باب
13

راست اور معکوس تناسب

4817CH13

13.1 تعارف

موہن نے اپنے اور اپنی بہن کے لیے چائے بنائی۔ اس نے 300 ملی لیٹر پانی، 2 چمچہ چینی، 1 چمچہ چائے کی پتی اور 50 ملی لیٹر دودھ کا استعمال کیا۔ اگر وہ پانچ لوگوں کے لیے چائے بنائے تو اسے ہر ایک چیز کی کتنی مقدار میں ضرورت پڑے گی؟

اگر دو طالب علم کسی اسمبلی کے لیے کرسیوں کو ترتیب سے رکھنے میں 20 منٹ کا وقت لگاتے ہیں تو اسی کام کو کرنے میں 5 طالب علم کتنا وقت لیں گے؟

ہمیں اپنی روزمرہ کی زندگی میں اکثر ایسی صورت حال کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں ہمیں یہ دیکھنا ضروری ہو جاتا ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی ہونے سے دوسری مقدار میں بھی تبدیلی ہو رہی ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) اگر خریدی گئی چیزوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو ان کی کل قیمت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

(ii) بینک میں جتنی زیادہ رقم جمع کرائی جائے گی اتنا ہی زیادہ سود حاصل ہوگا۔

(iii) جب گاڑی کی رفتار میں اضافہ ہوتا ہے تو اسی فاصلہ کو طے کرنے میں لیے گئے درکار وقت میں کمی ہو جاتی ہے۔

(iv) ایک دیے ہوئے کام کے لیے جتنے زیادہ لوگ کام پر لگائے جائیں گے اتنا ہی اس کام کو پورا کرنے میں وقت کم لگے گا۔

غور کیجیے کہ ایک مقدار میں تبدیلی سے دوسری مقدار میں تبدیلی ہو رہی ہے۔

مزید ایسی پانچ صورت حال لکھیے جہاں ایک مقدار میں تبدیلی ہونے سے دوسری مقدار میں بھی تبدیلی ہوتی ہے۔

ہم ہر ایک ضروری چیز کی مقدار کس طرح معلوم کریں گے جن کی موہن کو ضرورت پڑے گی؟ یا پانچ طالب علموں کے ذریعے کام کو پورا کرنے میں استعمال ہونے والے وقت کو ہم کس طرح معلوم کریں گے؟

اس قسم کے سوالوں کے جواب دینے کے لیے ہم کچھ تغیر (Variation) کے تصورات کا مطالعہ کریں گے۔

13.2 راست تناسب

اگر 1 کلوگرام چینی کی قیمت 36 ₹ ہے تو 3 کلوگرام چینی کی قیمت کیا ہوگی؟ یہ 108₹ ہے۔

پٹرول کی کھپت اور ایک کار کے ذریعہ طے کی گئی دوری ایک راست تناسب کی شکل ہے۔ اس لیے خرچ کی گئی کل رقم اور خریدی گئی اشیا کی تعداد بھی راست تناسب کی ایک مثال ہے۔

راست تناسب کی کچھ اور مثالیں لیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا موہن [شروع کی مثال میں] 5 لوگوں کے لیے چائے بنانے میں 750 ملی لیٹر پانی، 5 چمچے چینی، $2\frac{1}{2}$ چمچے چائے کی پتی، 125 ملی لیٹر دودھ کا استعمال کرے گا۔ آیئے مندرجہ ذیل مثالوں (عملی کاموں) کی مدد سے راست تناسب کے تصور کو اور زیادہ واضح کرنے کی کوشش کریں۔

اسے کیجیے

(i)
- ایک گھڑی لیجیے اور اس کی منٹ والی سوئی کو 12 پر ٹھہرا دیجیے۔
- منٹ کی سوئی کے ذریعہ اپنی شروعاتی حالت سے گھومے گئے زاویہ اور گزرے ہوئے وقت کو مندرجہ ذیل جدول میں لکھیے۔

گزرا ہوا وقت (T) (منٹ میں)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
گھوما گیا زاویہ (ڈگری میں)	(A_1) 90	(A_2)	(A_3)	(A_4) .....
$\frac{T}{A}$	.....	.....	.....	.....

T اور A کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ کیا ان میں ساتھ ساتھ اضافہ ہوتا ہے؟

کیا $\frac{T}{A}$ ہر وقت یکساں رہتا ہے؟

کیا منٹ کی سوئی کے ذریعہ گھوما گیا زاویہ گزرے ہوئے وقت کے راست طور پر متناسب ہے؟ ہاں!

مندرجہ بالا جدول سے آپ یہ اندازہ کر سکتے ہیں

$A_1 : A_2 = T_1 : T_2$ کیوں کہ

$1:2 = 15 : 30 = T_1 : T_2$

$1:2 = 90 : 180 = A_1 : A_2$

جانچ کیجیے اگر $A_2 : A_3 = T_2 : T_3$ اور $A_3 : A_4 = T_3 : T_4$

آپ خود وقت کا اپنا وقفہ لے کر اس عمل کو دوہرا سکتے ہیں۔

اسی طرح ہم 5 کلوگرام یا 8 کلوگرام چینی کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول کا مطالعہ کیجیے۔

×10 ×8 ×6 ×5 ×3

چینی کا وزن (کلوگرام میں)	1	3	5	6	8	10
قیمت (روپیوں میں)	36	108	180			

×3 ×5 ×6 ×8 ×10

غور کیجیے کہ جیسے جیسے چینی کے وزن میں اضافہ ہوتا ہے، اسی طرح قیمت میں بھی اضافہ ہوتا جاتا ہے جس سے ان کی نسبت مستقل رہتی ہے۔

ایک اور مثال دیکھیے۔ ایک کار 60 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 4 لیٹر پٹرول استعمال کرتی ہے۔ تو وہ 12 لیٹر پٹرول میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟ اس کا جواب 180 کلومیٹر ہے۔ ہم نے اس کی تحسیب کیسے کی؟ چوں کہ دوسری حالت میں 12 لیٹر پٹرول یعنی 4 لیٹر کا تین گنا پٹرول استعمال ہوتا ہے اس لیے طے کیا گیا فاصلہ بھی 60 کلومیٹر کا 3 گنا ہوگا۔ دوسرے لفظوں میں جب پٹرول کا استعمال تین گنا ہوگا تو طے کیا گیا فاصلہ بھی پچھلے فاصلہ کا 3 گنا ہو جائے گا۔ مان لیجیے پٹرول کا استعمال x لیٹر ہے اور طے کیا گیا فاصلہ y کلومیٹر ہے تو اب مندرجہ ذیل جدول کو پورا کیجیے:

پٹرول (x) لیٹر میں	4	8	12	15	20	25
فاصلہ (y) کلومیٹر میں	60	.....	180	.....	......	......

ہم دیکھتے ہیں کہ جب x کی قدر میں اضافہ ہوتا ہے تو y کی قدر میں بھی اس طرح اضافہ ہوتا ہے اور اس طرح $\frac{x}{y}$ نسبت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔ یہ مستقل (مان لیجیے k) رہتا ہے۔ اس حالت میں یہ $\frac{1}{15}$ ہے (اس کی جانچ کیجیے!)

اگر $\frac{x}{y} = k$ یا $x = ky$ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ x اور y میں راست (سیدھا) تناسب ہے (یا وہ راست طور پر متناسب ہیں)۔

اس مثال میں $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ ہے۔ جہاں 4 اور 12 استعمال شدہ پٹرول کی لیٹر میں مقداریں (x) ہیں اور 60 اور 180 کلومیٹر میں فاصلہ (y) ہیں اس لیے جب x اور y میں **راست تناسب** ہوتا ہے تو ہم $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ لکھ سکتے ہیں۔ [x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی بالترتیب قدریں y_1، y_2 ہیں]

مدت	1 سال	2 سال	3 سال
سود مفرد (روپیوں میں)			
سود مرکب (روپیوں میں)			

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t} - P$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اگر ہم مدت اور سود کی شرح کو مستقل رکھیں تو سود مفرد اصل زر کے ساتھ راست تناسب میں تبدیل ہوتا ہے۔ کیا یہی رشتہ سود مرکب کے ساتھ بھی ہوگا؟

آیئے اب کچھ حل کی ہوئی مثالوں پر غور کریں جہاں ہم راست تناسب کے تصور کا استعمال کریں گے۔

مثال 1: ایک خاص قسم کے 5 میٹر کپڑے کی قیمت 210 ₹ ہے۔ اسی قسم کے 2، 4، 10 اور 13 میٹر کپڑے کی قیمتوں کے لیے جدول بنائیے۔

حل : مان لیجیے کپڑے کی لمبائی x میٹر ہے اور اس کی قیمت (₹ میں) y ہے۔

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

جیسے جیسے کپڑے کی لمبائی میں اضافہ ہوتا ہے اس کی قیمت میں بھی اسی نسبت سے اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے یہ ایک راست تناسب کی حالت ہے۔

ہم $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ قسم کے تعلق کا استعمال کرتے ہیں۔

(i) یہاں $x_1 = 5$ ، $y_1 = 210$ اور $x_2 = 2$

اس لیے، $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ سے ہمیں $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ حاصل ہوتا ہے یا $5y_2 = 2 \times 210$ یا $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) اگر $x_3 = 4$ تب $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ یا $5y_3 = 4 \times 210$ یا $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

(کیا ہم یہاں $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ کا استعمال کر سکتے ہیں؟ کوشش کیجیے)

(iii) اگر $x_4 = 10$ ، تب $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ یا $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(ii) اپنے دوست سے مندرجہ ذیل جدول کو بھرنے کے لیے کہیے اور بالترتیب اس کی عمر اور اس کی ماں کی عمر کا تناسب معلوم کرنے کے لیے بھی کہیے۔

	پانچ سال پہلے کی عمر	موجودہ عمر	پانچ سال بعد کی عمر
دوست کی عمر (F)			
ماں کی عمر (M)			
$\frac{F}{M}$			

آپ کیا دیکھتے ہیں؟

کیا F اور M میں ساتھ ساتھ اضافہ (یا کمی) ہوتا ہے؟ کیا $\frac{F}{M}$ ہر مرتبہ وہی رہتا ہے؟ نہیں!

آپ اس عمل کو اپنے دوسرے دوستوں کے ساتھ بھی دوہرا سکتے ہیں اور اپنے مشاہدوں کو درج کر سکتے ہیں۔

اس طرح یہ ضروری نہیں ہے کہ ساتھ ساتھ بڑھنے (یا کم ہونے) والے متغیر راست طور پر متناسب ہوں۔ مثال کے طور پر:

(i) انسانوں میں جسمانی تبدیلیاں وقت کے ساتھ ہوتی رہتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ پہلے سے طے شدہ نسبت میں ہو۔

(ii) لوگوں کے وزن اور لمبائی میں تبدیلی کسی خاص نسبت میں نہیں ہوتی۔

(iii) کسی درخت کی اونچائی اور اس کی شاخوں پر اُگنے والی پتیوں کی تعداد میں کوئی راست تعلق یا تناسب نہیں ہوتا ہے۔ راست تناسب کی مثالوں پر مزید غور کیجیے۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے اور معلوم کیجیے کہ کیا x اور y راست تناسب ہیں۔

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. اصل زر = ₹ 1000، شرح = 8% سالانہ۔ مندرجہ ذیل جدول کو بھریے اور معلوم کیجیے کہ کس طرح کا سود (سود مفرد یا سود مرکب) مدت کے ساتھ راست تناسب میں بدلتا ہے۔

حل :

مان لیجیے کہ ان اوراق کی تعداد x ہے جن کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہے۔ ہم مذکورہ بالا معلومات کو نیچے دیے گئے جدول میں لکھتے ہیں۔

شیٹوں کی تعداد	12	x
شیٹوں کا وزن (گرام میں)	40	2500

1 کلوگرام = 1000 گرام

$2\frac{1}{2}$ کلوگرام = 2500 گرام

اوراق کی تعداد زیادہ ہوگی تو اس کا وزن بھی اتنا ہی زیادہ ہوگا۔ اس لیے اوراق کی تعداد اور ان کا وزن ایک دوسرے کے راست تناسب میں ہیں۔

اس لیے، $\frac{x}{2500} = \frac{12}{40}$

یا $x = \frac{12 \times 2500}{40}$

یا $x = 750$

اس طرح سے مطلوبہ کاغذ کے اوراق کی تعداد = 750

متبادل طریقہ :

دو مقداریں x اور y جو راست تناسب میں تبدیل ہوتی ہیں $x = ky$ یا $k = \frac{x}{y}$ کا رشتہ ہوتا ہے۔

$$k = \frac{\text{اوراق کی تعداد}}{\text{گراموں میں اوراق کا وزن}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

اب x ان کاغذ کے اوراق کی تعداد ہے جن کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام (2500 گرام) ہے۔

رشتہ $x = ky$ کا استعمال کر کے $x = 2500 \times \frac{3}{10} = 750$

اس طرح، کاغذ کے 750 اوراق کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہوگا۔

مثال 4 : ایک ریل گاڑی 75 کلومیٹر فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے چل رہی ہے۔

(i) وہ 20 منٹ میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

(ii) 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت معلوم کیجیے۔

(iv) اگر $x_5=13$ تب $\frac{5}{210}=\frac{13}{y_5}$ یا $y_5=\frac{13\times 210}{5}=546$

[نوٹ کیجیے، کہ یہاں ہم $\frac{5}{210}$ کی جگہ $\frac{2}{84}$ یا $\frac{4}{168}$ یا $\frac{10}{420}$ کا استعمال بھی کر سکتے ہیں]

مثال 2 : 14 میٹر اونچے ایک بجلی کے کھمبے کی پرچھائیں 10 میٹر ہے۔ یکساں حالات میں اس درخت کی اونچائی معلوم کیجیے جس کی پرچھائیں 15 میٹر ہے۔

حل : مان لیجیے کہ درخت کی اونچائی x میٹر ہے۔ ہم درج ذیل جدول بناتے ہیں۔

شے کی اونچائی (میٹر میں)	14	x
پرچھائیں کی لمبائی (میٹر میں)	10	15

غور کیجیے کہ شے کی اونچائی جتنی زیادہ ہوگی، اس کی پرچھائیں کی لمبائی بھی اتنی ہی زیادہ ہوگی۔

اس لیے یہ راست تناسب کی حالت ہے، یعنی $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ سے

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{14}{10}=\frac{x}{15}$ (کیوں؟)

یا $x=15\times\frac{14}{10}$

یا $x=\frac{14\times 3}{2}$

اس لیے $x=21$

اس طرح درخت کی اونچائی 21 میٹر ہے۔

متبادل طریقے سے ہم $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ کو $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ بھی لکھ سکتے ہیں

اس لیے $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

یا $14 : x = 10 : 15$

اس لیے $10\times x = 15\times 14$

یا $x=\frac{15\times 14}{10}=21$

مثال 3 : اگر موٹے کاغذ کے 12 اوراق کا وزن 40 گرام ہے تو کاغذ کے ایسے کتنے اوراق کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہوگا؟

یا
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3 \times 10^7}$$

کیوں کہ $x = 4$ ہے اس لیے
$$\frac{4}{y} = \frac{1}{3 \times 10^7}$$

یا $y =$ سینٹی میٹر $4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ سینٹی میٹر $= 1200$ کلومیٹر

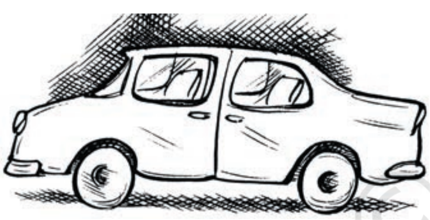
لہٰذا نقشہ پر 4 سینٹی میٹر کی دوری والے شہروں کے درمیان اصل دوری 1200 کلومیٹر ہے۔

اسے کیجیے

اپنے صوبہ کا ایک نقشہ لیجیے اس پر دیے ہوئے پیمانہ کو نوٹ کیجیے۔ پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے نقشہ پر کنھیں دو شہروں کے درمیان کا فاصلہ ناپیے۔ ان دونوں شہروں کا اصل فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

مشق 13.1

.1 ایک ریلوے اسٹیشن کے قریب کار پارکنگ کے کرائے اس طرح ہیں:



4 گھنٹوں تک	₹ 60
8 گھنٹوں تک	₹ 100
12 گھنٹوں تک	₹ 140
24 گھنٹوں تک	₹ 180

جانچ کیجیے کہ کیا کار پارکنگ کا کرایہ پارکنگ کے وقت سے سیدھے راست میں ہے۔

.2 ایک روغن کے اصل آمیزہ کے 8 حصوں (Base) میں لال رنگ کے مادہ کا ایک حصہ ملایا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول میں اصل آمیزہ کے وہ حصے معلوم کیجیے جنھیں ملائے جانے کی ضرورت ہے۔

لال مادہ کا حصے	1	4	7	12	20
اصل آمیزہ کا حصے	8	...	...	...	...

.3 اوپر دیے سوال 2 میں اگر لال رنگ کے مادے کے 1 حصے کے لیے 75 ملی لیٹر اصل آمیزہ کی ضرورت ہوتی ہے تو 1800 ملی لیٹر اصل آمیزہ کے لیے ہمیں کتنا لال رنگ کا مادہ ملانا چاہیے؟

.4 سافٹ ڈرنک فیکٹری میں ایک مشین 6 گھنٹہ میں 840 بوتلیں بھرتی ہے۔ وہ مشین پانچ گھنٹوں میں کتنی بوتلیں بھرے گی؟

حل : مان لیجیے کہ 20 منٹ میں طے کیا گیا فاصلہ (کلومیٹر میں) x ہے اور 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت (منٹوں میں) y ہے۔

طے کیا گیا فاصلہ (کلومیٹر میں)	75	x	250
لگنے والا وقت (منٹ میں)	60	20	y

1 گھنٹہ = 60 منٹ

چوں کہ رفتار یکساں ہے اس لیے طے کیا گیا فاصلہ لگنے والے وقت کے متناسب ہوگا۔

(i) ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{x}{20} = \frac{75}{60}$

یا $x = \frac{75}{60} \times 20$

یا $x = 25$

اس لیے ریل گاڑی 20 منٹ میں 25 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرے گی۔

(ii) ساتھ ہی $\frac{250}{y} = \frac{75}{60}$

یا $y = \frac{250 \times 60}{75}$ 200 (منٹ) یا 3 گھنٹہ 20 منٹ

اس لیے 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے لیے 3 گھنٹہ 20 منٹ کا وقت درکار ہوگا۔

متبادل طور پر جب x معلوم ہے تو رشتہ $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ سے y کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ نقشہ ایک بہت بڑے علاقہ کا مختصر اظہار ہوتا ہے۔ نقشہ میں سب سے نیچے ایک پیمانہ (Scale) دیا ہوتا ہے۔ یہ پیمانہ اصل دوری اور نقشہ پر دکھائی گئی لمبائی کے رشتہ کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرح نقشہ پر دیا پیمانہ نقشہ پر دو نقطوں کا فاصلہ اور علاقہ کے اصل فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔
اگر نقشہ پر 1 سینٹی میٹر اصل فاصلہ 8 کلومیٹر کو ظاہر کرتا ہے [یعنی پیمانہ 8 کلومیٹر : 1 سینٹی میٹر یا 800,000 : 1] تو اسی نقشہ پر 2 سینٹی میٹر 16 کلومیٹر کی اصل دوری کو ظاہر کرے گا۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقشہ کے پیمانہ کی بنیاد راست تناسب کے تصور پر قائم ہے۔

مثال 5 : ایک نقشہ کا پیمانہ 1:30000000 دیا ہوا ہے۔ نقشہ میں دو شہروں کے درمیان 4 سینٹی میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان کے درمیان کا اصل فاصلہ معلوم کیجیے۔

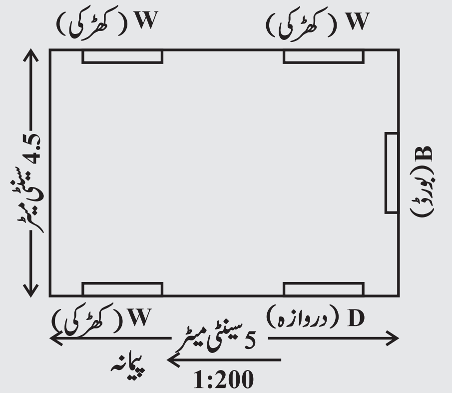
حل : مان لیجیے کہ نقشہ پر فاصلہ x سینٹی میٹر ہے اور اصل فاصلہ y سینٹی میٹر ہے۔

$$x : y = 1 : 30000000$$

معلوم کیجیے کہ کیا ضلع کی لمبائی راست تناسب میں ہے:

(a) مربع کا احاطہ

(b) مربع کے رقبہ کی



2. پانچ لوگوں کے لیے حلوہ بنانے کے لیے مندرجہ ذیل چیزوں کی ضرورت پڑتی ہے :

سوجی/روا = 250 گرام، چینی = 300 گرام،

گھی = 200 گرام، پانی = 500 ملی لیٹر۔

تناسبت کے تصور کی مدد سے اپنی کلاس کے لیے حلوہ بنانے کی ان چیزوں کی مقدار میں ہونے والی تبدیلیوں کا تخمینہ لگایئے۔

3. ایک پیمانہ منتخب کیجیے اور اپنی کلاس کے کمرے کا نقشہ کھینچیے جس میں کھڑکیاں، دروازے، تختۂ سیاہ وغیرہ دکھائے گئے ہوں (ایک مثال یہاں دی گئی ہے)۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اب تک حل کیے گئے 'راست تناسب کے سوالوں میں سے کچھ مثالوں کو لیجیے۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ ان مثالوں کو 'اکائی کے طریقہ' کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے؟

13.3 معکوس تناسب

دو مقداروں میں یوں بھی تبدیلی آسکتی ہے کہ اگر ایک مقدار میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری مقدار میں کمی ہوتی ہے یا ایک میں کمی ہونے پر دوسری میں اضافہ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر جب کسی کام پر زیادہ مزدور لگائے جاتے ہیں تو وہ کام کم وقت میں پورا ہو جائے گا۔ اسی طرح اگر رفتار بڑھادی جائے تو ایک متعینہ فاصلہ طے کرنے میں وقت کم لگے ۔

اس کی مزید وضاحت کے لیے آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کریں۔

زاہدہ 4 مختلف طریقوں سے یعنی پیدل، دوڑ کر، سائیکل اور کار کے ذریعہ اپنے اسکول جاسکتی ہے۔ متصل جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

$\times 15$

$\times 3$

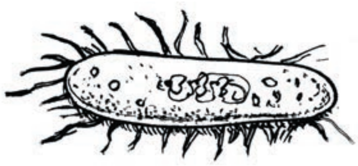
$\times 2$

	پیدل چل کر	دوڑ کر	سائیکل سے	کار کے ذریعہ
رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)	3	6	9	45
لگنے والا وقت (منٹ میں)	30	15	10	2

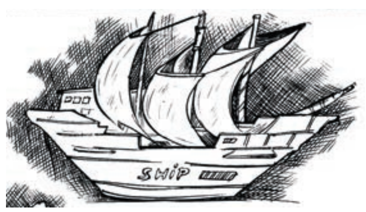
$\times \frac{1}{2}$

$\times \frac{1}{3}$

$\times \frac{1}{15}$



.5 ایک بیکٹر یا کی تصویر کو 50,000 گنا بڑھانے پر اس کی لمبائی 5 سینٹی میٹر ہو جاتی ہے جیسا کے متصل شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس بیکٹر یا کی اصل لمبائی کیا ہے؟ اگر تصویر کو صرف 20,000 گنا بڑا کیا جائے تو اس بیکٹر یا کی بڑھی ہوئی لمبائی کیا ہوگی؟



.6 ایک جہاز کے ماڈل میں اس کا مستول (Mast) 9 سینٹی میٹر اونچا ہے جب کہ اصل جہاز کا مستول 12 میٹر اونچا ہے۔ اگر جہاز کی لمبائی 28 میٹر ہو تو اس کے ماڈل کی لمبائی کتنی ہوگی؟

.7 مان لیجیے 2 کلوگرام چینی میں 9×10^6 کرسٹل موجود ہیں۔ مندرجہ ذیل میں چینی کے کتنے کرسٹل موجود ہوں گے؟ (i) 5 کلو گرام چینی میں؟ (ii) 1.2 کلوگرام چینی میں؟

.8 رشمی کے پاس ایک سڑک کا نقشہ ہے جس کا پیمانہ 1 سینٹی میٹر = 18 کلومیٹر ہے۔ وہ اس سڑک پر اپنی گاڑی سے 72 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اس کے ذریعہ طے کیا گیا فاصلہ نقشہ میں کتنا ہوگا؟

.9 ایک 5 میٹر 60 سینٹی میٹر اونچے کھمبے کی پرچھائیں کی لمبائی 3 میٹر 20 سینٹی میٹر ہے۔ معلوم کیجیے اسی وقت پر۔ (i) 10 میٹر 50 سینٹی میٹر اونچے ایک دوسرے کھمبے کی پرچھائیں کی لمبائی (ii) اس کھمبے کی اونچائی جس کی پرچھائیں کی لمبائی 5 میٹر ہے۔

.10 مال سے لدا ہوا ایک ٹرک 25 منٹ میں 14 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اگر رفتار وہی رہے تو وہ 5 گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

اسے کیجیے

1. ایک مربع کاغذ پر مختلف اضلاع کے پانچ مربعے کھینچیے۔ مندرجہ ذیل معلومات کو ایک جدول کی شکل میں لکھیے۔

	مربع-1	مربع-2	مربع-3	مربع-4	مربع-5
ایک ضلع کی لمبائی (L)					
احاطہ (P)					
$\frac{L}{P}$					
رقبہ (A)					
$\frac{L}{A}$					

اسی قسم کی کچھ دوسری مقداروں کے جوڑوں کی مثالوں پر غور کیجیے جو معکوس تناسب میں بدلتی ہیں۔ اب آپ فرنیچر کو ترتیب دینے کے اس مسئلہ پر غور کر سکتے ہیں جو ہم نے اس باب کے تعارف میں بیان کیا تھا۔

معکوس تناسب کو بہتر طریقے سے سمجھنے کے لیے یہاں ایک عملی کام دیا گیا ہے۔

اسے کیجیے

ایک مربع نما کاغذ لیجیے اور اس پر 48 کاؤنٹروں (گولوں) کو قطاروں کی مختلف تعداد میں نیچے دکھائے گئے طریقہ سے ترتیب دیجیے۔

4 قطاریں، 12 کالم

6 قطاریں، 8 کالم

قطاروں کی تعداد (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
کالموں کی تعداد (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

آپ کیا دیکھتے ہیں؟ جب R میں اضافہ ہوتا ہے تو C میں کمی ہوتی ہے۔

(i) کیا $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ ہے؟ (ii) کیا $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ ہے؟

(iii) کیا R اور C ایک دوسرے کے معکوس تناسب میں ہیں؟

اس سرگرمی کو 36 کاؤنٹروں کے ساتھ دوہرائیے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل جدولوں کو دیکھیے اور معلوم کیجیے کہ کون سے متغیروں (یہاں x اور y) کے جوڑے معکوس تناسب میں ہیں۔

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

غور کیجیے جب رفتار میں اضافہ ہوتا ہے تو یکساں فاصلہ طے کرنے میں لگنے والے وقت میں کمی ہوتی ہے۔

جب زاہدہ دوڑ کر اپنی رفتار دگنی کرتی ہے تو اس کا صرف کیا ہوا وقت $\frac{1}{2}$ ہو جاتا ہے۔ جب وہ اپنی رفتار سائیکل کی رفتار '3' گنا کرتی ہے تو وقت $\frac{1}{3}$ رہ جاتا ہے۔ اسی طرح جب وہ اپنی رفتار 15 گنا کرتی ہے تو وقت $\frac{1}{15}$ رہ جاتا ہے۔ (یعنی وقت میں ہوئی کمی کی نسبت رفتار میں ہونے والے نظیری اضافہ کے تناسب کا معکوس ہوتا ہے۔) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ رفتار اور وقت معکوس تناسب میں ہوتے ہیں۔

> کسی عدد کا ضربی معکوس اس کا مقلوب ہوتا ہے۔ اس طرح 2 کا معکوس $\frac{1}{2}$ ہے۔ (غور کیجیے کہ $2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2=1$ ہے)۔

آیئے ایک دوسری مثال پر غور کرتے ہیں۔ ایک اسکول ریاضی کی نصابی کتابوں کے لیے 6,000 روپے خرچ کرنا چاہتا ہے۔ 40 روپے فی کتاب کی شرح سے کتنی کتابیں خریدی جاسکتی ہیں؟ ظاہر ہے کہ 150 کتابیں خریدی جاسکتی ہیں۔ اگر ایک نصابی کتاب کی قیمت 40 روپے سے زیادہ ہو تو اسی رقم میں 150 سے کم کتابیں خریدی جائیں گی۔ مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے۔

ہر ایک کتاب کی قیمت (روپیوں میں)	40	50	60	75	80	100
خریدی جاسکنے والی کتابوں کی تعداد	150	120	100	80	75	60

آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اگر ہر کتاب کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے تو ایک متعینہ فنڈ میں خریدی جا سکنے والی کتابوں کی تعداد میں کمی ہو جائے گی۔

جب کتاب کی قیمت 40 روپے سے 50 روپے ہوتی ہے تو اضافہ کی قیمت کی نسبت 5 : 4 ہے، نظیری کتابوں کی تعداد 150 سے کم ہو کر 120 ہونے پر نسبت 4 : 5 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں نسبتیں ایک دوسرے کی معکوس ہیں۔

غور کیجیے کہ دونوں مقداروں کی نظیری قدروں کا حاصل ضرب مستقل ہے یعنی $120 \times 50 = 150 \times 40 = 6000$ ہے۔

اگر ہم ایک کتاب کی قیمت (روپیوں میں) کو x اور خریدی گئی کتابوں کی تعداد کو y سے ظاہر کریں تو اگر x میں اضافہ ہوتا ہے تو y میں کمی ہوتی ہے اور اس کے برعکس یہ بات غور کرنے لائق ہے کہ حاصل ضرب $x\,y$ مستقل رہتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ x کے ساتھ y اور y کے ساتھ x **معکوس تناسب** ہے۔ اس طرح دو مقدار x اور y معکوس تناسب میں کہی جاسکتی ہیں اگر ان کے درمیان میں $x\,y = k$ کی قسم کا کوئی رشتہ ہو جہاں k کوئی مستقلہ ہے ۔ اگر x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $x_1y_1 = x_2y_2\ (= k)$ یعنی $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ ہوتا ہے ۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ x اور y **معکوس تناسب** میں ہیں۔

اس طرح، اوپر دی گئی مثال میں ایک کتاب کی قیمت اور ایک متعینہ رقم میں خریدی جانے والی کتابوں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔ اسی طرح سے ایک گاڑی کی رفتار اور اس کے ذریعہ متعینہ فاصلہ طے کرنے میں لیا گیا وقت ایک دوسرے کے معکوس تناسب میں بدلتے ہیں۔

اس لیے $y \times 125 = 100 \times 20$

یا $\frac{100 \times 20}{125} = y$

یا $16 = y$

اس لیے، اگر ہوسٹل میں مزید 25 طلبا آجائیں تو کھانے پینے کا سامان 16 دن تک ہی چلے گا۔

متبادل طور، پر ہم $x_1 y_1 = x_2 y_2$ کو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لکھ سکتے ہیں۔

یعنی $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

یا $100 : 125 = y : 20$

یا $16 = \frac{100 \times 20}{125} = y$

مثال 9 : اگر 15 مزدور کسی دیوار کو 48 گھنٹہ میں تعمیر کر سکتے ہیں تو اسی کام کو 30 گھنٹہ میں پورا کرنے کے لیے کتنے مزدوروں کی ضرورت پڑے گی؟

حل : مان لیجیے دیوار کو 30 گھنٹہ میں تعمیر کرنے کے لیے y مزدوروں کی ضرورت ہے

تب ہم مندرجہ ذیل جدول حاصل کرتے ہیں۔

گھنٹوں کی تعداد	48	30
مزدوروں کی تعداد	15	y

ظاہر ہے کہ زیادہ مزدور ہونے پر دیوار بننے میں کم وقت لگے گا۔

اس لیے گھنٹوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد میں معکوس تناسب ہے

اس لیے $48 \times 15 = 30 \times y$

اس لیے $\frac{48 \times 15}{30} = y$ یا $24 = y$

یعنی 30 گھنٹہ میں کام کو ختم کرنے کے لیے 24 مزدور درکار رہوں گے۔

مشق 13.2

1. مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات معکوس تناسب میں ہیں؟

(i) کسی کام پر لگے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے میں لگا وقت۔

آیئے کچھ ایسی مثالوں پر غور کریں جہاں ہم معکوس تناسب کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔

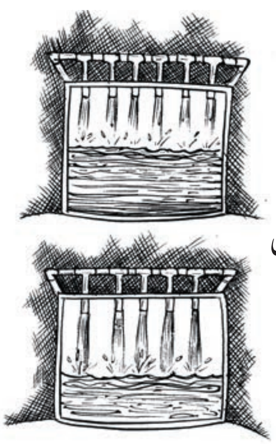
جب دو مقداریں x اور y راست تناسب میں ہوتی ہیں (یعنی تبدیل ہوتی ہیں) تو انھیں $x \propto y$ بھی لکھا جاتا ہے۔

جب دو مقداریں x اور y معکوس تناسب میں (یعنی معکوس طور پر بدلتی ہیں) تو انھیں $x \propto \frac{1}{y}$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 7: ایک ٹنکی کو 1 گھنٹہ 20 منٹ میں بھرنے کے لیے 6 پائپوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ اگر اس قسم کے 5 پائپ کا ہی استعمال کیا جائے تو وہ ٹنکی کتنے وقت میں بھرے گی؟

حل :

مان لیجیے ٹنکی کو بھرنے کا مطلوبہ وقت x منٹ ہے تب ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے۔



پائپ کی تعداد	6	5
وقت (منٹ میں)	80	x

پائپوں کی تعداد جتنی کم ہوگی ٹینکوں کو بھرنے میں اتنا ہی زیادہ وقت لگے گا۔ اس لیے یہ ایک معکوس تناسب کی صورت حال ہے۔

اس لیے $80 \times 6 = x \times 5$ $\qquad [x_1 y_1 = x_2 y_2]$

یا $\frac{80 \times 6}{5} = x$

یا $96 = x$

لہٰذا ٹنکی کو 5 پائپوں کے ذریعہ 96 منٹ یا 1 گھنٹہ 36 منٹ میں بھرا جائے گا۔

مثال 8 : ایک ہوسٹل میں 100 طلبا ہیں اور ان کے کھانے پینے کی چیزیں 20 دن کے لیے کافی ہیں۔ اگر اس گروپ میں 25 طلبا اور شامل ہو جائیں تو کھانے پینے کا سامان کتنے دن چلے گا؟

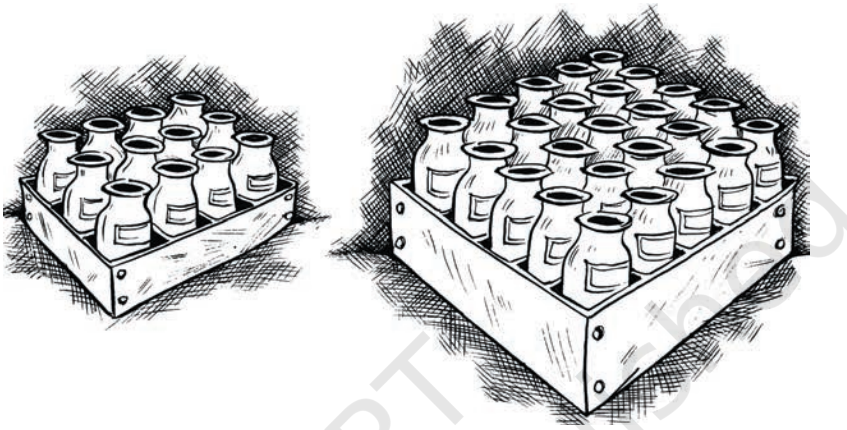
حل: مان لیجیے کھانے پینے کا سامان 125 طلبا کے لیے y دن تک چلے گا۔ ہم مندرجہ ذیل جدول حاصل کرتے ہیں۔

طلبا کی تعداد	100	125
دنوں کی تعداد	20	y

غور کیجیے کہ جتنے طلبا زیادہ ہوں گے کھانے پینے کا سامان اتنی ہی جلدی ختم ہو جائے گا۔ اس لیے یہ ایک معکوس تناسب کی صورت حال ہے۔

.6 ایک ٹھیکیدار تخمینہ لگاتا ہے کہ 3 شخص جسمندر کے گھر میں تار لگانے کا کام 4 دن میں پورا کر سکتے ہیں۔ اگر وہ 3 کی جگہ پر 4 لوگوں کو اس کام پر لگاتا ہے تو وہ کام کتنے دن میں پورا ہو جائے گا؟

.7 اگر ایک ڈبے میں 12 بوتلیں ہیں تو بوتلوں کے ایک بیچ (Batch) کو 25 ڈبوں میں رکھا جاتا ہے۔ اگر ہر ڈبے میں 20 بوتلیں ہی رکھی جائیں تو کتنے ڈبے بھرے جائیں گے؟



.8 ایک فیکٹری کو 63 دن میں اشیاء کی خاص اعداد بنانے کے لیے 42 مشینوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ اتنی ہی اشیاء 54 دن میں بنانے کے لیے کتنی مشینوں کی ضرورت پڑے گی؟

.9 ایک کار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چل کر کسی مقام پر 2 گھنٹے میں پہنچتی ہے۔ اگر کار کی رفتار 80 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو اس دوری کو طے کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

.10 دو لوگ ایک گھر میں 3 دن میں نئی کھڑکیاں لگا سکتے ہیں۔

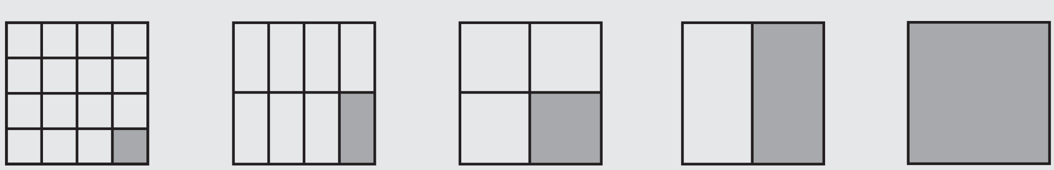
(i) کام شروع ہونے سے پہلے ہی ایک مزدور بیمار پڑ جاتا ہے۔ اب یہ کام کتنے دن میں پورا ہوگا؟

(ii) ایک ہی دن میں کھڑکیاں لگوانے کے لیے کتنے لوگوں کی ضرورت ہوگی؟

.11 ایک اسکول میں 45 منٹ کے وقفے کے 8 گھنٹے ہوتے ہیں۔ اگر اسکول کا وقت اتنا ہی رہے اور اسکول میں برابر وقفوں کے 9 گھنٹے ہوں تو ہر ایک گھنٹہ کتنے منٹ کا ہوگا؟

اسے کیجیے

.1 ایک کاغذ کی شیٹ لیجیے، اسے شکل میں دکھائے گئے طریقے سے موڑیے۔ ہر ایک حالت میں حصوں کی تعداد اور ایک حصہ کا رقبہ لکھیے۔



(ii) یکساں رفتار سے کسی سفر میں لگا وقت اور طے کیا گیا فاصلہ۔

(iii) کھیتی کی گئی زمین کا رقبہ اور کاٹی گئی فصل۔

(iv) ایک متعین سفر میں لگا وقت اور گاڑی کی رفتار۔

(v) کسی ملک کی آبادی اور فی کس زمین کا رقبہ۔

.2 ایک ٹیلی ویژن کے گیم شو (Game Show) میں ₹ 1,00,000 کی انعامی رقم جیتنے والوں میں برابر تقسیم کی جاتی ہے۔ مندرجہ ذیل جدول کو پورا کیجیے اور معلوم کیجیے کہ کیا جیتنے والے افراد کو دی جانے والی انعام کی رقم جیتنے والوں کی تعداد کے راست تناسب میں ہے یا معکوس تناسب میں ہے؟

جیتنے والوں کی تعداد	1	2	4	5	8	10	20
جیتنے والے فرد کا انعام (روپیوں میں)	1,00,000	50,000	....	.....	....	....	....

.3 رحمٰن تیلیوں کا استعمال کرتے ہوئے ایک پہیہ بنا رہا ہے۔ وہ یکساں تیلیوں کو اس طرح لگانا چاہتا ہے کہ لگاتار تیلیوں کے کسی بھی جوڑے کے درمیان کے زاویے برابر ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول کو پورا کرکے اس کی مدد کیجیے۔

تیلیوں کی تعداد	4	6	8	10	12
لگاتار تیلیوں کے ایک جوڑے کے درمیان زاویہ	90°	60°	...	...	...

(i) کیا تیلیوں کی تعداد اور لگاتار تیلیوں کے کسی جوڑے کے درمیان کا زاویہ معکوس تناسب میں ہے؟

(ii) 15 تیلیوں والے ایک پہیہ کی لگاتار تیلیوں کے کسی جوڑے کا زاویہ معلوم کیجیے۔

(iii) اگر لگاتار تیلیوں کے ہر ایک جوڑے کے درمیان کا زاویہ 40° ہے تو درکار تیلیوں کی تعداد کتنی ہوگی؟

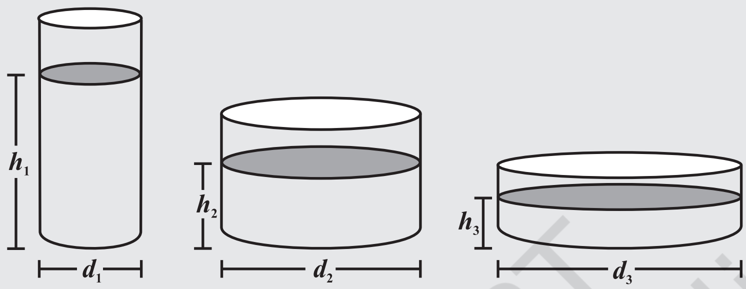
.4 اگر ایک ڈبے کی مٹھائی کو 24 بچوں میں بانٹا جائے تو ہر ایک بچے کو 5 مٹھائیاں ملتی ہیں۔ اگر بچوں کی تعداد میں 4 بچے کم کر دیے جائیں تو ہر ایک بچے کو کتنی مٹھائی ملے گی؟

.5 ایک کسان کے تبیلے میں 20 مویشیوں کے لیے 6 دن کا چارہ موجود ہے۔ اگر اس تبیلے میں 10 مویشی اور آ جائیں تو یہ چارہ کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگا؟

اپنے مشاہدوں کا جدول بنائیے اور اس پر اپنے دوستوں سے بحث کیجیے۔ کیا یہ معکوس تناسب کی حالت ہے؟ کیوں؟

حصوں کی تعداد	1	2	4	8	16
ہر ایک حصہ کا رقبہ	کاغذ کا رقبہ	کاغذ کے رقبہ کا $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. دائرہ نما قاعدہ والے مختلف پیمائشوں کے کچھ برتن لیجیے۔ ہر ایک برتن میں یکساں مقدار میں پانی بھریے۔ ہر برتن کا قطر اور اس برتن میں پانی کی اونچائی ناپ کر لکھیے۔ اپنے مشاہدوں کی ایک جدول بنائیے۔ کیا یہ معکوس تناسب کی حالت ہے؟



برتن کا قطر (سینٹی میٹر میں)			
پانی کی سطح کی اونچائی (سینٹی میٹر میں)			

ہم نے کیا سیکھا؟

1. دو مقداریں x اور y راست تناسب میں کہلاتی ہیں اگر دونوں اس طرح سے بڑھیں (یا گھٹیں) کہ ان کی نظیری قدروں کی نسبت مستقل رہے۔ یعنی اگر $\frac{x}{y}=k$ [k ایک مثبت عدد ہے]، تب x اور y راست تناسب میں کہلاتے ہیں۔ ایسی حالت میں اگر x کی قدریں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ہوتا ہے۔

2. دو مقداریں x اور y معکوس تناسب میں کہی جاتی ہیں اگر x میں ہوا اضافہ y متناسب میں کمی پیدا کرے اور x میں ہوئی کمی y میں متناسب اضافہ پیدا کرے تاکہ ان کی نظیری قدروں کا حاصل ضرب مستقل رہے یعنی اگر $xy=k$ ہو تو x اور y معکوس تناسب میں بدلتی ہیں۔ اس حالت میں اگر x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $x_1 y_1 = x_2 y_2$ یا $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ ہوتا ہے۔