સ્વાધ્યાય 8.1

નીચેની વિગતો યાદ રાખો :

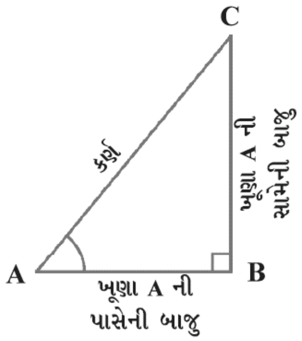
કોઈ પણ કાટકોણ ત્રિકોણ માટે,

ખૂણાની સામેની બાજુ = સા. બા., ખૂણાની પાસેની બાજુ = પા. બા.

કાટકોણ ત્રિકોણ માટે પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા. બા.})^2 + (\text{પા. બા.})^2$

જો ΔABC $\angle B$ કાટખૂણો હોય, તો $\angle A$ માટે,



$sin\ A = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{કર્ણ}}, cos\ A = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}}$

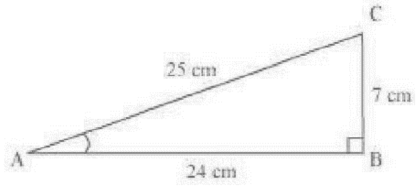
$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{પા. બા.}}, \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{સા. બા.}}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{પા. બા.}}, cosec\ A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{સા. બા.}}$

1. **ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. $AB = 24$ સેમી, $BC = 7$ સેમી હોય, તો નીચેનાં ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધો.**

(i) $sin\ A, cos\ A$, (ii) $sin\ C, cos\ C$

જ.



ΔABC માં પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore\ AC^2 = 24^2 + 7^2$

$\therefore\ AC^2 = 576 + 49$

$\therefore\ AC^2 = 625$

$\therefore\ AC = 25$

(i) $\boldsymbol{sin\ A, cos\ A}$

જ. ખૂણા A માટે સામેની બાજુ (સા. બા.) $= BC = 7$, પાસેની બાજુ (પા. બા.) $= AB = 24$ અને કર્ણ $= AC = 25$ થાય.

$$sin\ A = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$cos\ A = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ.}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

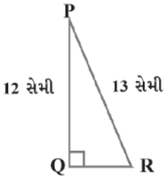
(ii) $\boldsymbol{sin\ C, cos\ C}$

જ. ખૂણા C માટે સામેની બાજુ (સા. બા.) $= AB = 24$, પાસેની બાજુ (પા. બા.) $= BC = 7$ અને કર્ણ $= AC = 25$ થાય.

$$sin\ C = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$cos\ C = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

2. આકૃતિમાં, $\tan P - \cot R$ શોધો.



જ. ΔPQR માં પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$\therefore\ 13^2 = 12^2 + QR^2$

$\therefore\ 169 = 144 + QR^2$

$\therefore\ QR^2 = 169 - 144$

$\therefore\ QR^2 = 25$

$\therefore\ QR = 5$

ખૂણા P માટે સામેની બાજુ (સા. બા.) $= QR = 5$, પાસેની બાજુ (પા. બા.) $= PQ = 12$ અને ખૂણા R માટે સામેની બાજુ (સા. બા.) $= PQ = 12$, પાસેની બાજુ (પા. બા.) $= QR = 5$ થાય.

હવે,

$$\tan P - \cot R = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{પા.બા.}} - \frac{\text{પા.બા.}}{\text{સા.બા.}}$$

$$= \frac{QR}{PQ} - \frac{PQ}{QR}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{5}{12}$$
$$= 0$$

3. જો $\sin A = \frac{3}{4}$ હોય, તો $\cos A$ અને $\tan A$ ની ગણતરી કરો.

જ. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin A = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}}$$

તેથી, સા. બા. = 3 અને કર્ણ = 4

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા.બા.})^2 + (\text{પા.બા.})^2$$
$$\therefore 4^2 = 3^2 + (\text{પા.બા.})^2$$
$$\therefore 16 = 9 + (\text{પા.બા.})^2$$
$$\therefore 16 - 9 = (\text{પા.બા.})^2$$
$$\therefore (\text{પા.બા.})^2 = 7$$
$$\therefore \text{પા.બા.} = \sqrt{7}$$

હવે,

$$\cos A = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan A = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{પા.બા.}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

4. જો $15 \cot A = 8$ હોય, તો $\sin A$ અને $\sec A$ શોધો.

જ. $15 \cot A = 8 \Rightarrow \cot A = \frac{8}{15}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\cot A = \frac{\text{પા..બા.}}{\text{સા.બા.}}$$

તેથી, પા. બા. = 8 અને સા. બા. = 15

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા.બા.})^2 + (\text{પા.બા.})^2$$
$$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 15^2 + 8^2$$
$$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 225 + 64$$
$$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 289$$
$$\therefore \text{કર્ણ} = 17$$

હવે,

$$\sin A = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{15}{17}$$

$$\sec A = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{પા.બા.}} = \frac{17}{8}$$

5. **જો $\sec\theta = \frac{13}{12}$ હોય તો બાકીના બધાજ ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો શોધો.**

જ. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sec\theta = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{પા.બા.}}$$

તેથી, કર્ણ = 13 અને પા. બા. = 12

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા.બા.})^2 + (\text{પા.બા.})^2$

$\therefore (13)^2 = (\text{સા.બા.})^2 + 12^2$

$\therefore 169 = (\text{સા.બા.})^2 + 144$

$\therefore 169 - 144 = (\text{સા.બા.})^2$

$\therefore (\text{સા.બા.})^2 = 25$

$\therefore \text{સા.બા.} = 5$

હવે,

$$sin\ \theta = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{5}{13}$$

$$cos\ \theta = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{12}{13}$$

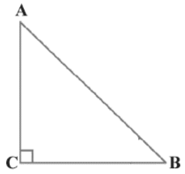
$$\tan\theta = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{પા.બા.}} = \frac{5}{12}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{સા.બા.}} = \frac{12}{5}$$

$$cosec\ \theta = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{સા.બા.}} = \frac{13}{5}$$

6. **$\angle A$ અને $\angle B$ એવા લઘુકોણો છે કે, જેથી $\cos A = \cos B$. સાબિત કરો કે, $\angle A = \angle B$.**

જ. અહીં, $\angle A$ અને $\angle B$ લઘુકોણ છે તેથી, $\angle C$ કાટકોણ થાય.



$$cos\ A = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AC}{AB} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$cos\ B = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AB} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

પરંતુ.

$\cos A = \cos B$

$\therefore\ \cos \frac{AC}{AB} = \cos \frac{BC}{AB}$

$\therefore\ \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$

$\therefore\ AC = BC$

$\therefore\ \angle A = \angle B$

7. જો $\cot\theta = \frac{7}{8}$ હોય તો, (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$ શોધો.

જ. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\cot\theta = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{સા. બા.}}$$

તેથી, પા. બા. = 7 અને સા. બા. = 8

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા. બા.})^2 + (\text{પા. બા.})^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 8^2 + 7^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 64 + 49$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 113$

$\therefore \text{કર્ણ} = \sqrt{113}$

તેથી,

$$sin\ \theta = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{8}{\sqrt{113}}$$

$$cos\ \theta = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{7}{\sqrt{113}}$$

(i) $$\frac{(\mathbf{1} + \mathbf{\sin\theta})\,(\mathbf{1} - \mathbf{\sin\theta})}{(\mathbf{1} + \mathbf{\cos\theta})(\mathbf{1} - \mathbf{\cos\theta})}$$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{64}{113}}{1 - \frac{49}{113}}$$

$$= \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}}$$

$$= \frac{113-64}{113-49}$$

$$= \frac{49}{64}$$

(ii) $\cot^2\theta$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$$= \frac{49}{64}$$

8. જો $3\cot A = 4$ હોય, તો નક્કી કરો કે , $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ છે કે નહિ.

જ. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$3\cot A = 4 \Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$

$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{સા.બા.}}$

$\therefore \tan A = \frac{3}{4}$

તેથી, પા. બા. = 4 અને સા. બા. = 3

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા.બા.})^2 + (\text{પા.બા.})^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 9 + 16$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 25$

$\therefore \text{કર્ણ} = 5$

$\cos A = \frac{\text{પા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{4}{5}$

$\sin A = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{3}{5}$

હવે,

ડા. બા. $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}}$$

$$= \frac{7}{25}$$

જ. બા. $= \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{16-9}{25}$$

$$= \frac{7}{25}$$

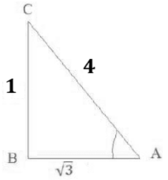
તેથી,

ડા. બા. = જ. બા.

$$\therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

9. ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો.

જ.



આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\tan A = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{પા. બા.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

તેથી, સા. બા. = 1 અને પા. બા. = $\sqrt{3}$

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$(\text{કર્ણ})^2 = (\text{સા. બા.})^2 + (\text{પા. બા.})^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 1 + 3$

$\therefore (\text{કર્ણ})^2 = 4$

$\therefore$ કર્ણ $= 2$

$\angle A$ ની સા. બા. = 1 અને પા. બા. = $\sqrt{3}$ તેમજ $\angle C$ ની સા. બા. = $\sqrt{3}$ અને પા. બા. = 1 તેમજ કર્ણ = 2

$\sin A = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{1}{2}$

$\sin C = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos C = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{1}{2}$

(i) $\boldsymbol{\sin A \cos C + \cos A \sin C}$

જ.
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$
$= \frac{4}{4}$
$= 1$

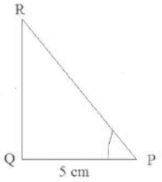
(i) $\boldsymbol{\cos A \cos C - \sin A \sin C}$

જ.
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
$= 0$

10. ΔPQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે અને $PR + QR = 25$ સેમી અને $PQ = 5$ સેમી હોય, તો $\sin P$, $\cos P$ અને $\tan P$ શોધો.

જ. ΔPQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે. તેથી કર્ણ = PR તેમજ $\angle P$ ની સા. બા. = QR અને પા. બા. = PQ

$PR + QR = 25$ સેમી અને $PQ = 5$ સેમી



ધારો કે $QR = x$ તેથી, $PR = 25 - x$

પાયથાગોરસ પ્રમેય અનુસાર,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$\therefore\ 5^2 = (25 - x)^2 - x^2$

$\therefore\ 25 = 625 - 50x + x^2 - x^2$

$\therefore\ 25 - 625 = -50x$

$\therefore\ 50x = 600$

$\therefore\ x = \frac{600}{50}$

$\therefore\ x = 12$

$\therefore\ QR = 12$ અને $PR = 25 - x = 25 - 12 = 13$

$\sin P\ = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

$\cos P\ = \frac{\text{પા. બા.}}{\text{કર્ણ}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\tan P\ = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{પા. બા.}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

11. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો :

(i) $\tan A$ નું મૂલ્ય હંમેશા 1 કરતાં ઓછું હોય છે.

જ. ખોટું વિધાન છે. કારણ કે,

$\tan A\ = \frac{\text{સા. બા.}}{\text{પા. બા.}}$

જો સા. બા. $>$ પા. બા. હોય તો $\tan A$ નું મૂલ્ય 1 કરતાં વધુ થાય છે.

(ii) A માપવાળા કોઈક ખૂણા માટે $\sec A = \frac{12}{5}$ સત્ય છે.

જ. ખરું વિધાન છે. કારણ કે,

$\sec A\ = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{પા. બા.}}$

અને કર્ણ હંમેશા પા. બા. થી વધુ હોય છે.

(iii) ખૂણા A ના *cosecant* ને સંક્ષિપ્તમાં $\cos A$ લખાય છે.

જ. ખોટું વિધાન છે. કારણ કે, ખૂણા A ના *cosecant* ને સંક્ષિપ્તમાં $\operatorname{cosec} A$ લખાય છે.

(iv) *cot* અને A નો ગુણાકાર $\cot A$ છે.

જ. ખોટું વિધાન છે. કારણ કે, ખૂણા A ના *cotangent* ને સંક્ષિપ્તમાં $\cot A$ લખાય છે.

(v) θ માપવાળા કોઈ એક ખૂણા માટે $\sin\theta = \frac{4}{3}$ શક્ય છે.

જ. ખોટું વિધાન છે. કારણ કે,

$\sin\theta\ = \frac{\text{સા.બા.}}{\text{કર્ણ}}$ અને કર્ણ હંમેશા સા. બા. થી મોટો હોય છે.