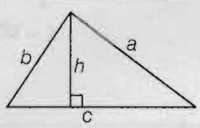
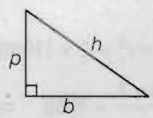
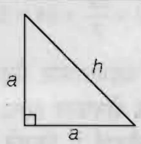
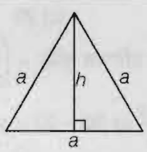
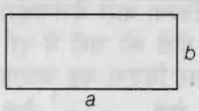
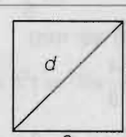
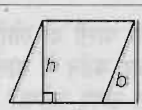
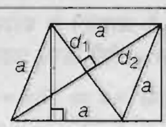
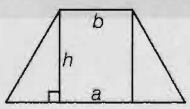
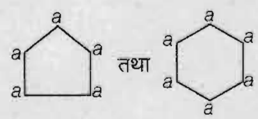
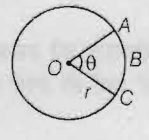
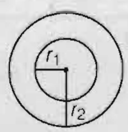
अध्याय 13

क्षेत्रमिति

क्षेत्रफल एवं परिमाप

किसी समतल आकृति (2D) द्वारा घेरे जाने वाले स्थान को उसका 'क्षेत्रफल' तथा आकृति की सभी भुजाओं के योगफल को उसका 'परिमाप' कहते हैं। प्रतियोगी परीक्षाओं में विभिन्न प्रकार के त्रिभुज, चतुर्भुज तथा वृत्त के क्षेत्रफल तथा परिमाप पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं। इनमें से प्रमुख आकृतियों का संक्षिप्त परिचय निम्नलिखित हैं

नाम	**आकृति**	**परिमाप** (इकाई में)	**क्षेत्रफल** (वर्ग इकाई में)	**नामांकन**
त्रिभुज		$a+b+c$ या $2s$	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ या $\frac{1}{2}ch$	a, b, c भुजाएँ हैं $h =$ ऊँचाई, अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{a+b+c}{2}$
समकोण त्रिभुज		$b+p+h$	$\frac{1}{2}bp$	$p =$ लम्ब $h =$ कर्ण $b =$ आधार कर्ण $(h) = \sqrt{b^2+p^2}$
समद्विबाहु समकोण त्रिभुज		$2a+h$	$\frac{1}{2}a^2$	$a =$ समान भुजा, $h =$ कर्ण कर्ण $(h) = a\sqrt{2}$
समबाहु त्रिभुज		$3a$	$\frac{1}{2}ah$ या $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$a =$ तीनों समान भुजा ऊँचाई $(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
आयत		$2(a+b)$	ab	$a =$ लम्बाई $b =$ चौड़ाई आयत का विकर्ण $= \sqrt{a^2+b^2}$
वर्ग		$4a$	a^2 या $\frac{1}{2}d^2$	$a =$ भुजा वर्ग का विकर्ण $(d) = a\sqrt{2}$
समान्तर चतुर्भुज		$2(a+b)$	ah	$a =$ भुजा $b =$ भुजा $h =$ समान्तर भुजाओं a और a के बीच की दूरी
समचतुर्भुज		$4a$	$\frac{1}{2}d_1d_2$	$a =$ भुजा d_1, d_2 विकर्ण हैं $4a = d_1^2 + d_2^2$

नाम	आकृति	परिमाप (इकाई में)	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में)	नामांकन
समलम्ब		चारों भुजाओं का योग	$\frac{1}{2}(a+b)h$	a, b = समान्तर भुजाएँ h = उनके बीच की दूरी
समपंचभुज तथा समषट्भुज		$5a$ तथा $6a$	$5\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ तथा $6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	a = भुजा
वृत्त		परिधि = $2\pi r$	वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 त्रिज्यखण्ड $ABCO$ का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$	r = त्रिज्या $2r$ = व्यास θ = त्रिज्यखण्ड का कोण चाप AC की लम्बाई = $\frac{\pi r \theta}{180°}$
वृत्ताकार वलय		परिधियों का अन्तर $= 2\pi(r_2 - r_1)$	$\pi(r_2^2 - r_1^2)$	r_2 = बड़े वृत्त की त्रिज्या r_1 = छोटे वृत्त की त्रिज्या

महत्वपूर्ण सूत्र

- यदि आयत व वर्ग का परिमाप समान हो, तो सदैव वर्ग का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल से अधिक होता है।
- यदि दो वर्गों के क्षेत्रफलों में $A_1 : A_2$ का अनुपात हो, तो उनके परिमापों में $\sqrt{A_1} : \sqrt{A_2}$ का अनुपात होता है।
- समान्तर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण चतुर्भुज को दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण 1 किसी तार को एक समबाहु त्रिभुज के आकार में मोड़ने पर $121\sqrt{3}$ सेमी^{2} क्षेत्रफल वाला घेरा बनता है। यदि उसी तार को एक वृत्त के आकार में पुनः मोड़ा जाए, तो इसकी त्रिज्या होगी ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

(a) 21.75 सेमी (b) 15.75 सेमी (c) 10.5 सेमी (d) 9.5 सेमी

हल (c) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ भुजा^{2}

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ भुजा$^2 = 121\sqrt{3} \Rightarrow$ भुजा$^2 = 121 \times 4 = 484$

$\Rightarrow \quad$ भुजा $= \sqrt{484} = 22$ सेमी

$\therefore \quad$ तार की लम्बाई $= 22 \times 3 = 66$ सेमी

वृत्त के आकार में मोड़ने पर, $2\pi r = 66$, जहाँ r = वृत्त की त्रिज्या

$\Rightarrow \quad r = \frac{66}{2\pi} = \frac{66 \times 7}{2 \times 22} = 10.5$ सेमी

उदाहरण 2 एक वृत्ताकार प्लॉट का क्षेत्रफल एक आयताकार प्लॉट के क्षेत्रफल से दोगुना है। आयताकार प्लॉट का क्षेत्रफल 11088 वर्ग मी है, तो वृत्ताकार प्लॉट की परिमिति कितनी है?

(a) 484 मी (b) 572 मी (c) 528 मी (d) 440 मी

हल (c) माना वृत्ताकार प्लाट की त्रिज्या r है।

प्रश्नानुसार, वृत्ताकार प्लाट का क्षेत्रफल
= 2 × आयताकार प्लॉट का क्षेत्रफल

$\pi r^2 = 2 \times 11088 \Rightarrow \frac{22}{7} \times r^2 = 2 \times 11088$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{2 \times 11088 \times 7}{22} = 7056 \Rightarrow r = \sqrt{7056} = 84$ मी

$\therefore \quad$ परिधि $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 84 = 528$ मी

उदाहरण 3 यदि किसी आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई में वृद्धि की जाती है, तो उसका क्षेत्रफल 50% बढ़ जाता है। यदि लम्बाई में 20% की वृद्धि हुई थी, तो चौड़ाई में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई थी?

(a) 30 (b) 25 (c) 20 (d) 28

हल (b) क्षेत्रफल में प्रभावी प्रतिशत वृद्धि = $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$

$\Rightarrow 50 = 20 + y + \frac{20 \times y}{100} \Rightarrow 50 - 20 = y + \frac{y}{5} \Rightarrow 30 = \frac{6y}{5} \Rightarrow y = 25\%$

उदाहरण 4 8 सेमी त्रिज्या वाले बेलनाकार बर्तन में पानी भरा है। 2 सेमी त्रिज्या वाले ठोस गोले को पानी में पूरी तरह डूबने तक उतारा जाता है। बर्तन में जल स्तर कितना बढ़ जाएगा?

(a) 5 सेमी (b) 4 सेमी (c) $\frac{1}{6}$ सेमी (d) $\frac{1}{5}$ सेमी

हल (c) माना जलस्तर h सेमी बढ़ गया।

$\therefore \quad \pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r^2 h = \frac{4}{3}R^3$

$\Rightarrow \quad 8^2 h = \frac{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow h = \frac{32}{64 \times 3} = \frac{1}{6}$ सेमी

उदाहरण 5 व्यास 6 सेमी वाली दो लोहे की गोलियाँ एक 6 सेमी अर्द्धव्यास वाले एक बेलनाकार बर्तन में डाले गए पानी में डुबोई जाती हैं। बर्तन में पानी का तल कितना ऊपर उठेगा?

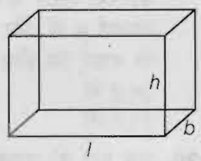
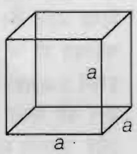
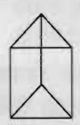
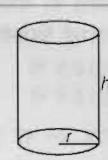
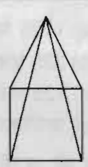
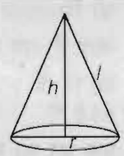
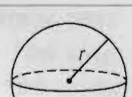
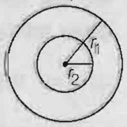
(a) 1 सेमी (b) 2 सेमी (c) 3 सेमी (d) 6 सेमी

हल (b) लोहे की गोलियों के आयतन के बराबर पानी ऊपर उठेगा।
माना बर्तन में पानी का तल x सेमी ऊपर उठता है।

$\therefore 2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 = \pi \times (6)^2 \times x \Rightarrow 72\pi = 36\pi x \Rightarrow x = \frac{72}{36} = 2$ सेमी

आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल

किसी त्रि-विमीय आकृति (3D) द्वारा जो स्थान घेरा जाता है, वह उस आकृति का 'आयतन' तथा उसके सभी तलों का क्षेत्रफल उसका 'पृष्ठीय क्षेत्रफल' कहलाता है। प्रतियोगी परीक्षाओं के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार की त्रि-विमीय आकृति पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं। *जिनमें से प्रमुख आकृतियों का संक्षिप्त परिचय निम्नलिखित हैं*

ठोस आकृति के नाम	आकृति	पार्श्व/वक्रपृष्ठ	सम्पूर्ण पृष्ठ	आयतन	नामांकन
घनाभ		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l = लम्बाई b = चौड़ाई h = ऊँचाई विकर्ण $=\sqrt{l^2+b^2+h^2}$
घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a = घन की भुजा या कोर विकर्ण $= a\sqrt{3}$
लम्ब प्रिज्म		आधार का परिमाप × ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ + 2 (एक सिरे का क्षेत्रफल)	आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	–
लम्बवृत्तीय बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h	r = आधार की त्रिज्या h = ऊँचाई
लम्ब पिरामिड		$\frac{1}{2}$ (आधार का परिमाप) × तिर्यक ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल	$\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई	–
लम्बवृत्तीय शंकु		πrl	$\pi r(r+l)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r = आधार की त्रिज्या h = ऊँचाई l = तिर्यक ऊँचाई $l=\sqrt{h^2+r^2}$
गोला		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r = त्रिज्या
अर्द्धगोला		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r = त्रिज्या
खोखला गोला		–	$4\pi(r_1^2+r_2^2)$	$\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)$	r_1 = बाह्य त्रिज्या r_2 = आन्तरिक त्रिज्या

अभ्यास के लिए प्रश्न

क्षेत्रफल एवं परिमाप पर आधारित प्रश्न

1. एक समभुज त्रिभुज की ऊँचाई x है। त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना होगा?
(a) x^2 (b) $\frac{1}{2}x^2$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$

2. एक वृत्त के क्षेत्रफल में 22 सेमी^{2} की वृद्धि होती है जब उसकी त्रिज्या में 1 सेमी वृद्धि की जाती है। वृत्त की मौलिक त्रिज्या है।
(a) 6 सेमी (b) 3.2 सेमी
(c) 3 सेमी (d) 3.5 सेमी

3. एक वर्ग के प्रत्येक पक्ष में 10% की वृद्धि हुई है, तो उसके क्षेत्रफल की वृद्धि होगी।
(a) 10% (b) 21%
(c) 44% (d) 100%

4. 15 मी लम्बाई तथा 8 मी चौड़ाई वाले आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
(a) 120 मी^{2} (b) 111 मी^{2}
(c) 115 मी^{2} (d) 125 मी^{2}

5. यदि एक त्रिभुज की ऊँचाई 40% घटाई जाए और उसके आधार में 40% वृद्धि की जाए, तो उसके क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
(a) कोई परिवर्तन नहीं (b) 8% कमी
(c) 16% कमी (d) 16% वृद्धि

6. एक ΔABC की भुजाएँ क्रमश: 6 सेमी, 8 सेमी और 8 सेमी लम्बाई की हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा?
(a) 40 वर्ग सेमी (b) 24 वर्ग सेमी
(c) 30 वर्ग सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

7. एक वर्ग के विकर्ण की लम्बाई 8 सेमी है। वर्ग की भुजा की लम्बाई है
(a) 2 सेमी (b) 2.8 सेमी
(c) 1.414 सेमी (d) 5.65 सेमी

8. एक समद्विबाहु त्रिभुज की परिमिति 32 सेमी है तथा इनकी दो बराबर भुजाओं की लम्बाइयों का योग 12 सेमी है, तो त्रिभुज की तीसरी भुजा की लम्बाई को ज्ञात करें।
(a) 15 सेमी (b) 17 सेमी
(c) 20 सेमी (d) 18 सेमी

9. a भुजा के एक समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई क्या होगी?
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (b) $\sqrt{3}a$
(c) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ (d) $\frac{a}{2}$

10. 16 सेमी लम्बाई की भुजा के एक समषट्भुज का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) ज्ञात करें।
(a) 345 (b) 486
(c) $468\sqrt{3}$ (d) $384\sqrt{3}$

11. एक समान्तर चतुर्भुज का आधार, इसकी ऊँचाई का दोगुना है। यदि समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी हो, तो इसकी ऊँचाई (सेमी में) ज्ञात करें।
(a) $5\sqrt{2}$ (b) 6
(c) $4\sqrt{3}$ (d) $6\sqrt{2}$

12. यदि एक पहिए के 4000 बार चक्कर लगाने पर 45 किमी की दूरी तय होती है, तो पहिए की त्रिज्या ज्ञात करें।
(a) 1.5 मी (b) 1.45 मी
(c) 1.78 मी (d) 1.65 मी

13. 3.78 मी लम्बे एवं 5.25 मी चौड़े एक आयताकार आँगन में समान माप की वर्गाकार टाइल बिछाई जानी हैं। ऐसी न्यूनतम टाइलों की संख्या होगी
(a) 430 (b) 440
(c) 450 (d) 460

14. एक आयत की लम्बाई में 60% वृद्धि की गई। बताएँ कि समान क्षेत्रफल बनाए रखने के लिए उसकी चौड़ाई को कितने प्रतिशत घटाना होगा?
(a) $37\frac{1}{2}$ (b) 60
(c) 75 (d) $66\frac{2}{3}$

15. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ है। यदि उसकी परिमाप 52 सेमी हो, तो बताएँ कि सबसे छोटी भुजा की लम्बाई कितनी है?
(a) 9 सेमी (b) 10 सेमी
(c) 11 सेमी (d) 12 सेमी

16. एक आयताकार पानी की टंकी के आधार का क्षेत्रफल 4500 वर्ग सेमी है तथा इसमें भरे पानी का आयतन 3.6 घन मी है। टंकी में पानी की गहराई कितनी है?
(a) 3.5 मी (b) 8 मी
(c) 5 मी (d) 6 मी

17. $2\sqrt{3}$ सेमी भुजा वाले समषट्भुज का क्षेत्रफल होगा
(a) $18\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (b) $12\sqrt{3}$ वर्ग सेमी
(c) $36\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (d) $27\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

18. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 5 मी, 4 मी और 3 मीटर है। कमरे में पूरी तरह से रखा जा सकने वाली छड़ी की लम्बाई है
(a) 5 मी (b) 60 मी
(c) 7 मी (d) $5\sqrt{2}$ मी

19. एक आयताकार पानी के हौज में 42000 लीटर पानी आता है। यदि हौज की लम्बाई 6 मी और उसकी चौड़ाई 3.5 मी हो, तो बताएँ कि हौज की गहराई कितनी होगी?
(a) 2 मी (b) 5 मी
(c) 6 मी (d) 8 मी

20. एक पूल को उसकी क्षमता का 3/4 भाग भर दिया जाता है। पूल का 1/12 भाग पानी वाष्पित हो जाता है। जब पूल पूरा भरा हो, तो इसमें 24000 गैलन पानी रखा जा सकता है। पूल को भरने के लिए कितना गैलन पानी और डालना पड़ेगा?
(a) 6000 (b) 8000
(c) 8800 (d) 10000

21. एक आयताकार टैंक के तल का क्षेत्रफल 6500 सेमी^{2} है और उसमें 2.6 घन मी पानी आता है। बताएँ कि उस पानी के टैंक की गहराई कितनी है?
(a) 2.5 मी (b) 3 मी
(c) 5.5 मी (d) 4 मी

22. एक घन का पृष्ठ क्षेत्रफल 150 मी^{2} है, तो इसका आयतन क्या होगा?
(a) 1125 घन मी
(b) 225 घन मी
(c) 125 घन मी
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

23. 3 मी, 4 मी एवं 5 मी भुजाओं वाले तीन घनों को पिघलाकर एक नया घन तैयार किया जाता है। नये घन की भुजा है
(a) 12 मी (b) 10 मी
(c) 8 मी (d) 6 मी

24. एक घन का कुल सतह क्षेत्र 150 सेमी^{2} है, उसका आयतन होगा
(a) 64 सेमी^{3} (b) 125 सेमी^{3}
(c) 150 सेमी^{3} (d) 216 सेमी^{3}

25. किसी शंकु का व्यास 1.4 सेमी है। उसकी तिरछी ऊँचाई 4.2 सेमी है। वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करें।
(a) 9.24 सेमी^{2} (b) 2.24 सेमी^{2}
(c) 8.14 सेमी^{2} (d) 6.94 सेमी^{2}

26. यदि एक गोले की त्रिज्या r हो, तो बताएँ उसका घनफल कितना है?
(a) $\frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई (b) $\frac{1}{3}\pi r^3$ घन इकाई
(c) $\frac{2}{3}\pi r^3$ घन इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

27. एक लम्ब प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल 8 वर्ग सेमी है तथा उसका आयतन 64 घन सेमी है, तो उसकी ऊँचाई होगी
(a) 8 सेमी (b) 10 सेमी
(c) 12 सेमी (d) 6 सेमी

28. एक लम्ब प्रिज्म का आधार समचतुर्भुज है। यदि लम्ब प्रिज्म की ऊँचाई 5 सेमी हो तथा पार्श्व पृष्ठ 80 वर्ग सेमी हो, तो आधार की एक भुजा होगी
(a) 4 मी (b) 4 सेमी
(c) 8 सेमी (d) 20 सेमी

29. 6 सेमी त्रिज्या के अर्द्धगोले को पिघलाकर 75 सेमी ऊँचाई के शंकु में बदला जाता है। इस शंकु के आधार की त्रिज्या क्या होगी?
(a) 2.4 सेमी (b) 2.0 सेमी
(c) 4.2 सेमी (d) 1.4 सेमी

30. किसी लम्ब पिरामिड का आधार एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी एक भुजा 12 सेमी की है और उसकी ऊँचाई 8 सेमी हो, तो पिरामिड का आयतन होगा
(a) 136 घन सेमी (b) $96\sqrt{3}$ घन सेमी
(c) 135 घन सेमी (d) 100 घन सेमी

विगत् वर्षों के प्रश्न

31. लोहे से बने एक ठोस सम प्रिज्म में 5 सेमी, 10 सेमी, 13 सेमी भुजाओं की त्रिभुजाकार अनुप्रस्थ काट है। जिसकी ऊँचाई 10 सेमी है। यदि लोहे के एक घन सेमी का वजन 7 ग्राम है, तो प्रिज्म का वजन (लगभग) कितना होगा? **[SSC कांस्टेबल, 2015]**
(a) 1570.8 ग्राम (b) 1371.32 ग्राम
(c) 1100.68 ग्राम (d) 1470.8 ग्राम

32. 20 सेमी ऊँचे और 15 सेमी आधार त्रिज्या वाले एक सम वृत्ताकार शंकु को गलाया जाता है और उसे 5 सेमी ऊँचे तथा 1.5 सेमी आधार त्रिज्या वाले समान आकार के छोटे-छोटे शंकुओं में ढाला जाता है। ढले हुए शंकुओं की संख्या कितनी होगी? **[SSC कांस्टेबल, 2015]**
(a) 300 (b) 400
(c) 100 (d) 150

33. यदि ΔABC, B पर समकोणीय है और यदि उसकी AB तथा BC भुजाएँ क्रमश: 15 सेमी और 20 सेमी हैं, तो उसकी परित्रिज्या क्या होगी? **[SSC कांस्टेबल, 2013]**
(a) 25 सेमी (b) 20 सेमी
(c) 15 सेमी (d) 12.5 सेमी

34. एक ठोस गोले को गलाया जाता है और लम्ब वृत्ताकार शंकु में ढाला जाता है, जिसकी आधार त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर होगी। इस प्रकार बनाए गए शंकु की ऊँचाई और त्रिज्या का अनुपात क्या होगा? **[SSC कांस्टेबल, 2013]**
(a) 4 : 3 (b) 2 : 3
(c) 3 : 4 (d) 4 : 1

35. एक समकोण त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई क्रमश: $(x-2)$ सेमी, x सेमी और $(x+2)$ सेमी है, तो x का मान है **[SSC कांस्टेबल, 2012]**
(a) 10 (b) 8 (c) 4 (d) 0

36. 10 मी चौड़ाई की एक गली 200 मी × 180 मी के माप वाले एक आयताकार उद्यान को बाहर से घेरती है। पथ का क्षेत्रफल (वर्ग मी में) है **[SSC कांस्टेबल, 2012]**
(a) 8000
(b) 7000
(c) 7500
(d) 8200

37. एक ठोस बेलन से जिसकी ऊँचाई 12 सेमी है और व्यास 10 सेमी है, उसी ऊँचाई और आधार के उसी व्यास का एक शांकव कोटर खोखला किया गया है। शेष ठोस का लगभग आयतन $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ है **[SSC कांस्टेबल, 2012]**
(a) 942.86 सेमी^{3}
(b) 31429 सेमी^{3}
(c) 628.57 सेमी^{3}
(d) 450.76 सेमी^{3}

38. सीसे के एक ठोस घन से, जिसके किनारे की माप 44 सेमी है, 4 सेमी व्यास की कितनी गोलाकार गोलियाँ बन सकती हैं? $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लें}\right)$ **[SSC कांस्टेबल, 2012]**
(a) 2541 (b) 2451
(c) 2514 (d) 2415

39. एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई क्रमश: 15 और 22 है। तद्नुसार, उस त्रिभुज का परिमाप कितना हो सकता है? **[SSC कांस्टेबल, 2011]**
(a) 52 या 59 (b) 52 या 60
(c) 15 या 37 (d) 37 या 29

40. एक अर्द्धवृत्ताकार खिड़की का व्यास 63 सेमी है। तद्नुसार, उसका परिमाप $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ के अनुसार}\right)$ कितना होगा? **[SSC कांस्टेबल, 2011]**
(a) 126 सेमी (b) 162 सेमी
(c) 198 सेमी (d) 251 सेमी

41. 12 मी लम्बे, 8 मी चौड़े तथा 9 मी ऊँचे किसी कमरे में रखने योग्य सबसे लम्बे खम्भे की लम्बाई कितनी हो सकती है? **[SSC कांस्टेबल, 2011]**
(a) 12 मी (b) 17 मी
(c) 19 मी (d) 21 मी

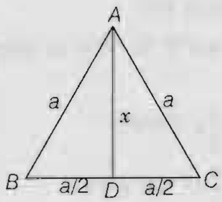
उत्तरमाला

1 (d)	2 (c)	3 (b)	4 (a)	5 (c)
6 (d)	7 (d)	8 (c)	9 (a)	10 (d)
11 (d)	12 (c)	13 (c)	14 (a)	15 (d)
16 (b)	17 (a)	18 (d)	19 (a)	20 (b)
21 (d)	22 (c)	23 (d)	24 (b)	25 (a)
26 (a)	27 (a)	28 (b)	29 (a)	30 (b)
31 (a)	32 (b)	33 (d)	34 (d)	35 (b)
36 (a)	37 (c)	38 (a)	39 (a)	40 (b)
41 (b)				

संकेत एवं हल

1. (d) दिया है, समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = x सेमी

माना समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा = a सेमी



ΔABD में पाइथागोरस प्रमेय से,

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow a = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$\because$ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2x}{\sqrt{3}} \times \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{\sqrt{3}} \text{ वर्ग सेमी}$$

या $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$ वर्ग सेमी

2. (c) माना वृत्त की मूल त्रिज्या x सेमी है।

अब, $\pi(x+1)^2 - \pi x^2 = 22$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 22 \times \frac{7}{22} = 7$$

$$\Rightarrow 2x = 7 - 1$$

$$\Rightarrow 2x = 6$$

$$\therefore x = 3 \text{ सेमी}$$

3. (b) ∴ अभीष्ट वृद्धि = लम्बाई × चौड़ाई

$$= \left(10 + 10 + \frac{10 \times 10}{100}\right)\% = 21\%$$

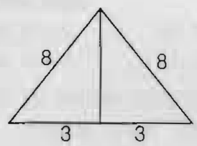
4. (a) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 15 \times 8 = 120$ वर्ग मी

5. (c) ∴ अभीष्ट प्रभाव

$= -40 + 40 + \frac{-40 \times 40}{100}\% = -16\%$ (कमी)

6. (d) दिया गया त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



पाइथागोरस प्रमेय से,

ऊँचाई $= \sqrt{(8)^2 - (3)^2}$

$\sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}$

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{55} = 3\sqrt{55}$ वर्ग सेमी

7. (d) ∵ वर्ग का विकर्ण = भुजा $\sqrt{2}$

⇒ $8 =$ भुजा $\sqrt{2}$

∴ भुजा $= \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4 \times 1.414$ सेमी

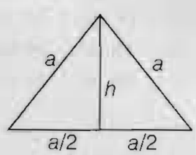
$= 5.65$ सेमी

8. (c) माना तीसरी भुजा x है।

त्रिभुज की परिमिति = तीनों भुजाओं का योग

$32 = 12 + x \Rightarrow x = 20$ सेमी

9. (a) माना समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई h है,



पाइथागोरस, प्रमेय से, $h = \sqrt{(a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

10. (d) समषट्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times$ भुजा^{2}

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 16 \times 16 = 384\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

11. (d) माना समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई $= x$ सेमी

∴ आधार $= 2x$ सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

⇒ $x \times 2x = 144$

⇒ $x^2 = \frac{144}{2} = 72$

∴ $x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ सेमी

12. (c) 1 चक्कर में पहिए द्वारा चली गई दूरी

$= \frac{45 \times 1000}{4000} \Rightarrow 2\pi r = \frac{45}{4}$

⇒ $r = \frac{45 \times 7}{2 \times 22 \times 4}$ ∴ $r = 1.78$ मी

13. (c) 3.78 मी और 5.25 मी का म.स. = 0.21 मी

वर्गाकार ईंट की भुजा = 0.21 मी

∴ अभीष्ट ईंटों की संख्या

$= \frac{\text{आँगन का क्षेत्रफल}}{\text{ईंट का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{3.78 \times 5.25}{0.21 \times 0.21}$

$= 450$

14. (a) माना आयत की प्रारम्भिक लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 100 इकाई और 50 इकाई है, तब

आयत का प्रारम्भिक क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 100 \times 50 = 5000$ वर्ग इकाई

∵ आयत की नई लम्बाई $= 100 + 100 \times \frac{60}{100}$

$= 160$ इकाई

∴ आयत का क्षेत्रफल समान रखने के लिए, चौड़ाई में $x\%$ की कमी की गई हो

प्रश्नानुसार, $5000 = 160 \times 50 \times \frac{(100 - x)}{100}$

$\frac{5000}{80} = 100 - x$

$x = 100 - \frac{5000}{80}$

$= \frac{8000 - 5000}{80}$

$= 37\frac{1}{2}\%$

15. (d) त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात

$= \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$

∴ सबसे छोटी भुजा $= 52 \times \frac{3}{6 + 4 + 3}$

$= 52 \times \frac{3}{13} = 12$ सेमी

16. (b) टंकी में पानी की गहराई

$= \frac{3.6 \times 100 \times 100 \times 100}{4500} = 800$ सेमी $= 8$ मी

17. (a) समषट्भुज का क्षेत्रफल

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 3$

$= 18\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

18. (d) सबसे लम्बी छड़ी की लम्बाई

$= \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + (3)^2}$ मी

$= \sqrt{25 + 16 + 9}$ मी $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ मी

19. (a) माना हौज की गहराई h मी है। तब

प्रश्नानुसार, $6 \times 3.5 \times h = 42$

[∵ 1 घन मी = 1000 लीटर]

⇒ $21 \times h = 42$ ∴ $h = 2$ मी

20. (b) पूल का भरा हुआ भाग $= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12}$

∴ पूल का खाली भाग $= 1 - \frac{8}{12} = \frac{4}{12}$

∴ पूल को भरने के लिए और जरूरी पानी

$= \frac{4}{12} \times 24000 = 8000$ गैलन

21. (d) माना टैंक की गहराई h मी है। तब

$\frac{6500}{100 \times 100} \times h = 2.6$

⇒ $h = \frac{260}{65} = 4$ मी

[∵ आयतन = क्षेत्रफल × गहराई]

22. (c) घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 150

⇒ $6a^2 = 150$

⇒ $a^2 = 25$ ∴ $a = 5$ मी

∴ अभीष्ट आयतन $= a^3 = (5)^3 = 125$ घन मी

23. (d) ∴ अभीष्ट घन की भुजा

$= \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3}$

$= \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216}$

$= \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = 6$ मी

24. (b) दिया है, घन का कुल सतह क्षेत्रफल

$= 150$ सेमी^{2}

$6a^2 = 150$ सेमी^{2}

$a^2 = 25$

$a = 25$ सेमी

अतः घन का आयतन = (भुजा)$^3 = 5 \times 5 \times 5$

$= 125$ घन सेमी

25. (a) दिया गया है,

शंकु की त्रिज्या $(r) = \frac{1.4}{2} = 0.7$ सेमी

शंकु की तिरछी ऊँचाई $(l) = 4.2$ सेमी

∴ शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 4.2$

$= 9.24$ सेमी^{2}

26. (a) हमें ज्ञात हैं कि, गोले का आयतन (या घनफल)

$= \frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई

27. (a) प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल

= 8 वर्ग सेमी

प्रिज्म का आयतन = 64 सेमी^{3}

⇒ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = 64

⇒ ऊँचाई $= \frac{64}{8} = 8$ सेमी

28. (b) लम्ब प्रिज्म का ऊँचाई = 5 सेमी

पार्श्व पृष्ठ = 80 सेमी^{2}

आधार (समचतुर्भुज) का परिमाप × ऊँचाई = 80

आधार (समचतुर्भुज) का परिमाप $= \frac{80}{5} = 16$ सेमी

∴ समचतुर्भुज की भुजा की लम्बाई $= \frac{16}{4} = 4$ सेमी

[∵ समचतुर्भुज का परिमाप = 4 × भुजा]

29. (a) प्रश्नानुसार,

अर्द्धगोले का आयतन = शंकु का आयतन

$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{2}{3} \times 6 \times 6 \times 6 = \frac{1}{3} \times r^2 \times 75$

$r^2 = \frac{2 \times 216}{75} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{144}{25}}$

$= \frac{12}{5} = 2.4$ सेमी

30. (b) समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई

= 12 सेमी

पिरमिड की ऊँचाई = 8 सेमी

∴ पिरमिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार (समबाहु त्रिभुज) का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \times 8 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} (12)^2 \times 8$

$= 96\sqrt{3}$ सेमी^{3}

31. (a) ठोस सम प्रिज्म के लिए,

त्रिभुज की भुजाएँ 5 सेमी, 10 सेमी और 13 सेमी हैं।

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

हमें ज्ञात हैं कि, $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$

यहाँ, $a = 5$ सेमी, $b = 10$ सेमी और $c = 13$ सेमी

$s = \frac{5+10+13}{2} = \frac{28}{2} = 14$

तब, त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{14(14-5)(14-10)(14-13)}$

$= \sqrt{14 \times 9 \times 4 \times 1} = 6\sqrt{14}$ वर्ग सेमी

∴ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 6\sqrt{14} \times 10 = 60\sqrt{14}$ घन सेमी

∴ अभीष्ट वजन $= 7 \times 60 \times \sqrt{14} = 1570.8$ ग्राम

32. (b) बड़े शंकु की ऊँचाई $= (H) = 20$ सेमी

त्रिज्या $= (R) = 15$ सेमी

छोट शंकु की ऊँचाई $(h) = 5$ सेमी

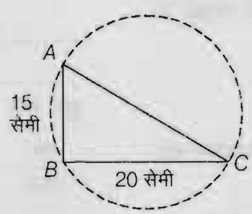
त्रिज्या $(r) = 1.5$ सेमी

बड़े शंकु को 5 सेमी ऊँचाई तथा 1.5 सेमी त्रिज्या वाले छोटे-छोटे शंकुओं में ढाला जाता है।

ढले हुए शंकुओं की संख्या $= \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

$= \frac{15 \times 15 \times 20}{1.5 \times 1.5 \times 5} = 400$

33. (d) प्रश्नानुसार, $\angle B = 90°$, $AB = 15$ सेमी, $BC = 20$ सेमी



पाइथागोरस प्रमेय से, $\sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = AC$

⇒ $AC = \sqrt{(15)^2 + (20)^2}$

⇒ $AC = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625}$

⇒ $AC = 25$ सेमी

∵ AC, ΔABC के परिवृत्त का व्यास है।

∴ इसकी परित्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$ सेमी

34. (d) प्रश्नानुसार,

गोले का आयनत = शंकु का आयतन

⇒ $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 4r = h$

⇒ $\frac{h}{r} = \frac{4}{1}$

⇒ $h : r = 4 : 1$

35. (b) किसी समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय से,

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$

∴ $(x+2)^2 = (x)^2 + (x-2)^2$

⇒ $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4$

⇒ $x^2 = 8x$

⇒ $x = 8$

36. (a) पथ का क्षेत्रफल = गली सहित उद्यान का क्षेत्रफल − उद्यान का क्षेत्रफल

$= 220 \times 200 - 200 \times 180$

[∵ आयत का क्षेत्रफल = लं. × चौ.]

$= 200(220 - 180) = 200 \times 40 = 8000$ वर्ग मी

37. (c) शेष ठोस का आयतन

= बेलन का आयतन − शांकव कोटर का आयतन

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2\pi}{3} r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 12$

$= 628.57$ सेमी^{3}

38. (a) गोलियों की संख्या

$= \frac{\text{ठोस घन का आयतन}}{\text{1 गोली का आयतन}}$

$= \frac{44 \times 44 \times 44}{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 2} = 2541$

39. (a) समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप

$= 15 + 15 + 22$

या $15 + 22 + 22 = 52$ या 59

40. (b) अर्द्धवृत्ताकार खिड़की की परिधि

$= (\pi r + 2r)$

$= r(\pi + 2) = \frac{63}{2}\left(\frac{22}{7} + 2\right)$

$= \frac{63}{2} \times \frac{36}{7} = 162$ सेमी

41. (b) अभीष्ट खम्भे की लम्बाई

$= \sqrt{12^2 + 8^2 + 9^2}$

$= \sqrt{144 + 64 + 81} = \sqrt{289} = 17$ मी