2 = \frac{\sum fd^2}{N} = \frac{500}{125} = 4$$

$$\mu_3 = \frac{\sum fd^3}{N} = \frac{0}{125} = 0 \qquad \mu_4 = \frac{\sum fd^4}{N} = \frac{4700}{125} = 37.6$$

எடுத்துக்காட்டு 18:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து, முதலில் ஏதாவது ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடித்து பிறகு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடி.

X :	30-33	33-36	36-39	39-42	42-45	45-48
f :	2	4	26	47	15	6

தீர்வு :

X	மைய புள்ளிகள் (m)	f	$d' = \frac{(m-37.5)}{3}$	fd'	fd'^2	fd'^3	fd'^4
30-33	31.5	2	-2	-4	8	-16	32
33-36	34.5	4	-1	-4	4	-4	4
36-39	37.5	26	0	0	0	0	0
39-42	40.5	47	1	47	47	47	47
42-45	43.5	15	2	30	60	120	240
45-48	46.5	6	3	18	54	162	486
		N = 100		Σfd' = 87	$\Sigma fd'^2$ = 173	$\Sigma fd'^3$ = 309	$\Sigma fd'^4$ = 809

$$\mu_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times c = \frac{87}{100} \times c = \frac{261}{100} = 2.61$$

$$\mu_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times c^2 = \frac{173}{100} \times 9 = \frac{1557}{100} = 15.57$$

$$\mu_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times c^3 = \frac{309}{100} \times 27 = \frac{8343}{100} = 83.43$$

$$\mu_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times c^4 = \frac{809}{100} \times 81 = \frac{65529}{100} = 655.29$$

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$

$= 15.57 - (2.61)^2$

$= 15.57 - 6.81 = 8.76$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\,\mu'_1 + 2\mu'^3_1$

$= 83.43 - 3(2.61)\,(15.57) + 2\,(2.61)^3$

$= 83.43 - 121.9 + 35.56 = -2.91$

$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\,\mu'_1 + 6\mu'_2\,\mu'^2_1 - 3\mu'^4_1$

$= 665.29 - 4(83.43)\,(2.61) + 6\,(15.57)\,(2.61)^2 - 3(2.61)^4$

$= 665.29 - 871.01 + 636.39 - 139.214$

$= 291.454$

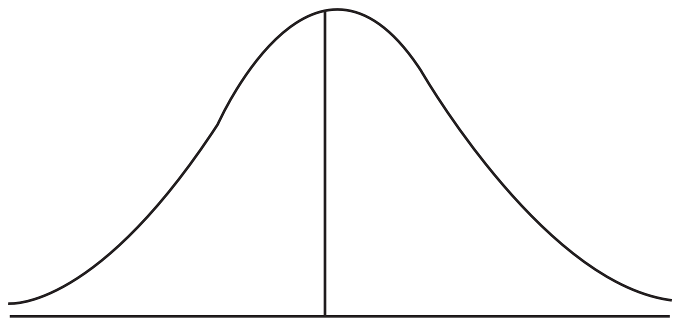
7.9 கோட்டம் :

7.9.1. பொருள் :

கோட்டம் என்றால் சமச்சீரின்மை என்று பொருள்படும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் உதவியுடன் வரையப்படும் வளைவரையின் வடிவத்தைப் பற்றி தெரிந்துக் கொள்ள கோட்டம் பற்றி நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி = இடைநிலை = முகடு, என்ற நிலையில் இருக்குமானால் அந்த பரவல் சமச்சீர் பரவலாகும்.

ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி ≠ இடைநிலை ≠ முகடு, என்றால் அது சமச்சீர் அற்ற பரவல் எனப்படும். மேலும் அது கோட்டமுடைய பரவல் என்று அழைக்கப்படும். அத்தகைய பரவல், நேரிடை கோட்டப் பரவல் அல்லது எதிரிடை கோட்டப் பரவலாக இருக்கும்.

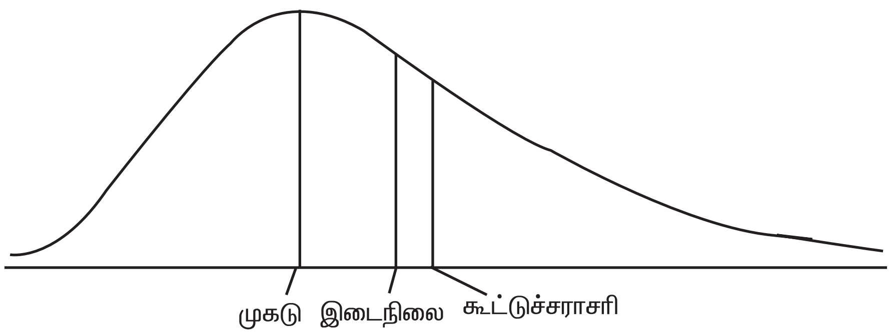
(அ) சமச்சீர் பரவல் :



கூட்டுச்சராசரி = இடைநிலை = முகடு

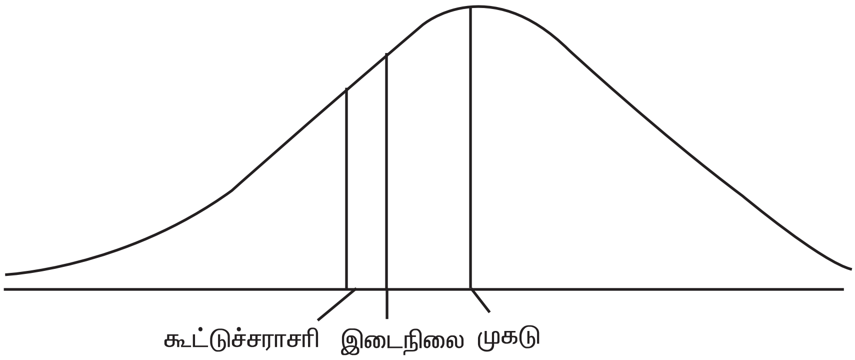
மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், சமச்சீர் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் ஒரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. வளைவரையின் நடுப்புள்ளியின் இரு புறமும் மதிப்புகள் சமமாகப் பரவியிருக்கும்.

(ஆ) நேரிடை கோட்டப் பரவல்



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம் கோட்டப் பரவலில், கூட்டுச்சராசரி உச்ச மதிப்பையும் மற்றும் முகடு குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும், என்பது தெளிவாகிறது. நேரிடைக் கோட்டப் பரவலில் மதிப்புகள் அதிக அளவில் இடது புறத்தை விட வலது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.

(இ) எதிரிடை கோட்டப் பரவல் :



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், முகடு உச்ச மதிப்பையும், கூட்டு சராசரி குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், மதிப்புகள் அதிக அளவில் வலது புறத்தை விட, இடது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.

7.10 கோட்ட அளவைகள் :

முக்கியமான கோட்ட அளவைகளாவன:

(i) கார்ல் – பியர்சனின் கோட்டக்கெழு.

(ii) பௌலியின் கோட்டக் கெழு.

(iii) விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவை.

7.10.1 கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழு :

கார்ல்–பியர்சனின் கூற்றுப்படி, கோட்ட அளவை – கூட்டுச்சராசரி முகடு. இந்த அளவை, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களைச் சிறந்த முறையில் ஒப்பிட ஏற்றதல்ல, ஏனென்றால் வெவ்வேறு தொடர்களுக்கு வெவ்வேறு அலகுகள் இருக்கும். இந்த இடர்பாட்டை தவிர்ப்பதற்காக ஒப்பீட்டு கோட்ட அளவையான கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\text{கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

முகடு தீர்மானமாக வரையறுக்கப் படாத இடத்தில், இந்த கெழு கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$$\text{கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழு} = \frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

எடுத்துக்காட்டு 19:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20

தீர்வு :

சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காணல்.

சுருக்க முறை:

அளவு	A = 25 யிலிருந்து விலக்கங்கள் D	d^2
25	0	0
15	-10	100
23	-2	4
40	15	225
27	2	4
25	0	0
23	-2	4
25	0	0
20	-5	25
N = 9	$\Sigma d = -2$	$\Sigma d^2 = 362$

கூட்டுச்சராசரி $= A + \dfrac{\Sigma d}{n}$

$$= 25 + \frac{-2}{9} = 25 - 0.22 = 24.78$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{362}{9} - \left(\frac{-2}{9}\right)^2}$$

$$= \sqrt{40.22 - 0.05}$$

$$= \sqrt{40.17}$$

$$= 6.3$$

முகடு = **25**, ஏனென்றால் இந்த அளவு **3** முறை திரும்ப திரும்ப வந்துள்ளது.

கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$= \frac{24.78 - 25}{6.3} = \frac{-0.22}{6.3} = -0.03$$

எடுத்துக்காட்டு 20:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கோட்டக்கெழுவை காண்க.

அளவு :	3	4	5	6	7	8	9	10
அலைவெண் :	7	10	14	35	102	136	43	8

தீர்வு :

அளவு	அலைவெண் (f)	A = 6 யிலிருந்து விலக்கங்கள் (d)	d^2	fd	fd^2
3	7	-3	9	-21	63
4	10	-2	4	-20	40
5	14	-1	1	-14	14
6	35	0	0	0	0
7	102	1	1	102	102
8	136	2	4	272	544
9	43	3	9	129	387
10	8	4	16	32	128
	N = 355			$\Sigma fd = 480$	$\Sigma fd^2 = 1278$

கூட்டுச்சராசரி $= A + \frac{\sum fd}{N}$ $\qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

$= 6 + \frac{480}{355}$ $\qquad = \sqrt{\frac{1278}{355} - \left(\frac{480}{355}\right)^2}$

$= 6 + 1.35$ $\qquad = \sqrt{3.6 - 1.82}$

$= 7.35$ $\qquad = \sqrt{1.78} = 1.33$

முகடு = **8**

$$\text{கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$= \frac{7.35 - 8}{1.33} = \frac{-0.65}{1.33} = -0.5$$

எடுத்துக்காட்டு 21:

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலுக்கு கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை காண்க.

X :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
F :	2	5	7	13	21	16	8	3

தீர்வு :

20–25 என்ற பிரிவு உச்ச அலைவெண்ணை பெற்றிருப்பதால், முகடு இந்த பிரிவில் அமையும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

$l = 20,\ f_1 = 21,\ f_0 = 13,\ f_2 = 16,\ C = 5$

$$முகடு = 20 + \frac{21-13}{2\times 21 - 13 - 16} \times 5$$
$$= 20 + \frac{8\times 5}{42-29}$$
$$= 20 + \frac{40}{13}$$
$$= 20 + 3.08 = 23.08$$

சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காணல் :

X	மைய புள்ளிகள் m	அலை வெண் f	விலக்கங்கள் $d' = \frac{m-22.5}{5}$	fd'	d'^2	fd'^2
0-5	2.5	2	-4	-8	16	32
5-10	7.5	5	-3	-15	9	45
10-15	12.5	7	-2	-14	4	28
15-20	17.5	13	-1	-13	1	13
20-25	22.5	21	0	0	0	0
25-30	27.5	16	1	16	1	16
30-35	32.5	8	2	16	4	32
35-40	37.5	3	3	9	9	27
		N = 75		Σfd = -9		$\Sigma fd'^2 = 193$

$$கூட்டுச்சராசரி = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$
$$= 22.5 + \left[\frac{-9}{75}\right] \times 5$$
$$= 22.5 - \frac{45}{75}$$
$$= 22.5 - 0.6$$
$$= 21.9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \times c$$
$$= \sqrt{\frac{193}{75} - \left(\frac{-9}{75}\right)^2} \times 5$$
$$= \sqrt{2.57 - 0.0144} \times 5$$
$$= \sqrt{2.5556} \times 5$$
$$= 1.5986 \times 5$$
$$= 7.99$$

$$\text{கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி – முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$= \frac{21.9 - 23.08}{7.99}$$

$$= \frac{-1.18}{7.99} = -0.1477$$

7.10.2. பௌலியின் கோட்டக் கெழு :

கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை அளக்க, தொடரின் மொத்த மதிப்புகளும் தேவை. பேராசிரியர். பௌலி, கால்மானங்களைச் சார்ந்த ஒரு சூத்திரத்தைக் கூறுகிறார். சமச்சீர் பரவலில் கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளன.

அதாவது, இடைநிலை $- Q_1 = Q_3 -$ இடைநிலை, ஆனால் கோட்டப் பரவலில், கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சமதூரத்தில் இருப்பதில்லை. எனவே பௌலி கூறும் சூத்திரம் :

$$\text{பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ \text{இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$$

எடுத்துக்காட்டு 22

கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு பௌலியின் கோட்டக்கெழுவைக் காண்க.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்கள் ஏறு வரிசையில் உள்ளன.

2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= \left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ஆவது உறுப்பு அளவு}$$

$$= 3 \text{ ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 6$$

$$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 3\left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 9 \text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 18$$

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 6$ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 12$

பௌலியின் கோட்டக்கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{18+6-2\times 12}{18-6} = 0$$

கோட்டக் கெழு = **0** என்பதால், கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர் சமச்சீர் தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 23:

கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு பௌலியின் கோட்டக்கெழுவைக் காண்க.

அளவு	:	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
f	:	10	18	22	25	40	15	10	8	7

தீர்வு :

அளவு	F	குவிவு அலைவெண்
4	10	10
4.5	18	28
5	22	50
5.5	25	75
6	40	115
6.5	15	130
7	10	140
7.5	8	148
8	7	155

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{155+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 39$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 5$

Q_2 = இடைநிலை = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= $\left(\frac{155+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 78 ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 6

Q_3 = $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= $3\left(\frac{155+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 117 ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 6.5

பௌலியின் கோட்டக் கெழு $= \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{6.5+5-2\times 6}{6.5-5}$$

$$= \frac{11.5-12}{1.5}$$

$$= \frac{0.5}{1.5} = -0.33$$

எடுத்துக்காட்டு 24:

கீழ்க்கண்ட பரவலில், பௌலியின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

ஊதியம் (ரூ)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	1	3	11	21	43	32	9

தீர்வு :

ஊதியம் (ரூ)	f	குவிவு அலைவெண்
10-20	1	1
20-30	3	4
30-40	11	15
40-50	21	36
50-60	43	79
60-70	32	111
70-80	9	120
	N = 120	

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$\left(\frac{N}{4}\right) = \frac{120}{4} = 30$$

Q_1 பிரிவு $= 40 - 50$

$l_1 = 40,\ m_1 = 15,\ f_1 = 21,\ c_1 = 10$

$$\therefore\ Q_1 = 40 + \frac{30-15}{21} \times 10$$

$$= 40 + \frac{150}{21}$$

$$= 40 + 7.14 = 47.14$$

$$Q_2 = \text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$\frac{N}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

இடைநிலை பிரிவு $= 50 - 60$

$l = 50,\ m = 36,\ f = 43,\ c = 10$

இடைநிலை $= 50 + \frac{60-36}{43} \times 10$

$$= 50 + \frac{240}{43}$$

$$= 50 + 5.58$$

$$= 55.58$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\frac{N}{4} - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$3\frac{N}{4} = 3 \times \frac{120}{4} = 90$$

Q_3 பிரிவு $= 60 - 70$

$l_3 = 60,\ m_3 = 79,\ f_3 = 32,\ c_3 = 10$

$$\therefore\ Q_3 = 60 + \frac{90-79}{32} \times 10$$

$$= 60 + \frac{110}{32}$$

$$= 60 + 3.44$$

$$= 63.44$$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{63.44 + 47.14 - 2 \times 55.58}{63.44 - 47.14}$$

$$= \frac{110.58 - 111.16}{16.30}$$

$$= \frac{-0.58}{16.30} = -0.0356$$

7.10.3. விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவை :

விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவையை β_1 என்கிற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். அதன் சூத்திரம்,

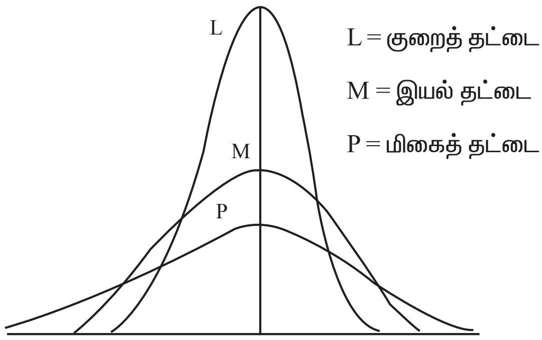
$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

7.11 தட்டையளவு :

ஒரு வளை கோட்டின் உச்சியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள தட்டை அளவு பயன்படுகிறது. மையப் போக்கு அளவை, சிதறல் அளவை மற்றும் கோட்டம் ஆகியவை அலைவெண் பரவலின் பண்புகளை விவரிக்கின்றன. ஆனால் இந்த அளவைகள் பரவலின் பண்புகளைப் பற்றி ஒரு தெளிவான கண்ணோட்டத்தை அளிப்பதில்லை.

வளைவரையின் வடிவத்தை அளப்பதற்கு இரண்டு அளவைகள் உள்ளன. கோட்டம், தொடரின் சமச்சீரின்மையை குறிப்பிடுகிறது மற்றும் தட்டையளவு வளைவரையின் உச்சியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள உதவுகிறது. எல்லா அலைவெண் வளைவரைகளும் வெவ்வேறு உச்சி அளவை அல்லது தட்டை அளவை வெளிப்படுத்துகின்றன. இந்த அலைவெண் வளைவரையின் பண்பே தட்டை அளவு எனப்படுகிறது.

தட்டை அளவையானது அலைவெண் வளைவரையின் உச்சியின் வடிவத்தை குறிப்பிடுகிறது. ஒரு அலைவெண் வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையை விட எந்த அளவு அதிக தட்டையையோ அல்லது குறைந்த தட்டையையோ பெற்றுள்ளது என்பதை தட்டை அளவை மூலம் அறியலாம். சமச்சீரான, மணிவடிவ இயல் நிலை வளைவரையானது "இயல்நிலை" என பெயரிடப்படுகிறது. ஒரு வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையோடு ஒப்பிடும் போது அதிகம் குறுகியும், கூரிய உச்சியை உடையதாகவும் இருந்தால் அது குறைத் தட்டை எனப்படுகிறது. ஒரு வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையோடு ஒப்பிடும் போது அதிக தட்டையாக இருந்தால் அது மிகைத்தட்டை எனப்படுகிறது.



7.11.1 தட்டை அளவை :

ஒரு அலைவெண் பரவலின், விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை சார்ந்த தட்டை அளவை β_2 எனக் குறிக்கப்பட்டு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$\beta_2 = 3$ எனில், அந்தப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவல் என்றும் அதன் வளைவரை இயல்நிலை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

$\beta_2 > 3$ எனில், அந்தப் பரவல் அதிக உச்சியை உடையது என்றும், அதன் வளைவரை குறைத் தட்டை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

$\beta_2 < 3$ எனில், அந்தப் பரவல் அதிக தட்டையை உடையது என்றும், அதன் வளைவரை மிகைத் தட்டை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 25

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு β_1 மற்றும் β_2 ஐக் கண்டுபிடி.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F	5	10	15	20	25	20	15	10	5

தீர்வு :

(குறிப்பு : முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்கத் தொகைகளின் வாய்பாடுகள் எடுத்துக்காட்டு 17 இல் உள்ளன. அவற்றை பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 வைக் காண்க.)

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = \frac{\sum fd^2}{N} = \frac{500}{125} = 4$$

$$\mu_3 = \frac{\sum fd^3}{N} = 0 \qquad \mu_4 = \frac{\sum fd^4}{N} = \frac{4700}{125} = 37.6$$

$$\therefore \beta_1 = \frac{{\mu^2}_3}{{\mu^3}_2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2} = \frac{37.6}{4^2}$$

$$= \frac{37.6}{16} = 2.35$$

β_2 இன் மதிப்பு 3ஐ விட குறைவு. எனவே இந்த வளைவரை மிகைத் தட்டையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 26

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களுக்கு β_1 மற்றும் β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

X :	30-33	33-36	36-39	39-42	42-45	45-48
f :	2	4	26	47	15	6

தீர்வு :

(குறிப்பு : ஆதியை மற்றும் சராசரியைப் பொறுத்து முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 வைக் காண்க)

$\mu_1 = 0,\qquad \mu_2 = 8.76\qquad \mu_3 = -2.91,\qquad \mu_4 = 291.454$

$$\beta_1 = \frac{\mu^2{}_3}{\mu^3{}_2} \qquad \beta_1 = \frac{(-2.91)^2}{(8.76)^3} = \frac{8.47}{672.24} = 0.0126$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} \qquad \beta_2 = \frac{291.454}{(8.76)^2} = 3.70$$

$\beta_2 > 3$ என்பதால், இந்த வளைவரை குறைத்தட்டை ஆகும்.

பயிற்சி – 7

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. கீழ்க்கண்ட சிதறல் அளவைகளில் எது அலகு பெறாத அளவையாகும்.

அ) திட்ட விலக்கம் ஆ) சராசரி விலக்கம்

இ) மாறுபாட்டுக் கெழு ஈ) வீச்சு

2. எதிலிருந்து பெறும் தனித்த விலக்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறுமமாகும்.

அ) முகடு ஆ) இடைநிலை

இ) கூட்டுச் சராசரி ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

3. ஒரு பரவலின் திட்ட விலக்கம் = 6, எல்லா மதிப்புகளையும் 2–ஆல் பெருக்கி பின் அடையும் திட்ட விலக்கமானது

அ) 12 ஆ) 6 இ) 18 ஈ) $\sqrt{6}$

4. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறப்படும் வர்க்க விலக்கங்களின் சராசரியானது

அ) திட்ட விலக்கம் ஆ) மாறுபாடு

இ) சராசரி விலக்கம் ஈ) எதுவுமில்லை

5. ஒரு தொடரின் குறைந்த மதிப்பு 9, அதன் வீச்சு 57, தொடரின் மீப்பெரு மதிப்பானது

அ) 33 ஆ) 66 இ) 48 ஈ) 24

6. கால்மான விலக்கமானது

அ) இடைக்கால்மான வீச்சு　　ஆ) இடைக்கால்மான வீச்சின் இருமடங்கு

இ) இடைக்கால்மான வீச்சில் பாதி　　ஈ) மேற்கூறிய எதுவும் இல்லை

7. விளிம்பு மதிப்புகளால் மிகவும் பாதிக்கப்படும் அளவை எது ?

அ) திட்ட விலக்கம்　　ஆ) கால்மான விலக்கம்

இ) சராசரி விலக்கம்　　ஈ) வீச்சு

8. அதிக நம்பகத் தன்மையுடன் அளக்கும் சிதறல் அளவை யாது ?

அ) வீச்சு　　ஆ) சராசரி விலக்கம்

இ) கால்மான விலக்கம்　　ஈ) திட்டவிலக்கம்

9. எதிரிடை கோட்ட பரவலுக்கு சரியான சமனிலி யாது ?

அ) முகடு < இடைநிலை　　ஆ) கூட்டுச்சராசரி < இடைநிலை

இ) கூட்டுச்சராசரி < முகடு　　ஈ) மேற்கூறிய எதுவும் இல்லை

10. நேரிடை கோட்ட பரவலில், விளிம்பு மதிப்புகள் அமைந்திருப்பது

அ) இடதுபுறம்　　ஆ) வலதுபுறம்

இ) நடுவில்　　ஈ) எந்த இடத்திலும்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

11. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவையானது __________ விடுபட்டது.

12. திறந்த வெளி பரவல்களுக்கு உகந்த அளவை __________.

13. ஒரு சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனித்த விலக்கங்களின் சராசரியானது __________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.

14. மாறுபாடு 36, எனில் திட்டவிலக்கம் __________.

15. 5, 5, 5, 5, 5 ஆகிய ஐந்து மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கம் __________ .

16. 10 மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கம் 10, ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 5ஐக் கூட்ட கிடைக்கும் மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கமானது __________.

17. இரண்டாவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எப்பொழுதும் __________.

18. $\bar{x} = 50$, முகடு $= 48$, $\sigma = 20$, என்றால் கோட்டக் கெழுவானது __________.

19. சமச்சீர் பரவலில் கோட்டக் கெழு __________.

20. $\beta_2 = 3$ என்றால், அந்தப் பரவல் __________ என்று அழைக்கப்படும்.

III. கீழ்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்க :

21. ‘சிதறல்’ என்பதின் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய் ? சிதறல் அளவை எந்த நோக்கத்திற்காக பயன்படுத்தப்படுகிறது ?

22. பல்வேறு சிதறல் அளவைகளை ஆய்வு செய்க.

23. நல்ல சிதறல் அளவையின் பண்புகள் யாவை ?

24. சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக் கெழு இவற்றை வரையறு.

25. தனித்த மட்டும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

26. சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் யாவை ?

27. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு இவற்றை வரையறு.

28. கால்மான விலக்கத்தின் எல்லா சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகளை குறிப்பிடுக.

29. திட்ட விலக்கத்தை வரையறுத்து அதன் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகளை குறிப்பிடுக.

30. மாறுபாட்டுக் கெழு என்றால் என்ன ? அதன் நோக்கம் என்ன ?

31. கோட்டம் என்பதன் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய் ? கோட்ட அளவையை அளக்கும் பல்வேறு முறைகள் யாவை ?

32. தட்டை அளவு என்பதன் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய் ? தட்டையளவை அளக்கும் முறை யாது ?

33. கோட்டம் மற்றும் தட்டையளவை வேறுபடுத்தி காட்டுக. மேலும் அலைவெண் பரவலை விளக்க அவற்றின் முக்கியத்துவம் யாது ?

34. விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளை வரையறு. மேலும் ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்குப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை இவற்றை வேறுடுத்திக் காட்டுக.

35. முதல் நான்கு விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளுக்கு, ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிப்பிடுக.

36. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக.

உயரங்கள் (அங்குலத்தில்) :	58	59	60	61	62	63	64	65	66
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை :	15	20	32	35	33	22	20	10	8

37. கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக.

அளவு :	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
அலைவெண் :	6	10	18	30	15	12	10	6	2

38. கீழ்க்கண்ட விவரங்களில், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடுக.

X :	2	4	6	8	10
F :	1	4	6	4	1

39. இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடுக.

வயது	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
மக்களின் எண்ணிக்கை	9	16	12	26	14	12	6	5

40. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

அளவு	6	7	8	9	10	11	12
அலைவெண்	3	6	9	13	8	5	4

41. கீழ்க்கண்ட தொடரில் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

பிரிவுகள்	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
அலைவெண்	8	12	15	9	6

42. கீழ்க்கண்ட இரு கிரிக்கெட் வீரர்களில், ஓட்டங்களை குவிப்பதில் மிகவும் நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் யார் என்பதைக் காண்க.

கிரிக்கெட் வீரர் A	5	7	16	27	39	53	56	61	80	101	105
கிரிக்கெட் வீரர் B	0	4	16	21	41	43	57	78	83	93	95

43. இரண்டு கிராமங்களின் வருமானத்தைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	கிராமம் A	கிராமம் B
நபர்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரி வருமானம் (ரூ)	175	186
வருமானத்தின் மாறுபாடு (ரூ)	100	81

எந்த கிராமத்தின் வருமானத்தில் மாறுபாடு அதிகமாக உள்ளது ?

44. கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கு கார்ல்–பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

தினக்கூலி (ரூபாயில்)	150	200	250	300	350	400	450
மக்களின் எண்ணிக்கை	3	25	19	16	4	5	6

45. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு பௌலியின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

அளவு	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
அலைவெண்	14	24	38	20	4

46. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தினக்கூலி	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	8	11	18	9	4

IV செய்து பார்க்க :

47. வெவ்வேறு அளவுகள் கொண்ட இரு குழுக்களை உன் வகுப்பில் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்களுக்கான சராசரி, திட்ட விலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழுவை கண்டுபிடித்து, எந்த குழு அதிக திறன் பெற்றது எனக் காண்க.

விடைகள்

I.

1. (இ) 2. (இ) 3. (இ) 4. (ஆ) 5. (ஆ)

6. (இ) 7. (ஈ) 8. (ஈ) 9. (இ) 10. ஆ)

II.

11. அலகுகள் 12. கால்மானவிலக்கம் 13. சராசரி 14. 6

15. பூஜ்யம் 16. 15 17. மாறுபாடு 18. 0.1

19. பூஜ்யம் 20. மிகைத்தட்டை.

III.

36. கால்மான விலக்கம் = 1.5 37. கால்மான விலக்கம் = 5.2085

38. சராசரி விலக்கம் = 1.5 39. சராசரி விலக்கம் = 7.35

40. திட்டவிலக்கம் = 1.67 41. திட்டவிலக்கம் = 12.3

42. திட்ட விலக்கம் A = 67.06, திட்ட விலக்கம் B = 68.8

43. மாறுபாட்டுக் கெழு A = 5.71 % ; மாறுபாட்டுக்கெழு B = 4.84 % கிராமம் A இன் வருமானத்தில் மாறுபாடு அதிகமாக உள்ளது.

44. கோட்டக்கெழு Sk = 0.88

45. கோட்டக் கெழு Sk = – 0.13

46. $\beta_1 = 0.006$ $\beta_2 = 2.305$

8. ஒட்டுறவு

8.1 அறிமுகம் :

பாமர மனிதனால், ஒட்டுறவு என்ற சொல் அவன் அறியாமலேயே பயன்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக பெற்றோர்கள் தங்கள் குழந்தைகளிடம், கடினமாக உழைத்தால் தான் நல்ல மதிப்பெண் பெற முடியும் என்று கூறுமிடத்து, கடின உழைப்பையும் நல்ல மதிப்பெண்களையும் தொடர்புபடுத்துகின்றனர்.

உயரம், எடை, வயது, மதிப்பெண்கள், தினக்கூலி போன்ற ஒரு மாறிப் பண்புகளைப் பற்றி மட்டுமே ஆய்வு செய்வது, ஒரு மாறிப் பகுப்பாய்வு எனப்படும். இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பினைப் பற்றிய புள்ளியியல் ஆய்வு இருமாறி பகுப்பாய்வு எனப்படும். சில சமயங்களில் மாறிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

உடல் நல அறிவியலில், இரத்த அழுத்தம் மற்றும் வயது, சத்துணவு மற்றும் எடைக் கூடுதல், மொத்த வருமானம் மற்றும் மருத்துவ செலவு ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன என அறியலாம். இவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள் அவற்றின் பண்புகள், தாக்கம் ஆகியவை பற்றி ஒட்டுறவு மற்றும் உடன் தொடர்பு பகுப்பாய்வு மூலம் ஆராயலாம்.

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக தந்தை, மகளின் உயரம், மழையளவு மற்றும் விளைச்சல், ஊதியம் மற்றும் விலைக் குறியீடு, பங்கு மற்றும் கடன் பத்திரங்கள் ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

ஒட்டுறவு ஒரு புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு இது இரு மாறிகள் எந்த அளவிற்கு ஒன்றை ஒன்று பாதிக்கின்றன என்பதை அளக்க கூடியது. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான "தொடர்பு" என்ற வார்த்தை இங்கு முக்கியமானது. இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உறவினைக் குறிக்கின்றது. ஒட்டுறவு என்பது காரண விளைவுத் தொடர்பைக் குறிக்காது. விலை–அளிப்பு, வரவு–செலவு என்பன தொடர்புடையன.

வரையறைகள் :

ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு என்பது இருமாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அளவிடும் முயற்சி ஆகும். – யா – குன் – சௌ (Ya - Kun - Chou)

‘ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவையின் பகுப்பாய்வு ஆகும்.’

ஏ. எம். டட்டில் (A.M. Tuttle)

இருமாறி கணங்கள், எவ்வாறு ஒன்றை ஒன்று சார்ந்துள்ளன என்பதை விளக்குகிறது. ஒரு மாறியானது சாராத மாறி எனவும், மற்றொன்று அதைச் சார்ந்த மாறி எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. சார்ந்த மாறியின் மதிப்பு, சாராத மாறியின் மூலம் அளவிடப்படுகிறது.

ஒட்டுறவின் பயன்கள் :

1. இது உடலறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

2. பொறியியல் வல்லுநர்களுக்கு, விலை, அளவு போன்ற மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பு அறிய உதவுகிறது. வியாபாரிகள், ஒட்டுறவைப் பயன்படுத்தி, செலவு, விற்பனை, விலை போன்றவற்றை மதிப்பிடுகின்றனர்.

3. தொடர்பின் அளவை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

4. கூறு பிழையைக் கணக்கிட இயலும்.

5. 'உடன் தொடர்பு' என்ற சொல்லுக்கு அடிப்படையாக விளங்குகிறது.

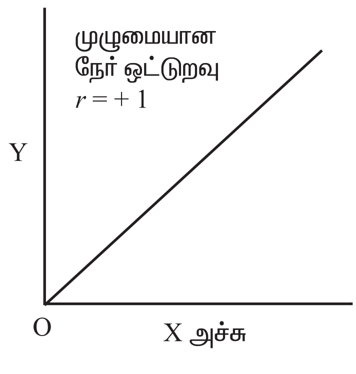
சிதறல் விளக்கப் படம் :

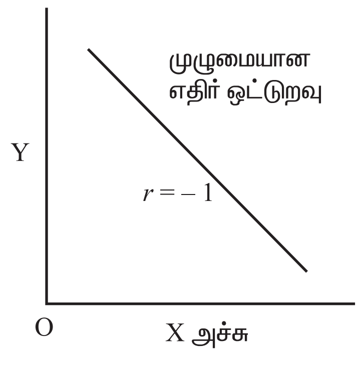
இது, இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பைப் படங்கள் மூலம் அறிய உதவும் எளிய முறையாகும். ஒரு மாறி கிடைக்கோட்டிலும், இரண்டாவது மாறி அதற்கு குத்துக் கோட்டிலும் குறிக்கப் படுகிறது. ஒவ்வொரு மாறிச் சோடிகளையும் புள்ளிகளாகத் தளத்தில் குறிக்க வேண்டும். கண்டறியப்பட்ட இரு மாறிச் சோடிகளுக்கான, பல புள்ளிகள் தளத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. இப்புள்ளிகளின் சிதறல் அல்லது ஒருங்கமைவு புள்ளிகளின் திசைைக் காட்டுவதாக அமையும்.

I. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும்

1. கீழ் இடது முனையிலிருந்து, மேல் வலது முனை வரையிலும் ஒரு நேர்கோட்டை அமைக்குமானால், அங்கு முழுமையாக "நேர் ஒட்டுறவு" உள்ளது எனலாம். இங்கு $r = +1$

2. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது மேல் முனையில் இருந்து, வலது கீழ் முனை வரை ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்குமானால் அங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையில் முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். இங்கு, ஒட்டுறவுக் கெழு $r = -1$.



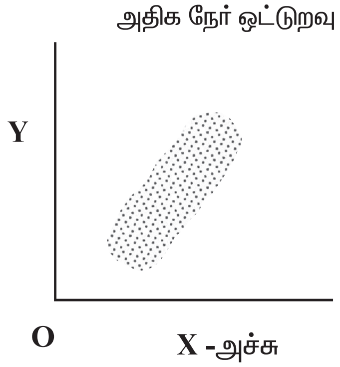


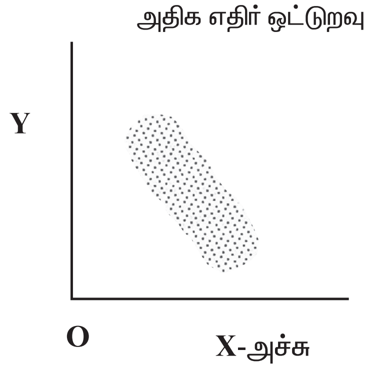
II.

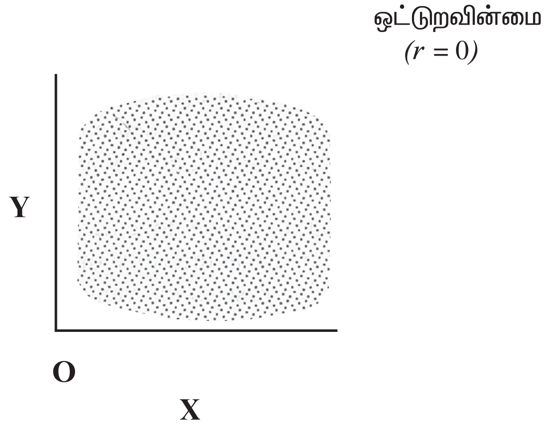
1. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது கீழ் முனையில் இருந்து, வலது மேல் முனைக்கு உயருகின்ற பட்டை வடிவத்தைப் பெற்றிருக்குமானால், தொடர்புடைய இரு மாறிகளும் மிக அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.

2. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் குறுகிய பட்டை வடிவத்தில் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ் முனைக்கு இறங்குமானால் இரு மாறிகளும், மிக அதிக அளவில் எதிர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.

3. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் படம் முழுவதிலும் சிதறி இருக்குமானால் அம்மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை எனலாம். இங்கு $r = 0$.







நிறைகள் :

1. இரு மாறிகளுக்கிடையிலான ஒட்டுறவைக் காண்பதில் இம்முறை மிக எளிமையாகவும், கவன ஈர்ப்பு உடையதாகவும் அமைகிறது.
2. ஒட்டுறவு பற்றி அறிய உதவும் கணக்கியலல்லாத முறையாகும். இது எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியது.
3. முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
4. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில், இது முதல் படியாகும்.
5. பார்த்த மாத்திரத்திலேயே இது நேர் ஒட்டுறவா, அல்லது எதிர் ஒட்டுறவா என அறிய இயலும்.

குறைகள் :

இம்முறையில் இரு மாறிகளுக்கிடையிலான சரியான அளவு ஒட்டுறவைக் காண இயலாது.

ஒட்டுறவின் வகைகள் :

ஒட்டுறவு பல வகைகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அவற்றில் முக்கியமானவை.

1. நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு
2. நேர்க்கோடு மற்றும் வளைக்கோட்டு உறவுகள்
3. பகுதி மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு
4. சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு

நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு :

இது இரு மாறிகளின் மாற்றங்கள் செல்லும் திசையைப் பொறுத்தது. இரு மாறிகளும் ஒன்றாக ஒரே திசையில் நகருமானால் அதாவது ஒரு மாறியின் அதிகரிப்பு, மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை அதிகரிக்கச் செய்வதால், அல்லது ஒரு மாறி மதிப்பின் குறையும் தன்மை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் குறையச் செய்யுமானால், அவ்வொட்டுறவு மிகை அல்லது நேர் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும். விலை–அளிப்பு, உயரம்–எடை மழை அளவு–விளைச்சல் என்பன நேர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இரு மாறிகளும் ஒன்றாக எதிர்திசையில் செல்லுமானால், அதாவது ஒரு மாறி மதிப்பு அதிகரிப்பதால், மற்றொரு மாறியின் மதிப்பு குறையும்பொழுதோ, ஒரு மாறியின் மதிப்புக் குறைவு மற்றொரு மாறி மதிப்பனை அதிகரிக்கச் செய்யும் பொழுதோ, அவ்வொட்டுறவு எதிர் ஒட்டுறவு அல்லது தலைகீழ் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும்

விலை–தேவை, பயிர் விளைச்சல்–விலை என்பன எதிர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்.

நேர்க்கோடு மற்றும் வளைகோட்டு ஒட்டுறவுகள் :

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான மாற்றங்களின் விகிதம் மாறாமல் இருக்குமானால் அவற்றிற்கிடையே நேர்க்கோட்டு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். பின்வரும் அட்டவணையைக் கருதுக.

X	2	4	6	8	10	12
Y	3	6	9	12	15	18

இங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையிலான விகிதம் மாறாமல் உள்ளது. இப்புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தில் குறித்தால் நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கும்.

ஒரு மாறி மதிப்பில் உள்ள மாற்றங்கள் மற்ற மாறி மதிப்பின் மாற்றங்களிடையே மாறிலி விகிதத்தை ஏற்படுத்தாத பொழுது, அவ்வுறவு வளைகோட்டு உறவு எனப்படும். இதன் வரைபடம் ஒரு வளைவரையாகும்.

பகுதி மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு :

மற்ற மாறிகளின் விளைவுகளை நீக்கிவிட்டு, இரு மாறிகளைப் பற்றி மட்டும் ஆய்வு செய்வது பகுதி ஒட்டுறவு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக விலை–தேவை பற்றி ஆய்வு செய்யும் பொழுது அதற்கு தொடர்பான அளிப்புப் பகுதியின் விளைவை நீக்கிவிடுதல்.

சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு :

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பை மற்றும் ஆய்வு செய்வது தனி ஒட்டுறவு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, பணத்தின் அளவு மற்றும் விலைவாசி, நிலவரம், தேவை மற்றும் விலை இவற்றைப் பற்றி ஆய்வு செய்வதாகும்.

ஆனால் பல்சார் ஒட்டுறவானது, பொருட்களின் விலை மீது தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றின் இணைந்த விளைவைப் பற்றியதாகும்.

ஒட்டுறவு கணக்கீடு :

இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு இருக்குமெனில், அத்தொடர்பின் அளவை அளவிட வேண்டும். அவ்வளவையானது, ஒட்டுறவு அளவை அல்லது ஒட்டுறவுக்கெழு என்று அழைக்கப்படும். இது 'r' என்று குறிக்கப்படுகிறது.

உடன் மாறுபாட்டளவை :

x,y மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவை Cov (x, y) = $\dfrac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$ இங்கு $\bar{x}, \bar{y}$ என்பன x, y மாறிகளின் சராசரிகள் 'n' என்பது மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

'கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக்கெழு :

கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) என்ற உயிர் புள்ளியியல் மற்றும் புள்ளியியல் நிபுணர், இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை அளப்பதற்கு ஒரு கணிதவியல் முறையைக் கொடுத்துள்ளார். நடைமுறையில் இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது. மேலும் இம்முறையில் கணக்கிடப்படும் ஒட்டுறவுக் கெழு பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு என அழைக்கப்படுகிறது. இது பின்வரும் வாய்ப்பாட்டால் கணக்கிடப்படுகிறது.

(i) $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y}$ இங்கு σ_x, σ_y என்பன x, y இன் திட்ட விலக்கங்கள்

(ii) $r = \dfrac{\sum xy}{n\ \sigma_x\ \sigma_y}$

(iii) $r = \dfrac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2.\Sigma Y^2}}$, $X = x-\bar{x}$, $Y = y-\bar{y}$

சரியான சராசரி காண இயலும்பொழுது மேற்கண்ட முதல் இரு முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

மூன்றாவது வாய்ப்பாடு, கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது. மேலும் இம்முறையில் x, y வரிசைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் காண வேண்டிய அவசியமில்லை.

படிகள் :

1. x, y என்ற வரிசைகளின் சராசரி காண வேண்டும்.
2. இரு வரிசைகளின் $\bar{x}, \bar{y}$ ல் இருந்து விலகல் எடுக்க வேண்டும்.

   $X = x-\bar{x}$, $Y = y-\bar{y}$
3. x, y இவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கண்டு, அவ்வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் காண்க. அது ΣX^2, ΣY^2 என்று குறிக்கப்படட்டும்.
4. x, y யில் இருந்து பெறப்படும் விலக்கங்களைப் பெருக்கி அவற்றின் மொத்தம் காண வேண்டும். இது உடன் மாறுபாட்டளவையாகும்.
5. இம் மதிப்புகளை வாய்ப்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma x.\sigma y} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y\ -\ \bar{y})/n}{\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}.\sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}}$$

மேற்கண்ட வாய்பாடு பின்வருமாறு எளிமையாக்கப்படுகிறது.

$$\text{r} = \frac{\sum \text{XY}}{\sqrt{\sum \text{X}^2\ .\ \sum \text{Y}^2}}\ , \qquad \text{X} = x - \bar{x}\ , \text{Y} = y - \bar{y}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

தந்தை (x) மற்றும் (y) மகன் இவர்களின் உயரங்களுக்கிடையிலான ‘கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை’ பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து கணக்கிடுதல். மேலும் முடிவினைப் பற்றி கருத்து தெரிவிக்க.

x	64	65	66	67	68	69	70
y	66	67	65	68	70	68	72

தீர்வு :

x	y	$X = x - \bar{x}$ $X = x - 67$	X^2	$Y = y - \bar{y}$ $Y = y - 68$	Y^2	XY
64	66	-3	9	-2	4	6
65	67	-2	4	-1	1	2
66	65	-1	1	-3	9	3
67	68	0	0	0	0	0
68	70	1	1	2	4	2
69	68	2	4	0	0	0
70	72	3	9	4	16	12
469	476	0	28	0	34	25

$$\bar{x} = \frac{469}{7} = 67\ ;\ \bar{y} = \frac{476}{7} = 68$$

$$\text{r} = \frac{\sum \text{XY}}{\sqrt{\sum \text{X}^2\ .\ \sum \text{Y}^2}} = \frac{25}{\sqrt{28}\sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{952}} = \frac{25}{30.85} = 0.81$$

$r = +\ 0.81$ என்பதிலிருந்து இருமாறிகளும் அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையன. அதாவது உயரமான தந்தை, உயரமான மகனைப் பெற்றிருப்பார்.

கணக்கிடும் முறை

பின்வரும் வாய்பாட்டின் மூலம் 'r' காண இயலும்.

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\Sigma(xy+\bar{x}\bar{y}-\bar{y}x-\bar{x}y)}{n}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\bar{y}\Sigma x}{n} - \frac{\bar{x}\Sigma y}{n} + \frac{\Sigma \bar{x}\bar{y}}{n}$$

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma xy}{n} - \cancel{\bar{y}\bar{x}} - \bar{x}\bar{y} + \cancel{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2, \quad \sigma y^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

இங்கு $r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x . \sigma_y}$

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2\right)} . \sqrt{\left(\frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2\right)}}$$

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட முறையில் மாறிகளின் சராசரி அல்லது திட்டவிலக்கம் தனித்தனியாக கணக்கிட வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

தீர்வு :

x	y	x^2	y^2	xy
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	15	81	225	135
45	108	285	1356	597

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$r = \frac{9\times 597 - 45\times 108}{\sqrt{\left(9\times 285 - (45)^2\right).\left(9\times 1356 - (108)^2\right)}}$$

$$r = \frac{5373 - 4860}{\sqrt{(2565 - 2025)\,.\,(12204 - 11664)}}$$

$$= \frac{513}{\sqrt{540\times 540}} = \frac{513}{540} = 0.95$$

கணக்கீடு முறை (II) சுருக்கு முறை

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{Cov}\,(x,\,y)}{\sigma_x,\sigma_y}$$

இங்கு Cov (x, y) = $\dfrac{\sum (x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n}$

x இல் இருந்து கிடைக்கும் விலகலை x – A என்றும், y லிருந்து கிடைக்கும் விலகலை y – B என்றும் கொள்க.

$$\mathrm{Cov}(x,\,y) = \frac{\sum\left[(x-A)-(\bar{x}-A)\right]\left[(y-B)-(\bar{y}-B)\right]}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum\Big[(x-A)\,(y-B) - (x-A)\,(\bar{y}-B)$$

$$- (\bar{x}-A)\,(y-B) + (\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\sum\Big[(x-A)\,(y-B) - (x-A)\,(\bar{y}-B)\,\frac{\sum(x-A)}{n}$$

$$- (\bar{x}-A)\,\frac{\sum(y-B)}{n} + \frac{\sum(\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)}{n}$$

$$= \frac{\sum(x-A)\,(y-B)}{n} - (\bar{y}-B)\,(\bar{x}-\frac{nA}{n})$$

$$-(\bar{x}-A)\,(\bar{y}-\frac{nB}{n}) + (\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)$$

$$= \frac{\sum(x-A)\,(y-B)}{n} - (\bar{y}-B)\,(\bar{x}-A)$$

$$- \cancel{(\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)} + \cancel{(\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)}$$

$$= \frac{\sum(x-A)\,(y-B)}{n} - (\bar{x}-A)\,(\bar{y}-B)$$

Let $x - A = u\,;\; y - B = v\,;\;\; \bar{x} - A = \bar{u}\;\;;\;\; \bar{y} - B = \bar{v}$

$$\therefore \text{Cov}(x,y) = \frac{\Sigma uv}{n} - \bar{u}\bar{v}$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\Sigma u^2}{n} - \bar{u}^2 = \sigma u^2$$

$$\sigma_y{}^2 = \frac{\Sigma v^2}{n} - \bar{v}^2 = \sigma v^2$$

$$\therefore r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{\left[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2\right].\left[(n\Sigma v^2) - (\Sigma v)^2\right]}}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

X	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
Y	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

தீர்வு :

X	Y	u = X - A	v = Y - B	u^2	v^2	uv
45	56	-20	-14	400	196	280
55	50	-10	-20	100	400	200
56	48	-9	-22	81	484	198
58	60	-7	-10	49	100	70
60	62	-5	-8	25	64	40
65	64	0	-6	0	36	0
68	65	3	-5	9	25	-15
70	70	5	0	25	0	0
75	74	10	4	100	16	40
80	82	15	12	225	144	180
85	90	20	20	400	400	400
மொத்தம்		2	-49	1414	1865	1393

$$\text{r} = \frac{\text{N}\Sigma uv - (\Sigma u)\ (\Sigma v)}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u^2)]\ [n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}}$$

$$r = \frac{11 \times 1393 - 2 \times (-49)}{\sqrt{(1414 \times 11 - (2)^2) \times (1865 \times 11 - (-49)^2)}}$$

$$= \frac{15421}{\sqrt{15550 \times 18114}} = \frac{15421}{16783.11} = +0.92$$

தொகுக்கப்பட்ட இரு மாறிப் பரவலின் ஒட்டுறவு கணக்கிடல் :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருப்பின் அவ்விவரமானது இரு மாறி நிகழ்வெண் பரவலாக பாகுபாடு செய்யப்படும். இவ்விதம் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட அட்டவணை ஒட்டுறவு அட்டவணை எனப்படும். X இன் பிரிவுகள் நிரைகளாகவும் Y இன் பிரிவுகள் நிரல்களாகவும் வரிசைபடுத்தப்படும். இதை மாற்றியும் எழுதலாம். அட்டவணையில் உள்ள ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் நிகழ்வெண் கண்டுபிடிக்கப்படும்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான சமன்பாடு

$$r = \frac{\text{Cov}\,(x, y)}{\sigma_x, \sigma_y} \text{ இங்கு } \text{Cov}\,(x, y) = \frac{\sum f\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{N}$$

$$= \frac{\sum fxy}{N} - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$\sigma^2 x = \frac{\sum fx^2}{N} - \bar{x}^2 \; ; \; \sigma^2 y = \frac{\sum fy^2}{N} - \bar{y}^2$$

N – மொத்த நிகழ்வெண்

$$r = \frac{N\Sigma fxy \; - \; (\Sigma fx)\;(\Sigma fy)}{\sqrt{[N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2].[N\Sigma fy^2 - (\Sigma fy)^2]}}$$

தேற்றம் : ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மாற்றத்தினால் அல்லது அளவு மாற்றத்தால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

$$u = \frac{x-A}{c} \; ; v = \frac{y-B}{d} \text{ எனில் } r_{xy} = r_{uv}$$

நிரூபணம் :

$$u = \frac{x-A}{c}$$

$$cu = x - A \quad x = cu + A$$

$$\bar{x} = c\bar{u} + A \quad v = \frac{y-B}{d} \quad vd = y - B$$

$$y = B + vd \; \bar{y} = [B + \bar{v}d]$$

$$\sigma_x = c\sigma_u \; ; \sigma_y = d\sigma_v$$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}\,(x, y)}{\sigma_x\,,\sigma_y}$$

$$\text{cov}\,(x, y) = \frac{\sum f\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n}$$

$$\frac{1}{n}\sum f\left[(cu+A)-(c\bar{u}+A)\right]\left[(dv+B)-(d\bar{v}+B)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum f\left[cu - c\bar{u}\right]\left[(dv - d\bar{v})\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left[c(u-\bar{u})\right]\left[(d(v-\bar{v})\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\,cd\left[u-\bar{u}\right]\left[v-\bar{v}\right]$$

$$= \frac{1}{N}cd\sum f\left(u-\bar{u}\right)\left(v-\bar{v}\right)$$

$$= cd\,\frac{\sum f\left(u-\bar{u}\right)\left(v-\bar{v}\right)}{N} = cd \quad \text{cov}\,(u, v)$$

$$\therefore\ \text{cov}\,(x, y) = c.d\ \text{cov}\,(u, v)$$

$$\therefore r_{xy} = \frac{\text{cov}\,(x, y)}{\sigma_x\ \ \sigma_y} = \frac{c.d\ \text{cov}\,(u, v)}{c..\sigma_u\ \ d.\sigma_v} = \frac{\text{cov}\,(u, v)}{\sigma u\ \ \sigma v} = r_{uv}$$

$$\therefore r_{xy} = r_{uv}$$

படிகள் :

1. மாறி X இன் படி விலகல் எடுத்து அதை படிவிலகல் 'u' எனக் குறிக்கலாம்.
2. மாறி Y இன் படி விலகல் எடுத்து அவ்விலகலை 'v' எனக் குறிக்கவும்.
3. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் uv ஐ நிகழ்வெண்ணால் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பெருக்கல் பலனை கீழ் வலது முனையில் எழுதவும்.
4. படி (3) இல் கூறியபடி முனைகளில் எழுதப்பட்ட எண்களைக் கூட்டி Σfuv பெறவும்.
5. 'u' வை 'f' ஆல் பெருக்கி Σfu காணவும்.
6. u^2 ஐ 'f' ஆல் பெருக்கி Σfu^2 பெறவும். இதே போல Σfv மற்றும் Σfv^2 காணவும். இம்மதிப்புகளை வாய்ப்பாட்டில் பிரதியிட்டு 'r' இன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4

132 மாணவர்கள் இரு தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்புகள் பின்வருமாறு

தேர்வு - 1 / தேர்வு - 2	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	மொத்தம்
20-30	2	5	3			10
30-40	1	8	12	6		27
40-50		5	22	14	1	42
50-60		2	16	9	2	29
60-70		1	8	6	1	16
70-80			2	4	2	8
மொத்தம்	3	21	63	39	6	132

இதற்கான ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடவும். X என்பது முதல் தேர்வு மதிப்பெண், Y என்பது 2–ஆவது தேர்வு மதிப்பெண்ணையும் குறிக்கட்டும்

$$u = \frac{x-55}{10} \quad v = \frac{y-45}{10}$$

x இன் நடுமதிப்பு y இன் நடுமதிப்பு	35	45	55	65	75	F	v	fv	fv^2	fuv
25	4 2 8	2 5 10	0 3 0	-	-	10	-2	-20	40	18
35	2 1 2	1 8 8	0 12 0	-1 6 −6	-	27	-1	-27	27	4
45		0 5 0	0 22 0	0 14 0	0 1 0	42	0	0	0	0
55		-1 2 −2	0 16 0	1 9 9	2 2 4	29	1	29	29	11
65		-2 1 −2	0 8 0	2 6 12	4 1 4	16	2	32	64	14
75			0 2 0	3 4 12	6 2 12	8	3	24	72	24
f	3	21	63	39	6	132	3	38	232	71
u	-2	-1	0	1	2	0				
fu	-6	-21	0	39	12	24	சரிபார்க்கவும்			
fu^2	12	21	0	39	24	96				
fuv	10	14	0	27	20	71				

$$r = \frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)\ (\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2].[N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}}$$

$$= \frac{132\times 71 - 24\times 38}{\sqrt{[132\times 96 - (24)^2]\ [132\times 232 - (38)^2]}}$$

$$= \frac{9372 - 912}{\sqrt{(12672 - 576)\ (30624 - 1444)}}$$

$$= \frac{8460}{109.96\times 170.82}$$

$$= \frac{8460}{18786.78}$$

$$= 0.4503$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடுக.

(வயது வருடங்களில்)

மதிப்பெண்	18	19	20	21	22
0-5	-	-	-	3	1
5-10	-	-	-	3	2
10-15	-	-	7	10	-
15-20	-	5	4	-	-
20-25	3	2	-	-	-

$$u = \frac{x - 12.5}{5}$$

$$v = \frac{y - 20}{1}$$

தீர்வு :

x இன் நடுமதிப்பு y இன் நடுமதிப்பு	18	19	20	21	22	f	v	fv	fv^2	fuv
2.5	-	-	-	2 3 $\lceil -6$	-4 1 $\lceil -4$	4	-2	-8	16	-10
7.5	-	-	-	-1 3 $\lceil -3$	-2 2 $\lceil -4$	5	-1	-5	5	-7
12.5	-	-	0 7 $\lceil 0$	0 10 $\lceil 0$	-	17	0	0	0	0
17.5	-	-1 5 $\lceil -5$	0 4 $\lceil 0$	-	-	9	1	9	9	-5
22.5	-4 3 $\lceil -12$	-2 2 $\lceil -4$	-	-	-	5	2	10	20	-16
f	3	7	11	16	3	40	0	6	50	-38
u	-2	-1	0	1	2	0	சரிபார்க்கவும்			
fu	-6	-7	0	16	6	9				
fu^2	12	7	0	16	12	47				
fuv	-12	-9	0	-9	-8	-38				

$$r = \frac{N\Sigma fuv \ - \ (\Sigma fu)\ (\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2].[N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}}$$

$$= \frac{40(-38) - 6\times 9}{\sqrt{[40\times 50 - 6^2].[40\times 47 - 9^2]}}$$

$$= \frac{-1520 - 54}{\sqrt{(2000-36)\times(1880-81)}} = \frac{-1574}{\sqrt{1964\times 1799}} = -0.8373$$

ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பண்புகள்

1. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு **–1** ற்கும் +**1** ற்கும் இடையில் அமைகிறது.

அதாவது, $-1 \le r \le +1$

$x' = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}; \quad y' = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$ என்க

வர்க்கங்களின் கூடுதல் எப்பொழுதும் மிகை என்பதால் $\Sigma(x' + y')^2$

$\Sigma(x' + y')^2 \ge 0$

$\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + 2\,\Sigma x'\,y' \ge 0$

$$\Sigma = \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \Sigma\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 + 2\Sigma\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right) \ge 0$$

$$\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{\sigma_{x^2}} + \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{\sigma_{y^2}} + \frac{2\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\,\sigma_x} \ge 0$$

'n' ஆல் வகுக்க

$$\frac{1}{\sigma_{x^2}}\cdot\frac{1}{n}\quad\Sigma(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{\sigma_{y^2}}\cdot\frac{1}{n}\;\Sigma(y-\bar{y})^2$$

$$+\frac{2}{\sigma_x\,\sigma_y}\cdot\frac{1}{n} + \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \ge 0$$

$$\frac{1}{\sigma_{x^2}}\cdot\sigma_{x^2} + \frac{1}{\sigma_{y^2}}\cdot\sigma_{y^2} + \frac{2}{\sigma_x\,\sigma_y}\cdot\operatorname{cov}(x, y) \ge 0$$

$1 + 1 + 2r \ge 0$

$2 + 2r \ge 0$

$2\,(1 + r) \ge 0$

$(1 + r) \ge 0$

$r \ge -1$ or $-1 \le r$ .... (1)

இதே போல் $\Sigma(x'\,y')^2 \ge 0$

$2\,(1 - r) \ge 0$

$1 - r \ge 0$

$r \le +1$ .... (2)

(1) + (2) விலிருந்து $-1 \le r \le 1$

குறிப்பு :

பண்பு **1 :** $r = +1$ எனில் முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு.

$r = -1$ எனில் முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு ஆகும்.

பண்பு 2 : ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மாற்றத்தாலோ, அளவு மாற்றத்தாலோ பாதிக்கப்படுவதில்லை.

பண்பு 3 : ஒட்டுறவுக் கெழுவானது எந்த ஒரு அலகையும் குறிக்காத ஒரு எண்ணாகும்.

பண்பு 4 : ஒன்றை ஒன்று சாராத மாறிகள் தொடர்புடையன அல்ல.

பண்பு 5 : ஒட்டுறவுக் கெழுவானது, இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்கலின் பெருக்கல் சராசரியாகும்.

பண்பு 6 : x, y இன் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது சமச்சீர் தன்மை உடையது. அதாவது $r_{xy} = r_{yx}$.

குறைகள் :

1. எடுத்துக் கொண்ட கொள்கை சரியா அல்லது தவறா என்பதைக் கருதாமல் ஒரு நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே ஒட்டுறவுக் கெழு கூறுகிறது.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவில் மாறிகளின் முனை உறுப்புகள் பொருந்தாத முறையில் செயல்படுத்தப்படுகின்றன.
3. ஒட்டுறவுக்கெழு இருக்கிறது என்பதனால் அது காரண விளைவுகளைக் குறிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

தெரிவாக்கம் :

'r' இன் மதிப்பைப் பற்றி தெளிவாக எடுத்துரைக்க கீழ்க்கண்ட விதிகளைப் பின்பற்றுகிறோம்.

1. $r = 1$, எனில் இரு மாறிகளுக்கிடையில் நேரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.
2. $r = -1$ எனில், இரு மாறிகளுக்கிடையில் எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.
3. $r = 0$, எனில், இரு மாறிகளுக்கிடையில் தொடர்பு இல்லை எனலாம்.
4. ஒட்டுறவு +1 அல்லது −1ற்கு அருகில் இருக்குமெனில் இரு மாறிகளுக்கிடையே குறிப்பிடத்தகுந்த அளவு மிக அதிகமான நேர் ஒட்டுறவு அல்லது எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

   ஒட்டுறவுக் கெழு 0 விற்கு அருகில் உள்ள பொழுது (மிகை அல்லது குறை திசையில்) இரு மாறிகளுக்கிடையே மிகக் குறைவான நேர் ஒட்டுறவு அல்லது எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

தர வரிசை ஒட்டுறவு :

தொகுதிப் பண்பளவைகளின் எந்த வித கருத்துக்களும் எடுத்துக் கொள்ளாத பொழுது தர வரிசை ஒட்டுறவு காணப்படுகிறது. இது தரத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது பண்பளவுகளான, நேர்மை, நிறங்கள், அழகு, புத்திக் கூர்மை, குணநலன்கள், ஒழுக்கம் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிய பயன்படுகிறது. ஒரு தொகுதியில் உள்ள நபர்கள் வரிசைப் படுத்தப்பட்டு பின்னர் ஒவ்வொரு தனி நபருக்கும், அவருக்குரிய தரம் கொடுக்கப்படுகிறது.

இம்முறை எட்வர்ட் ஸ்பியர்மேன் (Edward Spearman) என்பவரால் **1904–**ம் ஆண்டு உருவாக்கப்பட்டது. இது

$$R = I - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$$

R = தர வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : சில ஆசிரியர்கள் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கு ρ என்ற குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

ΣD^2 = இரு தரவரிசைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்.

n = மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

R மதிப்பு **–1**ற்கும் **+1**ற்கும் இடையில் அமைகிறது. R = +1 என இருக்குமானால் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரங்களிடையே முழுமையான ஒப்புமைத் தன்மை உள்ளது. தரங்கள் ஒரே திசை உடையதாக இருக்கும். R = -1 எனில் தாங்கள் முழுமையாக வேறுபடுகின்றன எனவும், அவை எதிர்திசை உடையதாகவும் இருக்கும்.

சில சமமதிப்பு உள்ளவிடத்து தரஉறவு :

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சமமதிப்புகளாக இருந்தால் ; இவ் உறுப்புகளுக்கு பொதுவான தரங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. இச்சூழ்நிலைகளில் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் சமமான தரம் கொடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, **5**ஆவது தரத்தில் உள்ள மதிப்பு இரு முறை வருமேயானால், **5, 6** இவற்றின் சராசரியான $\frac{5+6}{2} = 5.5$ என்ற பொதுவான தரம் இரு உறுப்புகளுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது.

சம தரங்கள் இருக்குமானால், திருத்த காரணி சேர்ப்பது அவசியமாகிறது. அது $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ ஆகும். ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சம மதிப்பைப் பெற்றால்,

$$\text{தர உறவு } R = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \dots\dots\right]}{n^3 - n}$$

இங்கு 'm' என்பது சமதரங்கள் பெற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். இது எத்தனை சம தரங்கள் உடையனவோ, அவை அனைத்திற்கும் திருத்த காரணி சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

ஒரு சந்தை ஆய்வில், ஒரு நகரத்தில் தரத்தின் அடிப்படையில் தேநீர் மற்றும், காப்பியின் விலை நிலவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையிலான தொடர்பினை உன்னால் காண இயலுமா **?**

தேநீர் விலை	88	90	95	70	60	75	50
காபியின் விலை	120	134	150	115	110	140	100

தீர்வு :

தேநீர் விலை	தரம்	காபியின் விலை	தரம்	D	D^2
88	3	120	4	1	1
90	2	134	3	1	1
95	1	150	1	0	0
70	5	115	5	0	0
60	6	110	6	0	0
75	4	140	2	2	4
50	7	100	7	0	0
					$\Sigma D^2 = 6$

$$\begin{aligned} R &= 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \\ &= 1 - \frac{6 \times 6}{7^3 - 7} \\ &= 1 - \frac{36}{336} \\ &= 1 - 0.1071 \\ &= 0.8929 \end{aligned}$$

தேநீர், மற்றும் காபி இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையில் உள்ள நேர் உறவு **0.89.** தரங்கள் அடிப்படையில் இவற்றின் விலைகளுக்கிடையிலான தொடர்பானது மிக அதிக நேர் உறவு உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 7:

இரு தேர்வாளர்களால் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட விடைத்தாள்களின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

1st	88	95	70	960	50	80	75	85
2nd	84	90	88	55	48	85	82	72

இருவரால் செய்யப்பட்ட மதிப்பீடு சரியானவை என்ற கருத்துடன் நீ உடன்படுகிறாயா **?**

தீர்வு :

x	R1	y	R2	D	D^2
88	2	84	4	2	4
95	1	90	1	0	0
70	6	88	2	4	16
60	7	55	7	0	0
50	8	48	8	0	0
80	4	85	3	1	1
85	3	75	6	3	9
					30

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 30}{8^3 - 8}$$

$$= 1 - \frac{180}{504}$$

$$= 1 - 0.357$$

$$= 0.643$$

R = 0.643 என்பதில் இருந்து விடைத்தாள்களை மதிப்பிட்டு மதிப்பெண்கள் வழங்குவதில் இருவரிடையே ஒரே சீரிய தன்மை உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 10 மாணவர்கள் இரு தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

மாணவர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
தேர்வு 1	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
தேர்வு 2	65	65	80	60	68	58	75	63	60	70

இரு தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான தர ஒட்டுறவு காண்க.

மாணவர்கள்	தேர்வு 1	R1	தேர்வு 2	R2	D	D^2
A	70	3	65	5.5	-2.5	6.25
B	68	4	65	5.5	-1.5	2.25
C	67	5	80	1.0	4.0	16.00
D	55	10	60	8.5	1.5	2.25
E	60	8	68	4.0	4.0	16.00
F	60	8	58	10.0	-2.0	4.00
G	75	1	75	2.0	-1.0	1.00
H	63	6	62	7.0	-1.0	1.00
I	60	8	60	8.5	0.5	0.25
J	72	2	70	3.0	-1.0	1.00
						50.00

தேர்வு 1 ல் 60 மூன்று முறை இடம் பெற்றுள்ளது.

2ஆவது தேர்வில் 60, 65 இரு முறை மீண்டும் மீண்டும் வந்துள்ளது.

m = 3 ; m = 2 ; m = 2

$$R = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\right]}{n^3 - n}$$

$$R = 1 - \frac{6\left[50 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)\right]}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6\left[50 + 2 + 0.5 + 0.5\right]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 53}{990}$$

$$= \frac{672}{990} = 0.68$$

கருத்து :

இரு தேர்வுகளிலும் மாணவர்களின் திறமை ஒரே சீரானது.

பயிற்சி – 8

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லை.

அ) $-1 \le r \le 1$ ஆ) $0 \le r \le 1$

இ) $-1 \le r \le 0$ ஈ) $1 \le r \le 2$

2. ஒட்டுவுக் கெழுவானது

அ) குறை எண் அல்ல ஆ) மிகை எண் அல்ல

இ) எப்பொழுதும் மிகையானது ஈ) மிகை அல்லது குறை

3. ஒட்டுறவு கெழுவிற்கான வாய்ப்பாடு

அ) $r = \frac{\sum XY}{xy}$ ஆ) $r = \frac{\sum XY}{n\sigma_x \sigma_y}$ இ) $r = \frac{\sum XY}{n\sigma_x}$

ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

4. cov (x, y) = 0 எனில்

அ) x மற்றும் yக்கு இடையே ஒட்டுறவு உள்ளது

ஆ) x மற்றும் yக்கு இடையே ஒட்டுறவு இல்லை

இ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

ஈ) x, y நேர் கோட்டுத் தொடர்புடையது

5. $r = 0$ எனில் cov (x, y)

அ) 0 ஆ) –1 இ) 1 ஈ) 0.2

6. தரவரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு கீழ்க்கண்ட வாய்ப்பாட்டால் பெறப்படும்.

அ) $1 + \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$ ஆ) $1 - \frac{6\sum D^2}{n^2 - n}$

இ) $1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$ ஈ) $1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 + n}$

7. cov $(x, y) = \sigma_x \sigma_y$ எனில்

அ) $r = +1$ ஆ) $r = 0$ இ) $r = 2$ ஈ) $r = -1$

8. $\Sigma D^2 = 0$ எனில், தரவிலக்கக் கெழு

அ) 0 ஆ) 1 இ) 0.5 ஈ) –1

9. ஒட்டுறவுக் கெழு கீழ்க்கண்டவற்றால் பாதிக்கப்படுவதில்லை

அ) ஆதி ஆ) அளவு இ) ஆதி மற்றும் அளவு

ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

10. தர விலக்கம் இவரால் உருவாக்கப்பட்டது.

அ) பியர்ஸன் ஆ) ஸ்பியர்மேன் இ) கால்டன் ஈ) பிஷர்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

11. ஒட்டுறவு கெழு ___________ சார்ந்ததல்ல.

12. இரு மாறிகளை விளக்கப்படம் மூலம் குறிப்பிடுதல் ___________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.

13. மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை பற்றி ___________ ஒட்டுறவு உதவியுடன் அறியலாம்.

14. ஒட்டுறவுகெழுவைக் காணும் முறையைக் கண்டறிந்தவர் ___________.

15. $r = +1$ எனில், ___________ ஒட்டுறவு உள்ளது.

16. $r_{xy} = r_{yx}$, எனில் x, y ற்கு இடையிலான தொடர்பு ___________.

17. தர விலக்கம் கெழு ___________ குணங்கள்

18. புத்திக் கூர்மை மற்றும் பாதணிகளின் அளவு இவற்றிற்கிடையிலான தொடர்பின் தன்மை ___________.

III. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்கவும்:

19. ஒட்டுறவு என்றால் என்ன ?

20. மிகை மற்றும் குறை ஒட்டுறவை வேறுபடுத்தி காட்டுக.

21. கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறு.

$r = 1, -1, 0$ என்று இருக்கும் பொழுது அதன் விளக்கக் கருத்தை தெளிவுபடுத்துக

22. சிதறல் விளக்கப்படம் என்றால் என்ன ? ஒட்டுறவு பற்றி அறிய அது எவ்வகையில் உதவுகிறது ?

23. கோடு மற்றும் வலை கோட்டு ஒட்டுறவுகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

24. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முக்கிய பண்புகளை குறிப்பிடுக.

25. ஒட்டுறவுக் கெழு –1ற்கும் +1ற்கும் இடையில் அமையும் என நிறுவுக.

26. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மற்றும் அளவைச் சார்ந்ததல்ல என்பதை நிறுவு.

27. தர வரிசை ஒட்டுறவு என்றால் என்ன ? மற்றும் அதன் நிறை குறைகள் யாவை ?

28. பல்வேறு வகையான ஒட்டுறவுகளை உதாரணத்துடன் விளக்குக.

29. கார்ல் பியர்ஸின் ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் ஸ்பியர்மனின் தர வரிசை ஒட்டுறவுக் கெபவையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

30. 10 மதிப்புகளுக்கு $\Sigma x = 130$; $\Sigma y = 220$; $\Sigma x^2 = 2290$; $\Sigma y^2 = 5510$; $\Sigma xy = 3467$ எனில் 'r' ஐ காண்க.

31. Cov (x, y) = 18.6 ; var (x) = 20.2 ; var (y) = 23.7 எனில், 'r' காண்க.

32. r = 0.42 cov (x, y) = 10.5 v(x) = 16 ; எனில், y –ன் திட்டவிலக்கம் காண்க.

33. தரவிலக்கக் கெழு $r = 0.8$, $\Sigma D^2 = 33$. எனில் 'n' ஐ காண்க.

34. A மற்றும் B மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்.

A	5	10	5	11	12	4	3	2	7	1
B	1	6	2	8	5	1	4	6	5	2

35. விலை மற்றும் அளிப்பிற்கிடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக. இம்மதிப்பிற்கான விளக்கத்தை தெளிவாக்குக.

விலை	8	10	15	17	20	22	24	25
அளிப்பு	25	30	32	35	37	40	42	45

36. பின்வரும் வரிசையில் உள்ள பொருட்களின் விலை மற்றும் அளிப்பிற்கிடையிலான தொடர்பின் ஒட்டுறவை கெழுவை காண்க.

விலை (ரூ)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
அளிப்பு (ரூ)	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

37. 10 மாணவர்கள் பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான ஒட்டுறவு கெழு காண்க

பொருளியல்	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
புள்ளியியல்	65	65	80	60	68	58	75	62	60	70

38. பின்வரும் விவரத்தின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தொழிலாளியின் வயது	40	34	22	28	36	32	24	46	26	30
வேலைக்கு வராத நாட்கள்	2.5	3	5	4	2.5	3	4.5	2.5	4	3.5

39. பின்வரும் தந்தை மற்றும் மகனின் உயரங்களுக்கிடையே ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

தந்தையின் உயரம்	65	66	67	67	68	69	70	72
மகனின் உயரம்	67	68	65	68	72	72	69	71

இருமாறி ஒட்டுறவு :

40. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

வருடம்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	மொத்தம்
20-29	2	1	2	2	-	1	-	1	1	10
30-39	-	2	-	1	-	2	-	1	2	8
40-49	-	2	-	2	-	-	1	-	1	6
50-59	1	-	2	-	-	-	-	1	-	4
60-69	-	-	-	-	-	1	-	1	-	2

41. கணவன் மனைவி வயதுகளுக்கிடையில் ஒட்டுறவுக் சேர்க்க கெழு கணக்கிடுக. முடிவிற்கான விளக்கம் தருக.

மனைவியின் வயது

கணவனின் வயது	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	மொத்தம்
15-25	1	1	-	-	-	-	2
25-35	2	12	1	-	-	-	15
35-45	-	4	10	1	-	-	15
45-55	-	-	3	6	1	-	10
55-65	-	-	-	2	4	2	8
65-75	-	-	-	-	1	2	3
மொத்தம்	3	17	14	9	6	4	53

42. ஒரு வியாபார அலுவலகத்தில் உள்ள 45 எழுத்தர்களின் வயது மற்றும் சம்பளத்திற்கான நிகழ்வெண் பரவல் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றிற்கிடையே ஒட்டுறவு இருக்குமானால் அதனைக் காண்க.

ஊதியம்

வயது	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	மொத்தம்
20-30	4	3	1	-	-	8
30-40	2	5	2	1	-	10
40-50	1	2	3	2	1	9
50-60	-	1	3	5	2	11
60-70	-	-	1	1	5	7
மொத்தம்	7	11	10	9	8	45

43. **60** மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கு இடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

புள்ளியலில் மதிப்பெண்கள்

பொருளியலில் மதிப்பெண்கள்	5-15	15-25	25-35	35-45	மொத்தம்
0-10	1	1	-	-	2
10-20	3	6	5	1	15
20-30	1	8	9	2	20
30-40	-	3	9	3	15
40-50	-	-	4	4	8
மொத்தம்	5	18	27	10	60

44. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

விளம்பரச் செலவு ('000)

விற்பனை வருவாய் (ரூ.'000)	5-15	15-25	25-35	35-45	மொத்தம்
75-125	4	1	-	-	5
125-175	7	6	2	1	16
175-225	1	3	4	2	10
225-275	1	1	3	4	9
மொத்தம்	13	11	9	7	40

45. பின்வரும் அட்டவணை மாணவர்களின் வேறுபட்ட உயரம் மற்றும் எடை விவரங்களைத் தருகிறது. உயரம் மற்றும் எடைக்கிடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதாக நீ காண்கிறாயா ?

எடை (கிலோ கிராம்)

உயரம் (செ.மீ)	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	மொத்தம்
150-155	1	3	7	5	2	18
155-160	2	4	10	7	4	27
160-165	1	5	12	10	7	35
165-170	-	3	8	6	3	20
மொத்தம்	4	15	37	28	16	100

தரவிலக்கம்

46. ஒரு அழகுப் போட்டியில் 8 போட்டியாளர்களுக்கு இரு நீதிபதிகள் கொடுத்தகரங்கள் பின்வருமாறு இவர்களின் தீர்ப்புகளுக்கிடையிலான தொடர்பினை ஆராய்க.

நீதிபதி A	4	5	1	2	3	6	7	8
நீதிபதி B	8	6	2	3	1	4	5	7

47. பின்வரும் விவரத்தில் இருந்து தரவிலக்க கெழு காண்க.

X	36	56	20	65	42	33	44	50	15	60
Y	50	35	70	25	58	75	60	45	80	38

48. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஸ்பியர்மெனின் தரவிலக்க கெழு காண்க.

X	53	98	95	81	75	71	59	55
Y	47	25	32	37	30	40	39	45

49. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளுக்கு ஸ்பியர்மேனின் தர வேறுபாடு முறையைப் பயன்படுத்தி ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

X	22	28	31	23	29	31	27	22	31	18
Y	18	25	25	37	31	35	31	29	18	20

50. தர வரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

முதல் தேர்வு மதிப்பெண்கள்	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
II ஆவது தேர்வு மதிப்பெண்கள்	65	65	80	60	68	58	75	62	60	70

51. மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான ஸ்பியர்மெனின் தர வரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

முதல் பாடம்	80	64	54	49	48	35	32	29	20	18	15	10
இரண்டாம் பாடம்	36	38	39	41	27	43	45	52	51	42	40	52

IV செய்து பார்க்க :

52. உன் வகுப்பில் உள்ள ஏதேனும் 10 மாணவர்கள் எடை மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றை காண்க. இவற்றிற்கிடையில் ஒட்டுறவு உள்ளதா எனக் காண்க.

விடைகள்

I.

1. (அ)	2. (ஈ)	3. (ஆ)	4. (ஆ)	5. (அ)
6. (இ)	7. (அ)	8. (ஆ)	9. (இ)	10. (ஆ)

II.

11. அலகுகள்	12. சிதறல் விளக்கப்படம்	13. பலசார்
14. பியர்ஸன்	15. முழுமையான நேர்	16. சமச்சீர்
17. தர அடிப்படையில்	18. ஒட்டுறவு இல்லை	

III.

30. $r = 0.9574$	31. $r = 0.85$	32. $\sigma_y = 6.25$	33. $n = 10$
34. $r = + 0.58$	35. $r = + 0.98$	36. $r = - 0.96$	37. $r = + 0.68$
38. $r = - 0.92$	39. $r = + 0.64$	40. $r = + 0.1$	41. $r = + 0.98$
42. $r = + 0.746$	43. $r = + 0.533$	44. $r = + 0.596$	45. $r = + 0.0945$
46. $r = + 0.62$	47. $r = - 0.93$	48. $r = - 0.905$	49. $r = 0.34$
50. $r = 0.679$	51. $r = 0.685$		

9. உடன் தொடர்புப் போக்கு

9.1 அறிமுகம் :

இரு மாறிகளுக்கிடையே தொடர்பு உள்ளது என அறிந்த பின்னர், ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது மற்றொரு தெரியாத மாறியின் மதிப்பை முன்மதிப்பீடு செய்ய நாம் விரும்பலாம். இவ்வாறு மதிப்பீடு செய்யக்கூடிய மாறி சார்புடைய மாறி அல்லது விளக்கப்படுகிற மாறி எனவும் மற்றும் தெரிந்த மாறியை சார்பற்ற மாறி என்கிறோம். மதிப்பீடு செய்வதற்கு அடிப்படை, புள்ளியியல் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் குறிப்பதே உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வாகும். சமன்பாட்டை உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு அல்லது விளக்குகின்ற சமன்பாடு என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விளம்பரத்திற்கும் விற்பனைக்கும் ஒட்டுறவு உள்ளது என அறிவோமானால், செலவிடப்பட்ட விளம்பரத்திற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனையை அறியலாம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட விற்பனை இலக்கினை அடைய செலவிடப்பட வேண்டிய விளம்பரச் செலவு எவ்வளவு என அறியலாம். அதே போல விளைச்சலின் அளவு மழையின் தன்மையோடு தொடர்புடையது. எவ்வளவு மழை பெய்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் கிடைக்கும் என்பதையும், ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் காண்பதற்கு எவ்வளவு மழை அவசியம் என்பதையும் முன்கூட்டியே கணக்கிட உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மிக்க உதவி புரிகின்றது. தொடர்புடைய இரு மாறிகளானது, மழையின் அளவு மற்றும் விவசாய உற்பத்தி, உற்பத்திக்கான விலை மற்றும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் பொதுவான விலை, நுகர்வோரின் வருமானம் மற்றும் செலவீனம் எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு தெரியப்படுத்துவது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பு மற்றும் இதன் மூலம் மதிப்பீடு அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைப் பெறலாம்.

9.1.1 வரையறை :

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே ஆன சராசரி தொடர்பினை, விவரங்களின் மூல அலகுகளை கொண்டு அளவிடப்படுவது உடன் தொடர்புப் போக்காகும்.

9.2 உடன் தொடர்புப் போக்கின் வகைகள் :

உடன் தொடர்புப் போக்கின் ஆய்வு பாகுபடுத்தப்படுவது

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு :

இரு மாறிகள் எளிய தொடர்பினைக் கொண்டுள்ளது எனக் கொண்டால், எடுத்துக்காட்டாக விளம்பரச் செலவீனத்தின் தாக்கம் விற்பனையை அதிகரிக்கின்றது. இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பு மடங்கு தொடர்புப் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இங்கு ஒரு மாறி சார்புடைய மாறி மற்ற மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விற்பனையானது (y) விளம்பரச் செலவீனம் (x) மற்றும் மக்களது வருமானம் (z) ஆகியவற்றை சார்ந்துள்ளது. எனவே, தொடர்பின் சார்பானது $y = f(x, z)$ ஆகும்.

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற :

நேர்கோட்டு போக்கினை அடிப்படையாகக் கொண்ட, நேர்கோட்டின் தொடர்பு சமன்பாட்டின் படி ஒன்று ஆகும். ஆனாலும் நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பானது எளிய மற்றும் மடங்கு ஆகும். இயல்பாக நேர் கோட்டுத் தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வதால், அதனின் எளிமை மற்றும் சிறந்த மதிப்பீடு, மற்றும் எதிர்காலத்தில் இதன் போக்கினை முன்னறிவதற்கும் எளியதாக உள்ளது. நேர்கோடற்ற தொடர்பிற்கு வளைவரை போக்குக் கோடுகள் நிறுவப்படுகின்றன. இவற்றின் சமன்பாடுகள் பரவளைவு ஆகும்.

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி :

எல்லா முக்கியத்துவ மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டு அதனின் மொத்த தொடர்புகளை எடுத்துக் கொள்வதாக கொள்வோம். இயல்பாக இவை பல்வேறான தொடர்புகளை பெற்றிருக்கும் ஏனெனில் பெரும்பாலான பொருளாதார மற்றும் வியாபார தனிச் சிறப்பு பெற்றவைகள் பலவித இன்னல்களால் பாதிக்கப்பட்டிருக்கும். பகுதி தொடர்பால், ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்தும் அல்லாமல், நோக்கத்தினைக் கருத்தில் கொண்டு பாதிக்கக் கூடியவைகளைத் தவிர்த்து தொடர்பினைப் பெறலாம்.

9.3 நேர்க்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு :

இரு மாறிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்குமானால், சார்பற்ற மாறி (X) வேறுபடும் பொழுது, சார்புடைய மாறி (Y) யும் வேறுபடுகிறது. X மற்றும் Y இன் பல்வேறு மதிப்புக்களை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது, மிகப் பொருத்தமான இரு நேர் கோடுகள் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கின்றது. இவ்விருகோடுகளும் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளாகும். மேலும் இவ்விரு கோடுகளும் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டினை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. இச்சமன்பாடுகள் மூலம் ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது தெரியாத மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை சிறந்த மதிப்பீடாகக் காண முடியும். இவை நேர்கோட்டுச் சமன்பாடுகளாகும்.

X இன் மீதான Y இன் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடானது

$Y = a + bX$ .... (1)

மற்றும் Y இன் மீதான X இன் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடானது

$X = a + bY$ .... (2)

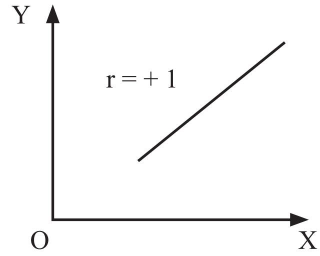
இங்கு a, b என்பன மாறிலிகளாகும்.

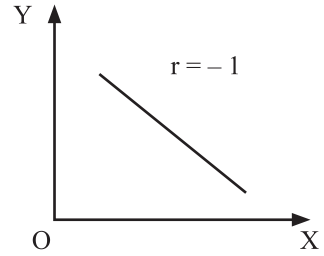
சமன்பாடு **(1)** இன் மூலம், X இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது Y இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

சமன்பாடு **(2)** இன் மூலம், X இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது Y இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

9.3.1 உடன் தொடர்பு கோடுகள் :

உடன் தொடர்பு கோடுகளின் ஆய்வில், இரு மாறிகளுக்கு இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகள், Y இன் மீதான X ம், மற்றும் X இன் மீதான Y ம் ஆகும்.

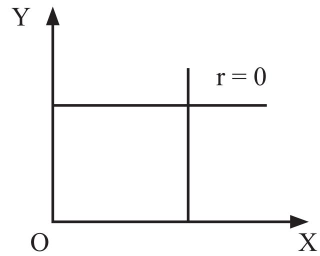


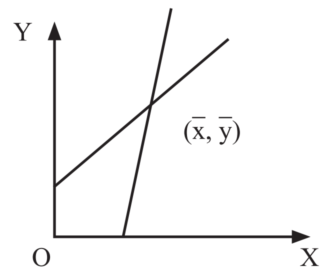


இவ்விரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளும் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிப்பதாகும்.

முழுமையான ஒட்டுறவில் நேரிடை அல்லது எதிரிடையாக உள்ள போது, அதாவது $r = \pm 1$ எனில் இரு கோடுகளும் ஒன்றாக இணையும். அதாவது ஒரே ஒரு நேர்கோடு மட்டுமே காணப்படும். $r = 0$ எனில், இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாகும். இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். இவ்விரு கோடுகளும் X மற்றும் Y அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

கடைசியாக X மற்றும் Y களின் கூட்டுச்சராசரிகளைக் குறிக்கும் புள்ளியில் இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்கின்றன. இவ்வெட்டுப் புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையும் பொழுது X இன் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கின்றது. இது போலவே, வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து Y அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடு வரையும் பொழுது Y இன் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கிறது.





9.3.2. மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை :

இரு மாறிகளுக்கிடையேயான சராசரி தொடர்பினை, உடன் தொடர்பு வெளிப்படுத்துகின்றது. சிதறல் விளக்கப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லக் கூடிய மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடாகும். இத்தகைய உடன் தொடர்பு கோடு வரைபடம் அல்லது கணக்கியலால் தருவிக்கப்படுகின்றது. பல்வேறான முறைகளைக் காண்பதற்கு முன் "மீச்சிறு வர்க்கங்கள்" என்பதன் விளக்கத்தை அறிவோம்.

மீச்சிறு வர்க்கங்கள் வாயிலாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு கோட்டினை, சிறந்த பொருத்தமுடைய கோடு என்கிறோம். கீழ்க்கண்ட விதிகளைக் கோடு பின்பற்றுகிறது.

i) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்பு போக்கு மதிப்புக்களுக்கும் உள்ள வித்தியாச வர்க்கத்தின் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

அதாவது $\Sigma (X - Xc)^2 = 0$ அல்லது $\Sigma (Y - Yc)^2 = 0$

Xc மற்றும் Yc மதிப்புகள் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் கிடைக்கப் பெற்றவை.

ii) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்புப் போக்கு மதிப்புகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசம், ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து காணப்பட்ட வித்தியாசத்தை விட குறைவாகவே இருக்கும்.

அதாவது, $\Sigma (Y - Yc)^2 < \Sigma (Y - Ai)^2$

iii) சிறந்த பொருத்தமுடைய உடன் தொடர்புப் போக்கு கோடுகள், X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. அதாவது அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $\overline{x}$, $\overline{y}$ ஆகும்.

9.4 உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் முறைகள் :

உடன் தொடர்புப் போக்கின் பல்வேறு முறைகளை கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

உடன் தொடர்பு முறைகள்

வரைபட முறை
(உடன் தொடர்பு கோடுகள் மூலம்)

கணக்கியல்
(உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் மூலம்)

உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள்
(இயல்நிலை சமன்பாடுகள் மூலம்)

உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள்
(உடன் தொடர்பு போக்குக் கெழு மூலம்)

9.4.1 வரைபட முறை :

வரைபடத்தில் மாறிகளின் மதிப்புகளின் புள்ளிகள் குறிக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய புள்ளிகள் சிதறல் வரைபடம் போல பரவிக் கிடக்கின்றன. இப்புள்ளிகள் ஓர் உடன் தொடர்புக் கோட்டின் மூலம் கையினாலோ அல்லது அளவீடு கொண்டோ வரையப்படுகின்றன. அவ்வாறு வரையும் போது புள்ளிகளுக்கும் கோட்டிற்கும் உள்ள செங்குத்து வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் மிகக் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும். வரையப்படுகின்ற உடன் தொடர்பு கோட்டிற்கு இரு புறங்களிலும் சமமான புள்ளிகள் இருக்குமாறு சிறந்த உடன் தொடர்புக் கோட்டினை வரைதல் வேண்டும்.

9.4.2 கணக்கியல் முறை :

i) உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு இரு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் Y இன் மீதான X இன் சமன்பாடு $X = a + bY$ மற்றும் X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு; $Y = a + bX$ ஆகும். இங்கு X, Y என்பன மாறிகள் மற்றும் a, b என்பன மாறிலிகள், இவற்றின் மதிப்பை காணுதல் வேண்டும்.

சமன்பாடு $X = a + bY$ எனில், இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$$\Sigma X = na + b\,\Sigma Y$$

மற்றும் $\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$

சமன்பாடு $Y = a + bX$ எனில், இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$$\Sigma Y = na + b\,\Sigma X$$

மற்றும் $\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$

இயல்நிலை சமன்பாடுகளின் வாயிலாக a மற்றும் b மதிப்புக்கள் காணப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1:

X :	6	2	10	4	8
Y :	9	11	5	8	7

தீர்வு :

X	Y	X^2	Y^2	XY
6	9	36	81	54
2	11	4	121	22
10	5	100	25	50
4	8	16	64	32
8	7	64	49	56
30	40	220	340	214

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $Y = a + bX$ மற்றும் இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகளாவன

$$\Sigma Y = na + b\,\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

மதிப்புக்களை பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது

$40 = 5a + 30b$ .... (1)

$214 = 30a + 220b$ .... (2)

சமன்பாடு **(1)** ஐ **6** ஆல் பெருக்கும் பொழுது

$240 = 30a + 180\,b$ .... (3)

(2) – (3) $\quad -26 = 40\,b$

அல்லது $\quad b = -\dfrac{26}{40} = -0.65$

தற்பொழுது b இன் மதிப்பை சமன்பாடு **(1)**ல் பிரதியிட,

$$40 = 5a - 19.5$$
$$5a = 59.5$$
$$a = \frac{59.5}{5} = 11.9$$

ஆகவே தேவையான X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடானது

$$Y = 11.9 - 0.65\,X$$

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X = a + bY$$

மற்றும் இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளானது

$$\Sigma X = na + b\,\Sigma Y \quad \text{மற்றும்}$$

$$\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து பொருத்தமான மதிப்புக்களை பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$30 = 5a + 40b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$214 = 40a + 340b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(3) வது சமன்பாட்டை 8 ஆல் பெருக்கிட,

$$240 = 40a + 320b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(4) – (5) கொடுப்பது

$$-26 = 20b$$

$$b = -\frac{26}{20} = -1.3$$

b = –1.3 என சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$30 = 5a - 52$$

$$5a = 82$$

$$a = \frac{82}{5} = 16.4$$

ஆகவே Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X = 16.4 - 1.3Y$$

(ii) உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள் :

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $y_e = \bar{y} + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்பு போக்கு கெழு

$$b_1 = b_{yx} = r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$y_e = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X_e = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_2 = b_{xy} = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$X_e = \overline{X} + b_2\,(y - \overline{y})$$

விலக்கங்கள் X மற்றும் Y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கொண்டு எடுக்கும் பொழுது

$$b_1 = b_{yx} = \frac{\sum (X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sum (X-\overline{X})^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$ மற்றும்

$$b_2 = b_{xy} = \frac{\sum (X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sum (Y-\overline{Y})^2} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

இங்கு $x = X - \overline{X}$, $y = Y - \overline{Y}$

விலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து எடுக்கப்படும் பொழுது (சுருக்கு முறை)

$$b_1 = b_{yx} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2}$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2}$$

இங்கு $u = x - A : v = Y - B$; $A = X$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

$B = Y$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

9.5 உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகள் :

1. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே மாதிரியான குறியைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். அதாவது அவை நேரிடை அல்லது எதிரிடையாக இருக்கலாம்.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவான உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரியாகும். அதாவது $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$
3. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் குறியானது உடன் தொடர்பு கெழுக்களின் குறியையே கொண்டிருக்கும்.
4. ஓர் உடன் தொடர்புக் கெழு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டால் மற்றொன்று ஒன்றை விடச் சிறியதாக இருக்கும்.
5. உடன்தொடர்பு கெழுக்கள் ஆதிமாற்றத்தால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால் அலகு மாற்றத்தால் பாதிக்கப்படும்.
6. உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் கூட்டுச் சராசரி ஒட்டுறவுக் கெழுவை விடப் பெரியதாகும். அதாவது $\frac{b_1 + b_2}{2} \geq r$

7. $r = 0$ எனில், மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை, உடன் தொடர்ப்புப் போக்கு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

8. $r = \pm 1$ எனில், இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளும் ஒன்றோடு ஒன்று இணையும் அல்லது இணை கோடுகளாக இருக்கும்.

9. இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமானது $\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1\, m_2}\right]$

இங்கு m_1 மற்றும் m_2 என்பன முறையே Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புக் கோடு மற்றும் X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புக் கோடு ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் ஆகும்.

10. இரு உடன் தொடர்புக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணமானது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புடைமையின் அளவைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

இரு உடன் தொடர்ப்புப் போக்கு கெழுக்கள் $b_1 = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $b_2 = \dfrac{9}{20}$ எனில் r இன் மதிப்பு என்ன **?**

தீர்வு :

ஒட்டுறவுக் கெழு, $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$

$$= \sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{9}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$b_1 = \dfrac{15}{8}$ மற்றும் $b_2 = \dfrac{3}{5}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது r இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{8} \times \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = 1.06$$

இவ்வாறு இருக்க முடியாது. ஏனெனில் r இன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேல் உள்ளது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் தவறானவை.

9.6 இரு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் இருப்பதற்கான காரணம் :

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்ப்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$\left.\begin{array}{c} Y_e = \overline{Y} + r\,\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(X - \overline{X}) \\ \text{அல்லது} \\ Y_e = \overline{Y} + b_1\,(X - \overline{X}) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$\left.\begin{array}{c} X_e = \overline{X} + r\,\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(Y - \overline{Y}) \\ \text{அல்லது} \\ Y_e = \overline{X} + b_2\,(Y - \overline{Y}) \end{array}\right\} \quad (2)$$

இவ்விரு உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகளும் வெவ்வேறான இரு கோடுகளை தெரிவு செய்கின்றன. அதாவது, சமன்பாடு (1) என்பது X இன் சார்பு, இதனை $Y_e = f(X)$ என எழுதலாம் மற்றும் சமன்பாடு (2) Y இன் சார்பு, இதனை $X_e = f(Y)$ என எழுதலாம்.

X மற்றும் Y மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக் கொள்ளத் தக்கதல்ல, ஏனெனில் இதன் முதன்மையான வெளிப்படையான உண்மை சமன்பாடு (1) இல் Y சார்புடைய மாறியாகவும் X சார்பற்ற மாறியாகவும் உள்ளது. அதனால் தான் கொடுக்கப்பட்ட X இன் மதிப்புகளுக்க Y க்கான மதிப்பீடு Y_e சமன்பாடு (1) இன் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது. இது போலவே X க்கான மதிப்பீடு $X_{e,}$ கொடுக்கப்பட்ட Y மதிப்புகளுக்கு சமன்பாடு (2) இன் மூலம் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடவும்.

X	1	2	3	4	5
Y	2	3	5	4	6

x = 2.5 எனில், Y இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும் ?

தீர்வு :

X	Y	$x = X - \overline{X}$	$y = Y - \overline{Y}$	X^2	Y^2	XY
1	2	-2	-2	4	4	4
2	3	-1	-1	1	1	-1
3	5	0	1	0	1	0
4	4	1	0	1	0	0
5	6	2	2	4	4	4
15	20	20		10	10	9

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{9}{10} = 0.9$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$Y = \overline{Y} + b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$= 4 + 0.9(X - 3)$$

$$= 4 + 0.9X - 2.7$$

$$= 1.3 + 0.9X$$

X = 2.5 எனில்

$$Y = 1.3 + 0.9 \times 2.5$$

$$= 3.55$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{9}{10} = 0.9$$

ஆகவே Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$X = \overline{X} + b_{xy}(Y - \overline{Y}) = 3 + 0.9(Y - 4)$$

$$= 3 + 0.9Y - 3.6 = 0.9Y - 0.6$$

சுருக்கு முறை :

எடுத்துக்காட்டு 5:

கொடுக்கப்பட்ட கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க.

X	45	42	44	43	41	45	43	40
Y	40	38	36	35	38	39	37	41

தீர்வு :

X	Y	u = X – A	u^2	v = Y – B	v^2	uv
46	40	3	9	2	4	6
42	38 **B**	-1	1	0	0	0
44	36	1	1	-2	4	-2
A 43	35	0	0	-3	9	0
41	38	-2	4	0	0	0
45	39	2	4	1	1	2
43	37	0	0	-1	1	0
40	41	-3	9	3	9	-9
		0	28	0	28	-3

$$\overline{X} = A + \frac{\sum u}{n}$$

$$= 43 + \frac{0}{8} = 43$$

$$\overline{Y} = B + \frac{\sum u}{n}$$

$$= 38 + \frac{0}{8} = 38$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_1 = b_{yx} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2}$$

$$= \frac{8(-3) - (0)(0)}{8(28) - (0)^2} = \frac{-24}{224} = -0.11$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_2 = b_{xy} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2}$$

$$= \frac{8(-3) - (0)(0)}{8(28) - (0)^2}$$

$$= \frac{-24}{224} = -0.11$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y_e = \overline{Y} + b_1 (X - \overline{X})$

$= 38 - 0.11 (X - 43)$

$= 38 - 0.11 X + 4.73$

$= 42.73 - 0.11 X$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$X_e = \overline{X} + b_2 (Y - \overline{Y})$

$= 43 - 0.11 (X - 38)$

$= 43 - 0.11 X + 4.18$

$= 47.18 - 0.11 X$

எடுத்துக்காட்டு 6:

ஓர் ஒட்டுறவு பற்றிய ஆய்வில் கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்கள் கிடைக்கப் பெற்றன.

	X	Y
கூட்டுச் சராசரி	65	67
திட்ட விலக்கம்	2.5	3.5

ஒட்டுறவு கெழு, $r = 0.8$

மேற்க் கண்ட மதிப்புகளுக்குத் தொடர்புடைய இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை

$\overline{X} = 65, \overline{Y} = 67, \sigma_x = 2.5, \sigma_y = 3.5, r = 0.8$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = b_1 = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= 0.8 \times \frac{3.5}{2.5} = 1.12$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = b_2 = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= 0.8 \times \frac{2.5}{3.5} = 0.57$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y_e = \overline{Y} + b_1 (X - \overline{X})$

$= 67 + 1.12 (X - 65)$

$= 67 + 1.12 X - 72.8$

$= 1.12 X - 5.8$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$X_e = \overline{X} + b_2 (Y - \overline{Y})$

$= 65 + 0.57 (Y - 67)$

$= 65 + 0.57 Y - 38.19$

$= 26.81 + 0.57 Y$

குறிப்பு :

இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அவற்றில் எந்த சமன்பாடு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் எது Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனக் குறிப்பிடப்படவில்லை. இதனை அறிந்து கொள்ள, எப்பொழுதும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் முதல் சமன்பாட்டை X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு எனக் கொண்டு உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள் $b_{yx} = b_1$ மற்றும் $b_{xy} = b_2$ கண்டுபிடிக்கவும். இவைகள் இரண்டும் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகளை நிறைவு செய்வதாக இருந்தால், நாம் ஊகித்தது சரியாகும். இல்லையெனில் சமன்பாடுகளை மாற்றி ஊகித்து கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

$8X - 10Y + 66 = 0$ மற்றும் $40X - 18Y = 214$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாட்டை $8X - 10Y + 66 = 0$ என ஊகித்துக் கொள்ளவும்.

$$-10Y = -66 - 8X$$

$$10Y = 66 + 8X$$

$$Y = \frac{66}{10} + \frac{8X}{10}$$

X உடன் வந்துள்ள எண் b_{yx} ஆகும்.

அதாவது, $b_{yx} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Y இன் மீதான X இன் சமன்பாடு

$$40X - 18Y = 214$$

X ஐ இடப்புறம் வைத்துக் கொண்டு மற்றவைகளை வலது புறம் எழுதுக.

$$40X = 214 + 18Y$$

$$X = \frac{214}{40} + \frac{18}{40} Y$$

தற்பொழுது Y இன் கெழுவே b_{xy} ஆகும். $\therefore\ b_{xy} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

இங்கு b_{yx} மற்றும் b_{xy} ஆகியவை உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் பண்புகளை நிறைவு செய்வதால் நாம் ஊகித்தது சரியானது.

$$\text{ஒட்டுறவு கெழு } r = \sqrt{b_{yx}\ b_{xy}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{9}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$$

$$= 0.6$$

எடுத்துக்காட்டு 8:

ஒட்டுறவு கொண்டுள்ள X மற்றும் Y மாறிகளுக்கான உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் $5X - 6Y + 90 = 0$ மற்றும் $15X - 8Y - 130 = 0$ ஒட்டுறவு கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$5X - 6Y + 90 = 0$ என்கிற சமன்பாட்டை Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு எனவும் மற்றதை X இன் மீதான Y இன் போக்கு கோடு எனவும் எடுத்துக் கொள்ளவும்.

இப்பொழுது
$$X = \frac{6}{5}Y - \frac{90}{5}$$

$$b_{xy} = b_2 = \frac{6}{5}$$

$15X - 8Y - 130 = 0$ என்பதில்

$$Y = \frac{15}{8}X - \frac{130}{8}$$

$$b_{yx} = b_1 = \frac{15}{8}$$

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{8} \times \frac{6}{5}}$$

$$= \sqrt{2.25} = 1.5 > 1$$

இங்கு இது சாத்தியமில்லை. ஆகவே நாம் ஊகித்தது தவறானதாகும். ஆகவே, முதல் சமன்பாட்டை X இன் மீதான Y இன் உடன் போக்குத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $5X - 6Y + 90 = 0$, என்பதிலிருந்து

$$Y = \frac{5}{6}X - \frac{90}{6}$$

$$b_{yx} = \frac{5}{6}$$

சமன்பாடு 15X – 8Y – 130 = 0 என்பதிலிருந்து

$$X = \frac{8}{15} Y + \frac{130}{15}$$

$$b_{xy} = \frac{8}{15}$$

ஒட்டுறவு கெழு, $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$

$$= \sqrt{\frac{5}{6} \times \frac{8}{15}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{90}}$$

$$= \frac{2}{3} = 0.67$$

எடுத்துக்காட்டு 9:

Y = X + 5 மற்றும் 16X = 9Y – 94 என்பன முறையே X இன் மீதான Y இன் போக்குக் கோடு எனவும், Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு எனவும் உள்ளது**.** Y = 19 எனில் X இன் மாறுபாட்டைக் காண்க**.** X மற்றும் Y க்கு இடையேயான இணை மாறுபாட்டையும் காண்க**.**

தீர்வு :

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புக் கோடு Y = X + 5 இன் மூலம்

நமக்குக் கிடைப்பது $b_1 = b_{yx} = 1$

Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு

16X = 9Y – 94

அல்லது $X = \frac{9}{16}\ Y - \frac{94}{16}$

நமக்குக் கிடைப்பது

$$b_2 = b_{xy} = \frac{9}{16}$$

$$r = \pm\sqrt{b_1\ b_2}$$

$$= \sqrt{1 \times \frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$b_{yx} = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$1 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sigma_x}$ (என்பதிலிருந்து $\sigma_Y^2 = 16$, $\sigma_Y = 4$)

$\sigma x = 3$

X இன் மாறுபாடு X = $\sigma_x^2 = 9$

மேலும் $b_{yx} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}$

$1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{9}$ அல்லது cov (x, y) = 9.

எடுத்துக்காட்டு 10:

Y = –1.5 X + 7, X = 0.6 Y + 9 என இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் இருக்க முடியுமா ? காரணங்களைத் தருக.

தீர்வு :

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, $b_1 = b_{yx} = -1.5$ Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு $b_2 = b_{xy} = 0.6$ இங்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் வெவ்வேறான குறிகளைக் கொண்டுள்ளது. இது இயல்பு நிலைக்கு மாறானது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளாக இருக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

X மற்றும் Y க்கான உடன் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்யும் பொழுது, கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் பெறப்பட்டன.

$\overline{X} = 90$, $\overline{Y} = 70$, n = 10, $\Sigma x^2 = 6360$; $\Sigma y^2 = 2860$

$\Sigma xy = 3900$ இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை தருவிக்கவும்.

தீர்வு :

இங்கு x, y என்பன கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணப்பட்ட விலக்கங்கள்.

$$b_1 = b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$= \frac{3900}{6360} = 0.61$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

$$= \frac{3900}{2860} = 1.36$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y_e = \overline{Y} + b_1 (X - \overline{X})$

$= 70 + 0.61 (X - 90)$

$= 70 + 0.61 X - 54.90$

$= 15.1 + 0.61 X$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X_e = \overline{X} + b_2 (Y - \overline{Y})$$

$$= 90 + 1.36 (Y - 70)$$

$$= 90 + 1.36 Y - 95.2$$

$$= 1.36 Y - 5.2$$

9.7 உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் பயன்கள் :

1. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்பு தொடர்பினை வெளிப்படுத்தப் பயன்படுகிறது.
2. பொருளாதாரப் பகுப்பாய்வில் காரணம் மற்றும் காரிய தொடர்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு பெருமளவில் பிரச்சனைகள் அமைகின்றன. பொருளாதாரம் மற்றும் வர்த்தக ஆய்வுகளுக்கு, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மிக உயர்ந்த மதிப்பு மிக்க புள்ளியியல் கருவியாகும்.
3. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மூலம் கொடுக்கப்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கு, சார்புடைய மதிப்புக்களை மதிப்பீடு செய்யலாம்.
4. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மூலம், ஒட்டுறவு கெழுவையும் 'r' நிர்ணயக் கெழுவையும் r^2 கணக்கிடலாம்.
5. புள்ளியியல் ஆய்வில் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கொண்டு உற்பத்திச் சார்பு, தேவை வளைகோடு, விலைச் சார்பு, நுகர்வுச் சார்பு ஆகியவற்றை கணிக்க உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு வெகுவாக பயன்படுகிறது.

9.8 ஒட்டுறவுக்கும் உடன் தொடர்புப் போக்குக்கும் உள்ள வேறுபாடு :

	ஒட்டுறவு	உடன் தொடர்புப் போக்கு
1.	ஒட்டுறவானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர் அல்லது எதிர் தொடர்பை விளக்கும்.	உடன் தொடர்புப் போக்கானது "திரும்புதல்" எனப் பொருள்படும். இது ஒரு கணித அளவீடாகும். இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் கணக்கிடுவதாகும்.
2.	x, y ஆகிய இரண்டும் சம வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.	இங்கு x என்பது சம வாய்ப்பு மாறியாகவும், y என்பது நிலையான மாறியாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. சில சமயங்களில் இரண்டுமே சமவாய்ப்பு மாறிகளாக கொள்ளப்படுகின்றன.
3.	இரு மாறிகளின் தொடர்பை விளக்குவதோடு அத்தொடர்பின் நெருக்கத்தை எண்ணிக்கை அளவில் கொடுக்குமேயன்றி தொடர்பிற்கான காரண காரியங்களை விளக்குவதில்லை.	இது இரு மாறிகளுக்கிடையே காரண காரியத் தொடர்பை விளக்கும். இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புத் தொடர்பை விளக்குகிறது.

4.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை சோதனை செய்வதற்கும் சரி பார்த்தலுக்கும் உபயோகப்படுத்தப்படும். இது குறைந்த பட்ச தகவல்களைத் தான் தரும்.	இது சரிபார்ப்பதற்கு மட்டுமல்லாது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிற்கேற்ப மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட உதவி புரிகின்றது.
5.	ஒட்டுறவுக் கெழு ஒரு ஒப்பீட்டு அளவாகும். இதன் தொடர்பானது –1 மற்றும் +1க்கும் இடையே உள்ள வீச்செல்லையில் அமையும்.	உடன் தொடர்பு கெழுவானது ஒரு தனி எண்ணாகும். இது சார்பற்ற மாறியின் மதிப்பின் மூலம் சார்புள்ள மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது.
6.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு போலி ஒட்டுறவாகவும் இருக்கும்.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்பில் போலி உடன் தொடர்பென்பது கிடையாது.
7.	இதனை பயன்படுத்து முறை வரையறைக்குட் பட்டது. ஏனெனில் இது மாறிகளுக்கு இடையே நேர் கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே விளக்குகின்றது.	இதுபரவலாகப்பயன்படுத்தப்படுகின்றது. ஏனெனில் இது நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பு மட்டுமல்லாது வளைகோட்டுத் தொடர்பையும் விளக்கவல்லது.
8.	இதை மேற்கொண்டு கணக்கியல் செயல் முறைகளுக்கு பயன்படுத்த இயலாது.	இது பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றது. ஏனெனில் இது நேர்கோட்டுத் தொடர்பு மட்டுமல்லாது வளை கோட்டுத் தொடர்பையும் விளக்க வல்லது.
9.	ஒட்டுறவுக் கெழுவானது நேரிடையாக இருந்தால் இரு மாறிகளும் நேர் தொடர்பாகவும், எதிரிடையாக இருந்தால் இரு மாறிகளும் எதிர் தொடர்பாகவும் இருக்கும்.	உடன் தொடர்புக் கெழுவானது ஒரு மாறியின் மதிப்பு குறையும் பொழுது மற்றொரு தொடர்பு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிப்பதை விளக்குகின்றது.

பயிற்சி – 9

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. ஒட்டுறவுக் கெழு, $r = \pm 1$ எனில் இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் சமன்பாடானது

அ) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்

ஆ) ஒன்றுக்கொன்று இணையும்

இ) ஒன்றுக்கொன்று இணைகோடாக இருக்கும்

ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

2. ஒரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டிருந்தால், மற்றொன்றானது

அ) ஒன்றுக்கொன்று மேற்பட்டிருக்கும்

ஆ) ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்கும்

இ) ஒன்றுக்கும் குறைவாக இருக்கும்

ஈ) இவற்றில் ஏதும் இல்லை

3. உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டின் மற்றொரு பெயரானது

அ) முன்னறிதல் சமன்பாடு ஆ) மதிப்பீட்டின் சமன்பாடு

இ) சராசரி தொடர்புக் கோடு ஈ) மேற்கூறியவை அனைத்தும்

4. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளானது

அ) (X, Y) ஆ) $(\overline{X}, \overline{Y})$ இ) $(0, 0)$ ஈ) $(1, 1)$

5. $r = 0$ எனில், உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளானது

அ) ஒன்றாக இணையும்

ஆ) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்

இ) ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கும்

ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

6. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவானது சார்பற்றது

அ) ஆதியில் ஆ) அளவீட்டில்

இ) ஆதி மற்றும் அளவீடு இரண்டிலும் ஈ) ஆதியும் இல்லை அளவும் இல்லை

7. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் b_{yx} மற்றும் b_{xy} ஆகியவற்றின் பெருக்கல் சராசரியானது

அ) r ஆ) r^2 இ) 1 ஈ) $\sqrt{r}$

8. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் $3X - 4Y + 8 = 0$ மற்றும் $4X - 3Y = 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரியானது

அ) $X = 4, Y = 5$ ஆ) $X = 3, Y = 4$

இ) $X = 2, Y = 2$ ஈ) $X = 4/3, Y = 5/3$

9. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் $X + 2Y - 5 = 0$ மற்றும் $2X + 3Y - 8 = 0$ எனில், X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரி

அ) $X = -3, Y = 4$ ஆ) $X = 2, Y = 4$ இ) $X = 1, Y = 2$ ஈ) $X = -1, Y = 2$

10. $b_{yx} = -3/2$, $b_{xy} = -3/2$ எனில் ஒட்டுறவுக்கெழு r ஆனது

அ) 3/2 ஆ) – 3/2 இ) 9/4 ஈ) – 9/4

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக :

11. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு X மற்றும் Y க்கு இடைய அளவிடுவது ___________

12. உடன் தொடர்புப் போக்கு பற்றி படிப்பது மாறிகளுக்கிடையே காணப்படும் ___________ பற்றியது

13. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, ஒன்றை விட ___________ இருந்தால் மற்றொன்று ___________ இருக்கும்.

14. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று மிக அதிக தொலைவில் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், இதன் ஒட்டுறவின் அளவீடு ___________ இருக்கும்.

15. ஒரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு நேரிடை எனில், மற்றொன்றும் ___________ இருக்கும்.

16. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் குறியீடும் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் குறியீடும் ___________.

III. கீழ்க்கண்டவற்றிக்கு விடையளிக்க:

17. உடன் தொடர்புப் போக்கு வரையறு மற்றும் இரு உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகளையும் எழுதுக.

18. பல்வேறான உடன் தொடர்புப் போக்குகளை விவரி.

19. மீச்சிறுவர்க்க கொள்கையை விளக்குக.

20. விளக்குக : (i) வரைபட முறை (ii) கணக்கியல் முறை

21. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு என்றால் என்ன ?

22. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகளை எழுதுக.

23. ஏன் இரு உடன் தொடர்புக் கோட்டு சமன்பாடுகள் உள்ளன ?

24. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் பயன்கள் யாவை ?

25. ஒட்டுறவு மற்றும் உடன் தொடர்புப் போக்கு வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

26. X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு என்பது பற்றி நீவிர் அறிவதென்ன ?

27. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு காண்க.

$\Sigma X = 21$; $\Sigma Y = 20$

$\Sigma X^2 = 91$; $\Sigma XY = 74$

$n = 7$

28. X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டை கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு காண்க. X = 15 எனில், Y இன் மதிப்பைக் காண்க.

X	8	11	7	10	12	5	4	6
Y	11	30	25	44	38	25	20	27

29. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

X	25	22	28	26	35	20	22	40	20	18
Y	18	15	20	17	22	14	16	21	15	14

30. X இன் மாறுபாடு = 36, b_{xy} = 0.8, r = 0.5 எனில் Y –ன் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.

31. ஒட்டுறவு பற்றி படித்ததில், கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கிடைக்கப்பெற்றன.

	X	Y
சராசரி	68	60
திட்ட விலக்கம்	2.5	3.5

ஒட்டுறவுக் கெழு, r = 0.6 இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

32. ஒட்டுறவு பற்றி படித்ததில், கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்கள் கிடைக்கப்பெற்றன.

	X	Y
சராசரி	12	15
திட்ட விலக்கம்	2	3

r = 0.5 இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

33. X மற்றும் Y என்கிற இரு மாறிகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழு, r = 0.6, X மற்றும் Y மாறிகளின் மாறுபாடு முறையே 2.25 மற்றும் 4.00, $\overline{X}$ = 10, $\overline{Y}$ = 20 எனில் மேற்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க.

34. கீழ்க்கண்ட உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளுக்கு X மற்றும் Y மதிப்புகளுக்கு கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களையும் காண்க.

$$8X - 10Y + 66 = 0$$

$$40X - 18Y = 214$$

35. X = 90, Y = 70, b_{xy} = 1.36, b_{yx} = 0.61 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

(i) Y = 50 எனில் X இன் ஊகமதிப்பு மற்றும்

(ii) X மற்றும் Y க்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

36. கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

4X – 5Y + 33 = 0 மற்றும் 20X – 9Y – 107 = 0 Y இன் மாறுபாடு = 4

(i) X மற்றும் Y இன் கூட்டுச்சராசரி

(ii) X இன் திட்ட விலக்கம்

(iii) X மற்றும் Y க்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு

விடைகள்

I.

1. (ஆ)	2. (இ)	3. (ஈ)	4. (ஆ)	5. (ஆ)
6. (அ)	7. (அ)	8. (அ)	9. (இ)	10. (ஆ)

II.

11. சார்புடைமை	12. சார்புடைமை	13. அதிகமாக, குறைவாக
14. குறைவாக	15. நேரிடை	16. ஒன்றே

III.

27. $Y = 0.498X + 1.366$

28. $Y = 1.98\,X + 12.9$; $Y = 42.6$

30. 3.75

31. $Y = 2.88 + 0.84\,X$, $X = 42.2 + 0.43\,Y$

32. $Y = 6 + 0.75\,X$; $X = 7 + 0.33\,Y$

33. $Y = 0.8\,X + 12$, $X = 0.45Y + 1$

34. $\overline{X} = 13$, $\overline{Y} = 17$

35. (i) 62.8, (ii) 0.91

36. $\overline{X} = 13$, $\overline{Y} = 17$, S.D (X) = 9, r = 0.6

10. குறியீட்டு எண்கள்

10.1 அறிமுகம் :

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலைகளில் தொடர்புடைய மாறிகளின் பொது அளவுகளை ஒப்பிடும் புள்ளியியல் கருவியாக குறியீட்டு எண்கள் அமைகிறது. 2000 ஆம் ஆண்டில் உள்ள விலைவாசியை, 1990 வருடத்திலுள்ள விலைவாசியுடன் நாம் ஒப்பிட விரும்பினால், கோதுமை, அரிசி, காய்கறிகள், துணிகள், வீட்டு வாடகை மற்றும் பிற மாறிகளின் தொகுதியை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். மாற்றங்கள், சமவிகிதத்திலும், ஒரே திசையிலும் இருக்குமானால், பொதுவான விலைவாசி மாற்றத்தை கணக்கிடுவதில் எந்த ஒரு கடினமும் இல்லை. ஆனால் நடைமுறை என்னவெனில், வெவ்வேறு மாறிகள், வெவ்வேறாக, அதிலும் கூட விலைவாசி வெவ்வேறு அலகுகளில் ஏறியோ அல்லது இறங்கியோ இருக்கும். அதாவது, பால் லிட்டரிலும், அரிசி அல்லது கோதுமை கிலோகிராமிலும், வாடகை சதுர அடியிலும் குறிக்கப்படும்.

வெவ்வேறு பொருட்களின் விலை மாறுபாடு முழுவதையும் குறிப்பதற்கு நமக்கு ஒரு எண் தேவை. இவ்வெண் குறியிட்டு எண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. குறியீட்டெண் என்பது அளவின் மாறுபாட்டை குறிக்கும் எண் ஆகும். ‘குறியீட்டெண் என்பது, காலம், புவியியலமைப்பு மற்றும் பிற காரணிகளால் இரு தொடர்புடைய மாறிகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளக்கும் புள்ளியியல் அளவை என M. ஸ்பேஜெல் (M. Spiegel) கூறுகிறார். பொதுவாக குறியீட்டெண்கள் என்பது நேரிடையான அளவு மாற்றங்கள் காண இயலாத நிலையில், காலத்தினால் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிட குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகிறது.

மேற்கண்ட வரையறையை படித்து ஆராயும் பொழுது குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்கண்ட தெளிவான பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. குறியீட்டெண்கள் என்பன குறிப்பிடத் தக்க சராசரிகள்.
2. குறியீட்டெண்கள் சதவீதத்தில் குறிப்பிடப் பட வேண்டும்.
3. குறியீட்டெண்கள் அளவுகளின் மாற்றங்கள் நேரடியான அளவுகளுக்கு பொருத்தம் ஆகாது.
4. குறியீட்டெண்கள் ஒப்பிடக் கூடியது.

10.2 குறியீட்டெண்களின் பயன்கள் :

குறியீட்டு எண்கள் பொருளாதாரம் மற்றும் வணிக பகுப்பாய்விற்கு தவிர்க்க இயலாத கருவிகளாகப் பயன்படுகிறது.

1. அவை தொடர்புடைய மாறுதல்களை அளக்கக் கூடியது.
2. அவை நன்றாக ஒப்பிடக் கூடியது.
3. அவை நல்ல வழிகாட்டியாக அமைவது.
4. அவை பொருளாதார பாரமானிகளாக உள்ளன.
5. குறியீட்டு எண்கள் பொருளியலில் நாடித்துடிப்பாக விளங்குகிறது.

6. ஊதிய மாற்றத்தை ஒப்பிடக் கூடியது.

7. அவை வாழ்க்கைத் தரத்தை ஒப்பிடக் கூடியன.

8. அவை குறிப்பிடத் தகுந்த சராசரிகள்.

9. கொள்கை மாற்றங்களுக்கு நல்ல வழிகாட்டியாக அமைவன.

10. பணத்தின் வாங்கும் திறனை அளக்கக் கூடியது.

10.3 குறியீட்டெண்களின் வகைகள் :

பல்வேறு வகைப்பட்ட குறியீட்டெண்கள் உள்ளன. ஆனால் சுருக்கமாக, மூன்று வகை குறியீட்டெண்களை மட்டும் நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். அவையாவன,

(அ) விலைக் குறியீடு

(ஆ) அளவுக் குறியீடு

(இ) மதிப்புக் குறியீடு

(அ) விலைக் குறியீடு :

பொதுவாக, பணத்தின் மதிப்பை அளவிடுவதற்கு, விலைக் குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், இடத்தில் பண்டங்களின் விலையை ஒரு அடிப்படைக் காலத்துடன் இவ்விலைக் குறியீடு ஒப்பிடுகிறது.

இரு வகையான விலைக் குறியீட்டெண்கள் உள்ளன. அவை மொத்த விலைக் குறியீட்டெண், சில்லரை விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும். மொத்த விலைக் குறியீட்டெண்கள் என்பது நாட்டில் உள்ள பொதுவான விலைவாசி மாறுபாட்டை உணர்த்துகிறது. ஆனால் சில்லரை விலைக் குறியீட்டெண்கள் என்பது பொருள்கள் வாங்கு தன்மை, வங்கி வைப்புத் தொகைகள் போன்ற பொருள்களின் சில்லரை விலைவாசி மாறுபாடுகளை சில்லரை விலைவாசிக் குறியீடு உணர்த்துகிறது.

(ஆ) அளவுக் குறியீட்டெண் :

பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யும் அல்லது வாங்கும் அளவுகளில் உள்ள மாற்றத்தை அளவுக் குறியீட்டெண் குறிக்கிறது. பொருளாதார வெளியீட்டை அறிந்து கொள்ள இக்குறியீடு உதவுகிறது.

(இ) மதிப்புக் குறியீட்டெண் :

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் உள்ள மொத்த மதிப்பை ஒரு அடிப்படை காலத்தின் மொத்த மதிப்புடன் ஒப்பிட மதிப்பு குறியீட்டெண் உதவுகிறது. இங்கு மொத்த மதிப்பு என்பது வாங்கப்பட்ட பண்டங்களின் விலையை பண்டங்களின் அளவால் பெருக்கக் கிடைப்பது ஆகும்.

குறியீடு :

எந்த வகை குறியீட்டெண்களுக்கும் ஒப்பிடுவதற்கு இரு வேறு கால இடைவெளிகள் தேவைப்படுகின்றன. அவை அடிப்படை காலம் மற்றும் நடப்புக் காலம் என அழைக்கப்படுகின்றன. ஒப்பிடுவதற்கு அடிப்படையாக எந்த காலம் பயன்படுத்தப்படுகிறதோ, அதனை அடிப்படை ஆண்டு எனவும் மற்றது நடப்பு ஆண்டு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இங்கு பயன்படுத்தப்படும்

பல்வேறு குறியீடுகள் பின்வருமாறு

P_1 = நடப்பு ஆண்டின் விலை　　　P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலை

q_1 = நடப்பு ஆண்டின் அளவு　　　q_0 = அடிப்படை ஆண்டு அளவு

P_{01} = நிகழாண்டின் விலை குறியீட்டெண் அடிப்படை ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டது

10.4 குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் உள்ள சிக்கல்கள் :

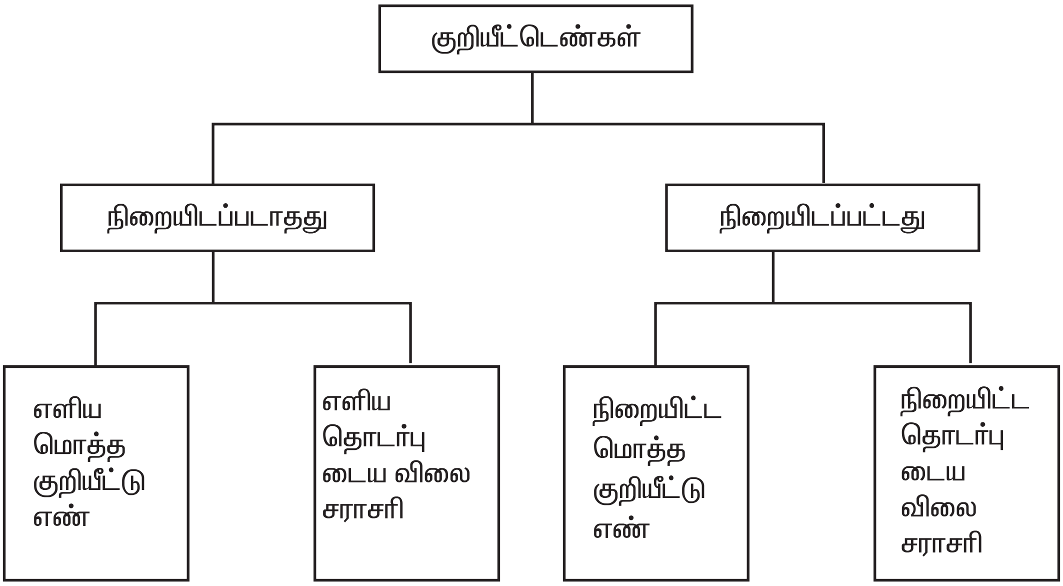
எந்த ஒரு குறியீட்டெண்ணும் எல்லாத் தேவைகளையும் நிறைவு செய்யக் கூடியதாக இல்லை. எனவே குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் ஏற்படும் பலவகை சிக்கல்கள், பொருளியல் நிபுணர் அல்லது புள்ளியியல் நிபுணரால் தீர்க்கப்படுகின்றன.

அச்சிக்கல்களாவன.

1. குறியீட்டெண்களின் நோக்கம்
2. அடிப்படையாண்டின் தேர்வு
3. உருப்படிகளின் தேர்வு
4. மூல விவரங்களின் தேர்வு
5. விவரங்கள் சேகரித்தல்
6. சராசரியின் தேர்வு
7. நிறையிடும் முறைகள்

10.5 குறியீட்டெண்கள் அமைக்கும் முறை :

குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு பல்வேறு முறைகளில் அமைக்கப்படுகின்றன.



10.5.1 எளிய மொத்த குறியீட்டெண் :

இது குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் உள்ள மிக எளிய முறையாகும். நடப்பு ஆண்டில் உள்ள பல்வேறு பண்டங்களின் விலை கூட்டப்பட்டு, அக்கூடுதலை அடிப்படையாண்டில் அப்பொருள்களின் விலைக் கூடுதலால் வகுத்து அதை 100 ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

குறியீட்டு முறையில் = $P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

இங்கு, Σp_1 = நடப்பு ஆண்டு விலைக் கூடுதல்

Σp_0 =அடிப்படை ஆண்டு விலைக் கூடுதல்

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எளிய மொத்த குறியீட்டெண் முறையில் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பண்டங்கள்	விலை / அலகு (ரூபாயில்)	
	2000	2004
A	80	95
B	50	60
C	90	100
D	30	45

தீர்வு :

பண்டங்கள்	விலை / அலகு (ரூபாயில்)	
	2000 (P_0)	2004 (P_1)
A	80	95
B	50	60
C	90	100
D	30	45
மொத்தம்	250	300

எளிய மொத்த விலை குறியீட்டெண் $= \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

$= \frac{300}{250} \times 100 = 120$

10.5.2 எளிய விலைச் சார்பிகளின் சராசரி குறியீட்டெண் :

இம்முறையில், பல்வேறு பண்டங்களின் தொடர்புடைய விலைச் சார்பிகளைக் கணக்கிட வேண்டும். அச்சார்பிகளின் சராசரியை கூட்டு சராசரி முறையிலோ, பெருக்கு சராசரி முறையிலோ கணக்கிடலாம். விலை சராசரி தொடர்பு காண கூட்டு சராசரி முறை பயன்படுத்தும் பொழுது, குறியீட்டெண் கணக்கிட உதவும் சூத்திரம்,

எளிய விலைத் தொடர்புடைய சராசரி (கூட்டு சராசரி முறையில்)

$$P_{01} = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{n}$$

P_1 = நடப்பு ஆண்டு விலைகள்

P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலைகள்

n = பண்டங்களின் எண்ணிக்கை

பெருக்கு சராசரி முறையில் சராசரி விலைத் தொடர்பு குறியீட்டெண் காண உதவும் சூத்திரம்,

எளிய விலை சராசரி தொடர்புடைய குறியீட்டெண்

$$P_{01} = \text{எதிர்மடக்கை}\left(\frac{\sum \log\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{n}\right)$$

இங்கு

$$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$$

$$P_{01} = \text{எதிர்மடக்கை}\left(\frac{\sum \log P}{n}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

பின்வரும் விவரத்தில் இருந்து **1997** ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு **1998** ற்கான சராசரி விலைத் தொடர்பு குறியீட்டெண்ணை (அ) கூட்டு சராசரி முறையில் (ஆ) பெருக்கு சராசரி முறையில் காணவும்.

பண்டங்கள்	1997 இல் விலை	1998 இல் விலை
A	50	70
B	40	60
C	80	100
D	20	30

தீர்வு :

(அ) எளிய விலைச் சார்பி குறியீட்டெண் (கூட்டு சராசரி முறையில்)

பண்டங்கள்	1997 இல் விலை (P_0)	1998 இல் விலை (P_1)	$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$
A	50	70	140
B	40	60	150
C	80	100	125
D	20	30	150
		மொத்தம்	565

எளிய விலைத் தொடர்பு சராசரி குறியீட்டு எண்

$$P_{01} = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{n} = \frac{\sum P}{n}$$

$$= \frac{565}{4} = 141.25\,\%$$

(ஆ) எளிய விலைச் சார்பி குறியீட்டெண் (பெருக்கு சராசரி முறையில்)

பண்டங்கள்	1997 இல் விலை (P_0)	1998 இல் விலை (P_1)	$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$	log P
A	50	70	140	2.1461
B	40	60	150	2.1761
C	80	100	125	2.0969
D	20	30	150	2.1761
			மொத்தம்	8.5952

எளிய விலைச் தொடர் சராசரி குறியீட்டெண்

(P_{01}) = எதிர்மடக்கை $\frac{\sum \log P}{n}$

(P_{01}) = எதிர்மடக்கை $\left[\frac{8.5952}{4}\right]$எதிர்மடக்கை $[2.1488] = 140.9\ \%$

10.5.3 மொத்த நிறையிட்ட குறியீட்டெண் :

ஒவ்வொரு பொருளின் சரியான முக்கியத்துவத்தை உணர்த்துவதற்கு அவற்றிற்கு சில சரியான எடைகள் கொடுக்கப்பட்டு மொத்த குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. எடைகள் கொடுப்பதற்கு பல முறைகள் இருப்பதால், குறியீட்டெண்கள், அமைப்பதற்கு அதிகமான சூத்திரங்கள் உள்ளன. அவற்றில் சில முக்கியமான முறைகள்.

1. லாஸ்பியரின் முறை
2. பாஷியின் முறை
3. பிஷரின் விழுமிய முறை
4. பௌலியின் முறை
5. மார்ஷெல், எட்ஜ்வொர்தின் முறை
6. கெல்லியின் முறை

1. லாஸ்பியரின் முறை :

லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் என்பது, நிறையிட்ட மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும். இங்கு எடைகள் அடிப்படையாண்டின் அளவுகளால் நிர்ணயிக்கப்பட்டு மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. இது கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் = $P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

2. பாஷியின் முறை :

இம்முறையில் எடைகள் நடப்பு ஆண்டின் அளவுகளால் கொடுக்கப்பட்டு மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. குறியீட்டெண் காண உதவும் சூத்திரமானது,

பாஷியின் விலைக் குறியீட்டெண் = $P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$

இங்கு P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலை P_1 = நடப்பு ஆண்டு விலை

q_0 = அடிப்படை ஆண்டு அளவு q_1 = நடப்பு ஆண்டு அளவு

3. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் முறை :

லாஸ்பியர் மற்றும் பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் பெருக்கல் சராசரி பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் = $P_{01}^{F} = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$$

இது ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஏனெனில்

(அ) பெருக்கல் சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

(ஆ) இது அடிப்படையாண்டு, நடப்பு ஆண்டு இரண்டையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது.

(இ) இது நல்ல குறியீட்டெண்களுக்கான சோதனைகளை நிறைவு செய்கிறது.

(ஈ) இது விருப்பு வெறுப்புகளற்றது.

4. பௌலியின் முறை :

லாஸ்பியர், மற்றும் பாஷி குறியீட்டெண்களின் கூட்டு சராசரி பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

குறியீட்டு முறையில்,

பௌலியின் குறியீட்டெண் = $P_{01}^{B} = \frac{L + P}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right] \times 100$$

5. மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் முறை :

இம்முறையில், நடப்பு ஆண்டு மற்றும் அடிப்படையாண்டுகளின், விலைகள் மற்றும் அளவுகள் இரண்டுமே, எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. இக்குறியீட்டெண் கணக்கிடுவதற்கான சூத்திரம்

மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= P_{01}^{ME} = \frac{\sum(q_0 + q_1)p_1}{\sum(q_0 + q_1)p_0} \times 100 = \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100$$

6. கெல்லியின் முறை :

குறியீட்டெண்களை கணக்கிடுவதில் பின்வரும் சூத்திரத்தை கெல்லி தெரிவு செய்துள்ளார்.

கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண் $= P_{01}^{k} = \frac{\sum p_1q}{\sum p_0q} \times 100$

இங்கு $q = \frac{q_0 + q_1}{2}$

அதாவது இரண்டு ஆண்டுகளின் அளவுகளின் சராசரி நிறைகளாக பயன்படுத்தப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு **1.** லாஸ்பியர் முறை **2.** பாஷியின் முறை **3.** பிஷரின் முறை மூலம் விலைக் குறியீட்டெண் காண்க.

பண்டங்கள்	2000		2001	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	2	8	4	5
B	5	12	6	10
C	4	15	5	12
D	2	18	4	20

தீர்வு :

பண்டங்கள்	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	2	8	4	5	16	10	32	20
B	5	12	6	10	60	50	72	60
C	4	15	5	12	60	48	75	60
D	2	18	4	20	36	40	72	80
					172	148	251	220

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் $= P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{251}{172} \times 100 = 145.93\,\%$$

பாஷியின் விலைக் குறியீட்டெண் = $P_{01}^{P} = \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{220}{148} \times 100$$

$$= 148.7\,\%$$

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $= \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{(145.9) \times (148.7)}$$

$$= \sqrt{21695.33}$$

$$= 147.3\,\%$$

(அல்லது)

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $= \sqrt{\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{251}{172} \times \frac{220}{148}} \times 100$$

$$= \sqrt{(1.459) \times (1.487)} \times 100$$

$$= \sqrt{2.170} \times 100$$

$$= 1.473 \times 100$$

$$= 147.3$$

விளக்கம் : குறிப்பிட்ட பொருட்களை வாங்க அடிப்படை ஆண்டில் நூறு ரூபாய் செலவழித்திருந்தால் அதே அளவுள்ள பொருட்களை நடப்பு ஆண்டில் வாங்குவதற்கு ரூ.**145.93** செலவழிக்க வேண்டும் அதாவது பொருட்களின் விலையில் **45.93**% விலை மாற்றம் நடப்பு ஆண்டில் ஏற்பட்டுள்ளது என்பது லாஸ்பியர் குறியீட்டெண்ணின் பொருளாகும். இதே போல் மற்ற குறியீட்டெண் மதிப்புகளையும் விளக்கிக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

பின்வரும் விவரங்கட்கு

(அ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டு முறையில்

(ஆ) மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியிட்டு முறையில், குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

பொருட்கள்	அடிப்படையாண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	அளவு	விலை	அளவு	விலை
A	10	3	8	4
B	20	15	15	20
C	2	25	3	30

தீர்வு :

பொருட்கள்	Q_0	P_0	Q_1	P_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	10	3	8	4	30	24	40	32
B	20	15	15	20	300	225	400	300
C	2	25	3	30	50	75	60	90
					380	324	500	422

(அ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண் $= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right] \times 100$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{500}{380} + \frac{422}{324}\right] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}[1.316 + 1.302] \times 100$$

$$= \frac{1}{2}[2.168] \times 100$$

$$= 1.309 \times 100 = 130.9\%$$

(ஆ) மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= P_{01}^{ME} = \frac{\Sigma(q_0 + q_1)p_1}{\Sigma(q_0 + q_1)p_0} \times 100$$

$$= \left[\frac{500 + 422}{380 + 324}\right] \times 100 = \left[\frac{922}{704}\right] \times 100 = 131\%$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு பொருத்தமான விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பொருட்கள்	அளவு	விலை	
		1996	**1997**
A	20	2	4
B	15	5	6
C	8	3	2

தீர்வு :

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் அளவுகள் பொதுவாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருட்கள்	Q	p_0	p_1	p_0q	p_1q
A	20	2	4	40	80
B	15	5	6	75	90
C	8	3	2	24	16
			மொத்தம்	139	186

கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண் = $P_{01}^{k} = \dfrac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100$

$$= \frac{186}{139} \times 100 = 133.81$$

எடையிட்ட சராசரி விலைச் சார்பிகள் முறை :

ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தனிப்பட்ட எடைகள், கொடுக்கப்படும் பொழுது, எடையிட்ட குறியீட்டெண் பின்வரும் சூத்திரத்தால் கணக்கிடப்படுகிறது.

விலைச் சார்பிகள் முறையில் எடையிட்ட சராசரி = $\dfrac{\sum pw}{\sum w}$

இங்கு W = பொருளின் எடை, P = குறியிட்ட விலைச் சார்பி = $\dfrac{p_1}{p_0} \times 100$ அடிப்படையாண்டின் மதிப்பு p_0q_0 எடையாகக் கொடுக்கப்பட்டால், அதாவது $W = p_0q_0$ எனில் விலைச் சார்பி முறையில் நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி

$$= \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) \times p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

இது லாஸ்பியரின் சூத்திரம் ஆகும். நிறைகள் $W = p_0q_1$ என்று எடுக்கப்பட்டால் விலைச் சார்பிகள் முறையில் நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி

$$= \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) \times p_0 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$ இது பாஷியின் சூத்திரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

பின்வரும் விவரங்கட்கு நிறையிட்ட விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பண்டங்கள்	விலை		நிறை
	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	
A	5	4	60
B	3	2	50
C	2	1	30

தீர்வு :

பண்டங்கள்	P_1	P_0	W	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PW
A	5	4	60	125	7500
B	3	2	50	150	7500
C	2	1	30	200	6000
			140		21000

நிறையிட்ட சராசரி விலைச் சார்பு குறியீட்டெண் $= \frac{\sum pw}{\sum w}$

$= \frac{21000}{140}$

$= 150\%$

10.6 அளவுக் குறியீட்டெண் :

விலைக் குறியீட்டெண்களால் சில பொருட்களின் விலைகளை மட்டுமே ஒப்பிட இயலும். ஆனால் அளவுக் குறியீட்டெண்கள் மூலம், உற்பத்தி அளவு, வேலை வாய்ப்பு ஆகியவற்றை அளவிட இயலும். உற்பத்தி அளவிற்கான பொதுவாக அதிகம் பயன்படுத்தப்படும் அளவுக் குறியீட்டெண்களாவன.

லாஸ்பியரின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{L} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times 100$

பாஷியின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{P} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \times 100$

பிஷரின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{F} = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \times 100$$

இச்சூத்திரங்கள் அளவுக் குறியீட்டெண்ணைக் குறிக்கின்றன. இதில் வெவ்வேறு பொருட்களின் அளவுகள், அவற்றின் விலையால் நிறையிடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7:

பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து அளவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

1. லாஸ்பியர் முறை **2.** பாஷியின் முறை **3.** பிஷரின் முறை

பண்டங்கள்	2000		2002	
	விலை	மொத்த மதிப்பு	விலை	மொத்த மதிப்பு
A	10	100	12	180
B	12	240	15	450
C	15	225	17	340

தீர்வு :

இங்கு அளவுகளுக்கு பதிலாக மொத்த மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில், அடிப்படையாண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டுகளின் அளவுகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

$$\text{அளவு} = \frac{\text{மொத்த மதிப்பு}}{\text{விலை}}$$

பண்டங்கள்	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	10	10	12	15	100	150	120	180
B	12	20	15	30	240	360	300	450
C	15	15	17	20	225	300	255	340
					565	810	675	970

லாஸ்பியரின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{L} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times 100$

$$= \frac{810}{565} \times 100 = 143.4$$

பாஷியின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{P} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \times 100$

$$= \frac{970}{675} \times 100 = 143.7$$

பிஷரின் அளவு குறியீட்டெண் = $Q_{01}{}^{F} = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{143.4 \times 143.7} = 143.6$$

(அல்லது)

$$Q_{01}{}^{F} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{810}{565} \times \frac{970}{675}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.434 \times 1.437} \times 100$$

$$= 1.436 \times 100 = 143.6$$

10.7 குறியீட்டெண்களின் பொருத்தமுடைமைக்கான சோதனைகள் :

குறியீட்டெண் அமைப்பதற்கான பல சூத்திரங்களைப் பற்றி படித்தோம். கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்கு பொருத்தமான சூத்திரம் எது என்ற கேள்வி எழுகிறது. இதற்கு பல சோதனைகள் ஏற்படுத்தப்பட்டிருப்பினும் அவற்றில் முக்கியமானவை.

1. அலகு சோதனை :

இச்சோதனையின்படி குறியீட்டெண் விலை மற்றும் அளவு சார்பற்ற அலகுகளாக தெரிவு செய்யப்பட்டிருக்க வேண்டும். இச்சோதனை முறையை எளிய கூட்டல் முறைச் சோதனையைத் தவிர மற்ற அனைத்து குறியீட்டெண்களும் நிறைவு செய்கின்றன.

2. கால மாற்றுச் சோதனை :

கால மாற்றுச் சோதனை என்பது கொடுக்கப்பட்ட முறை, காலத்தின் முன்முகமாயும், பின் முகமாயும் இயங்கும் தன்மை உடையதா என்பதை அறியும் சோதனையாகும். பிஷரின் வார்த்தைகளில் "குறியீட்டெண் கணக்கீடு சூத்திரங்களில், அடிப்படையாண்டு, நடப்பு ஆண்டு என்ற இரண்டில் எதை அடிப்படையாக எடுத்தாலும், ஒப்பிடலில் அவற்றின் விகிதம் சமமாக இருக்க வேண்டும்." குறியீட்டு முறையில் பின்வரும் தொடர்பை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

இங்கு P_{01} என்பது குறியீட்டெண்ணையும் 1 என்பது நடப்பு காலத்தையும், 0 என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் குறிக்கும். P_{10} என்ற குறியீட்டெண்ணில் 0 என்பது நடப்பு காலத்தையும் 1 என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் குறிக்கிறது. இவற்றின் பெருக்கல் '1' ற்கு சமம் இல்லை எனில் அது கால மாற்று சோதனைக்கு உட்பட்டதல்ல. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் காலமாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0}}$$

பிறகு $P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0}}$

$$= \sqrt{1} = 1$$

3. காரணி மாற்று சோதனை :

பிஷரால் தெரிவு செய்யப்பட்ட மற்றொரு சோதனை காரணி மாற்று சோதனையாகும். இச்சோதனை விலைக் குறியீட்டெண் மற்றும் அளவுக் குறியீட்டெண் இவற்றின் பெருக்கல் அதற்கொத்த மதிப்பு குறியீட்டெண்கணுக்கு சமம் என்பதை நிறைவு செய்கிறது. பிஷரின் வார்த்தைகளில் அதாவது, ஒரு நல்ல விலைக் குறியீட்டெண்ணை, காலமாற்றத்தால், பொருத்தமற்ற முடிவுகளைக் கொடுக்காமல், இருக்கக் கூடிய சூத்திரம், அது போலவே விலைகள், அளவுகள் என்ற காரணிகள் மாற்றும் பொழுதும், பொருத்தமற்ற முடிவுகளைக் கொடுக்காமல் இருக்க வேண்டும். அதாவது இரு முடிவுகளின் பெருக்குத் தொகை, உண்மை மதிப்பு விகிதத்தைக் கொடுக்க வேண்டும்.

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

இச்சோதனை அடிப்படையில், உண்மை மதிப்பு சதவிகிதத்திற்கு, குறியீட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகை சமம் இல்லை எனில், அவற்றில் ஒன்றிலோ, இரண்டிலுமோ பிழை உள்ளது என அறியலாம்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}$$

எனவே $P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}\right)^2} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ என்பதில் இருந்து காரணி மாற்று சோதனையை பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டு எண் நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் அமைக்க அது காலமாற்று, மற்றும் காரணிமாற்று சோதனைகளை நிறைவு செய்கிறதா எனக் காண்க.

பொருட்கள்	அடிப்படையாண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	அளவு	விலை	அளவு	விலை
A	12	10	15	12
B	15	7	20	5
C	5	5	8	9

தீர்வு :

பொருட்கள்	q_0	p_0	q_1	p_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	12	10	15	12	120	150	144	180
B	15	7	20	5	105	140	75	100
C	5	5	8	9	25	40	45	72
					250	330	264	352

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் = $P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}} \times 100$$

$$= \sqrt{(1.056) \times (1.067)} \times 100$$

$$= \sqrt{1.127} \times 100$$

$$= 1.062 \times 100$$

$$= 106.2$$

கால மாற்றுச் சோதனை :

$P_{01} \times P_{10} = 1$ எனில் காலமாற்று சோதனை நிறைவு செய்கிறது எனலாம்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{330}{352} \times \frac{250}{264}}$$

இப்பொழுது $P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330} \times \frac{330}{352} \times \frac{250}{264}}$

$$= \sqrt{1} = 1$$

எனவே பிஷரின் குறியீட்டெண் காலமாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

காரணி மாற்று சோதனை :

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ எனும் பொழுது காரணி மாற்று சோதனை நிறைவடைகிறது எனலாம்.

இப்பொழுது, $P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{330}{250} \times \frac{352}{264}}$$

பிறகு $P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330} \times \frac{330}{250} \times \frac{352}{264}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{352}{250}\right)^2}$$

$$= \frac{352}{250}$$

$$= \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் காரணி மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

10.8 நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு :

நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு என்பது வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் எனவும் அழைக்கப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விலை மற்றும் சேவையின் மாற்றத்தினால்

ஏற்படும் விலைகளை அறியவும் நடப்புக் காலத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பினரின் வாங்கும் திறனை ஒரு அடிப்படைக் காலத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும், இந்த குறியீட்டெண்கள் உருவாக்கப்பட்டன. வெவ்வேறு பிரிவு மக்களிடையே, வெவ்வேறு விதமாக இவ்விலைவாசி மாற்றம், ஒரு பாதிப்பை ஏற்படுத்துகிறது. பொதுவான குறியீட்டெண் இதை உணர்த்தத் தவறிவிடுகிறது. எனவே, நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்களின் அவசியம் ஏற்படுகிறது. மனிதனுக்கு மனிதன், இடத்திற்கு இடம், பிரிவிற்கு பிரிவு, மக்களின் வாங்கும் பழக்கம் வேறுபடுகிறது. மொத்த மக்களுக்காகவும், விலைக் குறியீடு அவசியமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக உழைக்கும் வர்க்கம், ஏழை மக்கள், நடுத்தர வகுப்பினர், பணம் படைத்தவர்கள், இவர்கள் அனைவருக்கும், மற்றும் பெரிய நகரங்கங்கள், நகர்ப்புறம், கிராமப்புறம் போன்ற புவியியல் பகுதிகளில் மக்களனைவரையும் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள் :

1. பல நாடுகளில், சம்பளத்தை நிர்ணயிக்கலாம், பஞ்சப்படியை திருத்துவதற்கும், சம்பளப் பேச்சு வார்த்தைகளுக்கு மிக்க பயனுடையதாய் அமைகிறது.
2. அரசாங்க நிலையில், இக்குறியீட்டெண்கள் சம்பளக் கொள்கை, விலைவாசிக் கொள்கை, வாடகைக் கட்டுப்பாடு, வரிவிலக்கு பொதுவான பொருளாதாரக் கொள்கைகளுக்கு பயன்படுகிறது.
3. பணத்தின் வாங்கும் திறனை அளவிடவும் உண்மை வருவாயை அளப்பதற்கும் பயன்படுகிறது.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விலை மற்றும் சேவை மாற்றத்தை ஆய்வு செய்யவும் குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் அமைக்கும் முறை :

நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு அமைப்பதில் இரு முறைகள் உள்ளன. அவையாவன.

1. மொத்த செலவின முறை

2. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை அல்லது நிறையிட்ட சார்பி முறை

1. மொத்த செலவின முறை :

இது லாஸ்பியரின் முறையை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அடிப்படையாண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவினரால் நுகரப்படும் பொருட்களின் அளவுகள், நிறைகளாகும்.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் = $\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

2. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை அல்லது நிறையிட்ட சார்பி முறை :

ஒரு சராசரி குடும்பத்தில், பல்வேறு பொருட்களுக்கு செய்யப்படும் செலவு மொத்தமும் கருத்தில் கொள்ளப்பட்டு அவற்றிற்கு எடைகள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

இதற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண் = $\dfrac{\sum pw}{\sum w}$

இங்கு ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கு $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

w = அப்பொருளின் எடை, மதிப்பு நாம் முன்னர் படித்த "எடையிட்ட விலைச் சார்பி சராசரி முறை"யும் குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையும் ஒரே முறையில் நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்பதில் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9:

மொத்த செலவின முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு 1993 ஐ அடிப்டையாகக் கொண்டு 1996ற்காக நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் அமைக்க.

பண்டங்கள்	வாங்கப்பட்ட அளவு	விலை	
		1993	1996
A	100	8	12
B	25	6	7
C	10	5	8
D	20	15	18

தீர்வு :

பொருட்கள்	q_0	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_0
A	100	8	12	800	1200
B	25	6	7	150	175
C	10	5	8	50	80
D	20	15	18	300	360
			மொத்தம்	1300	1815

மொத்த செலவின முறையில் நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100 = \frac{1815}{1300} \times 100 = 139.6$$

எடுத்துக்காட்டு 10

பின்வரும் விவரங்களுக்கு 1990ம் வருடத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு 1993 வருடத்திற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணை ‘குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில்’ காண்க.

இனங்கள்	எடை	விலை	
		1990 (ரூ)	1993 (ரூ)
உணவு	35	150	140
வாடகை	20	75	90
உடை	10	25	30
எரிபொருள்	15	50	60
இதர வகைகள்	20	60	80

தீர்வு :

இனங்கள்	w	P_0	P_1	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	pw
உணவு	35	150	140	93.33	3266.55
வாடகை	20	75	90	120.00	2400.00
உடை	10	25	30	150.00	1500.00
எரிபொருள்	15	50	60	120.00	1800.00
இதர வகைகள்	20	60	80	133.33	2666.60
	100				11633.15

குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையில் நுகர்வோர் குறியீட்டெண் = $\frac{\sum pw}{\sum w}$

$$= \frac{11633.15}{100} = 116.33$$

பயிற்சி – 10

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. குறியீட்டெண் என்பது

அ) தொடர்புடைய மாற்றங்களை அளப்பது

ஆ) ஒரு சராசரியின் சிறப்பு வகை

இ) ஒரு சதவீத சார்பு

ஈ) இவை அனைத்தும்

2. குறியீட்டெண்களில் மிகவும் ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய சராசரி முறை

அ) கூட்டு சராசரி ஆ) பெருக்கல் சராசரி

இ) இசைவுச் சராசரி ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவும் இல்லை

3. லாஸ்பியர் குறியீட்டெண் சூத்திரத்தில் எடைகளாக பயன்படுத்தப்படுபவை

அ) அடிப்படை ஆண்டு

ஆ) நடப்பு ஆண்டு

இ) வருடங்கள் எண்ணிக்கையின் சராசரி

ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவும் இல்லை

4. லாஸ்பியர் மற்றும் பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் பெருக்கல் சராசரி

அ) பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்

ஆ) கெல்லியின் குறியீட்டெண்

இ) மார்ஷெல் – எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண்

ஈ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண்

5. வழக்கமான குறியீட்டில் காலமாற்று சோதனை நிறைவு செய்யும் நிபந்தனை

அ) $P_{01} \times P_{10} = 1$ ஆ) $P_{10} \times P_{01} = 0$

இ) $P_{01} / P_{10} = 1$ ஈ) $P_{01} + P_{10} = 1$

6. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் காண மிகச் சரியான முறை

அ) நிறையிட்ட மொத்த செலவின முறை

ஆ) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை

இ) விலைச் சார்பு முறை

ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவுமில்லை

7. பாஷியின் சூத்திரத்தில் நிறைகளாக பயன்படுபவை

அ) அடிப்படையாண்டு

ஆ) கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டு

இ) தெரிவு செய்யப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு ஆண்டு

ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவுமில்லை

II. கோடிட்ட இடத்தை பூர்த்தி செய்க:

8. ___________ உருவாக்க குறியீட்டெண்கள் உதவி செய்கிறது.

9. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் என்பது, லாஸ்பியர் மற்றும் பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் ___________

10. குறியீட்டெண்கள் ___________ குறிப்பிடப்படுகிறது.

11. ___________ என்பது விழுமிய குறியீட்டெண் ஆகும்.

12. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில், வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் ___________.

III. பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளி :

13. குறியீட்டெண் என்றால் என்ன ? அவற்றின் பயன்கள் யாவை ?

14. காலமாற்று சோதனை மற்றும் காரணி மாற்று சோதனையை விவரி ?

15. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் என்றால் என்ன ? அவற்றின் பயன்கள் யாவை ?

16. கீழ்க்கண்ட முறையில் விலைக் குறியீட்டெண் காண்க ?

i) லாஸ்பியரின் முறை ii) பாஷியின் முறை iii) பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்

பண்டங்கள்	1990		1995	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	20	15	30	20
B	15	10	20	15
C	30	20	25	10
D	10	5	12	10

17. பின்வரும் விவரத்திற்கு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கணக்கிடுக. மேலும் அது கால மாற்று சோதனை மற்றும் காரணி மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறதா எனக் காண்க.

பண்டங்கள்	விலை		அளவு	
	2000	2002	2000	2002
A	6	35	10	40
B	10	25	12	30
C	12	15	8	20

18. பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் காண்க.

இனங்கள்	இனங்கள்		எடை
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	
உணவு	30	45	4
வாடகை	10	15	2
உடை	15	20	1
எரிபொருள்	20	15	3
இதர வகைகள்	25	20	2

விடைகள்

I. 1. (ஈ) 2. (ஆ) 3. (அ) 4. (ஈ)

5. (அ) 6. (ஆ) 7. (ஆ)

II. 8. கொள்கை மாற்றங்கள் 9. பெருக்கல் சராசரி 10. சதவீதம்

11. பிஷரின் குறியீட்டெண் 12. $\frac{\sum pw}{\sum w}$

III. 16. (i) L = 110 (ii) P = 123.9 (iii) F = 116.7

17. 296 18. 118.2

Logarithms

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	11	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	10	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6658	6685	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9653	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1479	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Antilogarithms

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Reciprocals of Four-Figure Numbers

											SUBTRACT Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174	9	18	28	37	46	55	64	74	83
1.1	0.9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403	8	15	23	31	38	46	53	61	69
1.2	0.8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7813	7752	7	13	20	26	33	39	46	52	59
1.3	0.7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194	6	11	17	22	28	33	39	44	50
1.4	0.7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1.5	0.6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1.6	0.6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1.7	0.5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587	3	7	10	13	16	20	23	26	29
1.8	0.5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1.9	0.5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2.0	0.5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2.1	0.4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	7	9	11	13	15	17	19
2.2	0.4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.3	0.4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2.4	0.4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2.5	0.4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.6	0.3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	9	10	11	13
2.7	0.3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2.8	0.3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2.9	0.3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.0	0.3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	8	9	10
3.1	0.3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.2	0.3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.3	0.3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3.4	0.2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3.5	0.2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3.6	0.2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3.7	0.2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3.8	0.2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3.9	0.2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4.0	0.2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4.1	0.2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4.2	0.2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.3	0.2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.4	0.2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.5	0.2222	2217	2212	2206	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.6	0.2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.7	0.2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.8	0.2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4.9	0.2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5.0	0.2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5.1	0.1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5.2	0.1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5.3	0.1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.4	0.1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

$$\text{e.g.}\ \frac{1}{3.7} = 0.2703,\quad \frac{1}{3.74} = 0.2674,\quad \frac{1}{3.748} = 0.2668,\quad \frac{1}{374.8} = 0.002668,\quad \frac{1}{0.0003748} = 2668.$$

Reciprocals of Four-Figure Numbers

											SUBTRACT Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.6	0.1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.7	0.1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5.8	0.1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5.9	0.1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6.0	0.1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6.1	0.1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6.2	0.1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6.3	0.1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.4	0.1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.5	0.1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.6	0.1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.7	0.1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.8	0.1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.9	0.1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2
7.0	0.1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.1	0.1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.2	0.1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.3	0.1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.4	0.1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.5	0.1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.6	0.1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.7	0.1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7.8	0.1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7.9	0.1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.0	0.1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.1	0.1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.2	0.1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.3	0.1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.4	0.1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.5	0.1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.6	0.1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.7	0.1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.8	0.1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.9	0.1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.0	0.1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.1	0.1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.2	0.1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.3	0.1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.4	0.1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.5	0.1053	1052	1050	1039	1049	1047	1046	1045	1044	1043	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.6	0.1042	1041	1039	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.7	0.1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.8	0.1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.9	0.1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Squares

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	4376	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8231	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281
16	25600	25921	26244	26569	26896	27225	27556	27889	28224	28561
17	28900	29241	29584	29929	30276	30625	30976	31329	31684	32041
18	32400	32761	33124	33489	33856	34225	34596	34969	35344	35721
19	36100	36481	36864	37249	37636	38025	38416	38809	39204	39601
20	40000	40401	40804	41209	41616	42025	42436	42849	43264	43681
21	44100	44521	44944	45369	45796	46225	46656	47089	47524	47961
22	48400	48841	49284	49729	50176	50625	51076	51529	51984	52441
23	52900	53361	53824	54289	54756	55225	55696	56169	56644	57121
24	57600	58081	58564	59049	59536	60025	60516	61009	61504	62001
25	62500	63001	63504	64009	64516	65025	65536	66049	66564	67081
26	67600	68121	68644	69169	69696	70225	70756	71289	71824	72361
27	72900	73441	73984	74529	75076	75625	76176	76729	77284	77841
28	78400	78961	79524	80089	80656	81225	81796	82369	82944	83521
29	84100	84681	85264	85849	86436	87025	87616	88209	88804	89401
30	90000	90601	91204	91809	92416	93025	93636	94249	94864	95481
31	96100	96721	97344	97969	98596	99225	99856	100489	101124	101761
32	102400	103041	103684	104329	104976	105625	106276	106929	107584	108241
33	108900	109561	110224	110889	111556	112225	112896	113569	114244	114921
34	115600	116281	116964	117649	118336	119025	119716	120409	121104	121801
35	122500	123201	123904	124609	125316	126025	126736	127449	128164	128881
36	129600	130321	131044	131769	132496	133225	133956	134689	135424	136161
37	136900	137641	138384	139129	139876	140625	141376	142129	142884	143641
38	144400	145161	145924	146689	147456	148225	148996	149769	150544	151321
39	152100	152881	153664	154449	155236	156025	156816	157609	158404	159201
40	160000	160801	161604	162409	163216	164025	164836	165649	166464	167281
41	168100	168921	169744	170569	171396	172225	173056	173889	174724	175561
42	176400	177241	178084	178929	179776	180625	181476	182329	183184	184041
43	184900	185761	186624	187489	188356	189225	190096	190969	191844	192721
44	193600	194481	195364	196249	197136	198025	198916	199809	200704	201601
45	202500	203401	204304	205209	206116	207025	207936	208849	209764	210681
46	211600	212521	213444	214369	215296	216225	217156	218089	219024	219961
47	220900	221841	222784	223729	224676	225625	226576	227529	228484	229441
48	230400	231361	232324	233289	234256	235225	236196	237169	238144	239121
49	240100	241081	242064	243049	244036	245025	246916	247009	248004	249001

Exact squares of 4 figure numbers can be quickly calculated from the Identity

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Squares

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	250000	251001	252004	253009	254016	255025	256036	257049	258064	259081
51	260100	261121	262144	263169	264196	265225	266256	267289	268324	269361
52	270400	271441	272484	273529	274576	275625	276676	277729	278784	279841
53	280900	281961	283024	284089	285156	286225	287296	288369	289444	290521
54	291600	292681	293764	294849	295936	297025	298116	299209	300304	301401
55	302500	303601	304704	305809	306916	308025	309136	310249	311364	312481
56	313600	314721	315844	316969	318096	319225	320356	321489	322624	323761
57	324900	326041	327184	328329	329476	330625	331776	332929	334084	335241
58	336400	337561	338724	339889	341056	342225	343396	344569	345744	346921
59	348100	349281	350464	351649	352836	354025	255216	356409	357604	358801
60	360000	361201	362404	363609	364816	366025	367236	368449	369664	370881
61	372100	373321	374544	375769	376996	378225	379456	380689	381924	383161
62	384400	385641	386884	388129	389376	390625	391876	393129	394384	395641
63	396900	398161	399424	400689	401956	403225	404496	405769	407044	408321
64	409600	410881	412164	413449	414736	416025	417316	418609	419904	421201
65	422500	423801	425104	426409	427716	429025	430336	431649	432964	434281
66	435600	436921	438244	439569	440896	442225	434556	444889	446224	447561
67	448900	450241	451584	452929	454276	455625	456976	458329	459684	461041
68	462400	463761	465124	466489	467856	469225	470596	471969	473344	474721
69	476100	477481	478864	480249	481636	483025	484416	485809	487204	488601
70	490000	491401	491804	494209	495616	497025	498436	499849	501264	502681
71	504100	505521	506944	508369	509796	511225	512656	514089	515524	516961
72	518400	519841	521284	522729	524176	525625	527076	528529	529884	531441
73	532900	534361	535824	537289	538756	540225	541696	543169	544644	546121
74	547600	549081	550564	552049	553536	555025	556516	558009	559504	561001
75	562500	564001	565504	567009	568516	570025	571536	573049	574564	576081
76	577600	579121	580644	582169	583696	585225	586756	588289	589824	591361
77	592900	594441	595984	597529	599076	600625	602176	603729	605284	606841
78	608400	609961	611524	613089	614556	616225	617796	619369	620944	622521
79	624100	625681	627264	628849	630436	632025	633616	635209	636804	638401
80	640000	641601	643204	644809	646416	648025	649636	651249	652864	654481
81	656100	657721	659344	660969	662596	664225	665856	667489	669124	670761
82	672400	674041	675684	677329	678976	680625	682276	683929	685584	687241
83	688900	690561	692224	693889	695556	697225	698896	700569	702244	703921
84	705600	707281	708964	710649	712336	714025	715716	717409	719104	720801
85	722500	724201	725904	727609	729316	731025	732736	734449	736164	737881
86	739600	741321	743044	744769	746496	748225	749956	751689	753424	755161
87	756900	758641	760384	762129	763876	765625	767376	769129	770884	772641
88	774400	776161	777924	797689	781456	783225	784996	786769	788544	790321
89	792100	793881	795664	797449	799236	801025	802516	804609	806404	808201
90	810000	811801	813604	815409	817216	819025	820836	822649	824464	826281
91	828100	829941	831744	833569	835396	837225	839056	840889	842724	844561
92	846400	848241	850084	851929	853776	855625	857476	859329	861184	863041
93	864900	866761	868624	870489	872356	874225	876096	877969	879844	881721
94	883600	885481	887364	889249	891136	893025	894916	896809	898704	900601
95	902500	904401	906304	908209	910116	912025	913936	915849	917764	919681
96	921600	923521	925444	927369	929296	931225	933156	935089	937024	938961
97	940900	942841	944784	946729	948676	950625	952576	954529	956484	958441
98	960400	962361	961324	966289	968256	970225	972196	974169	976144	978121
99	980100	982081	984064	986049	988036	990025	992016	994009	996004	998001

Exact squares of 4 figure numbers can be quickly calculated from the Identity

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

quare Roots from 1 to 10

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.186	1.091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.123	1.127	1.131	1.136	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.171	1.175	1.179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.7	1.304	1.308	1.312	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.357	1.360	1.364	1.368	1.371	1.375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411	0	1	1	1	2	2	3	3	3
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.1	1.449	1.453	1.456	1.460	1.463	1.466	1.470	1.473	1.477	1.480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2.6	1.612	1.616	1.616	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.756	1.755	1.758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.839	1.841	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.866	1.868	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.5	1.871	1.874	1.876	1.879	1.882	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.911	1.913	1.916	1.918	1921	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.937	1.939	1.942	1.944	1.947	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.8	1.949	1.952	1.955	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.988	1.990	1.993	1.995	1.998	0	1	1	1	1	2	2	2	2
4.0	2.000	2.003	2.005	2.008	2.010	2.013	2.015	2.017	2.020	2.022	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.091	2.093	2.095	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.200	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234	0	0	1	1	1	2	2	2	2
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.294	2.296	2.298	2.300	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.320	2.322	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343	0	0	1	1	1	1	1	2	2

Square Roots from 1 to 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Mean Difference*								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2.345	2.347	2.350	2.352	2.354	2.356	2.358	2.360	2.362	2.364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.6	2.366	2.369	2.371	2.373	2.375	2.377	2.379	2.381	2.383	2.385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.7	2.388	2.390	2.392	2.394	2.396	2.398	2.400	2.402	2.404	2.406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415	2.417	2.419	2.421	2.424	2.425	2.427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.9	2.249	2.431	2.433	2.435	2.437	2.439	2.441	2.443	2.445	2.447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.0	2.450	2.452	2.454	2.456	2.458	2.460	2.462	2.464	2.466	2.468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.1	2.470	2.472	2.474	2.476	2.478	2.480	2.482	2.484	2.486	2.488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.2	2.490	2.492	2.494	2.496	2.498	2.500	2.502	2.504	2.506	2.508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.3	2.510	2.512	2.514	2.516	2.518	2.520	2.522	2.524	2.526	2.528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.4	2.530	2.532	2.534	2.536	2.538	2.540	2.542	2.544	2.546	2.548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.651	2.563	2.565	2.567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.681	2.583	2.585	2.587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.0	2.646	2.648	2.650	2.651	2.653	2.655	2.657	2.659	2.661	2.663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.1	2.665	2.667	2.668	2.670	2.672	2.674	2.676	2.678	2.680	2.681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.2	2.683	2.685	2.687	2.689	2.691	2.693	2.694	2.696	2.698	2.700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.3	2.702	2.704	2.706	2.707	2.709	2.711	2.713	2.715	2.717	2.719	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.4	2.720	2.722	2.724	2.726	2.728	2.729	2.731	2.733	2.735	2.737	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.5	2.739	2.740	2.742	2.744	2.746	2.748	2.750	2.751	2.753	2.755	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.6	2.757	2.759	2.760	2.762	2.764	2.766	2.768	2.769	2.771	2.773	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.7	2.775	2.777	2.778	2.780	2.782	2.784	2.786	2.787	2.789	2.791	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.8	2.793	2.795	2.796	2.798	2.800	2.802	2.804	2.805	2.807	2.809	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.9	2.811	2.812	2.814	2.816	2.818	2.820	2.821	2.823	2.825	2.827	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.0	2.828	2.830	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839	2.841	2.943	2.844	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.1	2.846	2.848	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857	2.858	2.860	2.862	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.2	2.864	2.865	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874	2.876	2.877	2.879	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.3	2.881	2.883	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891	2.893	2.895	2.897	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.4	2.898	2.900	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909	2.910	2.912	2.914	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.5	2.915	2.917	2.919	2.921	2.922	2.924	2.926	2.927	2.929	2.931	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.6	2.933	2.934	2.936	2.938	2.939	2.941	2.943	2.944	2.946	2.948	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.7	2.950	2.951	2.953	2.955	2.956	2.958	2.960	2.961	2.963	2.965	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.8	2.966	2.968	2.970	2.972	2.973	2.975	2.977	2.978	2.980	2.982	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.9	2.983	2.985	2.987	2.988	2.990	2.992	2.993	2.995	2.997	2.998	0	0	1	1	1	1	1	1	2
9.0	3.000	3002	3.003	3.005	3.007	3.008	3.010	3.012	3.013	3.015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.1	3.017	3.018	3.020	3.022	3.023	3.025	3.027	3.028	3.030	3.032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.2	3.033	3035	3.367	3.039	3.040	3.041	3.043	3.045	3.046	3.048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.3	3.050	3.051	3.053	3.055	3.056	3.058	3.059	3.061	3.063	3.064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.4	3.066	3.068	3.069	3.071	3.072	3.074	3.076	3.077	3.079	3.081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.5	3.082	3.084	3.085	3.087	3.089	3.090	3.092	3.094	3.095	3097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106	3.108	3.110	3.111	3.113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.7	3.115	3.116	3.118	3.119	3.121	3.123	3.124	3.126	3.127	3.129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.8	3.131	3.132	3.134	3.135	3.137	3.139	3.140	3.142	3.143	3.145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154	3.156	3.158	3.159	3.161	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Square Roots from 10 to 100

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302	2	3	5	6	8	9	11	12	14
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860	1	3	4	5	7	8	9	11	12
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.988	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	4.243	4.254	4.226	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	4.583	4.594	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680	1	2	3	4	5	6	8	9	10
22	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.765	4.775	4.785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376	1	2	3	4	5	6	7	7	8
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559	1	2	3	4	4	5	6	7	8
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648	1	2	3	3	4	5	6	7	8
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156	1	2	2	3	4	5	6	7	7
38	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550	1	2	2	3	4	5	5	6	7
43	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626	1	2	2	3	4	5	5	6	7
44	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701	1	2	2	3	4	5	5	6	7
45	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47	6.856	6.863	6.870	6.878	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921	1	1	2	3	4	4	5	6	7
48	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204	1	1	2	3	4	4	5	6	6
52	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54	7.349	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.410	1	1	2	3	3	4	5	5	6

Square Roots from 10 to 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Mean Difference*								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477	1	1	2	3	3	4	5	5	6
56	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740	1	1	2	3	3	4	4	5	6
60	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931	1	1	2	3	3	4	4	5	6
63	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994	1	1	2	3	3	4	4	5	6
64	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118	1	1	2	2	3	4	4	5	5
66	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67	8.185	8.191	8.198	8.204	8.240	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8.485	8.491	8.497	8.503	8.209	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.922	8.916	8.927	8.933	8.939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92	9.592	9.597	9.602	9.607	9.613	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894	1	1	1	2	3	3	4	4	5
98	9.900	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995	0	1	1	2	2	3	3	4	4

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	8445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950
8479	6062	5593	6322	9439	4996	1322	4918
9917	3490	5533	2577	4348	0971	2580	1943
6376	9899	9259	5117	1336	0146	0680	4052
7287	0983	3236	3252	0277	8001	6058	4501
0592	4912	3457	8773	5146	2519	3931	6794
6499	9118	3711	8838	0691	1425	7768	9544
0769	1109	7909	4528	8772	1876	2113	4781
8678	4873	2061	1835	0954	5026	2967	6560
0178	7794	6488	7364	4094	1649	2284	7753
3392	0963	6364	5762	0322	2592	3452	9002
0264	6009	1311	5873	5926	8597	9051	8995
4089	7732	8163	2798	1984	1292	0041	2500
9376	7365	7987	1937	2251	3411	6737	0367
3039	3780	2137	7641	4030	1604	2517	9211
8971	8653	1855	5285	5631	2649	6696	5475
0375	4153	5199	5765	2067	6627	3100	5716
9092	4773	0002	7000	7800	2292	2933	6125
2464	1038	3163	3569	7155	2029	2538	7080
3027	6215	3125	5856	9543	3660	0255	5544
5754	9247	1164	3283	1865	5274	5471	1346
4358	3716	6949	8502	1573	5763	5046	7135
7178	8324	8379	7365	4577	4864	0629	5100
5035	5939	3665	2160	6700	7249	1738	2721
3318	0220	3611	9887	4608	8664	2185	7290
9058	1735	7435	6822	6622	8286	8901	5534
7886	5182	7595	0305	4903	3306	8088	3899
3354	8454	7386	1333	5345	6565	3159	3991
3415	7671	0846	7100	1790	9449	6285	2525
3918	5872	7898	6125	2268	1898	0755	6034
6138	9045	6950	8843	6533	0917	6673	5721
3828	1704	2835	4677	4637	7329	3156	3291
1349	0417	9311	9787	1284	0769	8422	1077
4234	0248	7760	6504	2754	4044	0842	9080
6880	3201	7044	3657	5263	0374	7563	6599
0714	5008	5076	1134	5342	1608	5179	0967
3448	6421	3304	0583	1260	0662	7257	0766
5711	7373	7539	3684	9397	5335	4031	1486
2588	3301	0553	2427	3598	2580	7017	9176
8581	4253	7404	5264	5411	3431	3092	8573
8475	6322	3949	9675	6533	1133	8776	2216
0272	5624	8549	5552	7469	2799	2882	9620
7383	7795	7939	2652	4456	6993	2950	8573