Government of Tamilnadu

സ്റ്റാൻഡേർഡ് എട്ടാം

STANDARD EIGHT

MALAYALAM MEDIUM

ഭാഗം 1 Term 1

ഗണിതം (MATHEMATICS)

ശാസ്ത്രം (SCIENCE)

സാമൂഹിക ശാസ്ത്രം (SOCIAL SCIENCE)

വാല്യം 2 Volume 2

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu
First Edition - 2012
Revised Edition - 2013, 2014, 2015, 2016
(Published under Uniform System of School Education scheme in Trimester Pattern)

Textbook preparation and compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 GSM Maplitho Paper

Price: Rs.

Printed by Web Offset at:

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ഉള്ളടക്കം

ഗണിതം - (1-129)
MATHEMATICS

ക്രമ നമ്പർ	അധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
1.	വാസ്തവിക സംഖ്യാസമ്പ്രദായം	2
2.	അളവുകൾ	56
3.	ജ്യാമിതി	77
4.	പ്രയോഗിക ജ്യാമിതി	99

ശാസ്ത്രം - (130-240)
SCIENCE

ക്രമ നമ്പർ	അധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
1.	വിളവുല്പാദനവും പരിപാലനവും	131
2.	കൗമാരാവസ്ഥയിൽ എത്തുന്നു	145
3.	സസ്യലോകത്തിന്റെ ചിത്ര സഹിത സവിശേഷതകൾ	161
4.	സൂക്ഷ്മജീവികൾ	175
5.	നമുക്ക് ചുറ്റുമുള്ള മൂലകങ്ങളും സംയുക്തങ്ങളും	191
6.	അളവുകൾ	213
7.	ബലവും മർദ്ദവും	220

സാമൂഹിക ശാസ്ത്രം - (241-332)

SOCIAL SCIENCE

ക്രമ നമ്പർ	അദ്ധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
	ചരിത്രം	
1.	മുഗളന്മാരുടെ ആഗമനം	242
2.	മറാത്തകളുടെ ഉദയം	261
3.	യൂറോപ്യന്മാരുടെ ആഗമനം	270
4.	ആംഗ്ലോ- ഫ്രഞ്ച് അധികാര മത്സരം കർണ്ണാടക യുദ്ധങ്ങൾ	277
	ഭൂമിശാസ്ത്രം	
	വിഭവങ്ങൾ - I	
1.	വിഭവങ്ങളും അവയുടെ തരങ്ങളും	286
2.	വിഭവസ്രോതസ്സുകളും സാമ്പത്തിക പ്രവർത്തനങ്ങളും	296
	പ്രാഥമിക ഘട്ട തൊഴിൽ - I	
3.	പ്രാഥമിക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ	301
4.	ഖനനം	308
	പൗരധർമ്മം	
1.	ദേശീയോത്ഗ്രഥനം	316
2.	സാമൂഹ്യ സാമ്പത്തിക പ്രശ്നങ്ങൾ	323

ഗണിതം

MATHEMATICS - MALAYALAM MEDIUM

സ്റ്റാൻഡേർഡ് എട്ടാം

STANDARD EIGHT

ഭാഗം1

Term 1

1 വാസ്തവിക സംഖ്യാസമ്പ്രദായം

1.1 മുഖവുര

1.2 ആവർത്തനം: സംഖ്യാരേഖയിൽ പരിമേയ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കൽ

1.3 പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ചതുഷ്ക്രിയകൾ

1.4 മൂന്ന് ബ്രാക്കറ്റുള്ള പദങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം

1.5 ഘാതാങ്കം. പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ ഘാതാങ്കരൂപത്തിൽ ആവിഷ്കരിക്കൽ

1.6 പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഘാതാങ്കനിയമങ്ങൾ

1.7 വർഗ്ഗങ്ങൾ, വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ, ഘനങ്ങൾ, ഘനമൂലങ്ങൾ

1.8 ഏകദേശമൂല്യങ്ങൾ

1.9 സംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള കളികൾ

പോൾ എർഡോസ്
[26 March, 1913 - 20 September, 1996]

ഹംഗേറിയനായ ഇദ്ദേഹം മഹാനും അതിസമർത്ഥനും ശ്രദ്ധേയനുമായ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്നു. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ചരിത്രം നോക്കിയാൽ, എർഡോസ് തന്റെ സഹ പ്രവർത്തകരുമായി ചേർന്ന് സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം ഉൾപ്പെടെ ധാരാളം പ്രബന്ധങ്ങൾ മറ്റാരെക്കാളും കൂടുതൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് നമുക്ക്കാണാൻസാധിക്കും.

ശൈശവം മുതൽക്കേ ഇദ്ദേഹം ഗണിതത്തിൽ തല്പരനായിരുന്നു. ഒരു വ്യക്തി ജീവിച്ചിരിക്കുന്ന കാലത്തെ സെക്കന്റുകളാക്കി മാറ്റി പറയുവാൻ അദ്ദേഹത്തിന് 3-ാമത്തെ വയസ്സിൽ കഴിഞ്ഞിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ജീവിതത്തെ *"N is a Number: A Portrait of Paul Erdos"*, എന്ന പേരിൽ അദ്ദേഹം ജീവിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ തന്നെ ഒരു ഹ്രസ്വചിത്രമാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

Erdos said,
"I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is."

1.1 മുഖവുര

ഗണിതത്തിന്റെ വളർച്ചയിൽ അറിവിന്റെ അടിസ്ഥാന വസ്തുവായ സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം തന്ത്രപ്രധാനമായ ഒരു പങ്കാണ് വഹിക്കുന്നത്. ഗ്രീക്കു ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ പൈതഗോറസ്സും അദ്ദേഹത്തിന്റെ അനുയായികളും *"everything is number"*എന്നും പ്രപഞ്ച വിശദീകരണത്തിന്റെ കേന്ദ്രം സംഖ്യകളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്നും വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ഇന്നത്തെ സംഖ്യാ സമ്പ്രദായം ഏകദേശം 10000 വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പ് രൂപംകൊണ്ടതാണ്. ഇന്ന് നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ പ്രധാന ഉറവിടം ഇന്ത്യയാകുന്നു. ഈ സമ്പ്രദായം പൂർണ്ണതയിലെത്താൻ 5000 വർഷങ്ങൾ വേണ്ടിവന്നു.

എല്ലാ ഗണിതവിഭാഗങ്ങളുടെയും സ്രോതസ്സ് പൂർണ്ണസംഖ്യകളാകുന്നു. ഇന്ന് നിലവിലുള്ള സമ്പ്രദായം ഇൻഡോ- അറബിക് സമ്പ്രദായം എന്നു അറിയപ്പെടുന്നു.

ഈ സമ്പ്രദായം അനുസരിച്ച് 0,1,2,....9 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവ 10 ആധാരമായ ദശസമ്പ്രദായത്തിൽ ഉള്ളവയാണ്. 'decimal' എന്ന പദം 'Decem' എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽ നിന്നാണ് ഉത്ഭവിച്ചത്. ഇതിന്റെ അർത്ഥം 'ദശം' എന്നാണ്.

ഗണിതം **'ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രാജ്ഞിയും'**, **സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം 'ഗണിതത്തിന്റെ രാജ്ഞിയുമാണ്'.**

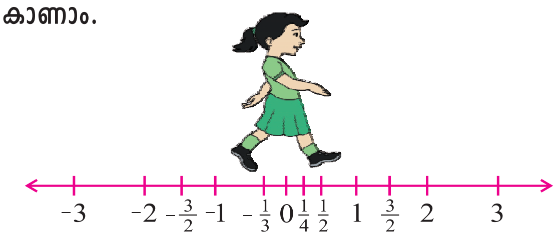
VII -ാം ക്ലാസ്സിൽ നാം നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$, പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ $W = \{0, 1, 2, \cdots\}$, പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots\}$ പരിമേയ സംഖ്യകൾ Q ഉം കൂടാതെ അടിസ്ഥാന ചതുഷ്ക്രിയകളും പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു.

1.2 ആവർത്തനം : സംഖ്യാരേഖയിൽ പരിമേയ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കൽ

പരിമേയസംഖ്യകൾ

$\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളിൽ p യും q യും പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും $q \neq 0$ യും ആയാൽ അതിനെ പരിമേയ സംഖ്യകളെന്നു പറയുന്നു. $\frac{p}{q}$ രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടത്തെ Q കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. $q > 0$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ, പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ, പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ, എല്ലാ ഋണധനഭിന്നങ്ങളും പരിമേയ സംഖ്യയിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ പരിമേയ സംഖ്യകളെ പെൺകുട്ടി ബാഗിൽ എപ്രകാരം ശേഖരിച്ചു എന്നത് കാണാം.

പരിമേയ സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. ഈ ചിത്രത്തിൽ സംഖ്യരേഖയ്ക്ക് മേൽ പെൺകുട്ടി നടക്കുന്നത് കാണാം.

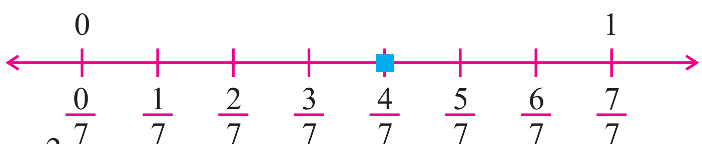


സംഖ്യാരേഖയിൽ പരിമേയ സംഖ്യകളെ വ്യക്തമായി കുറിക്കുന്നതിന് ഛേദത്തിനനുസരിച്ച് ഓരോ യൂണിറ്റിനെയും സമഭാഗങ്ങളായി പിരിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയെ രേഖയിൽ കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം :

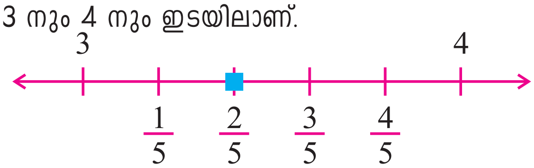
(i) $\frac{4}{7}$ സംഖ്യാരേഖയിൽ കുറിക്കുക.

$\frac{4}{7}$ പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലാണ്.



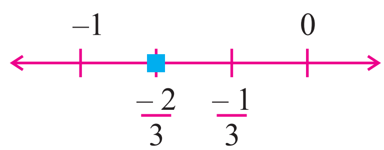
(ii) $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$

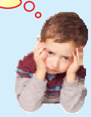
ഇത് 3 നും 4 നും ഇടയിലാണ്.



(iii) $-\frac{2}{3}$

ഇത് -1നും പൂജ്യത്തിനും ഇടയിലാണ്.





ചിന്തിക്കൂ!

എല്ലാ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളും പരിമേയസംഖ്യകളാണ്. ഇതിന്റെ എതിർ പ്രസ്താവന ശരിയാണോ ?

1.3 പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ചതുഷ്ക്രിയകൾ

1.3.1 (a) സങ്കലനം

(i) സംവൃതഗുണം

രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനഫലം എപ്പോഴും പരിമേയസംഖ്യയായിരിക്കും. ഈ പ്രത്യേകതയെ Q ൽ ‘സങ്കലനത്തിന്റെ സംവൃതഗുണം’ എന്നു പറയുന്നു.

ഇവിടെ $\frac{a}{b}$ യും $\frac{c}{d}$ യും പരിമേയസംഖ്യകളാണ്. അതുകൊണ്ട് $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ യും പരിമേയസംഖ്യയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം: (i) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ പരിമേയസംഖ്യ

(ii) $5+\frac{1}{3}=\frac{5}{1}+\frac{1}{3}=\frac{15+1}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$ പരിമേയസംഖ്യ.

(ii) ക്രമവിനിമേയ ഗുണം

രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനഫലം ക്രമവിനിമേയം ആകുന്നു.

$\frac{a}{b}$ യും $\frac{c}{d}$ യും പരിമേയസംഖ്യകൾ, ആണെങ്കിൽ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$.

ഉദാഹരണം: പരിമേയസംഖ്യകളായ $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ നെ

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{2}$$

LHS $=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$

$=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$

RHS $=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$

$=\frac{4+5}{10}=\frac{9}{10}$

$\therefore$ LHS = RHS

$\therefore$ സങ്കലനത്തിന് ക്രമവിനിമയ ഗുണം ശരിയാകുന്നു.

(iii) സംയോജന ഗുണം

പരിമേയസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം എന്നത് സംയോജനം ആകുന്നു.

$\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$ എന്നിവഏതെങ്കിലുംമൂന്ന്പരിമേയസംഖ്യകൾആണെങ്കിൽ $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$

ഉദാഹരണം : പരിമേയ സംഖ്യകളായ $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ മറ്റും 2 നെ

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+2\right) = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+2$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right) = \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{5}{2} = \frac{4+15}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+2 = \left(\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\right)+2 = \frac{7}{6}+2 = \frac{7}{6}+\frac{2}{1} = \frac{7+12}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ സങ്കലനത്തിന് സംയോജനഗുണം ശരിയാകുന്നു.

(iv) സങ്കലന അനന്യത

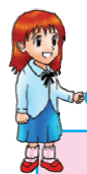
ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെയും പൂജ്യത്തിന്റെയും സങ്കലനഫലം പരിമേയസംഖ്യ ആകുന്നു.

$\frac{a}{b}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ആയാൽ $\frac{a}{b}+0 = \frac{a}{b} = 0+\frac{a}{b}$.

പൂജ്യം എന്ന പരിമേയ സംഖ്യയെ സങ്കലന അനന്യത എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം: (i) $\frac{2}{7}+0 = \frac{2}{7} = 0+\frac{2}{7}$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right)+0 = \frac{-7}{11} = 0+\left(\frac{-7}{11}\right)$



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

പൂജ്യം ഒരു പ്രത്യേക പരിമേയ സംഖ്യ ആകുന്നു. $0 = \frac{0}{q}$, $q \neq 0$ എന്ന് എഴുതാം.

(v) സങ്കലനവിപരീതം

$\left(\frac{-a}{b}\right)$ എന്നതിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം $\frac{a}{b}$ ആകുന്നു.

$\frac{a}{b}$ **-യുടെ സങ്കലനവിപരീതം** $\left(\frac{-a}{b}\right)$

അതിനാൽ $\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right) = 0$

ഉദാഹരണം: (i) $\frac{3}{5}$ന്റെ സങ്കലന വിപരീതം $\frac{-3}{5}$

(ii) $\frac{-3}{5}$ന്റെ സങ്കലന വിപരീതം $\frac{3}{5}$

(iii) പൂജ്യത്തിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം പൂജ്യം.

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ

സംഖ്യകൾ	സങ്കലനം		
	സംവൃത ഗുണം	ക്രമവിനിമേയ ഗുണം	സംയോജന ഗുണം
നിസർഗസംഖ്യകൾ			
പൂർണസംഖ്യകൾ			ഉണ്ട്
പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ			
പരിമേയസംഖ്യകൾ	ഉണ്ട്		

1.3.1 (b) വ്യവകലനം

(i) സംവൃതഗുണം

ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം എപ്പോഴും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ആയിരിക്കും. ഈ ഗുണത്തെ Q ലെ വ്യവകലനത്തിന്റെ സംവൃതഗുണം എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ യും പരിമേയ സംഖ്യകളാകുന്നു.

ഉദാഹരണം: (i) $\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) $1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) ക്രമവിനിമേയ ഗുണം

പരിമേയസംഖ്യകളുടെ വ്യവകലനത്തിന് ക്രമവിനിമേയ ഗുണം ഇല്ല.

$\frac{a}{b}$ യും $\frac{c}{d}$ യും രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആയാൽ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

ഉദാഹരണം: പരിമേയ സംഖ്യകൾ $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{5} \neq \frac{2}{5} - \frac{4}{9}$$

LHS $= \frac{4}{9} - \frac{2}{5} = \frac{20-18}{45} = \frac{2}{45}$

RHS $= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} = \frac{18-20}{45} = \frac{-2}{45}$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

$\therefore$ ക്രമവിനിമേയ ഗുണം വ്യവകലനത്തിന് യോജിച്ചതല്ല.

2 പരിമേയ സംഖ്യകൾ സമമായാൽ, ക്രമവിനിമേയഗുണം യോജിച്ചതാണ്.

(iii) സംയോജന ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകളിലെ വ്യവകലന ക്രിയകൾക്ക് സംയോജന ഗുണം ഇല്ല.

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ കൂടാതെ $\frac{e}{f}$ പരിമേയ സംഖ്യകളായാൽ $\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) \neq \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f}$.

ഉദാഹരണം: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ കൂടാതെ $\frac{1}{4}$, എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആകുന്നു. എങ്കിൽ

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \neq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}$$

LHS $= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{12}\right) = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$

RHS $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} = \left(\frac{3-2}{6}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = \frac{-1}{12}$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

$\therefore$ വ്യവകലന ക്രിയകൾക്ക് സംയോജന ഗുണം ഇല്ല.

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ

സംഖ്യകൾ	വ്യവകലനം		
	സംവൃതഗുണം	ക്രമവിനിമേയ ഗുണം	സംയോജന ഗുണം
നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ	ഇല്ല		
പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ			
പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ			
പരിമേയസംഖ്യകൾ			ഇല്ല

1.3.1 (c) ഗുണനം

(i) സംവൃതഗുണം

രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പരിമേയ സംഖ്യയാകുന്നു. ഈ ഗുണനത്തെ Q ലെ ഗുണനത്തിന്റെ സംവൃതഗുണം എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആയാൽ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ പരിമേയ സംഖ്യ.

ഉദാഹരണം : (i) $\frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) $\frac{4}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{27}$ പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) ക്രമവിനിമേയ ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമാണ്.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ പരിമേയ സംഖ്യകളായാൽ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : $\frac{3}{5}, \frac{-8}{11}$ പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$$\frac{3}{5} \times \left(\frac{-8}{11}\right) = \left(\frac{-8}{11}\right) \times \frac{3}{5}$$

$$\text{LHS} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-8}{11}\right) = \frac{-24}{55}$$

$$\text{RHS} = \frac{-8}{11} \times \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-24}{55}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ ക്രമവിനിമേയ ഗുണം ഗുണനത്തിന് യോജിക്കുന്നതാണ്.

(iii) സംയോജന ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിന് സംയോജനഗുണം ഉണ്ട്

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യകളായാൽ $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$.

ഉദാഹരണം : $\frac{1}{2}, \left(\frac{-1}{4}\right), \frac{1}{3}$ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആയാൽ

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\times\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\right)\right)\times\frac{1}{3}$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{12}\right) = \frac{-1}{24} \qquad \text{RHS} = \left(\frac{-1}{8}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{-1}{24}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ സംയോജനഗുണം ഗുണനത്തിന് യോജിക്കുന്നതാണ്.

(iv) ഗുണന അനന്യത

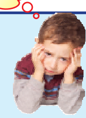
ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയെ 1 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അതേ പരിമേയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഒന്നിനെ **ഗുണന അനന്യത** എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{a}{b}$ പരിമേയ സംഖ്യ എങ്കിൽ $\frac{a}{b}\times 1 = \frac{a}{b} = 1\times\frac{a}{b}$.

ഉദാഹരണം : (i) $\frac{5}{7}\times 1 = \frac{5}{7}$

(ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)\times 1 = \frac{-3}{8}$

ചിന്തിക്കൂ!



പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണന അനന്യത 1 ആണോ?

(v) പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

ഏതൊരു പരിമേയ സംഖ്യയേയും പൂജ്യം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ഗുണനഫലം പൂജ്യം

$\frac{a}{b}$ പരിമേയ സംഖ്യ എങ്കിൽ $\frac{a}{b}\times 0 = 0 = 0\times\frac{a}{b}$.

ഉദാഹരണം : (i) $-5\times 0 = 0$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right)\times 0 = 0$

(vi) ഗുണന വ്യുൽക്രമം

$\frac{a}{b}$ എന്ന എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കും $a \neq 0$, എങ്കിൽ $\frac{c}{d}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ, ആണ്. പരിമേയ സംഖ്യകളായ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = 1$ എങ്കിൽ $\frac{c}{d}$ എന്നത് $\frac{a}{b}$ യുടെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം ആകുന്നു.

$\frac{a}{b}$ പരിമേയ സംഖ്യ എങ്കിൽ $\frac{b}{a}$ യുടെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : (i) 2 ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{2}$.

(ii) $\left(\frac{-3}{5}\right)$ ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം $\left(\frac{-5}{3}\right)$.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

i) പൂജ്യത്തിന് ഗുണന വ്യുൽക്രമം ഇല്ല.

ii) 1ന്റെയും -1 ന്റെയും ഗുണന വ്യുൽക്രമം അതേ സംഖ്യ തന്നെ.

ചിന്തിക്കൂ!

0.3 ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം $3\frac{1}{3}$ ആണോ?

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ

സംഖ്യകൾ	ഗുണനഫലം		
	സംവൃതഗുണം	ക്രമവിനിമേയ ഗുണം	സംയോജന ഗുണം
നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ			
പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ		ഉണ്ട്	
പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ			ഉണ്ട്
പരിമേയ സംഖ്യകൾ			

1.3.1 (d) ഹരണം

(i) സംവൃത ഗുണം

പൂജ്യം അല്ലാത്ത എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യൾക്കും ഹരണത്തിന് സംവൃതഗുണം ഉണ്ട്

$\frac{a}{b}$ യും $\frac{c}{d}$ യും പരിമേയ സംഖ്യകളാണ് $\frac{c}{d} \neq 0$, എങ്കിൽ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ പരിമേയ സംഖ്യ

ഉദാഹരണം : (i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{2}{1} = 2$ പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ പരിമേയ സംഖ്യ

(ii) ക്രമവിനിമേയ ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് ഹരണത്തിൽ ക്രമവിനിമേയ ഗുണം ഇല്ല.

$\frac{a}{b}$ യും $\frac{c}{d}$ യും പരിമേയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$

ഉദാഹരണം : $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$ എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{8} \neq \frac{3}{8} \div \frac{4}{5}$$

$$\text{LHS} = \frac{4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{15} \quad \Big| \quad \text{RHS} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{32}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

$\therefore$ ഹരണത്തിൽ ക്രമവിനിമേയ ഗുണം ഇല്ല.

(iii) സംയോജന ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് ഹരണത്തിൽ സംയോജന ഗുണം ഇല്ല.

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ യും $\frac{e}{f}$ യും പരിമേയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) \neq \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f}$.

ഉദാഹരണം : $\frac{3}{4}, 5, \frac{1}{2}$ പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$$\left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{LHS} = \left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} \qquad \text{RHS} = \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{2} \qquad = \frac{3}{4} \div \left(\frac{5}{1} \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= \frac{3}{20} \times \frac{2}{1} \qquad = \frac{3}{4} \div 10$$

$$= \frac{3}{10} \qquad = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

∴ ഹരണത്തിൽ സംയോജന ഗുണം യോജിച്ചതല്ല.

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ

സംഖ്യകൾ	ഹരണം		
	സംവൃതഗുണം	ക്രമവിനിമേയ ഗുണം	സംയോജന ഗുണം
നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ	ഇല്ല		
പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ			
പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ			
പരിമേയ സംഖ്യകൾ		ഇല്ല	

1.3.1 (e) വിതരണ ഗുണം

(i) ഗുണനത്തിന് സങ്കലനത്തിൻമേലുള്ള വിതരണ ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകളിൽ ഗുണനത്തിന് സങ്കലനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണ ഗുണം ഉണ്ട്.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ യും $\frac{e}{f}$ യുംപരിമേയ സംഖ്യകൾ എങ്കിൽ $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$.

ഉദാഹരണം : $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ കൂടാതെ $\frac{3}{5}$, പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\right) \qquad = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\right) \qquad \text{RHS} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{20+27}{45}\right) \qquad = \frac{8}{27} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{47}{45} = \frac{94}{135} \qquad = \frac{40+54}{135} = \frac{94}{135}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ ഗുണനത്തിന് സങ്കലനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണ ഗുണം ഉണ്ട്.

(ii) ഗുണനത്തിന് വ്യവകലനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണ ഗുണം

പരിമേയ സംഖ്യകളിൽ ഗുണനത്തിന് വ്യവകലനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണ ഗുണം ഉണ്ട്.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ പരിമേയ സംഖ്യകൾ എങ്കിൽ $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$.

ഉദാഹരണം : $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ കൂടാതെ $\frac{1}{2}$, പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$$\frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}$$

$$\text{LHS} = \frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\left(\frac{8-5}{10}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{70}$$

$$\text{RHS} = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{12}{35}-\frac{3}{14} = \frac{24-15}{70} = \frac{9}{70}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

∴ ഗുണനത്തിന് വ്യവകലനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണഗുണമുണ്ട്

അഭ്യാസം 1.1

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

i) പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലന അനന്യത ________ .

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) 2

ii) $\frac{-3}{5}$ ന്റെ സങ്കലന വ്യുൽക്രമം ________ .

(A) $\frac{-3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{-5}{3}$

iii) $\frac{-5}{13}$ ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം ________ .

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{-13}{5}$ (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{-5}{13}$

iv) – 7 ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം ________ .

(A) 7 (B) $\frac{1}{7}$ (C) – 7 (D) $\frac{-1}{7}$

v) ________ ന് വ്യുൽക്രമം ഇല്ല.

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) $\frac{1}{4}$

2. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോന്നും ഏത് സങ്കലന നിയമം അനുസരിച്ചുള്ളതെന്ന് എഴുതുക.

(i) $\left(\frac{-3}{7}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\left(\frac{-3}{7}\right)$ (ii) $\frac{4}{9}+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{9}+\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}$

(iii) $8+\frac{7}{10}=\frac{7}{10}+8$ (iv) $\left(\frac{-7}{15}\right)+0=\frac{-7}{15}=0+\left(\frac{-7}{15}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right)=0$

3. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോന്നും ഏത് ഗുണന നിയമം അനുസരിച്ചുള്ളതെന്ന് എഴുതുക.

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)\times 1=\frac{-3}{4}=1\times\left(\frac{-3}{4}\right)$

(iii) $\left(\frac{-17}{28}\right)\times\left(\frac{-28}{17}\right) = 1$ (iv) $\frac{1}{5}\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{5}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{4}{3}$

(v) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{7}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}$

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ജോടി പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കും സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയ്ക്കു ക്രമവിനിമേയ ഗുണം ശരി നോക്കുക.

(i) $4\ ,\ \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{4}\ ,\ \frac{-2}{7}$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയ്ക്കു സംയോജന ഗുണം ശരി നോക്കുക.

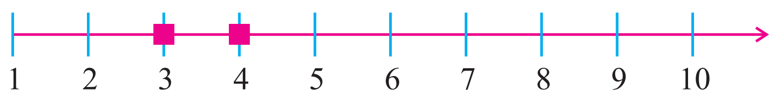
(i) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\ ,\ \frac{-3}{7}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{-4}{5}\ ,\ \frac{9}{10}$

6. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ ഗുണനത്തിന്മേലുള്ള വിതരണനിയമം ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കുക.

(i) $\frac{-5}{4}\times\left(\frac{8}{9}+\frac{5}{7}\right)$ (ii) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

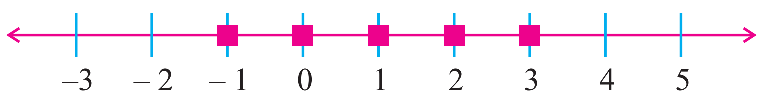
1.3.2 രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള മറ്റൊരു പരിമേയ സംഖ്യ എഴുതുക.

2 നും 5 നും ഇടയിലുള്ള നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ പറയാമോ?



അവ 3 ഉം 4 ഉം

– 2 നും 4 നും ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എഴുതുക ?

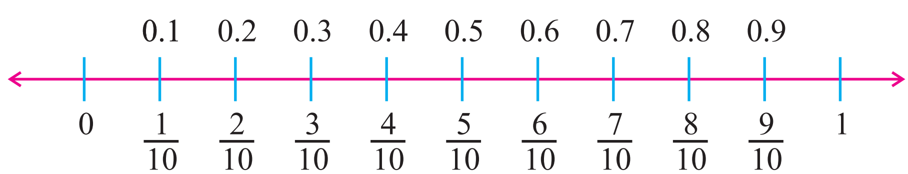


അവ – 1, 0, 1, 2, 3.

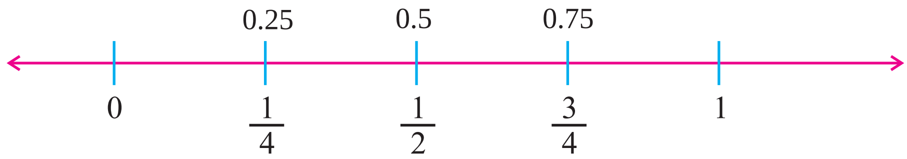
നിങ്ങൾക്ക് 1 നും 2 നും ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഇല്ല.

എന്നാൽ ഏതൊരു രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്കിടയിലും പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 0 യ്ക്കും 1 നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots$ ഇവയെ നമുക്ക് 0.1, 0.2, 0.3, ⋯ എന്നെഴുതാം.



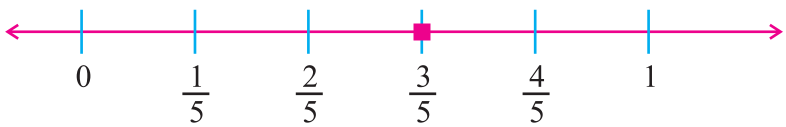
ഇതുപോലെ 0 യ്ക്കും 1 നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളാണ് $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇവയെ 0.25, 0.5, 0.75 എന്നും എഴുതാം.



ഇപ്പോൾ, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ പരിഗണിക്കുക.

$\frac{2}{5}$ നും $\frac{4}{5}$ നും ഇടയിൽ പരിമേയ സംഖ്യയുണ്ടോ?

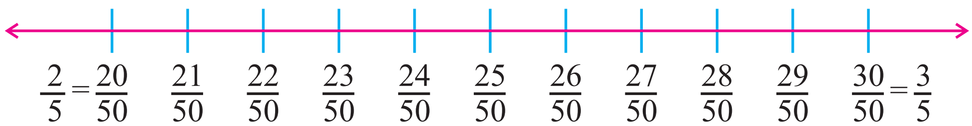
ഉണ്ട്. $\frac{3}{5}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ



$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ കൂടാതെ $\frac{4}{5}$ എന്നിവ 0 യ്ക്കും 1 നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളാണെന്നറിയാം.

$\frac{2}{5}$ നും $\frac{3}{5}$ നും ഇടയിൽ മറ്റ് പരിമേയ സംഖ്യകളുണ്ടോ?

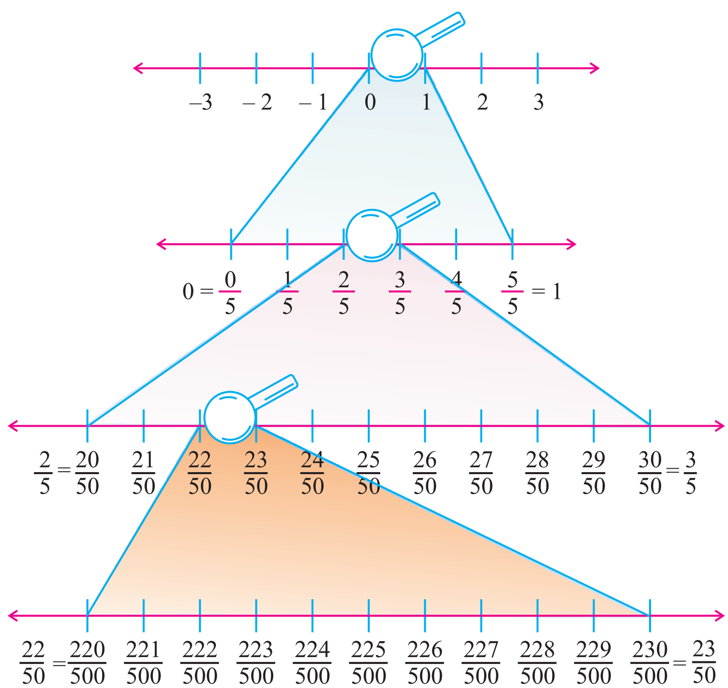
ഉണ്ട്. $\frac{2}{5}$ നെ $\frac{20}{50}$ എന്നും $\frac{3}{5}$ നെ $\frac{30}{50}$ എന്നും എഴുതിയാൽ അവയ്ക്കിടയിൽ ധാരാളം പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ട് എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും.



ഇവയ്ക്കിടയിൽ 9 പരിമേയ സംഖ്യകളുണ്ട് അവ $\frac{21}{50}, \frac{22}{50}, \frac{23}{50}, \frac{24}{50}, \frac{25}{50}, \frac{26}{50}, \frac{27}{50}, \frac{28}{50}$, $\frac{29}{50}$.

നമുക്ക് $\frac{22}{50}$ നും $\frac{23}{50}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$\frac{22}{50}$ നെ $\frac{220}{500}$ എന്നും $\frac{23}{50}$ നെ $\frac{230}{500}$ എന്നും എഴുതിയാൽ അവയ്ക്കിടയിൽ 9 പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. അവ $\frac{221}{500}, \frac{222}{500}, \frac{223}{500}, \frac{224}{500}, \frac{225}{500}$ $\frac{226}{500}, \frac{227}{500}, \frac{228}{500}, \frac{229}{500}$ എന്നിവ യാകുന്നു.



ഇതിനെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് വിശദമായി ഈ രേഖാ ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ മനസ്സിലാക്കാം.

ഒരു ഉത്തല ലെൻസിനെ രേഖാചിത്രത്തിലുള്ള 0 യ്ക്കും 1 നും

ഇടയിൽ വച്ച് നോക്കുമ്പോൾ ഇടയിലുള്ള അകലം കൂടുന്നത് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

ഇതുപോലെ നമുക്ക് 1 നും 2 നും , 2 നും 3 നും ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

ഏത് രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിലും ധാരാളം പരിമേയ സംഖ്യ ഉള്ളതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അനന്തമായ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടെന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു.

രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അവസാനിക്കാത്ത ആവർത്തകമോ ആയ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്.

പരിമേയ സംഖ്യകളെ താരതമ്യം ചെയ്യൽ

രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളെ രണ്ട് രീതിയിൽ താരതമ്യം ചെയ്യാം

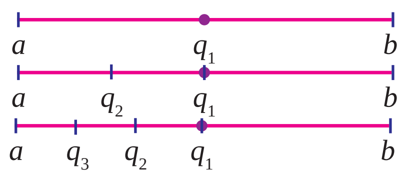
1. സൂത്രരീതി

'a' , 'b' എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള മറ്റ് പരിമേയ സംഖ്യകൾ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ ആകുന്നു.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(a+q_1)$$

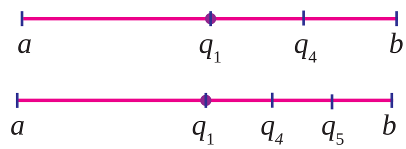
$$q_3 = \frac{1}{2}(a+q_2) \text{ എന്നിങ്ങനെ}$$



'a' , 'b' എന്നീ പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ q_1 ന്റെ ഇടതു വശത്ത് q_2, q_3 എന്നിവയും, ഇതുപോലെ q_4, q_5 എന്നീ പരിമേയ സംഖ്യകൾ q_1 ന്റെ വലതു ഭാഗത്തും കാണുന്നു.

$$q_4 = \frac{1}{2}(q_1+b)$$

$$q_5 = \frac{1}{2}(q_4+b) \text{ എന്നിങ്ങനെ}$$



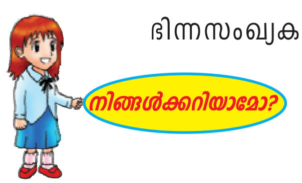
2. മറ്റൊരു രീതി:

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി ആ സംഖ്യകൾക്കിടയിലായിരിക്കും.

'a' കൂടാതെ 'b' പരിമേയ സംഖ്യകൾ.

(i) തന്നിട്ടുള്ള ഭിന്ന സംഖ്യകൾക്ക് ല.സാ.ഗു കണ്ടുപിടിച്ച് പൊതുഛേദമുള്ള സമാന പരിമേയ സംഖ്യകളാക്കി മാറ്റുക.

(ii) പുതിയ ഭിന്നസംഖ്യയിൽ അംശങ്ങൾക്കിടയിൽ സംഖ്യകൾ ഇല്ലെങ്കിൽ അംശത്തേയും, ഛേദത്തേയും 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക. നമുക്ക് കൂടുതൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമെങ്കിൽ 100, 1000, ...എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.



വ്യത്യസ്ത രീതികളുപയോഗിച്ച് 'a' , 'b' ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.1

$\frac{3}{4}$ നും $\frac{4}{5}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

സൂത്രരീതി

തന്നിട്ടുള്ളത് : $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

$\frac{3}{4}$ നും $\frac{4}{5}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ q_1

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15+16}{20}\right)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{31}{20}\right) = \frac{31}{40}$$

$\frac{31}{40}$ പരിമേയ സംഖ്യ

മറ്റൊരുരീതി

തന്നിട്ടുള്ളത് : $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

നമുക്ക് a , b ഇങ്ങനെ എഴുതാം $\frac{3}{4}\times\frac{5}{5} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5}\times\frac{4}{4} = \frac{16}{20}$

$\frac{15}{20}$ നും $\frac{16}{20}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ കാണുന്നതിന് അംശത്തിനേയും ഛേദത്തിനേയും 10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

$$\frac{15}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{150}{200} \quad , \quad \frac{16}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{160}{200}$$

$\therefore$ $\frac{150}{200}$ നും $\frac{160}{200}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$\frac{151}{200}, \frac{152}{200}, \frac{153}{200}, \frac{154}{200}, \frac{155}{200}, \frac{156}{200}, \frac{157}{200}, \frac{158}{200}$ കൂടാതെ $\frac{159}{200}$.

ഉദാഹരണം 1.2

$\frac{-3}{5}$ നും $\frac{1}{2}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : $a = \frac{-3}{5}, b = \frac{1}{2}$

q_1 , q_2 എന്നീ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾ $q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-6+5}{10}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{10}\right) = \frac{-1}{20}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\,(a+q_1) = = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\left(\frac{-1}{20}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12+(-1)}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12-1}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-13}{20}\right) = \frac{-13}{40}$$

$\frac{-1}{20}$, $\frac{-13}{40}$ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യ

കുറിപ്പ് : രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ളവ $\frac{-3}{5} < \frac{-13}{40} < \frac{-1}{20} < \frac{1}{2}$

അഭ്യാസം 1.2

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ജോടി പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കും ഇടയിലുള്ള ഒരു പരിമേയസംഖ്യ കാണുക.

   (i) $\frac{4}{3}$ നും $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-2}{7}$ നും $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{11}$ നും $\frac{7}{8}$ (iv) $\frac{7}{4}$ നും $\frac{8}{3}$

2. രണ്ട് പരിമേയസംഖ്യകൾ കാണുക?

   (i) $\frac{2}{7}$ നും $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{5}$ നും $\frac{9}{11}$ (iii) $\frac{1}{3}$ നും $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ നും $\frac{1}{3}$

3. മൂന്ന് പരിമേയസംഖ്യകൾ കാണുക?

   (i) $\frac{1}{4}$ നും $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{7}{10}$ നും $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{-1}{3}$ നും $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{1}{8}$ നും $\frac{1}{12}$

1.4 മൂന്ന് ബ്രാക്കറ്റുള്ള പദങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ :

(i) $2 + 3 = 5$ (ii) $5 - 10 = -5$

(iii) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ (iv) $4 - 2 \times \frac{1}{2} = ?$

ഉദാഹരണങ്ങൾ (i), (ii) , (iii) ൽ ഓരോ ക്രിയകളും (iv) ൽ രണ്ട് ക്രിയകളും ഉണ്ട്

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ (iv) ലാമത്തെ ചോദ്യത്തിൽ ആദ്യം ഏത് ക്രിയ ചെയ്യണം.

ഉദാഹരണം (iv) ൽ ചില നിബന്ധനകൾ സ്വീകരിച്ചില്ലെങ്കിൽ വ്യത്യസ്തമായ ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണമായി (i) $(4 - 2)\times\frac{1}{2} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

(ii) $4 - \left(2\times\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$ വ്യത്യസ്ത ഉത്തരങ്ങൾ

ഈ സംശയം ഒഴിവാക്കാൻ ക്രിയകൾ ചെയ്യുമ്പോൾ

ചില നിബന്ധനകൾ പാലിക്കേണ്ടതാണ്. ക്രിയകൾ ചെയ്യുമ്പോൾ **'BODMAS'**ന്റെ ഇടതു വശത്തു നിന്നും തുടങ്ങി വലതു വശത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങണം.

B - brackets, **O** - of, **D** - division, **M** - multiplication, **A** - addition, **S** - subtraction.

ഇവിടെ നമ്മൾ പഠിക്കാൻ പോകുന്നത് ഒരു ക്രിയയിലെ ഒന്നിലധികം ബ്രാക്കറ്റുകളും കൂടാതെ of നെയും കുറിച്ചാണ്.

ബ്രാക്കറ്റ്

ഗണിത ക്രിയകളെ ക്രമമായി സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനായി ഗ്രൂപ്പിംഗ് ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു. സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില ഗ്രൂപ്പിംഗ് ചിഹ്നങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഗ്രൂപ്പിംഗ് ചിഹ്നം	പേരുകൾ
——	ബാർബ്രാക്കറ്റ്
( )	ആവരണ ചിഹ്നം
{ }	പൂ ബ്രാക്കറ്റ് (വളയം)
[ ]	സമചതുര ബ്രാക്കറ്റ്

ക്രിയ -"of "

ചില സമയങ്ങളിൽ '3' ന്റെ രണ്ടിരട്ടി '20' ന്റെ നാലിലൊന്ന്. '10' ന്റെ പകുതി എന്നീ ക്രിയകളിൽ of അർത്ഥം വരുന്ന ഗുണന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി,

(i) '3' ന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ് 2×3,

(ii) 20 ന്റെ നാലിലൊന്ന് $\frac{1}{4} \times 20$,

(iii) '10' ന്റെ പകുതി $\frac{1}{2} \times 10$.

ഒരു ക്രിയയിൽ ഒരു കൂട്ടം ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വന്നാൽ, ആദ്യം ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിലുള്ള ക്രിയകൾ ആദ്യം ചെയ്യുകയും അതിനുശേഷം ബ്രാക്കറ്റിനു വെളിയിലുള്ള ക്രിയകൾ ചെയ്യുകയും വേണം.

ഉദാഹരണം 1.3

ചുരുക്കുക : $\left(1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15}$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\left(1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15} &= \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15} \\ &= \left(\frac{6}{3} \times \frac{8}{15}\right) \text{ [ബ്രാക്കറ്റിനു പ്രാധാന്യം]} \\ &= 2 \times \frac{8}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 1.4

ചുരുക്കുക : $5\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ *of* $\frac{8}{9}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}5\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \text{ of } \frac{8}{9} &= \frac{11}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \qquad \text{['of ' ന് പ്രാധാന്യം]} \\ &= \frac{11}{2} + \frac{24}{36} = \frac{11}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{33+4}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 1.5

ചുരുക്കുക : $\left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \left(\frac{2-1}{4}\right)\right] \text{[ആന്തര ബ്രാക്കറ്റിന് പ്രാധാന്യം]} \\ &= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \frac{1}{4}\right] \\ &= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \times 4\right] = \frac{-5}{12} + \frac{12}{5} \\ &= \frac{-25+144}{60} = \frac{119}{60} = 1\frac{59}{60}.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം *1.6*

ചുരുക്കുക : $\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\}$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{6}\right\}$$

$$= \frac{2}{7}-\left\{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right\}= \frac{2}{7}-\left\{\frac{9-20}{24}\right\}$$

$$= \frac{2}{7}-\left\{\frac{-11}{24}\right\} = \frac{2}{7}+\frac{11}{24}$$

$$= \frac{48+77}{168} = \frac{125}{168}.$$

അഭ്യാസം 1.3

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(i) $2\times\frac{5}{3}$ = ________

(A) $\frac{10}{3}$ (B) $2\frac{5}{6}$ (C) $\frac{10}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}$= ________

(A) $\frac{14}{20}$ (B) $\frac{8}{35}$ (C) $\frac{20}{14}$ (D) $\frac{35}{8}$

(iii) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}$ ________

(A) $\frac{10}{23}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{38}{45}$ (D) $\frac{6}{13}$

(iv) $\frac{1}{5}\div 2\frac{1}{2}$ ________

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{10}{7}$ (D) $\frac{3}{10}$

(v) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. **ചുരുക്കുക :**

(i) $\frac{11}{12}\div\left(\frac{5}{9}\times\frac{18}{25}\right)$

(ii) $\left(2\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}\right)\div\left(1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$

(iii) $\frac{15}{16}$ *of* $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{10}{11}$

(iv) $\frac{9}{8}\div\frac{3}{5}$ *of* $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}\div\left\{\frac{1}{5}\text{ of }\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right]-1\right\}$

(vi) $\left(1\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{7}\right)-\left(4\frac{3}{8}\div 5\frac{3}{5}\right)$

(vii) $\left(\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}\text{ of }1\frac{7}{11}\right)\div 1\frac{1}{6}$

(viii) $\left(\frac{-1}{3}\right)-\left\{1\div\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\right)+8-\left[5-\overline{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right]\right\}$

1.5 ഘാതങ്ങൾ: പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ ഘാതാങ്കങ്ങളാക്കികൊണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ഘാതാങ്കരൂപം ആവിഷ്ക്കരിക്കൽ

ഇവിടെ ഘാതാങ്കസംഖ്യകളെ എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാം എന്ന് പഠിക്കാം.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ എന്നതിൽ 2 എന്നത് ആധാരവും 4 എന്നത് ഘാതാങ്കവുമാകുന്നു.

n എന്നത് ഒരു നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യയും 'a' ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയുമാണെങ്കിൽ a^n എന്നതിന്റെ അർത്ഥം 'a' യ്ക്കു തുല്യമായ 'n' സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്നാണ്. 'a' എന്നത് ആധാരവും 'n' എന്നത് ഘാതാങ്കവുമാകുന്നു.

നിർവചനം

x^n എന്നതിൽ 'n' ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കമായാൽ $\underbrace{x.x.x.....x}_{n \text{ പ്രാവശ്യം}}$

i.e, $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times ..... \times x}_{n \text{ പ്രാവശ്യം}}$ (ഇവിടെ 'n'എന്നത് 1നെക്കാൾ വലുത്)

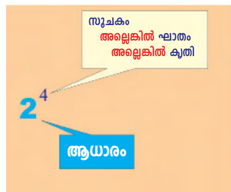
കുറിപ്പ് : $x^1 = x$.

എപ്രകാരം വായിക്കാം?

7^3 എന്നതിനെ 7 ന്റെ ഘാതം 3 എന്ന് വായിക്കാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ 7 നെ ആധാരമെന്നും 3 നെ ഘാതം എന്നും പറയുന്നു.

ഘാതാങ്കം (അല്ലെങ്കിൽ) **കൃത്യങ്കം**



തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിലെ ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് കുറച്ച് കൂടി വ്യക്തമാകുന്നു.

നമ്പർ	ആവർത്തന ഗുണനം	ഘാതാങ്ക രൂപം	ആധാരം	ഘാതാങ്കം അല്ലെങ്കിൽ കൃത്യങ്കം
1	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^4	2	4
2	$(-4) \times (-4) \times (-4)$	$(-4)^3$	-4	3
3	$\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\frac{2}{3}$	6
4	$a \times a \times a \times ...$ m പ്രാവശ്യം	a^m	a	m

ഉദാഹരണം 1.7

താഴെ തന്നവ 2 ന്റെ ഘാതങ്ങളാക്കി എഴുതുക.

(i) 2 (ii) 8 (iii) 32 (iv) 128 (v) 256

നിർദ്ധാരണം :

(i) $2 = 2^1$

(ii) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(iii) $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

(iv) $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$

(v) $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

1.6 പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഘാതാങ്ക നിയമങ്ങൾ

ഒരു സംഖ്യയുടെ ഗുണനഫലം ഒന്നിലധികം തവണ ആവർത്തിക്കുകയാണെങ്കിൽ എളുപ്പ വഴിയിൽ അതിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയും. ഇതിനെ ഘാതാങ്ക നിയമം എന്നുപറയുന്നു.

(i) ഗുണനനിയമം

നിയമം 1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$ ഇവിടെ 'a'വാസ്തവിക സംഖ്യ m, n എന്നത് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ

ഉദാഹരണം

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ (, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ എന്ന നിയമത്തിൽ നിന്ന് $a = \frac{2}{3}$, $m = 3$, $n = 4$)

(ii) ഹരണ നിയമം

നിയമം 2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,ഇവിടെ $a \neq 0$, m, n ഇവ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $m > n$

ഉദാഹരണം

$\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$ ($\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ എന്ന നിയമം ഉപയോഗിച്ച് a= 6, m=4, n=2)

(iii) ഘാത നിയമം

നിയമം 3	$(a^m)^n = a^{m \times n}$, ഇവിടെ m , n ഇവ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ

ഉദാഹരണം

$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$

രണ്ട് ഘാതങ്ങളെ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാലും ഇതേ ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നു.

i.e, $(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$.

ശ്രമിക്കുക

$a^{(x-y)z} \times a^{(y-z)x} \times a^{(z-x)y} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(iv) പൂജ്യം ഘാതാങ്കം

$m \neq o$,

$m^3 \div m^3 = m^{3-3} = m^0$ (നിയമം 2);

മറ്റൊരുരീതി :

$m^3 \div m^3 = \frac{m^3}{m^3} = \frac{m \times m \times m}{m \times m \times m} = 1$

ഈ രണ്ട് നിയമങ്ങളിൽ നിന്നും $m^3 \div m^3 = m^0 = 1$.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് **നാലാമത്തെ നിയമം** രൂപം കൊണ്ടു.

നിയമം 4	'a'എന്നത്''പൂജ്യം'' അല്ലാത്ത പരിമേയ സംഖ്യ ആണെങ്കിൽ $a^0 = 1$

ഉദാഹരണം

(i) $2^0 = 1$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ (iii) $25^0 = 1$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$ (v) $(-100)^0 = 1$

(v) വ്യുൽക്രമ നിയമം

ഋണ ഘാത സംഖ്യയുടെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം അതേ സംഖ്യയെ ധനഘാതാങ്കമായി മാറ്റുന്നു.

ഉദാഹരണം

(i) $4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{4\times4\times4\times4} = \frac{1}{256}$

(ii) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{125}$

(iii) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{100}$

3 ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം= $\frac{1}{3} = \frac{3^0}{3^1} = 3^{0-1} = 3^{-1}$.

അതുപോലെ 6^2 ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{6^2} = \frac{6^0}{6^2} = 6^{0-2} = 6^{-2}$

$\left(\frac{8}{3}\right)^3$ യുടെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം= $\frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^3} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}$.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് അഞ്ചാമത്തെ ഘാതാങ്കനിയമം രൂപപ്പെട്ടു.

നിയമം 5	'a' ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയും 'm' ഒരുപൂർണ്ണാങ്കവുമായാൽ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(vi) ഒരേ ഘാതം ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനം

ചുരുക്കുക.

(i) $4^3 \times 7^3 = (4\times4\times4)\times(7\times7\times7) = (4\times7)\times(4\times7)\times(4\times7)$
$= (4\times7)^3$

(ii) $5^{-3}\times4^{-3} = \frac{1}{5^3}\times\frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$
$= \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
$= \left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{20}\right)^3$
$= 20^{-3} = (5\times4)^{-3}$

(iii) $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)$
$= \left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)^2$

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ, a , b ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളായാൽ നമുക്ക്

$$a^2\times b^2 = (a\times b)^2 = (ab)^2$$

∴ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതിൽ നിന്നും നമ്മൾ ഘാതങ്ങളുടെ **ഗുണന നിയമത്തിൽ** എത്തിച്ചേരുന്നു.

$(a\times a\times a\times \ldots m$ പ്രാവശ്യം$)\times(b\times b\times b\times \ldots m$ പ്രാവശ്യം$) = ab\times ab\times ab\times \ldots m$ പ്രാവശ്യം$)$

$=(ab)^m$ (i.e.,) $a^m\times b^m = (ab)^m$

നിയമം 6	$a^m\times b^m = (ab)^m$, ഇവിടെ a, b വാസ്തവിക സംഖ്യ m പൂർണ്ണാങ്കം

ഉദാഹരണം

(i) $3^x \times 4^x = (3 \times 4)^x = 12^x$

(ii) $7^2 \times 2^2 = (7 \times 2)^2 = 14^2 = 196$

(vii) ഘാതങ്ങളുടെ ഹരണ നിയമം

ചുരുക്കുക

(i) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} = \frac{4^2}{3^2}$,

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3^2}{5^2}\right)} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

$= \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5^2}{3^2} = 5^2 \times \frac{1}{3^2} = 5^2 \times 3^{-2} = \frac{1}{5^{-2}} \times 3^{-2}$

$= \frac{3^{-2}}{5^{-2}}$.

അതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ എന്നതിനെ $\frac{a^2}{b^2}$ എന്നെഴുതാം.

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times ....m \text{ പ്രാവശ്യം}\right) = \frac{a \times a \times a.....m \text{ പ്രാവശ്യം}}{b \times b \times b \times ....m \text{ പ്രാവശ്യം}}$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

നിയമം 7	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ഇവിടെ $b \neq 0$, a , b വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ, m പൂർണ്ണാങ്കം

ഉദാഹരണം

(i) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7}$ (ii) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$

(iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}$

ഉദാഹരണം 1.8

ലഘൂകരിക്കുക (i) $2^5 \times 2^3$ (ii) $10^9 \div 10^6$ (iii) $(x^0)^4$ (iv) $(2^3)^0$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (vi) $(2^5)^2$ (vii) $(2 \times 3)^4$

(viii) $2^p = 32$, ആയാൽ p യുടെ മൂല്യം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

(ii) $10^9 \div 10^6 = 10^{9-6} = 10^3$

(iii) $(x^0)^4 = (1)^4 = 1 \quad [\because a^0 = 1]$

(iv) $(2^3)^0 = 8^0 = 1 \qquad [\because a^0 = 1]$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$

(vi) $(2^5)^2 = 2^{5\times 2} = 2^{10} = 1024$

(vii) $(2\times 3)^4 = 6^4 = 1296$

(അല്ലെങ്കിൽ) $(2\times 3)^4 = 2^4\times 3^4 = 16\times 81 = 1296$

(viii) തന്നിട്ടുള്ളത് : $2^p = 32$

$2^p = 2^5$

$\therefore \quad p = 5$ (രണ്ടു വശത്തും ആധാരം തുല്യം)

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ഉദാഹരണം 1.9

താഴെ തന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $3^4\times 3^{-3}$ (ii) $\frac{1}{3^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) 10^{-3} (v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0\times 3$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$ (viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5\times\left(\frac{3}{8}\right)^4\div\left(\frac{3}{8}\right)^9$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $3^4\times 3^{-3} = 3^{4+(-3)} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

(ii) $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

(iv) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

(v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0\times 3 = 1\times 3 = 3 \qquad \left[\because \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1\right]$

(vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

(viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5\times\left(\frac{3}{8}\right)^4\div\left(\frac{3}{8}\right)^9 = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{5+4}}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^9}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = 1$

(അല്ലെങ്കിൽ) $\left(\frac{3}{8}\right)^{9-9} = \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

ഉദാഹരണം 1.10

16^{-2} നെ 4 ആധാര സംഖ്യയാക്കി മാറ്റുക.

നിർദ്ധാരണം :

നമുക്കറിയാം $16 = 4^2$

$$\therefore 16^{-2} = (4^2)^{-2}$$

$$= 4^{2\times -2}$$

$$= 4^{-4}$$

ഉദാഹരണം 1.11

ലഘൂകരിക്കുക.

(i) $(2^3)^{-2} \times (3^2)^2$ (ii) $\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2}$

നിർദ്ധാരണം :

(i)
$$(2^3)^{-2} \times (3^2)^2 = 2^{(3\times -2)} \times 3^{(2\times 2)}$$
$$= 2^{-6} \times 3^4 = \frac{1}{2^6} \times 3^4 = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$$

(ii)
$$\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2} = \frac{2^{2\times 3}}{3^{2\times 2}} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}.$$

ഉദാഹരണം 1.12

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

(i) $12^x = 144$ (ii) $\left(\frac{2}{8}\right)^{2x} \times \left(\frac{2}{8}\right)^x = \left(\frac{2}{8}\right)^6$

നിർദ്ധാരണം :

(i) തന്നിട്ടുള്ളത് $12^x = 144$

$$12^x = 12^2$$
$$\therefore x = 2$$ (∵ രണ്ടു വശത്തും ആധാരം സമം)

(ii)
$$\left(\frac{2}{8}\right)^{2x} \times \left(\frac{2}{8}\right)^x = \left(\frac{2}{8}\right)^6$$
$$\left(\frac{2}{8}\right)^{2x+x} = \left(\frac{2}{8}\right)^6$$ (∵ രണ്ടു വശത്തും ആധാരം സമം)
$$2x + x = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2.$$

ഉദാഹരണം 1.13

ലഘൂകരിക്കുക : $\frac{(3^3)^{-2} \times (2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2} \times 3^{-4} \times 4^{-2}}$

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{(3^3)^{-2} \times (2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2} \times 3^{-4} \times 4^{-2}} = \frac{3^{-6} \times 2^{-6}}{2^{-8} \times 3^{-4} \times 4^{-2}}$$
$$= 3^{-6+4} \times 2^{-6+8} \times 4^2$$
$$= 3^{-2} \times 2^2 \times 4^2$$
$$= \frac{1}{3^2} \times 4 \times 16 = \frac{4 \times 16}{9}$$
$$= \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$$

അഭ്യാസം 1.4

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(i) $a^m \times a^n =$

(A) $a^m + a^n$ (B) a^{m-n} (C) a^{m+n} (D) a^{mn}

(ii) $p^0 =$

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) p

(iii) 10^2 ന്റെ ഘാതം

(A) 2 (B) 1 (C) 10 (D) 100

(iv) $6^{-1} =$

(A) 6 (B) – 1 (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

(v) 2^{-4} ന്റെ ഗുണന വ്യുൽക്രമം

(A) 2 (B) 4 (C) 2^4 (D) – 4

(vi) $(-2)^{-5} \times (-2)^6 =$

(A) – 2 (B) 2 (C) – 5 (D) 6

(vii) $(-2)^{-2} =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{-1}{4}$

(viii) $(2^0 + 4^{-1}) \times 2^2 =$

(A) 2 (B) 5 (C) 4 (D) 3

(ix) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} =$

(A) 3 (B) 3^4 (C) 1 (D) 3^{-4}

(x) $(-1)^{50} =$

(A) –1 (B) 50 (C) – 50 (D) 1

2. ലഘൂകരിക്കുക

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$ (v) $(3^{-7} \div 3^{10}) \times 3^{-5}$ (vi) $\frac{2^6 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^7}{2^8 \times 3^6}$

(vii) $y^{a-b} \times y^{b-c} \times y^{c-a}$ (viii) $(4p)^3 \times (2p)^2 \times p^4$ (ix) $9^{5/2} - 3 \times 5^0 - \left(\frac{1}{81}\right)^{-1/2}$

(x) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 3 \times 8^{2/3} \times 4^0 + \left(\frac{9}{16}\right)^{-1/2}$

3. മൂല്യം കാണുക

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^2$ (vi) $7^{-20} - 7^{-21}$.

4. m ന്റെ മൂല്യം കാണുക

(i) $5^m \div 5^{-3} = 5^5$ (ii) $4^m = 64$ (iii) $8^{m-3} = 1$

(iv) $(a^3)^m = a^9$ (v) $(5^m)^2 \times (25)^3 \times 125^2 = 1$ (vi) $2m = (8)^{\frac{1}{3}} \div (2^3)^{2/3}$

5. (a) $2^x = 16$ എങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) x (ii) $2^{\frac{x}{2}}$ (iii) 2^{2x} (iv) 2^{x+2} (v) $\sqrt{2^{-x}}$

(b) $3^x = 81$ എങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) x (ii) 3^{x+3} (iii) $3^{x/2}$ (iv) 3^{2x} (v) 3^{x-6}

6. തെളിയിക്കുക (i) $\frac{3^{x+1}}{3^{x(x+1)}} \times \left(\frac{3^x}{3}\right)^{x+1} = 1$, (ii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} . \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} . \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m} = 1$

1.7 വർഗ്ഗങ്ങൾ, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനങ്ങൾ, ഘനമൂലം

1.7.1 വർഗ്ഗങ്ങൾ

ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലത്തെ ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ ഘാതം 2 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : (i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $5 \times 5 = 5^2 = 25$.

ഉദാഹരണം (ii) 5^2 നെ വായിക്കുന്നത് 5 ന്റെ ഘാതം 2 എന്നാണ്. (അല്ലെങ്കിൽ) 5 ന്റെ വർഗ്ഗം ഇവിടെ 25 നെ 5 ന്റെ വർഗ്ഗമെന്ന് പറയുന്നു.

അതുപോലെ 49 നെ 7 ന്റെ വർഗ്ഗമെന്നും 81 നെ 9 ന്റെ വർഗ്ഗമെന്നും പറയുന്നു.

ഈ പാഠത്തിൽ ചില വർഗ്ഗസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

പൂർണ്ണവർഗ്ഗം

1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$ ഇവയെ **പൂർണ്ണ വർഗ്ഗം അല്ലെങ്കിൽ വർഗ്ഗസംഖ്യ** എന്നുപറയുന്നു.
$1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തെ ആ സംഖ്യയുടെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമെന്നു പറയുന്നു.

വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ

നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗുണങ്ങളിൽ നിന്ന് മാതൃകാവർഗ്ഗ സംഖ്യകളെ നിരീക്ഷിക്കാം.

1. ഒന്നാം സ്ഥാനത്ത് 0, 1, 4, 5, 6 , 9. എന്നിവയിൽ അവസാനിക്കുന്ന വർഗ്ഗസംഖ്യകൾ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗവും 2, 3, 7, 8 എന്നിവയിൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ പൂർണ്ണവർഗ്ഗം അല്ലാത്തവയും ആകുന്നു.

2. i)

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
1	1
9	81
11	121

ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 1 , 9 എന്നീ സംഖ്യക ളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗ്ഗം അവസാനി ക്കുന്നത് 1 ൽ ആയിരിക്കും.

ii)

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
2	4
8	64
12	144

ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 2 , 8 എന്നീ സംഖ്യക ളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗ്ഗം അവസാനി ക്കുന്നത് 4 ൽ ആയിരിക്കും.

iii)

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
3	9
7	49
13	169

ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 3, 7 എന്നീ സംഖ്യക ളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗ്ഗം അവസാനി ക്കുന്നത് 9 ൽ ആയിരിക്കും.

iv)

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
4	16
6	36
14	196

ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 4,6 എന്നീ സംഖ്യക ളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗ്ഗം അവസാനി ക്കുന്നത് 6 ൽ ആയിരിക്കും.

v)

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
5	25
15	225
25	625

ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 5 എന്നീ സംഖ്യക ളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗ്ഗം അവസാനി ക്കുന്നത് 5 ൽ ആയിരിക്കും.

3. **വർഗ്ഗ സംഖ്യകളെ പരിഗണിക്കുക.**

ഒരു പൂജ്യം

$$\begin{Bmatrix} 10^2 = 100 \\ 20^2 = 400 \\ 30^2 = 900 \end{Bmatrix}$$

രണ്ട് പൂജ്യങ്ങൾ

രണ്ട് പൂജ്യങ്ങൾ

$$\begin{Bmatrix} 100^2 = 10000 \\ 200^2 = 40000 \\ 700^2 = 490000 \end{Bmatrix}$$

നാല് പൂജ്യങ്ങൾ

ഫലം

(i) ഒരു പൂജ്യത്തിൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം രണ്ട് പൂജ്യത്തിൽ അവസാനിക്കുന്നു.

(ii) പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയിൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ പൂർണ്ണവർഗ്ഗം അല്ല.

4. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുളളവ പരിഗണിക്കുക.

(i) $100 = 10^2$

↑ (പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യ)

$\therefore$ 100 ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം

(ii) $81,000 = 81 \times 100 \times 10$

↑ (പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യ)

$= 9^2 \times 10^2 \times 10$

$\therefore$ 81,000 പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല.

5. പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക

ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
⋮	⋮

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം

സംഖ്യ	വർഗ്ഗം
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
⋮	⋮

മുകളിലുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും ഒരു നിഗമനത്തിലെത്താം.

ഫലം

(i) ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം ഇരട്ടസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

(ii) ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം ഒറ്റസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം *1.14*

ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണ വർഗ്ഗസംഖ്യകൾ കാണുക?

(i) 10 നും 20 (ii) 50 നും 60 (iii) 80 നും 90.

നിർദ്ധാരണം :

(i) 10 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണവർഗ്ഗസംഖ്യ 16.

(ii) 50 നും 60 ഇടയിൽ പൂർണ്ണവർഗ്ഗസംഖ്യ ഇല്ല.

(iii) 80 നും 90 നും ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണ വർഗ്ഗസംഖ്യ 81.

ഉദാഹരണം *1.15*

3136, 867 കൂടാതെ 4413 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം നിരീക്ഷിച്ചിട്ട് ഏതൊക്കെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല എന്ന് കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

3136 ൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 6 ഉള്ളതുകൊണ്ട് പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. 867, 4413 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് 7 , 3 ആയതുകൊണ്ട് തീർച്ചയായും പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല.

ഉദാഹരണം *1.16*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളിൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം എഴുതുക.

(i) 24 (ii) 78 (iii) 35

നിർദ്ധാരണം :

(i) 24 ന്റെ വർഗ്ഗം $= 24 \times 24$ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 4

$\therefore\ 4\times4 = 16.$ $\therefore$ 24 ന്റെ വർഗ്ഗ സംഖ്യയിൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 6

(ii) 78 ന്റെ വർഗ്ഗം $= 78 \times 78$ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 8

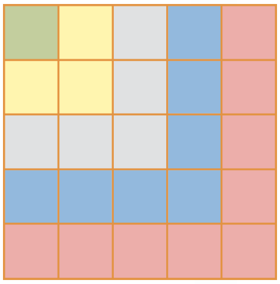
$\therefore 8 \times 8 = 64$. $\therefore$ 78 ന്റെ വർഗ്ഗ സംഖ്യയിൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 4

(iii) 35 ന്റെ വർഗ്ഗം $= 35 \times 35$ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 5

$\therefore 5 \times 5 = 25$. $\therefore$ 35 ന്റെ വർഗ്ഗ സംഖ്യയിൽ ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനം 5

ചില വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ രസകരമായ മാതൃക

അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം



$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n = n^2$ (ആദ്യത്തെ 'n' ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക)

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് ഇത് മനസ്സിലാക്കാം.

പരിമേയ സംഖ്യ $\frac{a}{b}$ യുടെ വർഗ്ഗം കാണൽ

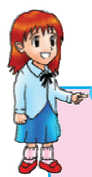
$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\text{അംശത്തിന്റെ വർഗ്ഗം}}{\text{ഛേദത്തിന്റെ വർഗ്ഗം}}$$

ഉദാഹരണം

(i) $\left(\frac{-3}{7}\right) \times \left(\frac{-3}{7}\right) = \left(\frac{-3}{7}\right)^2$

$$= \frac{(-3) \times (-3)}{7 \times 7} = \frac{9}{49}$$

(ii) $\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

(i) $45^2 = 2025 = (20+25)^2$

(ii) $55^2 = 3025 = (30 + 25)^2$

$\therefore$45, 55 എന്നിവ കാപ്രിക്കർ സംഖ്യകളാണ്.

അഭ്യാസം 1.5

1. ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ അക്കങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ അല്ല എന്ന് പ്രസ്ഥാവിക്കുക.

   (i) 3136 (ii) 3722 (iii) 9348 (iv) 2304 (v) 8343

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ നിന്ന് ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ അക്കങ്ങൾ എഴുതുക.

   (i) 78^2 (ii) 27^2 (iii) 41^2 (iv)35^2 (v) 42^2

3. പൂർണ്ണമായും സങ്കലനക്രിയ ചെയ്യാതെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ തുക കാണുക.

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

4. 1 ൽ തുടങ്ങുന്ന അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയായി താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ എഴുതുക.

   (i) 7^2 (ii) 9^2 (iii) 5^2 (iv) 11^2

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ കാണുക?

   (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) $\frac{31}{40}$

6. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക?

   (i) $(-3)^2$ (ii) $(-7)^2$ (iii) $(-0.3)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ (vi) $(-0.6)^2$

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതി ഉപയോഗിച്ച് വിട്ടുപോയവ പൂരിപ്പിക്കുക.

   a) $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$,

   $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

   $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

   $4^2 + 5^2 + ___ = 21^2$

   $5^2 + ___ + 30^2 = 31^2$

   $6^2 + 7^2 + ___ = ___$

   b) $11^2 = 121$

   $101^2 = 10201$

   $1001^2 = 1002001$

   $100001^2 = 1____2____1$

   $10000001^2 = __________$

1.7.2 വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ

നിർവ്വചനം

ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലം ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആകുന്നു. സംഖ്യ **വർഗ്ഗമൂലം** എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $(-3) \times (-3) = (-3)^2 = 9$

ഇവിടെ 3 ഉം (-3) ഉം 9 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലമാകുന്നു.

വർഗ്ഗമൂലം കുറിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന ചിഹ്നം $\sqrt{}$ ആകുന്നു.

$\therefore \sqrt{9} = \pm 3$ (plus അല്ലെങ്കിൽ minus 3 എന്ന് വായിക്കണം)

ധനമൂലം മാത്രം കണക്കിലെടുത്താൽ, $\sqrt{9} = 3$

കുറിപ്പ് : x ന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ $\sqrt{x}$ എന്നോ $x^{\frac{1}{2}}$ എന്നോ എഴുതാം

അതുകൊണ്ട് $\sqrt{4} = (4)^{\frac{1}{2}}$ കൂടാതെ $\sqrt{100} = (100)^{\frac{1}{2}}$

ഈ ഭാഗത്തിൽ നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ധനവർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ മാത്രം എടുത്തിരിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക.

പട്ടിക 1

പൂർണ്ണവർഗ്ഗം	വർഗ്ഗമൂലം
1 16 36 81	1 4 6 9
100 225 2025 7396 9801	10 15 45 86 99
10,000 14,641 2,97,025 9,98,001	100 121 545 999
10,00,000 15,00,625 7,89,96,544 999,80,001	1000 1225 8888 9999

ഒന്നോ രണ്ടോ അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ ഒരക്കം ഉണ്ടായിരിക്കും.

മൂന്നോ നാലോ അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 2 അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

അഞ്ചോ ആറോ അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 3 അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഏഴോ എട്ടോ അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 4 അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

പട്ടികയിൽ നിന്ന് നമുക്ക് താഴെതന്നവ അറിയാൻ സാധിക്കും.

(i) ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗത്തിൽ 'n' അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും 'n' ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ $\frac{n}{2}$ അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

(ii) ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗത്തിൽ 'n' അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും n ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ $\frac{n+1}{2}$ അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിന് താഴെതന്നിട്ടുള്ള രീതികൾ ഉപയോഗിക്കാം.

(i) ഘടക രീതി
(ii) ദീർഘ ഹരണ രീതി

(i) ഘടകരീതി

ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിന് ആ സംഖ്യയുടെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങൾ കാണുക. അവയെ ജോടികളായി വിഭജിക്കുക.

ഉദാഹരണം *1.17*

64 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

$$64 = \underbrace{2\times 2}\times\underbrace{2\times 2}\times\underbrace{2\times 2} = 2^2\times 2^2\times 2^2$$

$$\sqrt{64} = \sqrt{2^2\times 2^2\times 2^2} = 2\times 2\times 2 = 8$$

$$\sqrt{64} = 8$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ഉദാഹരണം 1.18

169 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

$$169 = \underbrace{13 \times 13} = 13^2$$

$$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

13	169
13	13
	1

ഉദാഹരണം 1.19

12.25 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt{12.25} = \sqrt{\frac{12.25 \times 100}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{5^2 \times 7^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5 \times 7}{10}$$

$$\sqrt{12.25} = \frac{35}{10} = 3.5$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

5	1225
5	225
7	49
7	7
	1

ഉദാഹരണം 1.20

5929 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$5929 = \underbrace{7 \times 7} \times \underbrace{11 \times 11} = 7^2 \times 11^2$$

$$\sqrt{5929} = \sqrt{7^2 \times 11^2} = 7 \times 11$$

$$\therefore \sqrt{5929} = 77$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

7	5929
7	847
11	121
11	11
	1

ഉദാഹരണം 1.21

ഏത് ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലാണ് 200 ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം

$$200 = 2 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{5 \times 5}$$

'2' ന് ജോടി ഇല്ല.

അതുകൊണ്ട് 200 നെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാകും

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

ഉദാഹരണം 1.22

ഏത് ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴാണ് 384 പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം

$$384 = 3 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times 2$$

'3' നും '2' നും ജോടികളില്ല.

അതിനാൽ 384 നെ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകും.

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

3	384
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(ii) ദീർഘ ഹരണരീതി

ചില സമയങ്ങളിൽ വലിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം ഘടകരീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് അത്ര ലഘുവല്ല. അതിനാൽ മറ്റൊരു രീതിയായ **ദീർഘ ഹരണ രീതി** ഉപയോഗിക്കാം.

ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ദശാംശസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും. ഈ രീതി താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ വഴി വിശദമാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണം *1.23*

529 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം ദീർഘ ഹരണരീതിയിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

വഴി 1 : 529 നെ $5\ \overline{29}$ എന്ന് വലത്തേ അറ്റത്തുനിന്നും ജോടികളായി പിരിക്കുക. (i.e. ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തു നിന്നും)

വഴി 2 : 5 ൽ ഉള്ളടങ്ങിയിട്ടുള്ള വർഗ്ഗസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. ഇവിടെ ആ സംഖ്യ 2 ആകുന്നു.

വഴി 3 : '2' നെ ഹാരകമായും, ഹരണഫലം ആയും എഴുതുക.

$$2\,\big|\ 5\ \overline{29}$$

വഴി 4 : ഹരണഫലം 2 ഉം ഹാരകമായ 2 ഉം ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലം 4 നെ 5 ന് താഴെ എഴുതി കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം 1 ആകുന്നു.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

വഴി 5 : ജോടി 29 നെ കീഴെ 1 ന്റെ വലതുവശത്തേക്ക് കൊണ്ട് വരിക. ഫലമായി 129 കിട്ടുന്നു.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline & 1\ 29 \end{array}$$

വഴി 6 : 2 ന്റെ ഇരട്ടി കാണുക 4 കിട്ടുന്നു. $4n \times n$ ന്റെ മൂല്യം 129 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കുറവ് വരത്തക്കവിധം കാണുക.

ഉദാഹരണമായി $42 \times 2 = 84$; $43 \times 3 = 129$

അതിനാൽ $n = 3$.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 3 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline 43 & 1\ 29 \\ & 1\ 29 \\ \hline & \ \ \ 0 \end{array}$$

വഴി 7 : 43 നെ അടുത്ത ഹാരകമായിട്ടും 3 നെ മുകളിൽ 2ന്റെ അരികിലായും എഴുതുക. ഗുണനഫലം $43 \times 3 = 129$ നെ 129 നു കീഴെ എഴുതി കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം '0' കിട്ടുന്നു. ഹരണം പൂർത്തിയായി.

അതിനാൽ $\sqrt{529} = 23$.

ഉദാഹരണം *1.24*

$\sqrt{3969}$ ന്റെ മൂല്യം ദീർഘഹരണ രീതിയിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

വഴി 1 : 3969 നെ $\overline{39}\ \overline{69}$ എന്ന രീതിയിൽ വലത്തേയറ്റത്തു നിന്നും രണ്ടുജോടികളാക്കുക.

വഴി 2 : 39 ൽ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. ആ സംഖ്യ 6 ആകുന്നു.

വഴി 3 : 6 നെ ഹാരകമായും ഹരണഫലം ആയും എഴുതുക.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \overline{69} \end{array}$$

വഴി 4 : 6 നെ 6കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഗുണനഫലം 36 നെ 39 ന് കീഴെ എഴുതി കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്നു.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \overline{69} \\ & 36 \\ \hline & \ 3 \end{array}$$

വഴി 5 : അടുത്തജോടിയായ 69 നെ 3 ന് അരികിലേക്ക് കൊണ്ടുവരിക. ഫലമായി 369 കിട്ടുന്നു.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \overline{69} \\ & 36\ \downarrow \\ \hline & \ 3\ 69 \end{array}$$

വഴി 6 : 6 നെ ഇരട്ടിയാക്കുക. 12 കിട്ടുന്നു. $12n \times n$ ന്റെ മൂല്യം 369 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കുറവ് വരത്തക്കവിധം കാണുക.

$122 \times 2 = 244; 123 \times 3 = 369$ ആയതിനാൽ $n = 3$

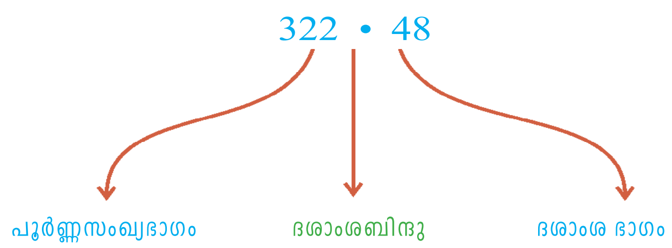
$$\begin{array}{r|l} & 6\ \ 3 \\ \hline 6 & \overline{39}\ \overline{69} \\ & 36\ \downarrow \\ \hline 123 & \ 3\ 69 \\ & \ 3\ 69 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

വഴി 7 : 123 നെ അടുത്ത ഹാരകമായും 3 നെ മുകളിൽ 6 ന് സമീപമായും എഴുതുക. ഗുണനഫലം $123 \times 3 = 369$ നെ 369 ന് കീഴിൽ എഴുതി കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം '0' കിട്ടുന്ന ഹരണം പൂർത്തിയാകുന്നു. അതിനാൽ $\sqrt{3969} = 63$.

1.7.2 (a) ദശാംശ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം

ദീർഘ ഹരണരീതി പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയുടെ പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗത്തെ പതിവു രീതിയിൽ ജോടികളാക്കുക. ദശാംശഭാഗത്തെ ദശാംശ ബിന്ദുവിന്റെ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തോട്ട് എന്ന ക്രമത്തിൽ ജോടികളാക്കുക.

ഉദാഹരണമായി, 322.48 എന്ന സംഖ്യയെ നാം ഇങ്ങനെ എഴുതുന്നു.



വർഗ്ഗമൂലത്തിന് ദശാംശബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന് നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇതിനായി, ഒന്നോ, രണ്ടോ അക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ ഒരക്കം ഉണ്ടാവും എന്നിങ്ങനെയുള്ളവ നാം ശ്രദ്ധിക്കുക (പട്ടിക 1 പരിശോധിക്കുക). താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ വിവരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.25

6.0516 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

സംഖ്യയെ $6\,.\,\overline{05}\,\overline{16}$ എന്നെഴുതുക. പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗത്തുള്ള സംഖ്യയ്ക്ക് ഒരക്കം മാത്രമുള്ളതിനാൽ പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിലും ഒരക്കം മാത്രമേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ. 60516 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്ന പതിവുരീതി തന്നെ അനുകരിക്കുക.

```
        2. 4  6
     2 | 6.05 16
       | 4
    44 | 2 05
       | 1 76
   486 |   29 16
       |   29 16
       |       0
```

തന്നിട്ടുള്ള ക്രിയയിൽ നിന്ന് $\sqrt{6.0516} = 2.46$.

ഉദാഹരണം 1.26

3250 ൽ നിന്ന് ഏത് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചാലാണ് അതൊരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം :

```
        5  7
     5 | 32 50
       | 25
   107 |  7 50
       |  7 49
       |     1
```

ഇത് കാണിക്കുന്നത് 57^2 ന്റെ മൂല്യം 3250 ൽ നിന്ന് 1 കുറയ്ക്കുമ്പോഴാണ് കിട്ടുന്നത് എന്നാണ്. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ 1 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.27

1825 നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് അതൊരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം :

```
       4  2
    4 | 18 25
      | 16
   82 |  2 25
      |  1 64
      |    61
```

ഇത് കാണിക്കുന്നത് $42^2 < 1825$.

അടുത്ത പൂർണ്ണവർഗ്ഗം $43^2 = 1849$.

അതിനാൽ കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ $43^2 - 1825 = 1849 - 1825$

$= 24$.

ഉദാഹരണം 1.28

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\sqrt{0.182329}$

നിർദ്ധാരണം

	0.4 2 7
4	0.$\overline{18}$ $\overline{23}$ $\overline{29}$
	16
82	2 23
	1 64
847	59 29
	59 29
	0

0.182329 നെ 0.$\overline{18}$ $\overline{23}$ $\overline{29}$ എന്നെഴുതുക. സംഖ്യയ്ക്ക് പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗമില്ലാത്തതിനാൽ വർഗ്ഗമൂലത്തിനും പൂർണ്ണ സംഖ്യാ ഭാഗമില്ല. 182329 ന്റെ വർഗ്ഗ മൂലം കാണുന്ന രീതി പിൻതുടരുക.

അതിനാൽ $\sqrt{0.182329} = 0.427$

കുറിപ്പ് : റാഡിക്കിന്റെ പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗത്ത് '0' ആയതിനാൽ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ പൂർണ്ണ സംഖ്യാഭാഗവും '0' ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 1.29

121.4404 ന്റെ വർഗ്ഗ മൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

	1 1 . 0 2
1	1 $\overline{21}$. $\overline{44}$ $\overline{04}$
	1
21	0 21
	21
2202	0 44 04
	44 04
	0

$\sqrt{121.4404} = 11.02$

ഉദാഹരണം 1.30

0.005184 ന്റെ വർഗ്ഗ മൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

$\sqrt{0.005184} = 0.072$

	0. 0 7 2
7	0. $\overline{00}$ $\overline{51}$ $\overline{84}$
	49
142	2 84
	2 84
	0

കുറിപ്പ് : റാഡിക്കിന്റെ പൂർണ്ണസംഖ്യാ ഭാഗത്ത് '0', ഒരു പൂജ്യമായതിനാൽ ഹരണഫലത്തിൽ ദശാംശ ബിന്ദുവിന് മുൻപ് '0' എഴുതുക. ദശാംശബിന്ദു കഴിഞ്ഞ് ഇടതുഭാഗത്ത് 00 ആയതിനാൽ ഹരണഫലത്തിൽ ദശാംശബിന്ദു കഴിഞ്ഞ് ഒരു '0'എഴുതുക.

1.7.2 (b) അപൂർണ്ണ വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയെ അപൂർണ്ണ വർഗ്ഗം എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി 2, 3, 5, 7, 13,... എന്നിവ അപൂർണ്ണ വർഗ്ഗങ്ങളാണ്. അങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിന് ദീർഘ ഹരണരീതി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ആവശ്യമായ വർഗ്ഗമൂലത്തിന് 'n' ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ $n+1$ വരെയുള്ള ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചശേഷം 'n' സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമാക്കുക. ആവശ്യാനുസരണം പൂജ്യങ്ങൾ ചേർത്ത് റാഡിക്കിന്റെ ദശാംശ ഭാഗത്ത് ഉൾപ്പെടുത്തുക.

ഗണിതം

ഉദാഹരണം *1.31*

3 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം **:**

	1. 7 3 2
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
27	2 00
	1 89
343	11 00
	10 29
3462	71 00
	69 24
	1 76

രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണേണ്ടതിനാൽ ആദ്യം മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. അതിനായി 6 പൂജ്യങ്ങൾ (3 ജോടി) ദശാംശ ബിന്ദുവിന്റെ വലതുവശത്ത് ചേർക്കുക.

$\therefore \sqrt{3} = 1.732$ മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക്

$\sqrt{3} = 1.73$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായ്

ഉദാഹരണം *1.32*

$10\frac{2}{3}$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം **:**

$10\frac{2}{3} = \frac{32}{3} = 10.66\ 66\ 66$ ....

വർഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണേണ്ടതിനാൽ മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ വർഗ്ഗമൂലം കാണണം. അതിനാൽ $\frac{2}{3}$ നെ 6 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി മാറ്റണം.

	3. 2 6 5
3	10. $\overline{66}$ $\overline{66}$ $\overline{67}$
	9
62	1 66
	1 24
646	42 66
	38 76
6525	3 90 67
	3 26 25
	64 42

$\sqrt{10\frac{2}{3}} = 3.265$ (ഏകദേശം)

$=3.27$(രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമാക്കിയാൽ)

അഭ്യാസം 1.6

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

   (i) $3 \times 3 \times 4 \times 4$ (ii) $2 \times 2 \times 5 \times 5$

   (iii) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (iv) $5 \times 5 \times 11 \times 11 \times 7 \times 7$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

   (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 49 (iv) 16

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം ദീർഘ ഹരണ രീതിയിൽ കാണുക.

   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529 (v) 3249

   (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921 (ix) 576 (x) 3136

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം അഭാജ്യഘടകമാക്കൽ രീതിയിൽ കാണുക.

   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096 (v) 7744

   (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216 (ix) 529 (x) 8100

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദശാംശ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25 (v) 31.36

   (vi) 0.2916 (vii) 11.56 (viii) 0.001849

6. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും ഏത് ചെറിയസംഖ്യ കുറയ്ക്കുമ്പോഴാണ് ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം കിട്ടുന്നത്.

   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825 (v) 4000

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിനോടും നിന്നും ഏത് ചെറിയസംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം കിട്ടുന്നത്.

   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825 (v) 6412

8. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുക.

   (i) 2 (ii) 5 (iii) 0.016 (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $1\frac{1}{12}$

9. 441 m^2 വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

10. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

   (i) $\frac{225}{3136}$ (ii) $\frac{2116}{3481}$ (iii) $\frac{529}{1764}$ (iv) $\frac{7921}{5776}$

1.7.3 ഘനങ്ങൾ

ആമുഖം

ശ്രീനിവാസ രാമാനുജൻ
(1887 -1920)

മഹാനായ ഗണിത പ്രതിഭ എസ്. രാമാനുജനെ കുറിച്ചുള്ള ഒരു സംഭവമാണ് ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഒരിക്കൽ (പ്രൊഫ. ജി.എച്ച്. ഹാഡി) 1729 എന്ന നമ്പറുള്ള തന്റെ കാറിൽ അദ്ദേഹത്തെ സന്ദർശിക്കാനെത്തി. രാമാനുജനോട് സംസാരിക്കുന്ന കൂട്ടത്തിൽ 1729 നെ ഒരു മോശമായ സംഖ്യയായി ഹാഡി വിശേഷിപ്പിച്ചു. രാമാനുജൻ ഉടൻതന്നെ 1729 വളരെ രസകരമായ ഒരു സംഖ്യയാണെന്ന് ചൂണ്ടിക്കാട്ടി. 2 ജോടി സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുകയായി 2 രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യയാണെന്ന് അദ്ദേഹം പറഞ്ഞു.

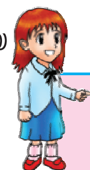
ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ രാമാനുജൻ സംഖ്യാ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപുലമായ കണ്ടുപിടിത്തം ലോകത്തിന് സമ്മാനിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ചുരുങ്ങിയ ജീവിത കാലയളവിൽ സ്വന്തമായ ഏകദേശം 3900 ഗണിത പ്രശ്നോത്തരങ്ങൾ സമാഹരിച്ചു.

ie., $1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$

കൂടാതെ $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

1729 രാമാനുജൻ സംഖ്യ എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഘനങ്ങളേയും ഘനമൂലങ്ങളേയും സംബന്ധിച്ച രസകരങ്ങളായ മറ്റു പല വസ്തുതകളും ഉണ്ട്.



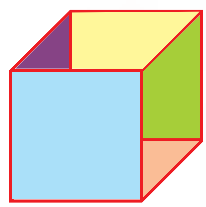
നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

രാമാനുജ സംഖ്യകളിൽ 1729 ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ ആകുന്നു. ഇത്തരം ധാരാളം സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. അവയിൽ ചിലവ 4104 (2, 16 ; 9, 15), 13832 (18, 20 ; 2, 24).

സമചതുര ഘനിക

'സമചതുരഘനിക' എന്ന വാക്ക് ജ്യാമിതിയിലാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്ന് നമുക്കറിയാം. എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യമായ ഘനരൂപമാണ് സമചതുരഘനിക.

അടുത്തുള്ള ചിത്രത്തിലെ സമചതുരഘനികയുടെ ഓരോവശവും 'a' മാത്രകൾ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം $a \times a \times a = a^3$ ഘനമാത്രകൾ ആകുന്നു.



ഇവിടെ a^3 നെ **"a cubed"** അല്ലെങ്കിൽ **"a യുടെ ഘാതം 3"** അല്ലെങ്കിൽ **"a to the power 3"** എന്നു പറയുന്നു.

ഇപ്പോൾ $1, 8, 27, 64, 125, \cdots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുക.

ഈ സംഖ്യകൾ **പൂർണ്ണമായ ഘനങ്ങൾ** അല്ലെങ്കിൽ **ഘന സംഖ്യകൾ** എന്ന് വിളിയ്ക്കപ്പെടുന്നു.

ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് മൂന്നുപ്രാവശ്യം ഗുണിക്കുമ്പോഴാണ് ഓരോ ഘനസംഖ്യകളും കിട്ടുന്നത്.

ഇത് നോക്കുക. $1 \times 1 \times 1 = 1^3$, $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $3 \times 3 \times 3 = 3^3$, $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

ഉദാഹരണം *1.33*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) 15^3 (ii) $(-4)^3$ (iii) $(1.2)^3$ (iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3$

നിർദ്ധാരണം

(i) $15^3 = 15 \times 15 \times 15 = 3375$

(ii) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

(iii) $(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2 = 1.728$

(iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{4\times 4\times 4} = \frac{-27}{64}$

ചോദ്യം (ii) ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇവിടെ $(-4)^3 = -64$.

കുറിപ്പ് : ഒരു ഋണസംഖ്യയെ ഇരട്ട തവണ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഗുണനഫലം ഒരു ധന സംഖ്യയായിരിക്കും. പക്ഷേ ഒരു ഋണസംഖ്യയെ ഒറ്റസംഖ്യാതവണ ക്രമത്തിൽ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഋണസംഖ്യ തന്നെയായിരിക്കും ഗുണനഫലം. ie, $(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{n ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ ഉം} \\ +1 & \text{n ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ ഉം} \end{cases}$

(n ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ –1 ഉം; n ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ +1 ഉം)

1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളാണ് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത്.

സംഖ്യകൾ	ഘനം
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

സംഖ്യകൾ	ഘനം
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

നാം ഇരട്ട സംഖ്യകളാണ്, അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഘനങ്ങളും (12, 14, 16)

നാം ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഘനങ്ങളും (17, 19)

പട്ടിക 2

ഘനങ്ങളുടെ ഗുണധർമ്മങ്ങൾ

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഘനങ്ങൾക്ക് താഴെ പറയുന്ന ഗുണങ്ങളുണ്ട് എന്ന് കണ്ടെത്താം

1. സംഖ്യകളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്തെ അക്കം 1 ആണെങ്കിൽ അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്തെ അക്കവും 1 ആയിരിക്കും.
   ഉദാഹരണമായി: $1^3 = 1; 11^3 = 1331; 21^3 = 9261; 31^3 = 29791$.
2. $1, 4, 5, 6, 9$ കൂടാതെ 0 എന്നീ സംഖ്യകൾ 1-ാം സ്ഥാനത്തു വന്നാൽ അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്തും അതേ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.
   ഉദാഹരണമായി: $14^3 = 2744; 15^3 = 3375; 16^3 = 4096; 20^3 = 8000$.
3. 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 2 എന്ന അക്കമുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 8 എന്ന അക്കം ഉണ്ടാകും. 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 8 ഉണ്ടായിരുന്നാൽ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 2 ഉണ്ടായിരിക്കും.
   ഉദാഹരണമായി: $(12)^3 = 1728; (18)^3 = 5832$.
4. 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 3 എന്ന അക്കമുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 7 എന്ന അക്കം വരുന്നു.
   1-ാം സ്ഥാനത്ത് 7 ഉണ്ടായിരുന്നാൽ ഘനങ്ങളുടെ 1-ാം സ്ഥാനത്ത് 3 ഉണ്ടായിരിക്കും.
   ഉദാഹരണമായി: $(13)^3 = 2197; (27)^3 = 19683$.
5. ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങൾ ഇരട്ട സംഖ്യകളായിരിക്കും. ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങൾ ഒറ്റ സംഖ്യകളായിരിക്കും

അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക കാണൽ

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക കാണുന്നതിനുള്ള താഴെതന്നിട്ടുള്ള രീതി ശ്രദ്ധിക്കുക.

	$1 = 1 = 1^3$	
അടുത്ത 2 ഒറ്റസംഖ്യകൾ,	$3 + 5 = 8 = 2^3$	
അടുത്ത 3 ഒറ്റസംഖ്യകൾ	$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$	
അടുത്ത 4 ഒറ്റസംഖ്യകൾ,	$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$	
അടുത്ത 5 ഒറ്റസംഖ്യകൾ,	$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$	

ഇത് രസകരമല്ലേ?

ഉദാഹരണം *1.34*

64 ഒരു പൂർണ്ണമായ ഒരു ഘനസംഖ്യയാണോ?

നിർദ്ധാരണം

$$64 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{2\times2\times2}$$

$$= 2^3\times2^3 = (2\times2)^3 = 4^3$$

$\therefore$ 64 ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയാണ്.

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

$$\begin{array}{r|l} 2 & 64 \\ 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array}$$

ഉദാഹരണം *1.35*

500 പൂർണ്ണമായ ഒരു ഘന സംഖ്യയാണോ?

നിർദ്ധാരണം

$$500 = 2\times2\times\underbrace{5\times5\times5}$$

ഗുണനഫലത്തിൽ മൂന്ന് 5 കൾ ഉണ്ട്. പക്ഷേ 2 കൾ രണ്ടെണ്ണം മാത്രമേ ഉള്ളൂ.

അതിനാൽ 500 ഒരു പൂർണ്ണഘന സംഖ്യയല്ല.

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

$$\begin{array}{r|l} 2 & 500 \\ 2 & 250 \\ 5 & 125 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

ഉദാഹരണം *1.36*

243 പൂർണ്ണമായ ഒരു ഘനസംഖ്യയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ഏത് ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോഴാണ് 243 ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം

$$243 = \underbrace{3\times3\times3}\times3\times3$$

മുകളിലത്തെ ഘടകക്രീയയിൽ 3 കളെ മുമ്മൂന്നായി ഗ്രൂപ്പുകളാക്കുമ്പോൾ 3×3 ശേഷിക്കുന്നു. $3's$ in triplets. $\therefore$ 243ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയല്ല.

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

$$\begin{array}{r|l} 3 & 243 \\ 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

അതിനെ പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യയാക്കാൻ 3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം.

$$243\times3 = \underbrace{3\times3\times3}\times\underbrace{3\times3\times3}$$

$$729 = 3^3\times3^3 = (3\times3)^3$$

$729 = 9^3$ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണമായ ഘനമാണ്.

$\therefore$ 729 ഒരു പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യയാണ്.

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

$$\begin{array}{r|l} 3 & 729 \\ 3 & 243 \\ 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

1.7.4 ഘനമൂലങ്ങൾ

ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം 125 cm^3, ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്ത്? വശത്തിന്റെ നീളം അറിയുന്നതിന്, 125 ഘനമായി വരുന്ന സംഖ്യ ഏതാണെന്ന് അറിയണം. ഘനമൂലം കാണുന്നതിന്, ഘനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ വിപരീതക്രിയ പ്രയോഗിക്കണം.

ഉദാഹരണമായി:

ആണെങ്കിൽ 8 ന്റെ ഘനമൂലം 2 ആകുന്നു. എന്ന് നമുക്കറിയാം.

> **ചിഹ്നം**
>
> $\sqrt[3]{\ }$ എന്നത് "**ഘനമൂലം**" എന്നതിനെ കുറിക്കുന്നു.

ഗണിത രീതിയിൽ നമുക്ക് അതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt[3]{8} = (8)^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3/3} = 2$$

വേറെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ

(i) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = (5^3)^{1/3} = 5^{3/3} = 5^1 = 5$

(ii) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = (4^3)^{1/3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$

(iii) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = (10^3)^{1/3} = 10^{3/3} = 10^1 = 10$

അഭാജ്യഘടക രീതിയിൽ ഘനമൂലം

ഒരു സംഖ്യയുടെ ഘനമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി

വഴി 1 : തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കുക.

വഴി 2 : തുല്യ സംഖ്യകൾ വരത്തക്കവിധം മുമ്മൂന്നായി ഘടകങ്ങളെ പിരിക്കുക.

വഴി 3 : എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മുമ്മൂന്ന് തുല്യഘടകങ്ങളിൽ നിന്ന് ഓരോന്നുവീതം എടുക്കുക. ഘനമൂലം നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം *1.37*

512 ന്റെ ഘനമൂലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt[3]{512} = (512)^{\frac{1}{3}}$$
$$= ((2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2))^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^3\times2^3\times2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(2^9\right)^{\frac{1}{3}} = 2^3$$
$$\sqrt[3]{512} = 8.$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ഉദാഹരണം *1.38*

27×64 ന്റെ ഘനമൂലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

27 നേയും 64 നേയും അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കുക.

$$\sqrt[3]{27} = (3\times3\times3)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}}$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

3	27
3	9
3	3
	1

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$$

$$= 3 \times 4$$

$$\sqrt[3]{27 \times 64} = 12$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ഉദാഹരണം *1.39*

250 ഒരു പൂർണ്ണഘനസംഖ്യയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ഏത് ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചാലാണ് 250 ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയാകുന്നത്.

നിർദ്ധാരണം

$$250 = 2 \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

ഘടകക്രിയയിൽ 2 ഒരേ ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രമേ വരുന്നുള്ളൂ.

250 നെ 2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലത്തിൽ 2 ഉൾപ്പെടില്ല. ബാക്കിയെ ഘന രൂപത്തിലെഴുതാം.

$$\therefore 250 \div 2 = 125$$

$$= 5 \times 5 \times 5 = 5^3.$$

$\therefore$ 250 നെ ഒരു പൂർണ്ണഘന സംഖ്യയാക്കുന്നതിന് 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കണം.

ഒരു ഭിന്ന സംഖ്യയുടെ ഘനമൂലം

$$\text{ഭിന്ന സംഖ്യയുടെ ഘനമൂലം} = \frac{\text{അംശത്തിന്റെ ഘനമൂലം}}{\text{ഛേദത്തിന്റെ ഘനമൂലം}}$$

(i.e.) $$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{(b)^{\frac{1}{3}}}$$

ഉദാഹരണം *1.40*

$\frac{125}{216}$ ന്റെ ഘനമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

125, 216 എന്നിവയെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളായി പിരിക്കുക.

$$125 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

5	125
5	25
5	5
	1

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$216 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{3\times3\times3}$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 2\times3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}.$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ഉദാഹരണം 1.41

$\frac{-512}{1000}$ ന്റെ ഘനമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$-512 = \underbrace{-8\times-8\times-8}$$

$$\sqrt[3]{-512} = -8$$

$$1000 = 5\times5\times5\times2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-8}{10}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-4}{5}$$

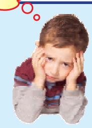
അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

5	1000
5	200
5	40
2	8
2	4
2	2
	1

ചിന്തിക്കൂ



$$\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{(-x)\times(-x)\times(-x)}$$
$$= -x.$$

ഒരു ഋണ സംഖ്യയുടെ ഘനമൂല്യം ഋണമായിരിക്കും

ഉദാഹരണം 1.42

0.027 ന്റെ ഘനമൂലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\times3\times3}{10\times10\times10}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{3}{10}$$

$$\sqrt[3]{0.027} = 0.3$$

ഉദാഹരണം 1.43

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\frac{\sqrt[3]{729}-\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512}+\sqrt[3]{343}}$

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

3	27
3	9
3	3
	1

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

7	343
7	49
7	7
	1

$$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{343}} = \frac{9-3}{8+7}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കൽ

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

അഭ്യാസം 1.7

1. താഴെ തന്നിട്ടുളളവയിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(i) താഴെ തന്നിട്ടുളളവയിൽ പൂർണ്ണമായ ഘനം ഏത്?

(A) 125 (B) 36 CC) 75 (D) 100

(ii) താഴെ തന്നിട്ടുളളവയിൽ പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യയല്ലാത്തത് ഏത്?

(A) 1331 (B) 512 (C) 343 (D) 100

(iii) ഒരു ഒറ്റനിസർഗ്ഗസംഖ്യയുടെ ഘനം

(A) ഇരട്ട (B) ഒറ്റ

(C) ഇരട്ട അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റ (D) അഭാജ്യസംഖ്യ

(iv) 1000 എന്ന ഘന സംഖ്യയുടെ ഘനമൂലത്തിൽ വരുന്ന പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(v) 50 എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘനസംഖ്യയുടെ ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ അക്കം

(A) 1 (B) 0 (C) 5 (D) 4

(vi) 100 ന്റെ ഘനസംഖ്യയുടെ അവസാനം വരുന്ന പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

(vii) 108 നെ ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയാക്കി മാറ്റാൻ ഗുണിക്കേണ്ട ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(viii) 88 നെ ഒരു പൂർണ്ണ ഘനസംഖ്യയാക്കി മാറ്റാൻ ഹരിക്കേണ്ട ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക.

(A) 11 (B) 5 (C) 7 (D) 9

(ix) സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം 64 സെ.മീ^{3} അതിന്റെ ഒരു വശം

(A) 4 സെ.മീ (B) 8 സെ.മീ (C) 16 സെ.മീ (D) 6 സെ.മീ

(x) താഴെ തന്നിട്ടുളളവയിൽ തെറ്റായത് ഏത് ?

(A) ഏതൊരു ഒറ്റസംഖ്യയുടെയും ഘനം ഒറ്റ സംഖ്യയാണ്.

(B) ഒരു പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യ രണ്ടു പൂജ്യങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുകയില്ല.

(C) ഒരു ഒരക്ക സംഖ്യയുടെ ഘനവും ഒരക്ക സംഖ്യയായിരിക്കും.

(D) 8 ൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യ ഒരു പൂർണ്ണഘനമല്ല.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യകൾ ഏവ?

(i) 400 (ii) 216 (iii) 729 (iv) 250

(v) 1000 (vi) 900

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ പൂർണ്ണമായ ഘനസംഖ്യകളല്ലാത്തവ ഏവ?

(i) 128 (ii) 100 (iii) 64 (iv) 125

(v) 72 (vi) 625

4. പൂർണ്ണ ഘന സംഖ്യയാക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ ഹരിക്കേണ്ട ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക.

(i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192

(v) 704 (vi) 625

5. പൂർണ്ണ ഘന സംഖ്യയാക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ ഗുണിക്കേണ്ട ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക.

(i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675

(v) 100

6. അഭാജ്യ ഘടകരീതിയിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ സംഖ്യയുടേയും ഘനമൂലം കാണുക.

(i) 729 (ii) 343 (iii) 512 (iv) 0.064

(v) 0.216 (vi) $5\frac{23}{64}$ (vii) – 1.331 (viii) – 27000

7. ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം 19.683 ഘന.സെമീ എങ്കിൽ അതിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

1.8 സംഖ്യകളുടെ ഏകദേശ മൂല്യനിർണ്ണയം

നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിത്തിൽ ഏകദേശ മൂല്യങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ അളവുകളെ കുറിച്ച് അറിയേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

ബഞ്ചമിൻ ₹59,876 ന് ഒരു ലാപ്ടോപ്പ് വാങ്ങി. അയാൾ മറ്റുള്ളവരുടെ അടുത്ത് ലാപ്ടോപ്പിന്റെ വാങ്ങിയവില ₹ 60,000 ആണെന്ന് പറയുന്നു. ഇത് ആയിരങ്ങൾക്ക് കൃത്യമാക്കപ്പെട്ട **ഏകദേശ മൂല്യമാകുന്നു**.

വസന്ത് ഒരു ജോടി ചെരുപ്പുകൾ ₹ 599.95യ്ക്ക് വാങ്ങി. ഈ തുക സൗകര്യത്തിനായി ₹600യ്ക്ക് ഏകദേശമാക്കപ്പെട്ടതായി പരിഗണിക്കുന്നു.

35.23 സെ.മീ നീളവും 25.91 സെ.മീ വീതിയും ഒരു ഫോട്ടോ ഫ്രെയിമിന്റെ അളവുകളാണ്. ഈ അളവുകൾ ഒരു സാധാരണ സ്കെയിൽ ഉപയോഗിച്ച് അളക്കണമെങ്കിൽ അതിന് സാധിക്കില്ല. കാരണം സാധാരണ സ്കെയിലിൽ സെന്റിമീറ്ററിന്റെ പത്തിലൊന്നുകൾ ആണ് അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളത്.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഫോട്ടോ ഫ്രെയിമിന്റെ നീളത്തെ ഏറ്റവും അടുത്ത പത്തിന് കൃത്യമായി 35.2 സെ.മീ എന്നോ ഏറ്റവും അടുത്ത പൂർണ്ണാങ്കത്തിന് കൃത്യമായി 35 സെ.മീ എന്നോ എഴുതാവുന്നതാണ്.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ നമ്മുടെ സൗകര്യത്തിനായി ഏകദേശമൂല്യങ്ങളാണ് നാം എടുത്തിട്ടുള്ളത്. ഈ രീതിയിൽ ഏറ്റവും അടുത്തമൂല്യം എടുക്കുന്നതിനെയാണ് അക്കങ്ങളുടെ ശരിയാക്കി എഴുതൽ **'Rounding off'** എന്നു പറയുന്നത്.

ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഏകദേശമൂല്യം മാത്രമേ തരാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. കാരണം

(a) ഒരു നഗരത്തിലെ ജനസംഖ്യ പറയണമെങ്കിൽ, 30 ലക്ഷം അല്ലെങ്കിൽ 25 ലക്ഷം എന്നിങ്ങനെ ഏകദേശമൂല്യമായിട്ടു മാത്രമേ പറയാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ.

(b) രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾക്കിടയിലെ ദൂരം പറയുന്നുവെങ്കിൽ നാം അതിനെ 352.12 കി.മീ എന്നു പറയാതെ 350 കി.മീ എന്ന് ശരിയാക്കി പറയുന്നു.

സംഖ്യകളെ ശരിയാക്കി എഴുതുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന തത്വങ്ങൾ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം.

(i) ശരിയായി എഴുതേണ്ട സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യയുടെ അടുത്ത സംഖ്യ 5 - ൽ കുറവാണെങ്കിൽ ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സ്ഥാനം വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ അതേപോലെ എഴുതുക.

(ii) ശരിയാക്കി എഴുതേണ്ട സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യയുടെ അടുത്ത സംഖ്യ, 5 അല്ലെങ്കിൽ 5 - ൽ കൂടുതൽ ആണെങ്കിൽ ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിന്റെ കൂടെ 1 കൂട്ടി എഴുതുക.

ഏകദേശ മൂല്യ നിർണ്ണയത്തെ സൂചിപ്പിക്കാനായി $\simeq$ എന്ന ചിഹ്നമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

പ്രവർത്തി

ഒരു A4 ഷീറ്റ് എടുക്കുക. അതിന്റെ നീളവും വീതിയും അളക്കുക. അളവുകളെ സെന്റീമീറ്ററുകളിൽ നിങ്ങൾ എങ്ങനെ അറിയിക്കും.

തന്നിട്ടുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഏകദേശമൂല്യം കാണുന്നതിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കണക്കിലെടുക്കാം.

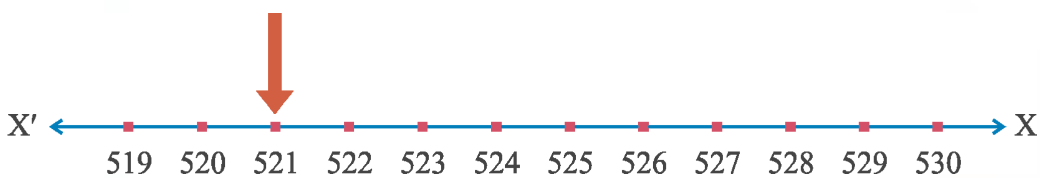
521 എന്ന സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

ഏറ്റവും അടുത്ത പത്തിനെ ശരിയാക്കി എഴുതൽ

ഉദാഹരണം

521 മുൻപും പിൻപും ഉള്ള 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കണക്കാക്കുക. (i.e. 520 കൂടാതെ 530)

521 എന്നത് 530 നെക്കാൾ 520 ന് അരികിലായിട്ടാണുള്ളത് എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.

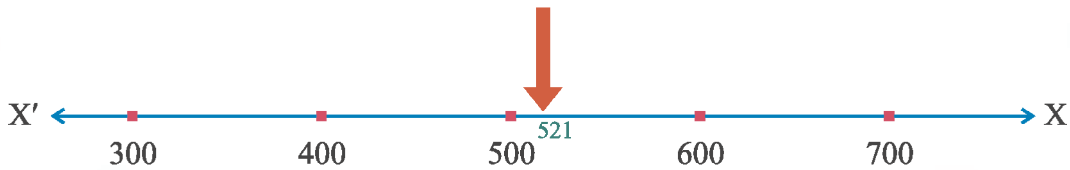


∴ 521 ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം ഈ സന്ദർഭത്തിൽ 520 ആകുന്നു.

ഏറ്റവും അടുത്ത നൂറിന് ശരിയാക്കി എഴുതൽ

ഉദാഹരണം

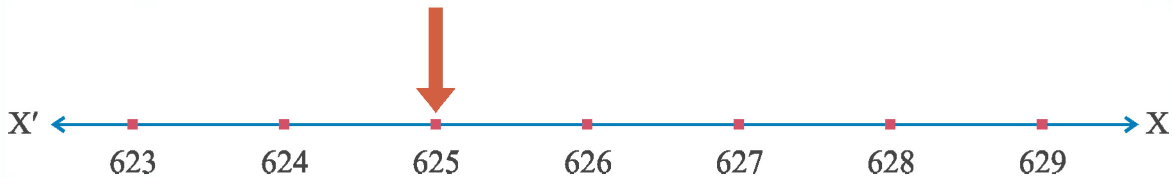
(i) 521ന് മുൻപും പിൻപും ഉള്ള 100 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കണക്കാക്കുക (i.e.500 കൂടാതെ 600)



521 എന്നത് 600 നെക്കാൾ 500 ന് അരികിലാണ് എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. അതിനാൽ ഈ സന്ദർഭത്തിൽ 521 ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം 500 ആകുന്നു. നമുക്ക് വേറൊരു ഉദാഹരണം ശ്രദ്ധിക്കാം.

(ii) 625 എന്ന സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

സംഖ്യാരേഖയിലെ ഓരോ അക്കങ്ങൾ എടുക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.



ഈ സന്ദർഭത്തിൽ 625 എന്ന സംഖ്യ 624 ന്റെയോ 626 ന്റെയോ അരികിലാണെന്ന് പറയുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല. കാരണം അത് 624 ന്റെയും 626 ന്റെയും ഏറ്റവും മധ്യത്തിലാണുള്ളത്.

എങ്കിലും സമ്പ്രദായപ്രകാരം അത് 626 ന് അടുത്തായതിനാൽ ഏകദേശമൂല്യം 626 ആകുന്നു. 100 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ 625, 700 നെക്കാളും 600 ന് ഏകദേശമാക്കി മൂല്യ നിർണ്ണയം ചെയ്യപ്പെടുക്കുന്നു.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി

47,618 എന്ന സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

(a) ഏറ്റവും അടുത്ത പത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശമൂല്യം = 47,620

(b) ഏറ്റവും അടുത്ത നൂറിന് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശമൂല്യം = 47,600

(c) ഏറ്റവും അടുത്ത ആയിരത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശമൂല്യം = 48,000

(d) ഏറ്റവും അടുത്ത പതിനായിരത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശമൂല്യം = 50,000

ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കൽ

ഉദാഹരണം

36.729 എന്ന ദശാംശസംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

(a) രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കൽ മൂല്യം 36.73 ആകുന്നു. (അവസാന അക്കം 9>5, ആയതിനാൽ 2 നോട് 1 കൂട്ടി അതിനെ 3 ആക്കുക).

$\therefore$ 36.729 $\simeq$ 36.73 (രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കൽ)

(b) 36.729 ന്റെ ദശാംശ ഭാഗത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അക്കം ശ്രദ്ധിക്കുക, ഇവിടെ അത് 5 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യയായ 2 ആകുന്നു. അതിനാൽ 7 നെ അതേ പോലെ എഴുതുന്നു.

$\therefore$ 36.729 $\simeq$ 36.7 (ഒരു ദശാംശ സ്ഥാനത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ)

ഉദാഹരണം

36.745 എന്ന ദശാംശ സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

(a) രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ അതിന്റെ ഏകദേശമൂല്യം 36.75 ആകുന്നു. അവസാന അക്കം 5 ആയതിനാൽ 4 നോട് 1 കൂട്ടി 5 ആക്കുക.

(b) ഒരു ദശാംശ സ്ഥാനത്തിന് ശരിയാക്കിയാൽ അതിന്റെ ഏകദേശമൂല്യം 36.7 ആകുന്നു. ദശാംശ ഭാഗത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അക്കം 5 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യയായ 4 ആയതിനാൽ 7നെ അതേപോലെ എഴുതുക.

$\therefore 36.745 \simeq 36.7$

ഉദാഹരണം

2.14829 എന്ന ദശാംശ സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

(i) ഒരു ദശാംശ സ്ഥാനത്തിന് ശരിയാക്കി എഴുതിയാൽ ഏകദേശ മൂല്യം 2.1 ആകുന്നു.

(ii) രണ്ട് ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശ മൂല്യം 2.15 ആകുന്നു.

(iii) മൂന്നു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശ മൂല്യം 2.148 ആകുന്നു.

(iv) നാലു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കിയാൽ ഏകദേശ മൂല്യം 2.1483 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം ***1.44***

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ഏറ്റവും അടുത്ത പൂർണ്ണാങ്കത്തിന് ശരിയാക്കി എഴുതുക:

(a) 288.29 (b) 3998.37 (c) 4856.795 (d) 4999.96

നിർദ്ധാരണം

(a) $288.29 \simeq 288$ (b) $3998.37 \simeq 3998$

(ഇവിടെ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കങ്ങളെല്ലാം 5 നേക്കാൾ ചെറുതാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇടതു ഭാഗത്തുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ അതുപോലെ തന്നെ എഴുതുന്നു.)

(c) $4856.795 \simeq 4857$ (d) $4999.96 \simeq 5000$

[ഇവിടെ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കങ്ങളെല്ലാം 5 നേക്കാൾ വലുതാണ്. അതിനാൽ പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം 1 കൂടുന്നു.]

അഭ്യാസം 1.8

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കി എഴുതുക:

   (i) 12.568 (ii) 25.416 കി.ഗ്രാം (iii) 39.927 മീ.

   (iv) 56.596 മീ. (v) 41.056 മീ. (vi) 729.943 കി.മീ

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ മൂന്നു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കി എഴുതുക:

   (i) 0.0518 മീ. (ii) 3.5327 കി.മീ

   (iii) 58.2936ലി. (iv) 0.1327 ഗ്രാം

   (v) 365.3006 (vi) 100.1234

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഏകദേശമൂല്യം കൃത്യമായി വിവരിച്ചിട്ടുള്ള രീതിയിൽ എഴുതുക:

(i) 247 നെ ഏറ്റവും അടുത്ത പത്തിന് (ii) 152നെ ഏറ്റവും അടുത്ത പത്തിന്

(iii) 6848 നെ ഏറ്റവും അടുത്ത നൂറിന് (iv) 14276നെ ഏറ്റവും അടുത്തപത്തായിരത്തിന്

(v) 3576274 നെ ഏറ്റവും അടുത്ത ലക്ഷങ്ങൾക്ക് (vi)104,3567809നെ ഏറ്റവുംഅടുത്തകോടിക്ക്

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ഏറ്റവും അടുത്ത പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്ക് ശരിയാക്കി എഴുതുക:

(i) 22.266 (ii) 777.43 (iii) 402.06

(iv) 305.85 (v) 299.77 (vi) 9999.9567

1.9. സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള കളി

മാന്ത്രികതയും അത്ഭുതങ്ങളും നിറഞ്ഞ രസകരമായ ഒരു വിഷയമാണ് ഗണിതം. ഈ ഭാഗത്തിൽ അതിനെ കുറിച്ച് രസകരവും അത്ഭുതകരവുമായും നമുക്ക് ആസ്വദിക്കാം.

(a) സംഖ്യകളുടെ പൊതുവായ രൂപം

42 എന്ന സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക അതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$42 = 40 + 2 = 10 \times 4 + 2$$

അതുപോലെ 27 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$27 = 20 + 7 = 10 \times 2 + 7$$

പൊതുവായി **'*a*'** കൂടാതെ **'*b*'** എന്നീ രണ്ടക്കങ്ങൾ ***ab*** എന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യയായി എഴുതിയാൽ

$$ab = 10 \times a + b = 10\,a + b$$
$$ba = 10 \times b + a = 10\,b + a$$

ഇവിടെ ab എന്നത് $a \times b$ എന്ന് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല.

351 എന്ന സംഖ്യ പരിഗണിക്കുക.

ഇത് ഒരു മൂന്നക്ക സംഖ്യയാകുന്നു. ഇതിനെ താഴെ തന്നപ്രകാരം എഴുതാം

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

പൊതുവായി abc എന്നീ മൂന്നക്കങ്ങൾ കൊണ്ടുള്ള a, b കൂടാതെ c മൂന്നക്ക സംഖ്യയെ

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + 1c$$ എന്നെഴുതാം.

അതുപോലെ cab കൂടാതെ bca എന്നീ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളെ

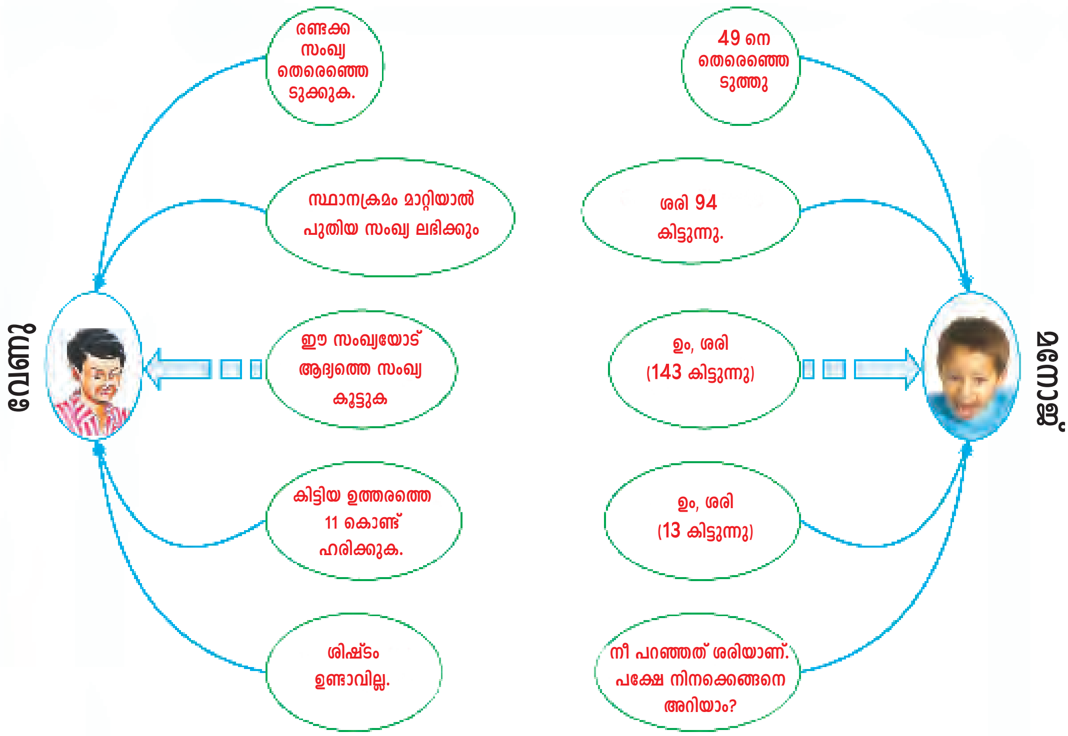
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$ എന്നിങ്ങനെ എഴുതാം.

(b) സംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള കളികൾ

(i) സംഖ്യകളുടെ വിപരീതക്രമം ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യ

വേണു മനോജിനോട് രണ്ടക്ക സംഖ്യ വിചാരിക്കാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. എന്നിട്ട് അവൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നതൊക്കെ ആ സംഖ്യയിൽ ചെയ്യുന്നതിന് പറയുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം അവരുടെ സംഭാഷണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചിത്രം ശ്രദ്ധിച്ച് വായിക്കുക.

വേണു, മനോജ് എന്നിവരുടെ സംഭാഷണം:



വേണുവിന്റെ സൂത്രം വിവരിക്കപ്പെടുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കാം. മനോജ് തെരെഞ്ഞെടുത്ത $10a + b$എന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യയുടെ ചുരുങ്ങിയ രൂപം 'ab' എന്നിരിക്കട്ടെ. സംഖ്യയെ വിപരീത ക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ $ba = 10b + a$ എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നു. അവയെ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ :

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

$$= 11(a + b)$$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

വേണു പറഞ്ഞതുപോലെ തുക എപ്പോഴും 11ന്റെ ഒരു ഗുണിതമാകുന്നു.

ഉത്തരത്തെ 11കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ $(a + b)$ കിട്ടുന്നു.

(i.e.) സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളെ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ മതി.

(c) ശരിയായ മാതൃക തിരിച്ചറിഞ്ഞ് അടുത്ത മൂന്ന് പദങ്ങൾ എഴുതുക

മാതൃകാശ്രേണിയെ ശ്രദ്ധിക്കുക.

(i) 3, 9, 15, 21, (ഓരോ പദവും തൊട്ടുപിന്നിലുള്ള പദത്തോട് 6 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നു)
ഈ മാതൃക തുടരുന്നു എങ്കിൽ അടുത്ത പദങ്ങൾ ____ , ____ കൂടാതെ ____ .

(ii) 100, 96, 92, 88, ____ , ____ , ____ . (ഓരോ പദവും തൊട്ടുമുൻപുള്ള പദത്തിൽ നിന്നും 4 കുറവാണ്)

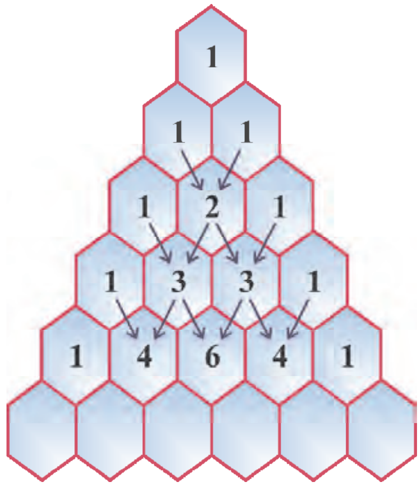
(iii) 7, 14, 21, 28, ____ , ____ , ____ . (7 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ)

(iv) 1000, 500, 250, ____ , ____,____. (ഓരോ പദവും തൊട്ടുമുൻപുള്ള പദത്തിന്റെ പകുതിയാണ്)

(v) 1, 4, 9, 16, ____ , ____ , ____ . (നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ)

(d) പാസ്കലിന്റെ ത്രികോണ സംഖ്യാ മാതൃക

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള സംഖ്യാ മാതൃകയെ പാസ്കലിന്റെ ത്രികോണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.



പ്രവർത്തി

പാസ്കലിന്റെ ത്രികോണ സംഖ്യാ മാതൃക തിരിച്ചറിഞ്ഞ് ആറാമത്തെ വരി പൂർത്തിയാക്കുക.

3×3 മാന്ത്രിക ചതുരം

6	11	10
13	9	5
8	7	12

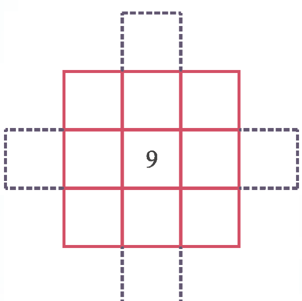
തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിലെ സംഖ്യകളെ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇതിനെ 3×3 മാന്ത്രിക ചതുരം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു മാന്ത്രിക ചതുരത്തിൽ ഓരോ വരിയിലേയും ഓരോ നിരയിലേയും കൂടാതെ ഓരോ വികർണ്ണത്തിലേയും സംഖ്യകളുടെ തുക തുല്യമായിരിക്കും.

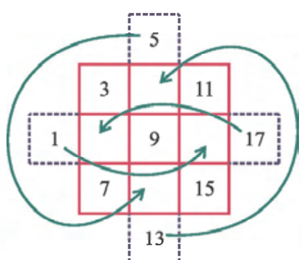
ഈ മാന്ത്രിക ചതുരത്തിൽ സംഖ്യകളുടെ (മാജിക്) തുക 27ആകുന്നു. മധ്യ സംഖ്യ ശ്രദ്ധിക്കുക. മാന്ത്രിക തുക ആ സംഖ്യയുടെ 3മടങ്ങാകുന്നു. 9 മധ്യത്തിൽ നിറച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, പിന്നെ എട്ട് അറകൾ നിറയ്ക്കാനുണ്ട്. അവയിൽ നാലെണ്ണം 9 നേക്കാൾ ചെറുതും നാലെണ്ണം 9 നേക്കാൾ വലുതും ആയിരിക്കും,

(a) 5, 6, 7, 8 കൂടാതെ 10, 11, 12, 13 എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യാസം 1 വീതം വരുന്നവയും.

(b) 1, 3, 5, 7 കൂടാതെ 11, 13, 15, 17 എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യാസം 2വീതം വരുന്നവയും അല്ലെങ്കിൽ $-11, -6, -1, 4$ കൂടാതെ 14, 19, 24, 29 എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യാസം 5 വരുന്ന തുല്യവ്യത്യാസമുള്ള ഏതൊരു സംഖ്യാഗണവും ആകാം.

1, 3, 5, 7 കൂടാതെ 11, 13, 15, 17 എന്ന രീതിയിൽ ഒരു പ്രാവശ്യം സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ തീരിമാനിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ ചതുരത്തിൽ നാലു ദിശകളിലും നാല് അറകൾ വരച്ച് സംഖ്യകളെ വികർണ്ണ മാതൃകയിൽ ക്രമീകരിക്കുക.





3	13	11
17	9	1
7	5	15

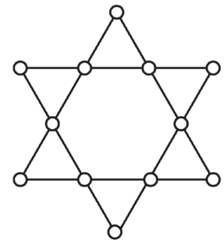
മാന്ത്രിക ചതുരം

ഓരോന്നും 1 മുതൽ 9 സ്വർണ്ണ നാണയങ്ങൾ വരെ മതിപ്പുള്ള 9 പവിഴങ്ങൾ മുരുകന്റെ കൈയ്യിലുണ്ട്. അവയെ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മൂന്ന് പെൺമക്കൾക്കും വീതിച്ചു നൽകാൻ നിങ്ങൾക്കു സഹായിക്കാമോ?

8		6
	5	
		2

മാന്ത്രിക നക്ഷത്രം

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഓരോ വരിയും കൂട്ടുമ്പോൾ 26 കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ 1 മുതൽ 12 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് നക്ഷത്രത്തിനുള്ളിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുക. ഒരു സംഖ്യ കൂടിയ പക്ഷം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.



സു ഡോ കു

1, 2, ..., 9 വരെയുള്ള എല്ലാ അക്കങ്ങളും വീണ്ടും ആവർത്തിക്കാതെ വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളുള്ള ഓരോ വരിയിലും ഓരോ നിരയിലും ഉപയോഗിക്കുക.

3	1	2		9	5		7	6
5		9	1		7		8	2
4		7	2	6	3	5		
9			7			2	4	
	2	8		1			9	3
	3		9	8	2		5	7
	4	5	6				3	1
1	7		3	5	8	9		4
8		3	4	2		7		5

ഒരു കാറിന്റെ മൂന്നക്ക രജിസ്ററർ സംഖ്യ ഒരു ചതുര സംഖ്യയാണ്. ഈ സംഖ്യയെ തിരിച്ചിട്ടാൽ കിട്ടുന്നത് മറ്റൊരു കാറിന്റെ രജിസ്റ്റർ സംഖ്യയാണ്. അതും ഒരു ചതുരസംഖ്യയാണ്. രണ്ടു കാറുകളുടേയും സാദ്ധ്യമായ എല്ലാ രജിസ്റ്റർ സംഖ്യകളും നൽകാൻ നിങ്ങൾക്കു കഴിയുമോ.

ചുഴലുന്ന സംഖ്യ

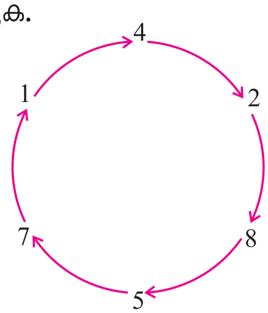
1 4 2 8 5 7

ആദ്യം സംഖ്യകളെ വൃത്താകൃതിയിൽ ക്രമീകരിക്കുക.

ഇപ്പോൾ 142857, 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

$$142857 \times 1 = 142857 \qquad 142857 \times 2 = 285714 \qquad 142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428 \qquad 142857 \times 5 = 714285 \qquad 142857 \times 6 = 857142$$



തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിലെ വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത സംഘങ്ങളായി ഒരേ അക്കങ്ങൾ ചുറ്റിത്തുടങ്ങുന്നത് നാം കാണുന്നു.

അഭ്യാസം 1.9

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണി പൂർത്തിയാക്കുക:

   (i) 40, 35, 30, ___ , ___ , ___ .

   (ii) 1, 2, 4, ___ , ___ , ___ .

   (iii) 84, 77, 70, ___ , ___ , ___ .

   (iv) 4.4, 5.5, 6.6, ___ , ___ , ___ .

   (v) 1, 3, 6, 10, ___ , ___ , ___ .

   (vi) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ___ , ___ , ___ .

   (ഇതിനെ FIBONACCI SEQUENCE ശ്രേണി എന്നറിയപ്പെടുന്നു)

   (vii) 1, 8, 27, 64, ___ , ___ , ___ .

പ്രവർത്തി

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ

* ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുക
* ആ സംഖ്യയോട് 9 കൂട്ടുക
* ഉത്തരത്തെ രണ്ടു മടങ്ങാക്കുക
* അതിനോട് 3 കൂട്ടുക
* അതിനെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക
* വീണ്ടും അതിൽ നിന്നും 3 കുറയ്ക്കുക
* അതിനെ 6 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക
* കിട്ടിയ ഉത്തരത്തിൽ നിന്നും നിങ്ങൾ ആദ്യം തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യയെ കുറയ്ക്കുക.
* നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം എന്താണ്?

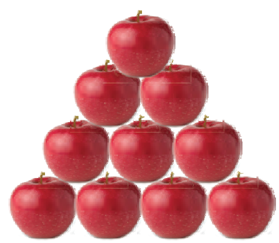
ഉത്തരം: പത്ത്

2. ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിക്ക് ഉള്ളിൽ പടിക്കെട്ടുകൾ ഉണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ പടിക്കെട്ടിൽ ഒരു കുരങ്ങൻ ഇരിപ്പുണ്ട്. വെള്ളം ഒൻപതാമത്തെ പടിക്കെട്ടുവരെ ഉണ്ട്.

   (a) കുരങ്ങ് 3 പടികൾ താഴേക്ക് ചാടിയിട്ട് 2 പടികൾ മേലോട്ട് ചാടും. അങ്ങനെ എത്ര പ്രാവശ്യം ചാടിയാൽ അത് വെള്ളത്തി നടുത്തെത്തും?

   (b) വെള്ളം കുടിച്ചതിനുശേഷം അതിന് തിരികെ പോകണം. അതിനു വേണ്ടി ഓരോപ്രാവശ്യവും 4 പടികൾ മുകളിലേക്ക് ചാടിയിട്ട് 2 പടികൾ താഴേക്കിറങ്ങും. എത്ര ചാട്ടത്തിൽ അത് മുകളിലെത്തും ?

3. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തന്റെ പക്കലുള്ള ആപ്പിളുകളെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു :



   (a) പത്തുവരി ആപ്പിളുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ പൂർണ്ണമായി എണ്ണാതെ ആ വരികളിൽ എത്ര ആപ്പിളുകൾ ഉണ്ടെന്നു കാണുക?

   (b) 20 വരി ആപ്പിളുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയിൽ എത്ര ആപ്പിളുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

   ആകെ ആപ്പിളുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാതൃക തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കുമോ ? തന്നിട്ടുള്ള ചാർട്ട് പൂർത്തിയാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക!

വരികൾ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ആകെ ആപ്പിളുകൾ	1	3	6	10	15				

Concept Summary

- പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം എന്നിവയിൻമേൽ സംവൃത ഗുണം ഉണ്ട്.
- പൂജ്യമല്ലാത്ത പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടത്തിന് ഹരണത്തിൻമേൽ സംവൃത ഗുണം ഉണ്ട്.
- പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം കൂടാതെ ഗുണനം എന്നീ ക്രിയകൾക്ക് ക്രമവിനിമേയ ഗുണവും സംയോജന ഗുണവും ഉണ്ട്.
- പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലന അനന്യത 0 ആകുന്നു.
- പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണന അനന്യത 1 ആകുന്നു.
- പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിന് സങ്കലനം വ്യവകലനം എന്നിവയിൻമേൽ വിതരണഗുണം ഉണ്ട്.
- $\frac{a}{b}$ യുടെ സങ്കലന വിപരീതം $\frac{-a}{b}$ കൂടാതെ തിരിച്ചും അങ്ങനെ തന്നെയാകുന്നു.
- $\frac{a}{b}$ യുടെ ഗുണന വിപരീതം $\frac{b}{a}$ ആകുന്നു.
- രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ എണ്ണാൻ സാധിക്കാത്ത അളവിൽ പരിമേയസംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.
- ഏഴ് ഘാതാങ്കനിയമങ്ങൾ ഇപ്രകാരമാകുന്നു :

  a , b എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും കൂടാതെ m, n എന്നിവ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളും ആണെങ്കിൽ

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

  (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, ഇവിടെ $a \neq 0$

  (iii) $a^0 = 1$, ഇവിടെ $a \neq 0$

  (iv) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, ഇവിടെ $a \neq 0$

  (v) $(a^m)^n = a^{mn}$

  (vi) $a^m \times b^m = (ab)^m$

  (vii) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ ഇവിടെ $b \neq o$
- ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നും തുല്യദൂരത്തിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഏകദേശ മൂല്യം കണക്കാക്കപ്പെട്ട മൂല്യത്തിൽ നിന്നും തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയേക്കാൾ വലുതും അരികിലും ആയിരിക്കും.

2 അളവുകൾ

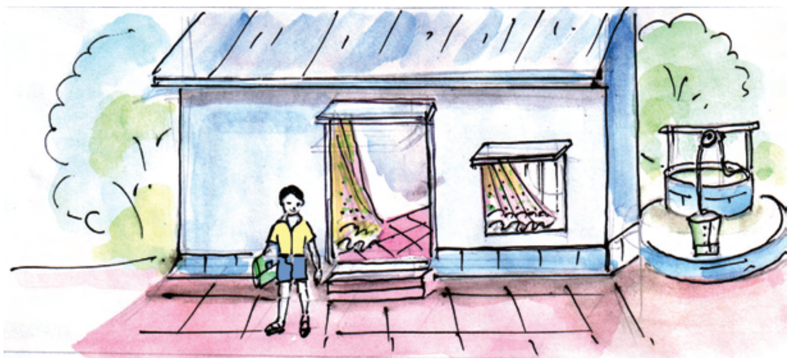
2.1 **ആമുഖം**

2.2 **അർദ്ധവൃത്തങ്ങളും ചതുർത്ഥാംശങ്ങളും**

2.3 **മിശ്രരൂപങ്ങൾ**

2.1 ആമുഖം

അളക്കുന്നത് ഒരു നിപുണതയാണ്. ഇത് ഓരോ വ്യക്തിയുടെയും അവന്റെ/ അവളുടെ ജീവിതത്തിൽ ആവശ്യമായ ഒന്നാണ്. ഉദാഹരണമായി, നാം അളക്കുന്നത്



ചിത്രം. 2.1

(i) കിണറ്റിൽ നിന്നും വെള്ളം കോരുന്നതിന് ആവശ്യമായ കയറിന്റെ നീളം,

(ii) നമ്മുടെ വീട്ടിലെ കതകിനും ജനാലക്കും കർട്ടൻ ഇടുന്നതിന് ആവശ്യമായ തുണിയുടെ നീളം,

(iii) വീടിന്റെ മുറിയുടെ തറ സിമന്റ് ഇടുന്നതിനുള്ള വിസ്തീർണ്ണ അളവും

(iv) സ്കൂൾ യൂണിഫോമിനുള്ള തുണിയുടെ നീളവും.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളിലും, 'അളവുകൾ' എന്ന ആശയം എത്തിച്ചേരുന്നു

അളവുകൾ, കോണുകൾ, വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ, സമതലരൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും, ഘന രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം മുതലായവയുടെ അളവുകളെ കുറിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യുന്ന ഗണിതശാസ്ത്ര ശാഖയാണ് 'അളവുകളും വിസ്താര കലനവും'.

ഓർമ്മിക്കുക

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചില നിർവചനങ്ങൾ നാം ഏഴാം തരത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട് അവ നമുക്ക് ഓർത്ത് നോക്കാം.

(i) വിസ്തീർണ്ണം

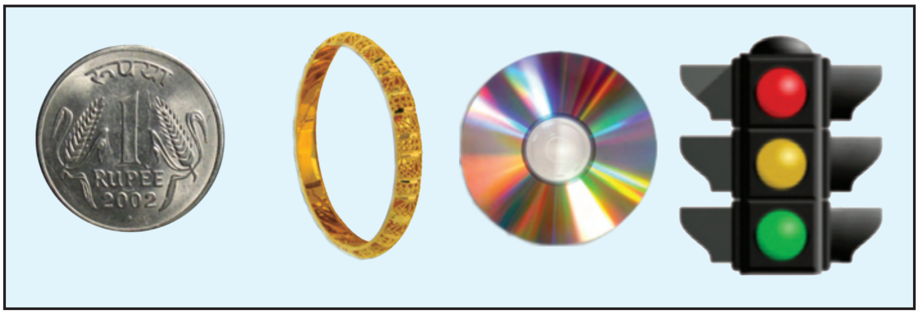
സമതല പ്രതലത്തിലുള്ള അടഞ്ഞ രൂപങ്ങളുടെ ഉൾഭാഗമാണ് വിസ്തീർണ്ണം.

'പെറി' എന്ന ഗ്രീക്കു വാക്കിന് **'ചുറ്റും'** എന്നും, **'മീറ്റർ'** എന്ന വാക്കിന് **'അളവ്'** എന്നുമാണ് അർത്ഥം.

(ii) ചുറ്റളവ്

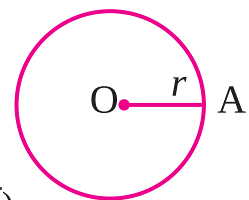
അടഞ്ഞ രൂപങ്ങളുടെ അതിരുകളുടെ ആകെ അളവാണ് ചുറ്റളവ്. ഇവിടെ, ചുറ്റളവ് എന്നത് ചിത്രങ്ങൾക്കു ചുറ്റും അളക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ വക്രരേഖയുടെ നീളമാണ്.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വസ്തുക്കളുടെ രൂപത്തെ നിങ്ങൾക്ക് തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കുമോ.



ചിത്രം. 2.2

ഓരോ വസ്തുക്കളുടെ രൂപവും വൃത്തമാണ്.



ചിത്രം. 2.3

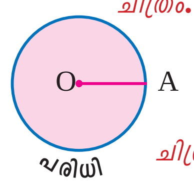
(iii) വൃത്തം

ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രബിന്ദു 'O' യും വ്യാസാർദ്ധം 'r' മാത്രകളും($\overline{OA}$)

വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, $A = \pi r^2$ ച.മാത്രകൾ

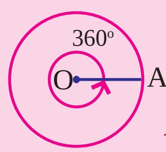
വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് അല്ലെങ്കിൽ പരിധി, $P = 2\pi r$ മാത്രകൾ,

ഇവിടെ $\pi \simeq \frac{22}{7}$ അല്ലെങ്കിൽ 3.14.



ചിത്രം. 2.4

കുറിപ്പ്: ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360^0 ആകുന്നു.



ചിത്രം. 2.5

പ്രവർത്തി

ഒരു കാർഡ് ബോർഡ് എടുത്ത് അതിൽ വ്യത്യസ്ത വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. വൃത്തങ്ങളെ വെട്ടിയെടുത്ത് അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളും ചുറ്റളവുകളും കാണുക.

ക്രമ സംഖ്യ	വ്യാസാർദ്ധം	വിസ്തീർണ്ണം	ചുറ്റളവ്
1.			
2.			
3.			

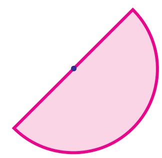
2.2 അർദ്ധവൃത്തവും വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശവും

2.2.1 അർദ്ധവൃത്തം

നിങ്ങൾ രാത്രികാലങ്ങളിൽ അമാവാസിയോ പൗർണ്ണമിയോ കഴിഞ്ഞ് 7 ദിവസങ്ങൾക്ക് ശേഷം ആകാശത്തെ ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ?

ചന്ദ്രന്റെ രൂപമെന്തായിരിക്കും?

ചിത്രം 2.6 ൽ കാണുന്നതുപോലുള്ള ആകൃതി ആയിരിക്കും.
ഇതിനെ നിങ്ങൾ എന്ത് വിളിക്കും ?
ഇതിനെ അർദ്ധവൃത്തമെന്നു പറയുന്നു. (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി ഭാഗം)

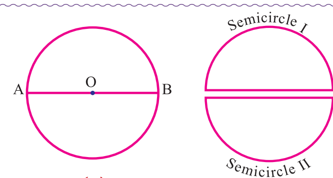


ചിത്രം. 2.6

ഒരു വൃത്തത്തെ അതിന്റെ വ്യാസത്തിലൂടെ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നതിനെ അർദ്ധവൃത്തങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

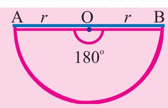
പ്രവർത്തി

ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും ഒരു അർദ്ധവൃത്തം ലഭിക്കുന്നതെങ്ങനെ ?
വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു കാർഡ്ബോർഡ് എടുത്തിട്ട് അതിന്റെ വ്യാസം $\overline{AB}$ യിലൂടെ മുറിക്കുക.



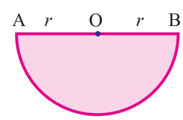
ചിത്രം. 2.7

കുറിപ്പ് : അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180^0 ആകുന്നു.



ചിത്രം. 2.8

(a) ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്



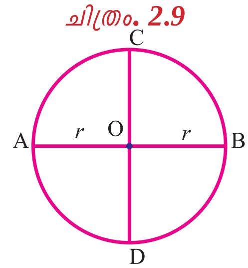
ചിത്രം. 2.9

ചുറ്റളവ്, P $= \frac{1}{2} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്) + 2 x r മാത്രകൾ

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r + 2r$

P $= \pi r + 2r = (\pi + 2)\, r$ മാത്രകൾ.

(b) ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. 2.10

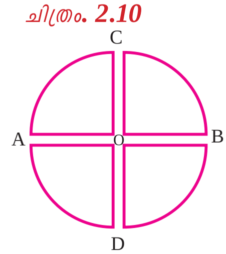
വിസ്തീർണ്ണം, A $= \frac{1}{2} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം)

$= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

A $= \frac{\pi r^2}{2}$ ചതുരശ്ര മാത്രകൾ

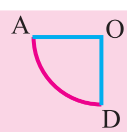
2.2.2 ഒരു വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശം

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വ്യാസങ്ങളിൽ കൂടെ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുക. നമുക്ക് വൃത്തത്തിന്റെ നാലു തുല്ല്യ ഭാഗങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഓരോ ഭാഗത്തെയും വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശം എന്ന് പറയുന്നു ചിത്രം 4.11 കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന നാലു ചതുർത്ഥാംശങ്ങളാണ് OCA, OAD, ODB കൂടാതെ OBC.



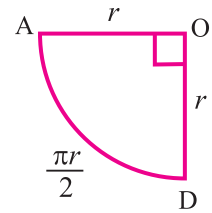
ചിത്രം. 2.11

കുറിപ്പ് : ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 90^0 ആകുന്നു.



ചിത്രം. 2.12

(a) ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്



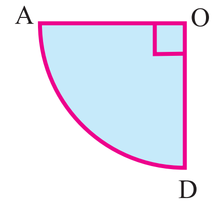
ചിത്രം. 2.13

ചുറ്റളവ്, $P = \frac{1}{4} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്) + 2r മാത്രകൾ

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r + 2r$$

$$P = \frac{\pi r}{2} + 2r = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r \text{ മാത്രകൾ}$$

(b) ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

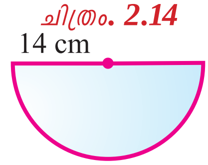


ചിത്രം. 2.14

വിസ്തീർണ്ണം, $A = \frac{1}{4} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം)

$$A = \frac{1}{4} \times \pi r^2 \text{ ച. മാത്രകൾ}$$

ഉദാഹരണം 2.1



ചിത്രം. 2.15

വ്യാസാർദ്ധം 14 സെ.മീ. ഉള്ള ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും ചുറ്റളവും കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $r = 14$ സെ.മീ.

ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $P = (\pi + 2)\, r$ മാത്രകൾ

$$\therefore P = \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 14$$

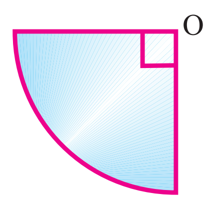
$$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 14 = \frac{36}{7} \times 14 = 72$$

അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = 72 സെ.മീ.

അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, $A = \frac{\pi r^2}{2}$ ച.മാത്രകൾ

$$\therefore A = \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14}{2} = 308 \text{ സെ.മീ.}^2$$

ഉദാഹരണം 2.2



ചിത്രം.2.16

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 21 സെ.മീ., വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ ചുറ്റളവും കൂടാതെ വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r = 21$ സെ.മീ.

ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് , $P = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ മാത്രകൾ

$$= \left(\frac{22}{7 \times 2} + 2\right) \times 21 = \left(\frac{22}{14} + 2\right) \times 21$$

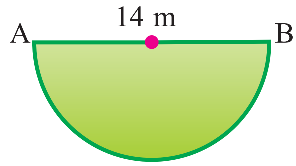
$$P = \left(\frac{22 + 28}{14}\right) \times 21 = \frac{50}{14} \times 21 = 75 \text{ സെ.മീ.}$$

ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം , $A = \frac{\pi r^2}{4}$ ച.മാത്രകൾ

$$A = \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21}{4}$$

$$= 346.5 \text{ സെ.മീ.}^2.$$

ഉദാഹരണം 2.3



ചിത്രം.2.17

ഒരു അർദ്ധ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള പുൽത്തകിടിയുടെ വ്യാസം14 മീ. ചതുരശ്ര മീറ്ററിന് ₹10 നിരക്കിൽ പുൽത്തകിടി വേലികെട്ടുന്നതിനുള്ള ചെലവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : വ്യാസം, $d = 14$ മീ.

$\therefore$ പുൽത്തകിടിയുടെ വ്യാർദ്ധം, $r = \frac{14}{2} = 7$ മീ.

അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള പുൽത്തകിടി വേലികെട്ടുന്നതിന്, നമുക്ക് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണണം.

ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, , P $= (\pi + 2) \times r$ മാത്രകൾ

$$= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 7$$

$$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 7$$

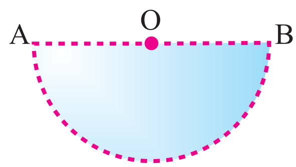
P $= 36$ മീ.

1 മീ. പുൽത്തകിടി വേലി കെട്ടുന്നതിനുള്ള ചെലവ് ₹ 10

$\therefore$ 36 മീ. പുൽത്തകിടി വേലികെട്ടുന്നതിനുള്ള ചെലവ്

$$= 36 \times 10 = ₹\ 360$$

ഉദാഹരണം 2.4



ചിത്രം.2.18

ഒരു അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഉദ്യാനത്തിന്റെ അതിരായി ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ചങ്ങലയുടെ നീളം 36 മീ. ഉദ്യാനത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ:

അതിരിന്റെ നീളം = ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

$\therefore (\pi + 2)r = 36$ മീ. $= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times r = 36$

$\left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times r = 36 \quad = \frac{36}{7} \times r = 36 \quad \Rightarrow r = 7$ മീ.

ഉദ്യാനത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

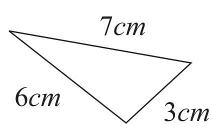
A $= \frac{\pi r^2}{2}$ ച. മാത്രകൾ

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2} = 77$ മീ^{2}

$\therefore$ ഉദ്യാനത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 77$ മീ^{2}

പ്രവർത്തി

ഒരു വടി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ത്രികോണാകൃതിയിൽ വളച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിനെ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ആകൃതിയിൽ വളച്ചാൽ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.



അഭ്യാസം 2.1

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

(i) ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെക്കാൾ ______ മടങ്ങാണ്.
(A) രണ്ട് (B) നാല് (C) ഒരു പകുതി (D) ഒരു ചതുർത്ഥാംശം

(ii) ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ______
(A) $\left(\frac{\pi+2}{2}\right) r$ മാത്രകൾ (B) $(\pi+2)\, r$ മാത്രകൾ (C) $2r$ മാത്രകൾ (D) $(\pi+4)$r മാത്രകൾ

(iii) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസർദ്ധം 7 മീ. ആണെങ്കിൽ, അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ______
(A) 77മീ^{2} (B) 44 മീ^{2} (C) 88 മീ^{2} (D) 154 മീ^{2}

(iv) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 144 സെ.മീ^{2} ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ______
(A) 144 സെ.മീ^{2} (B) 12 സെ.മീ^{2} (C) 72 സെ.മീ^{2} (D) 36 സെ.മീ^{2}

(v) ഒരു വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വ്യാസം 84 സെ.മീ., അതിന്റെ ചുറ്റളവ് ______
(A) 150 സെ.മീ. (B) 120 സെ.മീ. (C) 21 സെ.മീ. (D) 42 സെ.മീ.

(vi) ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള ചതുർത്ഥാംശങ്ങളുടെ എണ്ണം ______
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(vii) ഒരു വൃത്ത ചതുർത്ഥാംശം വൃത്തത്തിന്റെ ______ആകുന്നു
(A) രണ്ടിൽ ഒന്ന് (B) നാലിൽ ഒന്ന് (C) മൂന്നിൽ ഒന്ന് (D) മൂന്നിൽ രണ്ട്

(viii) ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ ______ ആണ്
(A) 90° (B) 270° (C) 180° (D) 360°

(ix) ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ______ആണ്
(A) 90° (B) 180° (C) 270° (D) 0°

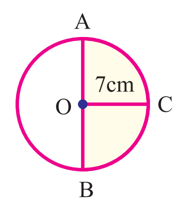
(x) ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 84 സെ.മീ.^{2} എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ______.
(A) 144 സെ.മീ.^{2} (B) 42 സെ.മീ.^{2} (C) 168 സെ.മീ.^{2} (D) 288 സെ.മീ.^{2}

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.
(i) 35 സെ.മീ. (ii) 10.5 സെ.മീ. (iii) 6.3 മീ. (iv) 4.9 മീ.

3. താഴെ തന്നിട്ടുളള വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള അർദ്ധവൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും വിസ്തീർണ്ണവും കണക്കാക്കുക
(i) 2.8 സെ.മീ. (ii) 56 സെ.മീ. (iii) 84 സെ.മീ. (iv) 112 മീ.

4. തന്നിട്ടുളള വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള ഒരു വൃത്തചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും ചുറ്റളവും കണക്കാക്കുക
(i) 98 സെ.മീ. (ii) 70 സെ.മീ. (iii) 42 മീ. (iv)28 മീ.

5. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് അർദ്ധവൃത്തം ACB യുടെയും ചതുർത്ഥാംശം BOC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



6. അർദ്ധ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഉദ്യാനത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 21 മീ. മീറ്ററിന് ₹ 5 നിരക്കിൽ അതിനു ചുറ്റും വേലികെട്ടുന്നിതിനുള്ള ചെലവ് കാണുക.

2.3 മിശ്രരൂപങ്ങൾ

ചിത്രം. 2.19

ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന് നിങ്ങൾ നിരീക്ഷിച്ചതെന്താണ് ?

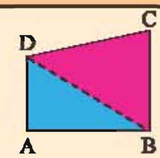
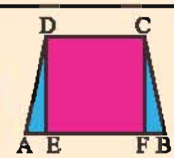
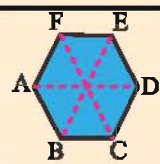
ചിത്രം 2.19 (a), ൽ ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന് മുകളിൽ ത്രികോണത്തെ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചിത്രം2.19 (b), ൽ ഒരു ചതുരത്തിന് മുകളിൽ ഒരു ലംബകം ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഒരു പുതിയ രൂപം രൂപീകരിക്കുന്നതിനായി രണ്ടോ അല്ലെങ്കിൽ മൂന്നോ സമതല രൂപങ്ങളെ അടുത്തടുത്തായി പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം.

ചില മിശ്ര രൂപങ്ങളിൽ തുല്യ നീളമുള്ള വശങ്ങളെ തമ്മിൽ അടുത്തടുത്തായി യോജിപ്പിക്കുന്നതിനെ അടുപ്പിച്ചുവയ്ക്കൽ രൂപങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഇവ 'മിശ്രരൂപങ്ങൾ' ആണ്. മുകളിൽ ഉള്ള മിശ്ര രൂപങ്ങൾ നമുക്ക് പരിചിതങ്ങളായ ത്രികോണം, ദീർഘചതുരം, അർദ്ധവൃത്തം ഇവയുടെ അടുപ്പിച്ച് വയ്ക്കൽ രീതിയാകുന്നു.

നമുക്ക് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാമോ ?

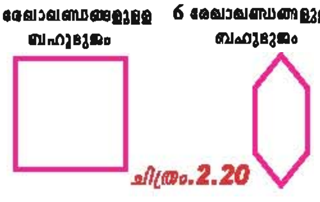
ക്രമ സംഖ്യ	സമതലരൂപങ്ങൾ	അടുപ്പിച്ചുവയ്ക്കൽ	
1.	രണ്ട് വിഷമഭുജ ത്രികോണങ്ങൾ	ചതുർഭുജം	
2.	രണ്ട് സമകോണ ത്രികോണങ്ങളും ഒരു ദീർഘ ചതുരവും	ലംബകം	
3.	ആറ് സമഭുജ ത്രികോണങ്ങൾ	ഷഡ്ഭുജം	

(a) ബഹുഭുജം

'n' രേഖാഖണ്ഡങ്ങളാൽ അടഞ്ഞ സമതല രൂപമാണ് ഒരു **ബഹുഭുജം.**

ഒരു തലത്തിൽ നേർരേഖാഖണ്ഡങ്ങളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട ഒരു അടഞ്ഞ ചിത്രമാണ്.

നേർരേഖയാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട രൂപങ്ങളിൽ മൂന്ന് വശങ്ങളുള്ളവയെ ഒരു ത്രികോണമെന്നും നാലുവശങ്ങളുള്ളവയെ ഒരു **ചതുർഭുജമെന്നും** പറയുന്നു.



ചിത്രം.2.20

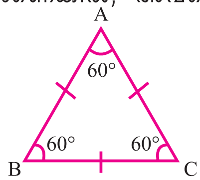
ബഹുപദം എന്ന വാക്കിന് അർത്ഥം മൂന്നോ അതിലധികമോ വശങ്ങളുള്ള ഒരു **നേർരേഖ**യാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട രൂപം.

(b) ക്രമ ബഹുഭുജം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയെ **ക്രമബഹുഭുജം** എന്ന് പറയുന്നു

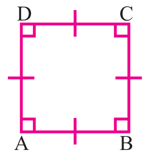
ഉദാഹരണമായി,

(i) ഒരു സമഭുജ ത്രികോണം മൂന്ന് വശങ്ങളുള്ള ഒരു ക്രമബഹുഭുജമാണ്



ചിത്രം. 2.21

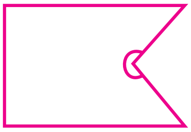
(ii) സമചതുരം നാലു വശങ്ങളുള്ള ഒരു ക്രമബഹുഭുജമാണ്.



ചിത്രം. 2.22

(c) ക്രമരഹിത ബഹുഭുജം

ക്രമമായ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളല്ലാത്ത ബഹുഭുജങ്ങളെ **ക്രമരഹിത ബഹുഭുജമെന്ന്** പറയുന്നു.



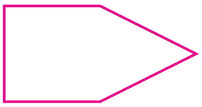
ചിത്രം. 2.23

(d) അവതല ബഹുഭുജം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിൽ ഒരു കോൺ എങ്കിലും 180^0, ആണെങ്കിൽ അതിനെ ഒരു **അവതല ബഹുഭുജമെന്ന്** പറയുന്നു.

(e) ഉത്തല ബഹുഭുജം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിൽ ഓരോ ആന്തരകോണും 180^0 യിൽ കുറവാണെങ്കിൽ അതിനെ ഒരു **ഉത്തല ബഹുഭുജമെന്ന്** പറയുന്നു.

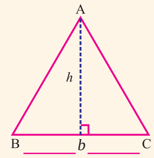
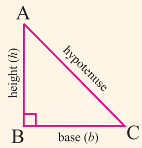
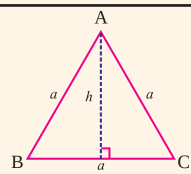
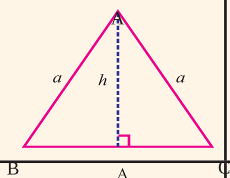
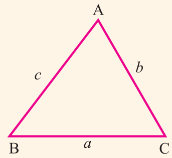
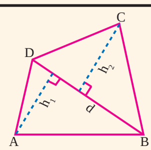
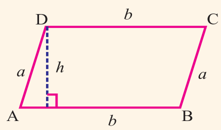
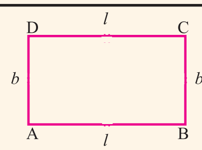
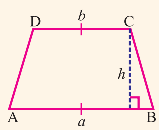
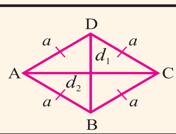
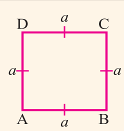


ചിത്രം. 2.24

ബഹുഭുജങ്ങളെ താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ തരംതിരിക്കാം

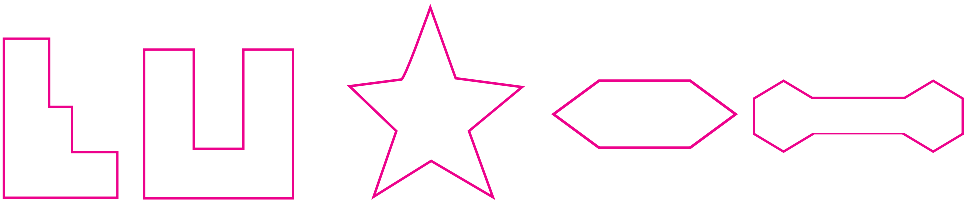
വശങ്ങളുടെ എണ്ണം	ബഹുഭുജത്തിന്റെ പേര്
3	ത്രികോണം
4	ചതുർഭുജം
5	പഞ്ചഭുജം
6	ഷഡ്ഭുജം
7	സപ്തഭുജം
8	അഷ്ടഭുജം
9	നവഭുജം
10	ദശഭുജം

മിശ്രരൂപങ്ങളിൽ പലതും ക്രമരഹിത ബഹുഭുജങ്ങൾ. അവയെ നമ്മൾ അറിയുന്ന ബഹു രൂപങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അങ്ങനെ, ഏഴാം തരത്തിൽ പഠിച്ചിരുന്നതുപോലെ സമതലരൂപങ്ങളുടെ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണവും ചുറ്റളവും നമുക്ക് കാണാം. അവ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്

നമ്പർ	രൂപത്തിന്റെ പേര്	ചിത്രം	വിസ്തീർണ്ണം (ച.മാത്രകൾ)	ചുറ്റളവ് (മാത്രകൾ)
1.	ത്രികോണം		$\frac{1}{2} \times b \times h$	AB + BC + CA
2.	സമകോൺ		$\frac{1}{2} \times b \times h$	(ആധാരം + ഉന്നതി + കർണ്ണം)
3.	സമഭുജത്രികോണം		$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ഇവിടെ ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)	AB+BC+CA = 3a ; ഉന്നതി , $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ മാത്രകൾ
4.	ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം		$h \times \sqrt{a^2 - h^2}$	$2a + 2\sqrt{a^2 - h^2}$
5.	വിഷമഭുജ ത്രികോണം		$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ഇവിടെ $s = \frac{a+b+c}{2}$	AB + BC + CA $= (a+b+c)$
6.	ചതുർഭുജം		$\frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$	AB + BC + CD + DA
7.	സാമാന്തരികം		$b \times h$	$2 \times (a + b)$
8.	ദീർഘചതുരം		$l \times b$	$2 \times (l + b)$
9.	ലംബകം		$\frac{1}{2} \times h \times (a+b)$	AB + BC + CD + DA
10.	സമചതുർഭുജം		$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ ഇവിടെ d_1, d_2 വികർണങ്ങളാണ്	$4a$
11.	സമചതുരം		a^2	$4a$

പ്രവർത്തി

തന്നിട്ടുള്ള സമതല രൂപങ്ങളെ നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമുള്ള ആകൃതിയിൽ വിഭജിച്ച് നിങ്ങൾ തമ്മിൽ ചർച്ച ചെയ്യുക.

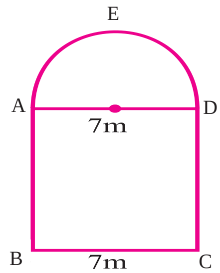


ചിത്രം.2.25

ഉദാഹരണം 2.5

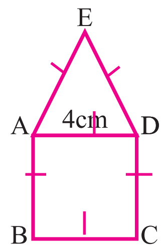
താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മിശ്ര രൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

(i)



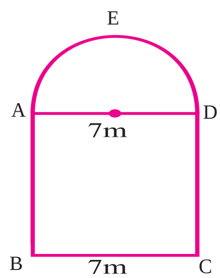
ചിത്രം.2.26

(ii)



ചിത്രം.2.27

നിർദ്ധാരണം



(i) ഇത് ഒരു സമചതുരം ABCD ഉം ഒരു അർദ്ധവൃത്തം DEA യും ചേർന്നുണ്ടായ ഒരു മിശ്ര രൂപമാണിത്. ഇവിടെ ചാപം $\overset{\frown}{DEA}$ എന്നത് AD. വ്യാസമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്

തന്നിട്ടുള്ളവ : ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശം = 7 സെ.മീ.

∴ ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം = 7 സെ.മീ.

∴ ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, r = $\frac{7}{2}$ സെ.മീ.

മിശ്രരൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overset{\frown}{DEA}$

$P = 7 + 7 + 7 + \frac{1}{2} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്)

$= 21 + \frac{1}{2} \times 2\pi r = 21 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}$

$P = 21 + 11 = 33$ സെ.മീ.

∴ മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് = 33 സെ.മീ.

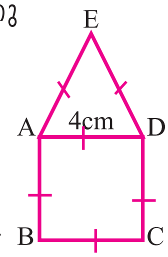
മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$A = \frac{\pi r^2}{2} + a^2$

$= \frac{22}{7 \times 2} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} + 7^2 = \frac{77}{4} + 49$

∴ തന്നിട്ടുള്ള മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 19.25 + 49 = 68.25$ സെ.മീ.^{2}.

(ii) ഒരു സമചതുരം ABCD യും സമഭുജ ത്രികോണം DEA യും ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ മിശ്രരൂപമാണ് തന്നിട്ടുള്ളത്.



തന്നിട്ടുള്ളവ : ഒരു സമചുതരത്തിന്റെ വശം = 4 സെ.മീ.

∴ മിശ്രരൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = AB + BC + CD + DE + EA

= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20സെ.മീ.

∴ മിശ്രരൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = 20 സെ.മീ.

തന്നിട്ടുള്ള മിശ്രരൂപത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $\quad \sqrt{3} = 1.732$

$= 4 \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4$

$= 16 + 1.732 \times 4$

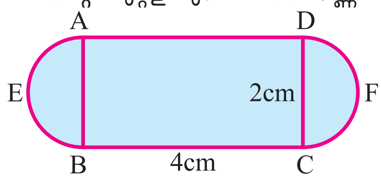
തന്നിട്ടുള്ള മിശ്രരൂപത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 16 + 6.928 = 22.928

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ≃ 22. 93 സെ.മീ.^{2}.

ഉദാഹരണം 2.6

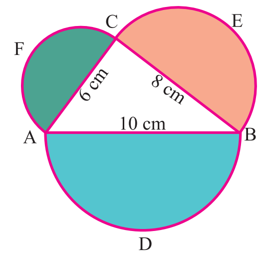
നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ ചുറ്റളവും വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക

(i)



ചിത്രം. 2.28

(ii)

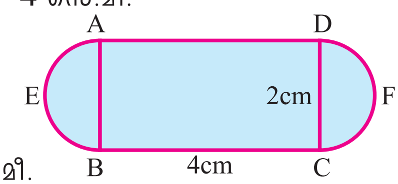


ചിത്രം.2.29

നിർദ്ധാരണം

(i) ഒരു ദീർഘചതുരം ABCD യുടെയും രണ്ടു തുല്യ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള അർദ്ധഗോളങ്ങൾ AEB യും DFC യും ചേർന്നുള്ള ഒരു മിശ്ര രൂപമാണ് തന്നിട്ടുള്ളത്

തന്നിട്ടുള്ളവ: ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം, l = 4 സെ.മീ.



ദീർഘ ചതുരത്തിന്റെ വീതി, b = 2 സെ.മീ.

ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം = 2 സെ.മീ.

∴ ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, r = $\frac{2}{2}$ = 1 സെ.മീ.

∴ തന്നിട്ടുള്ള രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = $AD + BC + \widehat{AEB} + \widehat{DFC}$

$= 4 + 4 + 2 \times \frac{1}{2} \times$ (ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്)

$= 8 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= 8 + 2 \times \frac{22}{7} \times 1$

$= 8 + 2 \times 3.14$

$= 8 + 6.28$

$\therefore$ തന്നിട്ടുള്ള രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $= 14.28$ സെ.മീ.

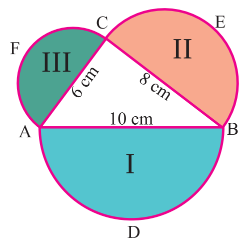
തന്നിട്ടുള്ള രൂപത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = ദീർഘചതരും ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + 2 × ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= l \times b + 2 \times \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 4 \times 2 + 2 \times \frac{22 \times 1 \times 1}{7 \times 2}$$

$\therefore$ മൊത്തം വിസ്തീർണ്ണം $= 8 + 3.14 = 11.14$ സെ.മീ.^{2}

(ii) I, II, III എന്നിവ യഥാക്രമം ADB, BEC, CFA എന്നീ മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.



തന്നിട്ടുള്ളവ :

അർദ്ധ വൃത്തം I ന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $r_1 = \frac{10}{2} = 5$ സെ.മീ.

അർദ്ധ വൃത്തം II ന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $r_2 = \frac{8}{2} = 4$ സെ.മീ.

അർദ്ധ വൃത്തം III ന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $r_3 = \frac{6}{2} = 3$ സെ.മീ.

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = അർദ്ധവൃത്തം I ന്റെ ചുറ്റളവ് + അർദ്ധവൃത്തം II ന്റെ ചുറ്റളവ് + അർദ്ധവൃത്തം III ന്റെ ചുറ്റളവ്

$$= (\pi + 2) \times 5 + (\pi + 2) \times 4 + (\pi + 2) \times 3$$

$$= (\pi + 2)(5 + 4 + 3) = (\pi + 2) \times 12$$

$$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 12 = \frac{36}{7} \times 12 = 61.714$$

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\simeq 61.71$ സെ.മീ.

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, A = അർദ്ധ വൃത്തം I ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + അർദ്ധ വൃത്തം II ന്റെവിസ്തീർണ്ണം + അർദ്ധ വൃത്തം III ന്റെവിസ്തീർണ്ണം

$$A = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2}$$

$$= \frac{22}{7 \times 2} \times 5 \times 5 + \frac{22}{7 \times 2} \times 4 \times 4 + \frac{22}{7 \times 2} \times 3 \times 3$$

$$A = \frac{275}{7} + \frac{176}{7} + \frac{99}{7} = \frac{550}{7} = 78.571 \text{ സെ.മീ.}^2$$

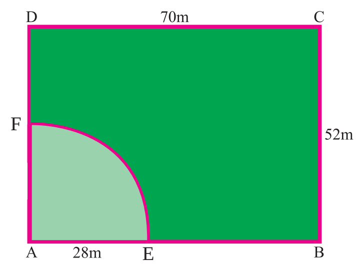
നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\simeq 78.57$ സെ.മീ.^{2}

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് നാം നിരീക്ഷിച്ചത്,

അർദ്ധവൃത്തം BEC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + അർദ്ധവൃത്തം CFA യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = അർദ്ധവൃത്തം ADB യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

ഉദാഹരണം 2.7

70 മീറ്ററും 52 മീറ്ററും അളവുകളുള്ള ഒരു ദീർഘചതുര പുരയിടത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ 28 മീ. നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് ഒരു കുതിരയെ കെട്ടിയിരിക്കുന്നു. കുതിര പുൽമേയുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എത്ര ? പുല്ലുമേയാതെ വിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എത്ര ?



ചിത്രം.2.30

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം, l = 70 മീ.

ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വീതി, b = 52 മീ.

കയറിന്റെ നീളം = 28 മീ.

നിഴലിട്ട ഭാഗം AEF കുതിരയ്ക്ക് പുല്ലുമേയാൻ കഴിയുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇത് 'r' വ്യാസാർദ്ധമായുള്ള ഒരു വൃത്തചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണമാണ്,

$r = 28$ മീ.

ചതുർത്ഥാംശം AEF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{4} \times \pi r^2$ ച. മാത്രകൾ

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28 = 616$ മീ.^{2}

$\therefore$ പുല്ലുമേയുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 616 മീ.^{2}

പുല്ലുമേയാതെ വിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം =

ദീർഘ ചതുരം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം –

ചതുർത്ഥാംശം AEF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

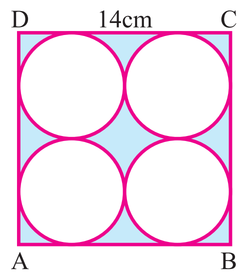
ദീർഘ ചതുരം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = $l \times b$ ച.മാത്രകൾ

$= 70 \times 52 = 3640$ മീ.^{2}

$\therefore$ പുല്ലു മേയാതെ വിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 3640 - 616 = 3024$ മീ.^{2}

ഉദാഹരണം 2.8

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ 14 സെ.മീ. വശമുള്ള ABCD എന്ന സമചതുരത്തിന്റെ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം.2.31

നിർദ്ധാരണം

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശം, a = 14 സെ.മീ.

ഓരോ വൃത്തത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധം, r = $\frac{7}{2}$ സെ.മീ.

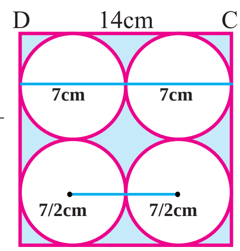
നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം – 4 × ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= a^2 - 4(\pi r^2)$

$= 14 \times 14 - 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= 196 - 154$

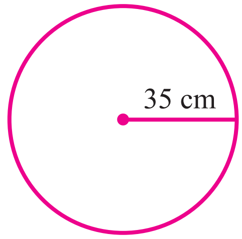
$\therefore$ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 42 സെ.മീ^{2}



ചിത്രം.2.32

ഉദാഹരണം 2.9

35 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ചെമ്പുകമ്പിയെ സമചതുരമാക്കിയാൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശം കാണുക.



ചിത്രം.2.33

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $r = 35$സെ.മീ.

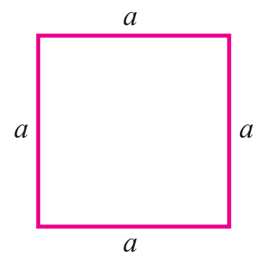
അതേ കമ്പിയെ തന്നെ സമചതുരാകൃതിയിൽ ആക്കുന്നതിനാൽ

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = $2\pi r$ മാത്രകൾ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$ സെ.മീ.

P = 220 സെ.മീ.



ചിത്രം.2.34

സമചതുരത്തിന്റെ വശം 'a' എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = 4a മാത്രകൾ

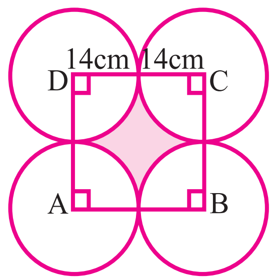
$4a = 220$

$a = 55$ സെ.മീ.

$\therefore$ സമചതുരത്തിന്റെ വശം = 55 സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 2.10

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിലും തുല്യ അളവുകളുള്ള നാലു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ചിത്രം 2.35 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള പോലെ ചിത്രീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും അളവ് 28 സെ.മീ. എങ്കിൽ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക



ചിത്രം. 2.35

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമചതുരം ABCD യുടെ വശം a ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore a = 28$സെ.മീ.

$\therefore$ ഓരോ വൃത്തത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധം , $r = \frac{28}{2}$

$= 14$ സെ.മീ.

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം − 4 × ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

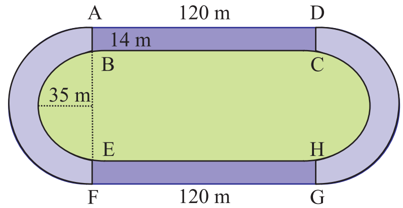
$= a^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$

$= 28 \times 28 - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 784 - 616$

$\therefore$ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 168 സെ.മീ^{2}

ഉദാഹരണം 2.11



ചിത്രം.2.36

120 മീ. നീളവും 14 മീ. അകലവുമുള്ള ഒരു ട്രാക്കിന്റെ അഗ്രഭാഗങ്ങൾ അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലാണ്, ഓരോന്നിന്റെയും ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം 35 മീ. ആയാൽ ട്രാക്കിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ :

ആന്തര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, r = 35 മീ.

ട്രാക്കിന്റെ വീതി = 14 മീ.

$\therefore$ ബാഹ്യവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, R = 35 + 14 = 49 മീ.

R = 49 മീ.

അർദ്ധവൃത്ത ട്രാക്കുകളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെയും ദീർഘചതുര ട്രാക്കുകളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെയും തുകയാണ് ട്രാക്കിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

ദീർഘചതുര ട്രാക്കുകൾ ABCD യുടെയും EFGH ന്റെയും വിസ്തീർണ്ണം

$= 2 \times (l \times b)$

$= 2 \times 14 \times 120 = 3360$ മീ.^{2}

അർദ്ധവൃത്ത ട്രാക്കുകളുടെ വിസ്തീർണ്ണം = 2 × (ബാഹ്യ അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം − ആന്തര അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം)

$= 2\times\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2\right)$

$= 2\times\frac{1}{2}\times\pi(R^2 - r^2)$

$= \frac{22}{7}\times(49^2 - 35^2)$

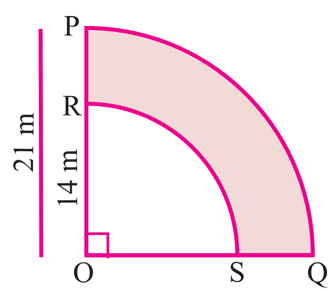
$= \frac{22}{7}(49+35)(49-35)$

$= \frac{22}{7}\times 84\times 14 = 3696$ മീ.^{2}

$\therefore$ ട്രാക്കിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 3360 + 3696

= 7056 മീ^{2}

ഉദാഹരണം 2.12



ചിത്രം. 2.37

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം PQSR ൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് ഒരു പൂമെത്തയാണ് OP = 21 മീ., OR = 14 മീ. എങ്കിൽ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : OP = 21മീ. കൂടാതെ OR = 14 മീ.

പൂമെത്തയുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ചതുർത്ഥാംശം OQP യുടെ വിസ്തീർണ്ണം − ചതുർത്ഥാംശം OSR ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \frac{1}{4}\pi\times OP^2 - \frac{1}{4}\pi\times OR^2$

$$= \frac{1}{4}\times\pi\times21^2 - \frac{1}{4}\times\pi\times14^2$$

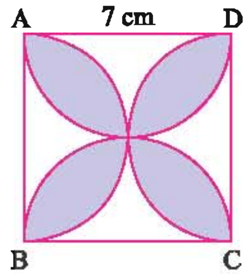
$$= \frac{1}{4}\times\pi\times(21^2 - 14^2)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times(21+14)\times(21-14)$$

∴ പൂമെത്തയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times35\times7 = 192.5$ മീ.^{2}

ഉദാഹരണം 2.13

ചിത്രം 2.38 ൽ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. ഇവിടെ സമചതുര ABCD യുടെ വശം 7 സെ.മീ.

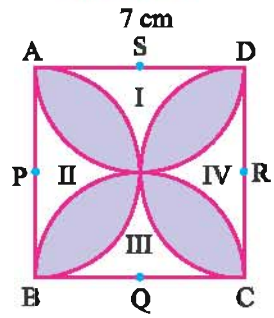


ചിത്രം.2.38

നിർദ്ധാരണം

ചിത്രം 2.39 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നിഴലിടാത്ത ഭാഗത്തെ I, II, III , IV എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക.

AB, BC,CD കൂടാതെ DA എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം P,Q,R മറ്റും S എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം.2.39

സമചതുരത്തിന്റെ വശം, a = 7 സെ.മീ.

അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r = $\frac{7}{2}$ സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം I + വിസ്തീർണ്ണം III = സമചതുരം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം – Pയും Rഉം കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള രണ്ട് അർദ്ധവൃത്തങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= a^2 - 2\times\frac{1}{2}\times\pi r^2$$

$$= 7\times7 - 2\times\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}$$

∴ വിസ്തീർണ്ണം I + വിസ്തീർണ്ണം III $= \left(49 - \frac{77}{2}\right)$ cm^2 $= \frac{21}{2}$ സെ.മീ.^{2}

അതുപോലെ, നമുക്കറിയാം

വിസ്തീർണ്ണം II +വിസ്തീർണ്ണം IV $= \left(49 - \frac{77}{2}\right)$ cm^2 $= \frac{21}{2}$ സെ.മീ.^{2}

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = സമചതുരം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം – (വിസ്തീർണ്ണം I + വിസ്തീർണ്ണം II + വിസ്തീർണ്ണം III + വിസ്തീർണ്ണം IV)

$$= 49 - \left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2}\right)$$

$$= 49 - 21 = 28$$ സെ.മീ.^{2}

∴ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 28 സെ.മീ.^{2}

ഉദാഹരണം 2.14

ഒരു സർവെയർ ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ അളവുകൾ താഴെ കാണുന്നതു പോലെ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ആ സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

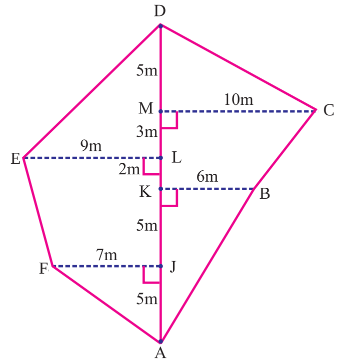
	Metres	
	To D	
	20	
	15	10 to C
9 to E	12	
	10	6 to B
7 to F	5	
	From A	

ചിത്രം.2.40

നിർദ്ധാരണം

A മുതൽ Dവരെയുള്ള ഭാഗത്തിനെ സർവെയർ J, K, L, M എന്ന് വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ളത് : AJ = 5 മീ. , JF = 7 മീ.,
KB = 6 മീ., LE = 9 മീ. , MC = 10 മീ.,
AK = 10 മീ., AL = 12 മീ.
AM = 15 മീ. , AD = 20 മീ.



തന്നിട്ടുള്ള സ്ഥലം ലംബകം KBCM, LEFJ സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ ABK, MCD, DEL, JFA എന്നിവയുടെ മിശ്രരൂപമാണ്

ലംബകം KBCM ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A_1 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_1 = \frac{1}{2}\times(KB + MC)\times KM$$
$$= \frac{1}{2}\times(6 + 10)\times 5$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\times 16\times 5 = 40 \text{ മീ.}^2$$

(∵ KB, MC സമാന്തരവശങ്ങൾ KM ഉന്നതി
KB = 6 മീ., MC = 10 മീ.,
KM = AM – AK
= 15 – 10 = 5 മീ.)

ലംബകം LEFJ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം A_2 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_2 = \frac{1}{2}\times(JF + LE)\times JL$$
$$= \frac{1}{2}\times(7 + 9)\times 7$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\times 16\times 7 = 56. \text{ മീ.}^2$$

(∵ JF, JL സമാന്തരവശങ്ങൾ LE, ഉന്നതി
JF = 7 മീ., LE = 9 മീ.,
JL = AL – AJ
= 12 – 5 = 7 മീ.)

സമകോണ ത്രികോണം ABK യുടെ വിസ്തീർണ്ണം A_3 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_3 = \frac{1}{2}\times AK\times KB$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\times 10\times 6 = 30 \text{ മീ.}^2$$

സമകോണ ത്രികോണം MCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം A_4 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_4 = \frac{1}{2}\times MC\times MD.$$
$$= \frac{1}{2}\times 10\times 5$$
$$A_4 = \frac{50}{2} = 25 \text{ മീ.}^2$$

സമകോണ ത്രികോണം DELന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A_5 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_5 = \frac{1}{2}\times DL\times LE$$
$$= \frac{1}{2}\times(AD - AL)\times LE$$
$$= \frac{1}{2}(20 - 12)\times 9$$
$$A_5 = \frac{1}{2}\times 8\times 9 = 36 \text{ മീ}^2$$

സമകോണ ത്രികോണം JFA യുടെ വിസ്തീർണ്ണം A_6 എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A_6 = \frac{1}{2} \times AJ \times JF$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 7 = \frac{35}{2} = 17.5\ m^2.$$

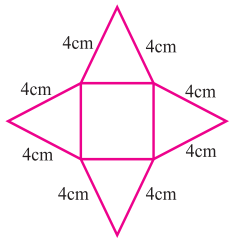
സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

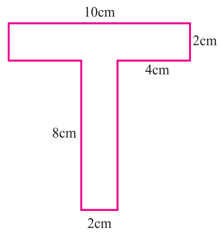
$= 40 + 56 + 30 + 25 + 36 + 17.5$

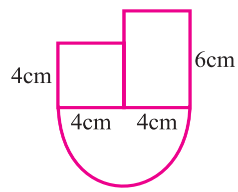
$\therefore$ സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 204.5$ മീ.^{2}

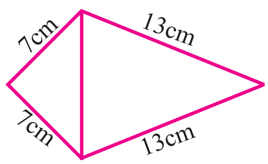
അഭ്യാസം 2.2

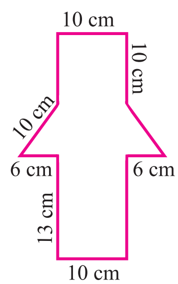
1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് കാണുക.

(i) 

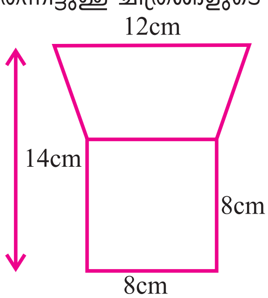
(ii) 

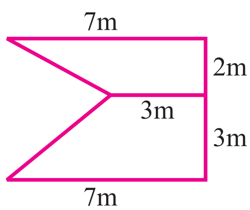
(iii) 

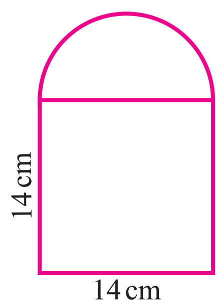
(iv) 

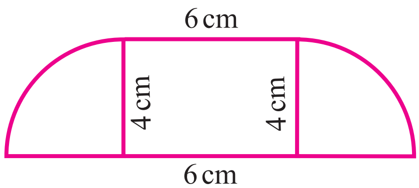
(v) 

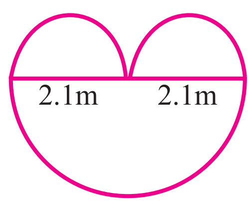
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

(i) 

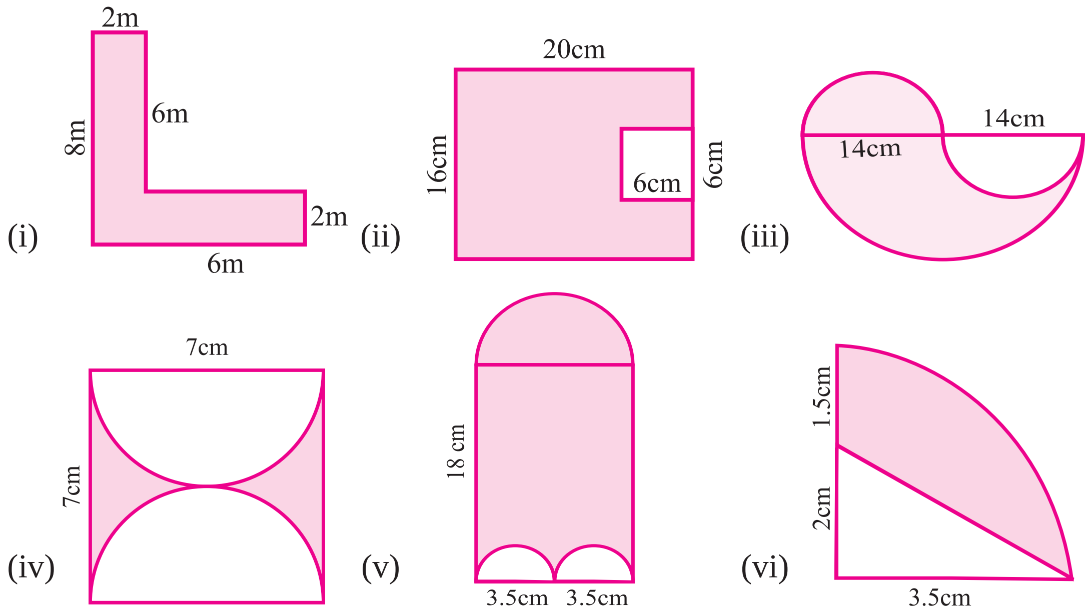
(ii) 

(iii) 

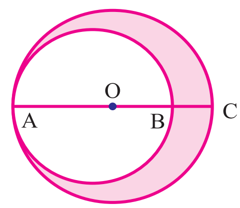
(iv) 

(v) 

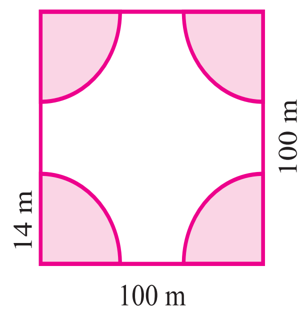
3. നിറം കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



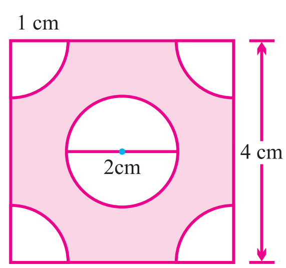
4. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ AC = 54 സെ.മീ., BC = 10 സെ.മീ. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം O നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



5. 40 മീ. × 36 മീ. അളവുള്ള ഒരു ദീർഘ ചതുര പുരയിടത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ 14 മീ. നീളമുള്ള ഒരു കയറിൽ പശുവിനെ പുല്ലു മേയുന്നതിനായി കെട്ടിയിരിക്കുന്നു. പശു പുല്ലു മേയാത്ത ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



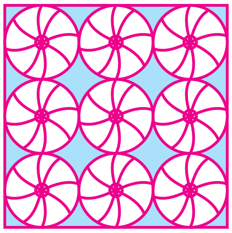
6. 100 മീ. വശമുള്ള സമചതുര ഉദ്യാനത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിലും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ 14 മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരോ ചതുർത്ഥാംശം ആകൃതിയിലുള്ള പൂമെത്തയുണ്ട്. ഉദ്യാനത്തിലെ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



7. ചിത്രത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. നാലു മൂലകളും ചതുർത്ഥാംശങ്ങളാണ്. കേന്ദ്രത്തിൽ 2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തമുണ്ട്.

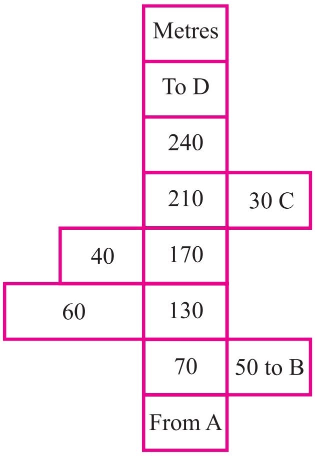
8. AB = 20 സെ.മീ, BC = 14 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ABCD എന്ന ദീർഘചതുരത്തിൽ നിന്നും BC വ്യാസത്തിലുള്ള ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വെട്ടിയെടുത്താൽ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

9. ഒരു സമചതുര ആകൃതിയിലുള്ള തൂവാലയിൽ 7 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒൻപത് വൃത്തങ്ങൾ രൂപകല്പന ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

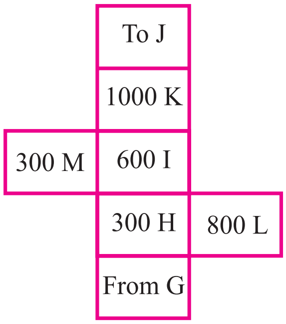


10. ഒരു സർവെയറുടെ ഫീൽഡു ബുക്കിലെ കുറിപ്പുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഫീൽഡിന്റെ പ്ലാൻ വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

(i)



(ii)



പ്രവർത്തി

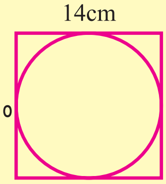
ഉറുമ്പിനെ സഹായിക്കാൻ നിങ്ങൾക്ക് കഴിയുമോ ?

ഒരു ഉറുമ്പ് തറയിൽ ചിതറികിടക്കുന്ന വിവിധ ആകൃതിയിലുള്ള ആഹാര അവശിഷ്ടങ്ങൾക്ക് ചുറ്റും നീങ്ങുന്നു. ഏത് ആഹാര അവശിഷ്ടത്തിനാണ് കുറച്ച് വലം വയ്ക്കേണ്ടത് ഏതിനാണ് കൂടുതൽ വലം വയ്ക്കേണ്ടത്.

ശ്രമിക്കുക

ഏതാണ് ചെറുത് ?

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണോ അതോ അതിൽ അന്തർലേഖനം ചെയ്തിട്ടുള്ള വൃത്തമാണോ ?



Concept Summary

- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ 360° ആണ്.
- ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $= (\pi + 2) \times r$ മാത്രകൾ.
- ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \dfrac{\pi r^2}{2}$ മാത്രകൾ
- ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180°ആണ്.
- ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\right) \times r$ ച.മാത്രകൾ
- ഒരു ചതുർത്ഥാംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 90^0 ആണ്.
- ഒരു മിശ്രരൂപത്തിന്റെ അതിർവരമ്പുകളുടെ നീളമാണ് അതിന്റെ ചുറ്റളവ്.
- 'n' രേഖാഖണ്ഡങ്ങളാൽ അടഞ്ഞ ഒരു മിശ്ര രൂപമാണ് ഒരു ബഹുഭുജം.
- എല്ലാ വശങ്ങളും എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമായ ഒരു ബഹുഭുജത്തെ ക്രമ ബഹുഭുജ മെന്ന് പറയുന്നു.
- സമതല രൂപങ്ങളുടെ മിശ്രിതങ്ങളാണ് ക്രമരഹിത ബഹുഭുജം.

3

ജ്യാമിതി

3.1 ആമുഖം
3.2 ത്രികോണങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ
3.3 സർവ്വ സമത്രികോണങ്ങൾ

3.1 ആമുഖം

ജ്യാമിതിയുടെ വളർച്ചയ്ക്ക് കാരണം ക്രിസ്തുവിന് 1000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ജീവിച്ചിരുന്ന ഈജിപ്തുകാരാണ്. നൈൽ നദിയിൽ വർഷം തോറും ഉണ്ടാകാറുള്ള വെള്ളപൊക്കത്തിനുശേഷം നില അതിർത്തികളെ പുനഃസ്ഥാപിക്കുന്നതിനായി പുരാതന ഈജിപ്തുകാർ ജ്യാമിതീയ ആശയങ്ങളെ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു.

നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ജ്യാമിതി വിവിധ മേഖലകളിൽ സുപ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളായ അഷ്ട ശീർഷങ്ങളോടു കൂടിയ തേനീച്ച കൂടുകൾ, പന്തുകൾ, ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ജലസംഭരണികൾ, സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള കിണറുകൾ എന്നിവ പ്രകൃതിയിൽ നാം കാണുന്നു. പ്രായോഗിക ജ്യാമിതിക്ക് ഒരുത്തമ ഉദാഹരണമാണ് പിരമിഡുകൾ, ഭൗതീകശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, രൂപകല്പന, എഞ്ചിനീയറിംഗ്, വാസ്തുശില്പം കൂടാതെ കുറ്റാന്വേഷണ ശാസ്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിൽ പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി നിർണ്ണായക പങ്കു വഹിക്കുന്നു.

'ജിയോ' 'മെട്രോൺ' എന്നീ രണ്ടു ഗ്രീക്ക് പദങ്ങളിൽ നിന്നും ഉരുത്തിരിഞ്ഞ പദമാണ് **'ജ്യോമിട്രി'. 'ജിയോ'** എന്ന വാക്കിന് **'ഭൂമി'** എന്നും **'മെട്രോൺ'** എന്ന വാക്കിന് **'അളവ് '** എന്നും ആണ് അർത്ഥം. ഗണിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ശാഖയാണ് ജ്യാമിതി. വസ്തുക്കളുടെ ആകൃതി വലിപ്പം, അവസ്ഥ എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ജ്യാമിതി.

സമാന്തരരേഖകൾ, ഛേദകരേഖകൾ, രേഖകൾ ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ, സമീപകോണുകൾ, ഏകാന്തരകോണുകൾ എന്നിവയുടെ ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ചും ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ചും നാം ഏഴാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച് കഴിഞ്ഞു.

യൂക്ലിഡ്
ജ്യാമിതിയുടെ പിതാവ്

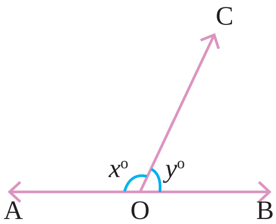
യൂക്ലിഡ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ജ്യാമിതിയെകുറിച്ച് യുക്തി യുക്തമായുള്ള ചിന്തകൾക്ക് ജന്മം നൽ കി. ബി. സി. 300-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ച് വ്യത്യസ്ഥ വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് അവയെ ക്രമാനുസ്യതമായ 13 പുസ്തകങ്ങളായി പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഈ പുസ്തകങ്ങളെ യൂക്ലിഡ് എലമെന്റസ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു. യുക്ലിഡ് പറഞ്ഞു.

" The whole is greater with any of its parts."

നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അഭ്യാസം മൂലം ഫലങ്ങളെ ഓർമ്മിക്കാം.

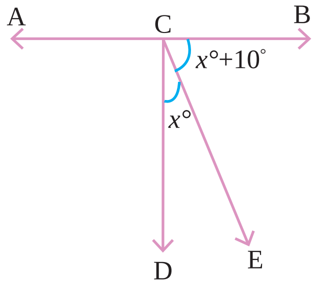
പുനഃപരിശോധന അഭ്യാസം

1. ചിത്രം 3.1 ൽ, $x° = 128°$ എങ്കിൽ $y°$ കാണുക.



ചിത്രം.3.1

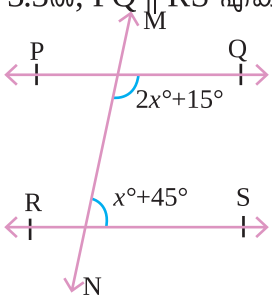
2. ചിത്രം 3.2 ൽ, $\angle ACD = 90°$ എങ്കിൽ $\angle BCE$ യും $\angle ECD$ യും കാണുക.



ചിത്രം 3.2

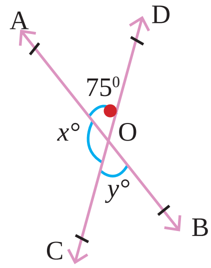
3. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ട് കോണുകൾ 43° യും 27° യും എങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ കോണളവ് കാണുക.

4. ചിത്രം 3.3ൽ, PQ || RS എങ്കിൽ $x°$ കാണുക.



ചിത്രം. 3.3

5. ചിത്രം 3.4 ൽ, AB യും CD യും O എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ $x°$ യും $y°$ കാണുക.



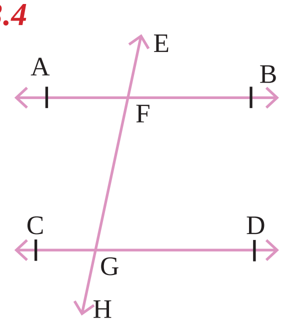
ചിത്രം. 3.4

6. ചിത്രം 3.5ൽ, AB || CD വിട്ടുപോയഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) $\angle EFB$ യും $\angle FGD$ യും .... കോണുകൾ.

   (ii) $\angle AFG$ യും $\angle FGD$ യും .... കോണുകൾ.

   (iii) $\angle AFE$ യും $\angle FGC$ യും .... കോണുകൾ.



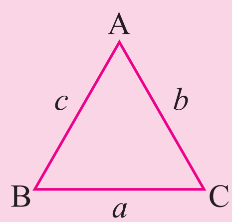
ചിത്രം. 3.5

3.2 ത്രികോണങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

ഒരു തലത്തിലുള്ള മൂന്ന് രേഖകളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ജ്യാമിതീയ രൂപമാണ് ത്രികോണം.

ത്രികോണത്തിനെ 'Δ' ചിഹ്നം കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.

ത്രികോണം ABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ A, B, Cയുടെ എതിർവശങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്ന് കുറിക്കുന്നു.



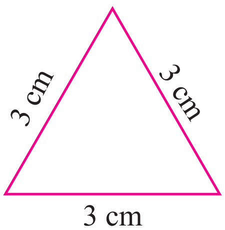
ചിത്രം. 3.6

3.2.1. ത്രികോണങ്ങളുടെ വകഭേദങ്ങൾ

ത്രികോണങ്ങളെ അവയുടെ വശങ്ങൾ മറ്റും കോണുകൾ ഇവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ രണ്ടായി തിരിക്കാം.

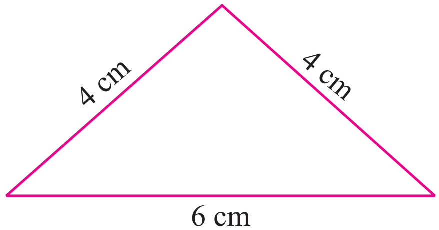
വശങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ :

(a) സമഭുജത്രികോണം



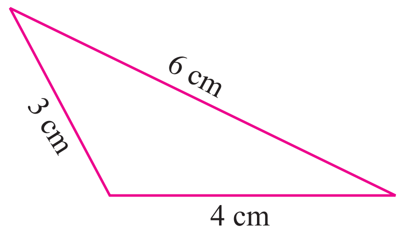
മൂന്നു വശങ്ങളും സമം

(b) ദ്വിസമഭുജത്രികോണം



രണ്ടു വശങ്ങളും സമം

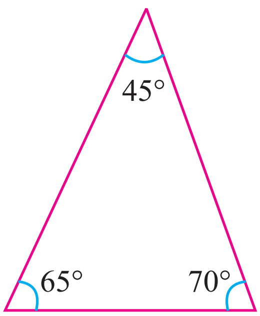
(c) വിഷമഭുജത്രികോണം



എല്ലാ വശങ്ങളും വ്യത്യാസം

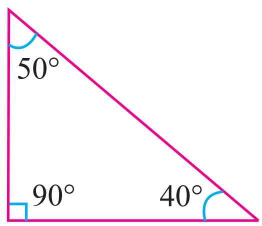
കോണുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ :

(d) ന്യൂനകോണ ത്രികോണം



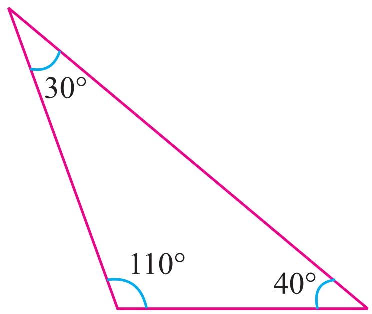
മൂന്ന് ന്യൂനകോണുകൾ

(e) സമകോണ ത്രികോണം



ഒരു കോൺ സമകോൺ

(f) ബൃഹത്കോണ ത്രികോണം

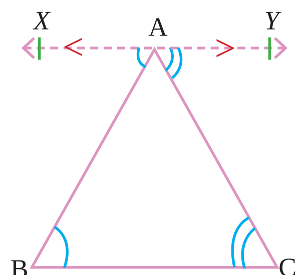


ഒരു കോൺ ബൃഹത്കോൺ

3.2.2 ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക

സിദ്ധാന്തം 1

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളുടെയും തുക 180°.



ചിത്രം. 3.7

സങ്കൽപം : ABC ഒരു ത്രികോണം

അനുമാനം : $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$

നിർമ്മിതി : ശീർഷം A യിൽ കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി XY വരയ്ക്കുക

തെളിവ് :

പ്രസ്താവന	കാരണം
(i) $BC \parallel XY$ കൂടാതെ AB ഛേദകം $\therefore \angle ABC = \angle XAB$	ഏകാന്തരകോണുകൾ
(ii) $\angle BCA = \angle YAC$	ഏകാന്തരകോണുകൾ
(iii) $\angle ABC + \angle BCA = \angle XAB + \angle YAC$	(i),(ii) ഇവ കൂട്ടുക.
(iv) $(\angle ABC + \angle BCA) + \angle CAB = (\angle XAB + \angle YAC) + \angle CAB$	രണ്ട് വശങ്ങളിലും $\angle BAC$ കൂട്ടുക.
(v) $\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$	രേഖീയകോൺ 180°

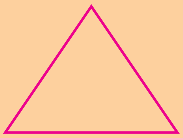
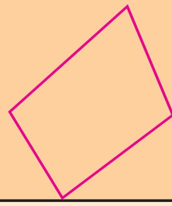
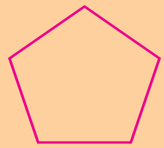
ഫലങ്ങൾ

(i) ത്രികോണം മൂന്ന് വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം

(ii) ഏതൊരു ബഹുഭുജത്തിന്റേയും വികർണങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ത്രികോണം കിട്ടുന്നു

(iii) ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉൾകോണുകളുടെ തുക കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം $(n-2)\ 180^\circ$, ഇവിടെ n വശങ്ങളുടെ എണ്ണം.

ഉദാഹരണം

ചിത്രം			
വശങ്ങളുടെ എണ്ണം	3	4	5
ഇനം തിരിക്കൽ	ത്രികോണം	ചതുർഭുജം	പഞ്ചഭുജം
കോണുകളുടെ തുക	$(3-2)\ 180^\circ = 180^\circ$	$(4-2)180^\circ = 360^\circ$	$(5-2)\ 180^\circ = 540^\circ$

സിദ്ധാന്തം 2

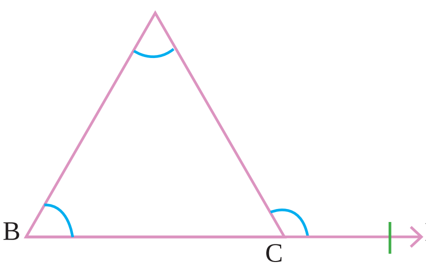
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം നീട്ടുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണിന്റെ അളവ് ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

സങ്കൽപം : ABC ത്രികോണം

BC നീട്ടിവരച്ച് D എന്ന ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക

അനുമാനം : $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

തെളിവ് :



ചിത്രം. 3.8

പ്രസ്താവന	കാരണം
(i) ΔABC ൽ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$	ത്രികോണ നിയമമനുസരിച്ച് കോണുകളുടെ തുക.
(ii) $\angle BCA + \angle ACD = 180^0$	നേർരേഖയിലെ സമീപ കോണുകളുടെ തുക.
(iii) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BCA + \angle ACD$	സമീകരിക്കുക (i) ഉം (ii) ഉം
(iv) $\therefore \angle ABC + \angle CAB = \angle ACD$	(iii) ൽ നിന്നും $\angle BCA$ ഇരുവശത്ത് നിന്നും കുറയ്ക്കുക.
(v) ബാഹ്യകോൺ $\angle ACD$ ഉൾ എതിർകോണുകളായ $\angle ABC$ കൂടാതെ $\angle CAB$ എന്നിവയുടെ തുകയ്ക്ക് സമം.	സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

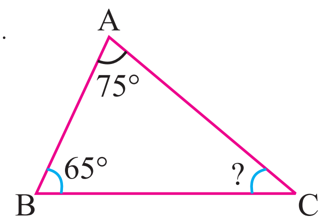
ഫലങ്ങൾ

(i) സമവശങ്ങൾക്കെതിരെയുള്ള കോണുകൾ തുല്യം.

(ii) വലിയവശത്തിന് എതിരേയുള്ള കോൺ വലിയകോൺ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.1

$\triangle ABC, \angle A = 75^\circ, \angle B = 65^\circ$ എങ്കിൽ $\angle C$ കാണുക.



ചിത്രം. 3.9

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം $\triangle ABC$, യിൽ

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$
$$75^\circ + 65^\circ + \angle C = 180^\circ$$
$$140^\circ + \angle C = 180^\circ$$
$$\angle C = 180^\circ - 140^\circ$$
$$\therefore \angle C = 40^\circ.$$

ഉദാഹരണം 3.2

$\triangle ABC$, യിൽ $\angle A = 70^\circ$ കൂടാതെ $AB = AC$ എങ്കിൽ Δ ABC യിലെ മറ്റു കോണുകൾ കാണുക ?

നിർദ്ധാരണം

$\angle B = x^\circ$ കൂടാതെ $\angle C = y^\circ$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

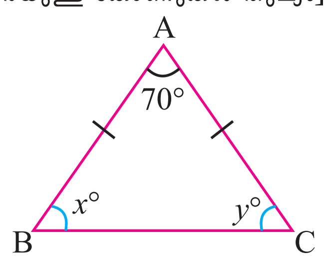
ΔABC ദ്വിസമഭുജത്രികോണം എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$AC = AB$$
$$\angle B = \angle C \text{ [സമവശങ്ങൾക്കെതിരേയുള്ള കോണുകൾ തുല്യം]}$$
$$x^\circ = y^\circ$$

$\triangle ABC$ യിൽ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$70^\circ + x^\circ + y^\circ = 180^\circ$$
$$70^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ \quad [\because x^\circ = y^\circ]$$
$$2x^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$
$$2x^\circ = 110^\circ$$
$$x^\circ = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

അതിനാൽ $\angle B = 55^\circ$ കൂടാതെ $\angle C = 55^\circ$.



ചിത്രം. 3.10

ഉദാഹരണം 3.3

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 5 : 4 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ തികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\triangle ABC$ യിൽ തന്നിട്ടുള്ളത് $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 4 : 3$.

കോണുകൾ $5x^\circ, 4x^\circ$ കൂടാതെ $3x^\circ$ എന്ന് കരുതുക.

ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളുടെ തുക 180° എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$5x^\circ + 4x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ \Rightarrow 12x^\circ = 180^\circ$$

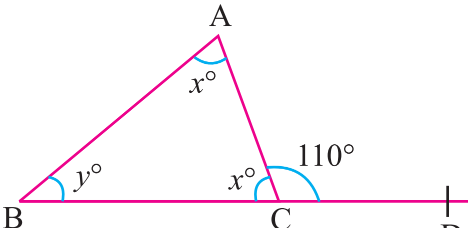
$$x^\circ = \frac{180^0}{12} = 15^\circ$$

അതിനാൽ, ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ 75°, 60° കൂടാതെ 45°.

ഉദാഹരണം 3.4

ചിത്രം 3.11- ൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ത്രികോണം ABC - യിലെ കോണുകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം. 3.11

BD ഒരു നേർരേഖ.

നേർരേഖകോൺ 180° എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$x^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ = 180^\circ - 110^\circ$$

$$x^\circ = 70^\circ$$

ബാഹ്യകോൺ ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് സമമെന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$x^\circ + y^\circ = 110^\circ$$

$$70^\circ + y^\circ = 110^\circ$$

$$y^\circ = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

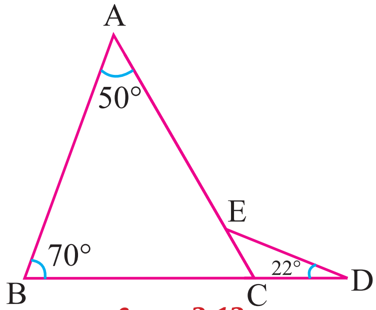
ഇതിൽ നിന്ന്, $x^\circ = 70^\circ$

$y^\circ = 40^\circ$.

ഉദാഹരണം 3.5

ചിത്രം 3.12-ൽ $\angle$DEC യുടെ മൂല്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം.3.12

ഏതൊരു ത്രികോണത്തിലെയും ബാഹ്യകോൺ ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\triangle$ABC, യിൽ $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

$$\therefore \angle ACD = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$

കൂടാതെ, $\angle ACD = \angle ECD = 120^\circ$.

$\triangle$ECD പരിഗണിക്കുക

$$\angle ECD + \angle CDE + \angle DEC = 180^0$$ [ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക]

$$120^0 + 22^0 + \angle DEC = 180^0$$

$$\angle DEC = 180^\circ - 142^\circ$$

$$\angle DEC = 38^\circ$$

പ്രവർത്തി

പലതരത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 വരയ്ക്കുക. ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ABC എന്ന് പേര് കൊടുക്കുക. ശീർഷം A, B, C എന്നിവയ്ക്ക് എതിരേയുള്ള വശങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്ന് കുറിയ്ക്കുക.

വശങ്ങൾ അളന്ന് വിവരങ്ങളെ പട്ടികയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക:

ക്രമ നമ്പർ Δ	a (സെ.മീ.)	b (സെ.മീ.)	c (സെ.മീ.)	$(c+a) > b$ ശരി/തെറ്റ്	$(a+b) > c$ ശരി/തെറ്റ്	$(b+c) > a$ ശരി/തെറ്റ്
T_1						
T_2						
T_3						
T_4						
T_5						
T_6						

പട്ടികയിൽ നിന്ന് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് മനസ്സിലാകുന്നു ?

സിദ്ധാന്തം 3

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനേക്കാളും കൂടുതലായിരിക്കും

(ത്രികോണത്തിന്റെ അതുല്യ സവിശേഷത)

ശരിനോക്കുക :

ത്രികോണം ABC എടുക്കുക BC = 12 സെ.മീ., AB = 8 സെ.മീ., AC = 9 സെ.മീ.

(i)AB = 8 സെ.മീ. , AB + BC = 20 സെ.മീ.

(ii)BC = 12 സെ.മീ. , BC + CA = 21 സെ.മീ.

(iii)CA = 9 സെ.മീ., CA + AB = 17 സെ.മീ.

ഇപ്പോൾ വ്യക്തമായി ,

(i) AB + BC > CA

(ii) BC + CA > AB

(iii) CA + AB > BC

ഇതിൽ നിന്ന് രണ്ടു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനേക്കാളും കൂടുതലായിരിക്കുമെന്ന് അറിയാം.

പ്രവർത്തി

3 സെ.മി., 4 സെ.മി, 5 സെ.മി നീളമുള്ള കുഴലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുക. ഇതുപോലെ താഴെതന്നിട്ടുള്ള നീളങ്ങൾ ഉള്ള ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക.

5 സെ.മി., 7.സെ.മി, 11.സെമി

5 സെ.മി., 7 സെ.മി, 14 സെ.മി

5 സെ.മി, 7 സെ.മി, 12 സെ.മി

നിങ്ങളുടെ കണ്ടെത്തലുകൾ ഉപസംഗ്രഹിക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.6

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏത് അളവുകൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് കാണുക.

(i) 23സെ.മീ., 17സെ.മീ., 8സെ.മീ.(ii) 12സെ.മീ., 10സെ.മീ., 25സെ.മീ.(iii) 9സെ.മീ., 7സെ.മീ., 16സെ.മീ.

നിർദ്ധാരണം

(i) 23സെ.മീ., 17സെ.മീ., 8സെ.മീ. തന്നിട്ടുള്ള നീളങ്ങൾ.

23 + 17 > 8, 17 + 8 > 23 and 23 + 8 > 17.

$\therefore$ 23സെ.മീ., 17സെ.മീ., 8സെ.മീ. എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു.

(ii) 12സെ.മീ., 10സെ.മീ., 25സെ.മീ. തന്നിട്ടുള്ള നീളങ്ങൾ.

ഇവിടെ 12 + 10 വലുതല്ല 25നേക്കാളും ie, $[12 + 10 \not> 25]$

$\therefore$ 12 സെ.മീ., 10 സെ.മീ., 25 സെ.മീ. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളല്ല.

(iii) 9 സെ.മീ., 7 സെ.മീ., 16 സെ.മീ. തന്നിട്ടുള്ള നീളങ്ങൾ.

9 + 7 വലുതല്ല 16. നേക്കാളും ie, $[9 + 7 = 16, 9 + 7 \not> 16]$

$\therefore$ 9 സെ.മീ., 7 സെ.മീ., 16 സെ.മീ. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളല്ല.

ഫലങ്ങൾ

(i)	$c + a > b$	$\Longrightarrow$	$b < c + a$	$\Longrightarrow$	$b - c < a$
(ii)	$b + c > a$	$\Longrightarrow$	$a < b + c$	$\Longrightarrow$	$a - b < c$
(iii)	$a + b > c$	$\Longrightarrow$	$c < a + b$	$\Longrightarrow$	$c - a < b$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങളിൽ നിന്നും ഏതൊരു ത്രികോണത്തിലേയും രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനേക്കാളും ചെറുതായിരിക്കാം.

അഭ്യാസം 3.1

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക:

(i) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ കോണളവ് ?

(A) 35°, 45°, 90° (B) 26°, 58°, 96°

(C) 38°, 56°, 96° (D) 30°, 55°, 90°

(ii) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏത് ശരി ?

(A) സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ സമം

(B) ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ സമം

(C) കോണുകളെല്ലാം തുല്യമായ ത്രികോണം സമഭുജ ത്രികോണമല്ല

(D) വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ സമം

(iii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ബാഹ്യകോണുകൾ 130°, 140°, x° എന്നിവയാണെങ്കിൽ x° കാണുക

(A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 120°

(iv) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ഏതാണ് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ?

(A) 11 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., 6 സെ.മീ. (B) 13 സെ.മീ., 14 സെ.മീ., 25 സെ.മീ.

(C) 8 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., 3 സെ.മീ. (D) 5 സെ.മീ., 16 സെ.മീ., 5 സെ.മീ.

(v) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു കോണുകളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിനെ രൂപീകരിക്കുന്നു

(A) 24°, 66° (B) 36°, 64°

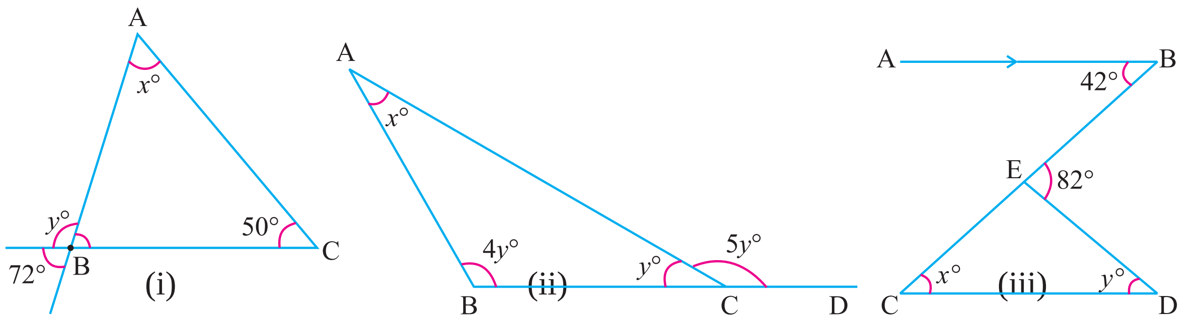
(C) 62°, 48° (D) 68°, 32°

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണളവുകൾ (x – 35)°, (x – 20)°, (x + 40)° എങ്കിൽ 3 കോണളവുകളും കാണുക

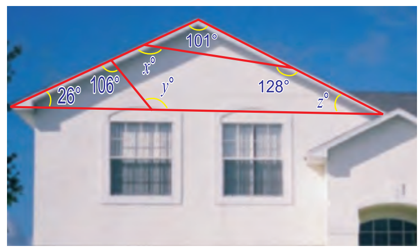
3. $\triangle$ABC യിൽ $\angle$A എന്നത് $\angle$B യേക്കാളും 24° കൂടുതലാണ്. ബാഹ്യകോൺ $\angle$C യുടെ മൂല്യം 108°. $\triangle$ABC യിലെ കോണുകളുടെ അളവുകൾ കാണുക.

4. $\triangle ABC$ യിൽ $\angle B$, $\angle C$ എന്നിവയുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു എങ്കിൽ $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന് x° കൂടാതെ y° എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:



6. തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് x°, y° കൂടാതെ z° എന്നിവ കാണുക



3.3 സർവ്വസമത്രികോണങ്ങൾ

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ സർവ്വസമം എന്നതിന്റെ ജ്യാമിതീയ ആശയത്തിന്റെ പ്രാധാന്യത്തെ മനസിലാക്കാം.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തികളിൽ നിന്ന് സർവ്വസമം എന്നതിനെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കാം.

പ്രവർത്തി രണ്ട് പത്ത് രൂപ നോട്ട് എടുത്ത് ഒന്നിനുമുകളിൽ മറ്റൊന്ന് വയ്ക്കുക. നോക്കുമ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് തോന്നുന്നു ?

ഒരു നോട്ട് മറ്റേ നോട്ടിനെ മുഴുവനായും കൃത്യമായും ആവരണം ചെയ്യുന്നു.

മുകളിലത്തെ പ്രവർത്തിയിൽ നിന്നും നാം നിരീക്ഷിച്ചത് ചിത്രങ്ങൾ ഒരേ ആകൃതിയിലും വലിപ്പത്തിലും ആണെന്ന്.

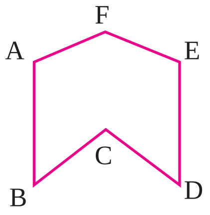
സാധാരണയായി രണ്ട് ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ആകൃതിയും വലിപ്പവും ഒന്നുപോലിരുന്നാൽ അതിനെ സർവ്വസമം എന്നു പറയുന്നു.

പ്രവർത്തി

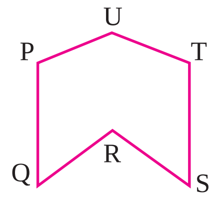
താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കൾ സർവ്വസമമാണോ ? അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

(a) ഒരേ ഇനത്തിലുള്ള സ്റ്റാമ്പുകൾ
(b) ഒന്നുപോലുള്ള ബിസ്ക്കറ്റ് പായ്ക്കറ്റ്
(c) ഒരേ വാണിജ്യമുദ്രയുള്ള ഷേവിംഗ് ബ്ലേഡ്

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമതല രൂപങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം.3.13



ചിത്രം. 3.14

രണ്ട് ചിത്രങ്ങളും നിരീക്ഷിക്കുക അവ സർവ്വസമമാണോ ? എങ്ങനെ പരിശോധിക്കാം?

നമുക്ക് പ്രതിസ്ഥാപന രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

വഴി 1 : ചിത്രം 3.13 ന്റെ പ്രതിരൂപ ചിത്രം കാർബൺ കടലാസ് ഉപയോഗിച്ച് ഒപ്പിയെടുക്കുക.

വഴി 2 : ചിത്രം 3.14 ന് മുകളിൽ പ്രതിരൂപ ചിത്രത്തിനെ മടക്കാതെ, വളയ്ക്കാതെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

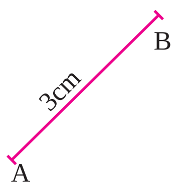
വഴി 3 : രണ്ട് ചിത്രങ്ങളും ഒന്നിനൊന്ന് വ്യക്തമായും ആവരണം ചെയ്യുന്നു.

അതിനാൽ രണ്ട് ചിത്രങ്ങളും സർവ്വ സമമാകുന്നു.

സർവ്വസമം: രണ്ട് രൂപങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നിന് മുകളിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ അവപരസ്പരം കൃത്യമായി ചേർന്നിരുന്നാൽ അവ സർവ്വസമമായിരിക്കും ഇതിനെ ഈ ചിഹ്നം "≡" കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.

3.3.1 (a) സർവ്വസമ രേഖകൾ

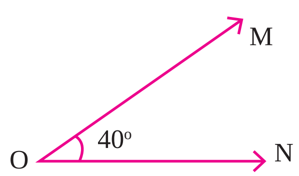
രണ്ട് രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ സർവ്വസമമാണെങ്കിൽ അവയുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമാണ് .

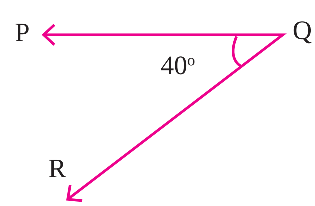


ഇവിടെ, AB യുടെ നീളം = CD യുടെ നീളം. അതിനാൽ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

(b) സർവ്വസമ കോണുകൾ

രണ്ട് കോണുകൾ സർവ്വസമമാണെങ്കിൽ അവയുടെ അളവുകളും തുല്യം.

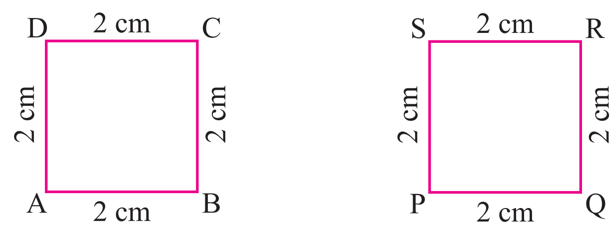




ഇവിടെ അളവുകൾ തുല്യം. അതിനാൽ $\angle MON \equiv \angle PQR$.

(c) സർവ്വസമ സമചതുരങ്ങൾ

രണ്ട് സമചതുരങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ സമമായാൽ അവ സർവ്വസമമാണ്.

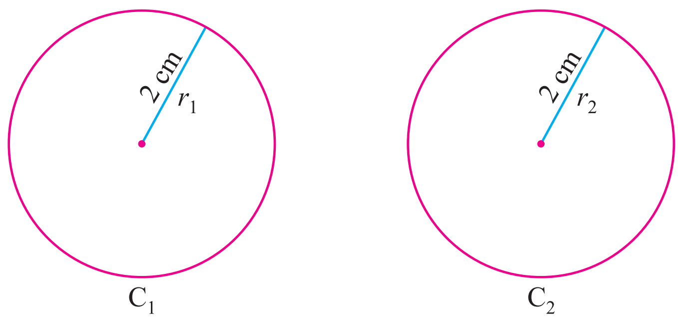


ഇവിടെ, സമചതുരം ABCD യുടെ വശം = സമചതുരം PQRS ന്റെ വശം

$\therefore$ സമചതുരം ABCD $\equiv$ സമചതുരം PQRS

(d) സർവ്വസമ വൃത്തങ്ങൾ

രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടേയും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ തുല്യം അതിനാൽ സർവ്വസമം

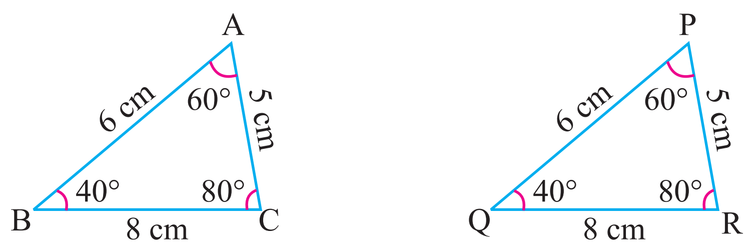


തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തം C_1 ന്റെ വ്യാസാർദ്ധം = വൃത്തം C_2 ന്റെ വ്യാസാർദ്ധം

$\therefore$ വൃത്തം $C_1 \equiv$ വൃത്തം C_2

മുകളിലുള്ള നാല് സർവ്വസമങ്ങളിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ സർവ്വസമതയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാനുള്ള പ്രചോദനം ഉണ്ടായി.

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും പരിഗണിക്കുക.



ΔABC യെ ΔPQR ന് മുകളിൽ പതിഞ്ഞിരിക്കത്തക്കവിധം വെയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ P യുടെ മുകളിൽ A യും Q ന് മുകളിൽ B യും R ന് മുകളിൽ C യും കൃത്യമായും പതിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെ സമാന വശങ്ങളും, കോണുകളും, ശീർഷങ്ങളും ഒന്നിനൊന്ന് സമമായിരിക്കും.

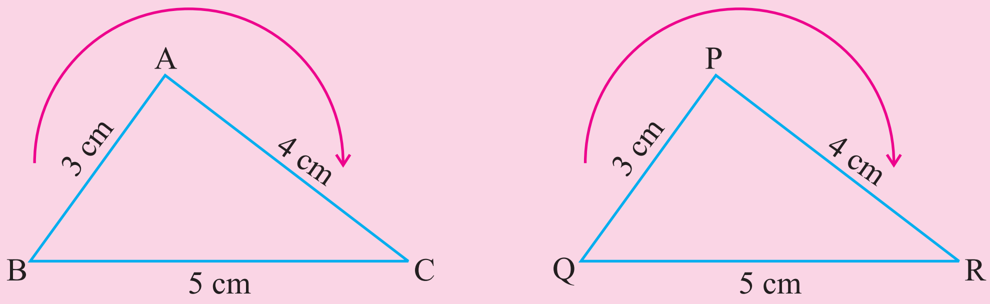
ഈ സാമ്യതയെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

സമാന ശീർഷങ്ങൾ	സമാന വശങ്ങൾ	സമാന കോണുകൾ
$A \longleftrightarrow P$	AB = PQ	$\angle A = \angle P$
$B \longleftrightarrow Q$	BC = QR	$\angle B = \angle Q$
$C \longleftrightarrow R$	CA = RP	$\angle C = \angle R$

5.3.2. സർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളും, മൂന്ന് കോണുകളും മറ്റൊരുത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളോടും, കോണുകളോടും യഥാക്രമം തുല്യമായാൽ ആ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ് : രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവ്വസമതയുടെ നിബന്ധന എഴുതുമ്പോൾ അവയുടെ ശീർഷങ്ങളുടെ ക്രമം പ്രധാനമാണ്.



$\Delta ABC \equiv \Delta PQR$ സർവ്വസമം ആകുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ വ്യത്യസ്ത ക്രമത്തിലും എഴുതാം.

$\Delta BAC \equiv \Delta QPR$, $\Delta CBA \equiv \Delta RQP$ ഇങ്ങനെ നമുക്ക് എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ എഴുതാം.

3.3.3. ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധനകൾ

നമുക്കറിയാം, രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വ്സമമാകുന്നതിന് 6 ജോടി സമാനഭാഗങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കണം (3 ജോടി വശങ്ങളും, 3 ജോടി കോണുകളും).

ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ മൂന്നു ജോടി സമാനഭാഗങ്ങൾ മാത്രം തുല്യമായാൽ രണ്ട് ത്രികോണ ങ്ങളും സർവ്വസമമാകും.

ഇത്തരം നാലു രീതികളുണ്ട്. ഓരോ രീതിയിലും മൂന്ന് സമാനഭാഗങ്ങൾ വീതം വ്യത്യസ്തമായി ചേർത്ത് എഴുതാം. ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാണോ എന്ന് അറിയാൻ ഈ അടിസ്ഥാന പ്രമാണം സഹായിക്കും.

ചിന്തിക്കൂ: ചില സത്യമായ ലഘുനിബന്ധനകൾ യാഥാർത്ഥ്യമായി തെളിവില്ലാതെ തെളിയിക്കാം.

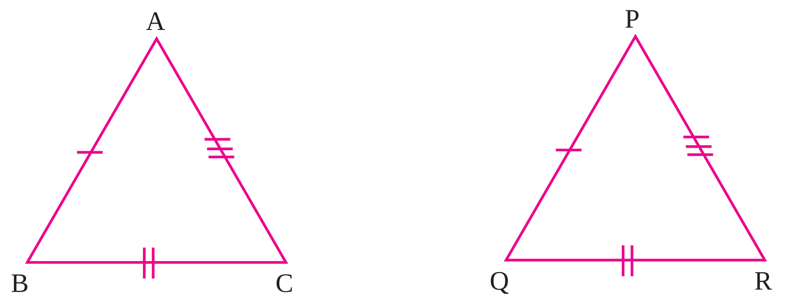
ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ S എന്നും, കോണുകളെ A എന്നും സമകോണിനെ R എന്നും കർണ്ണത്തിനെ H എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ അടിസ്ഥാന പ്രമാണങ്ങൾ താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

(i) SSS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (ii) SAS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം

(iii) ASA അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (iv) RHS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം

(i) SSS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (വശം– വശം – വശം – അടിസ്ഥാന പ്രമാണം)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളോട് തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.



ത്രികോണങ്ങൾ ABC, PQR എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

AB = PQ, BC = QR കൂടാതെ CA= RP.

ΔABC യുടെ പ്രതിരൂപ ചിത്രമെടുത്ത് ΔPQR ന് മുകളിൽ പതിപ്പിക്കുക. AB യിൽ PQ, BC യിൽ QR കൂടാതെ AC ൽ PR.

അതിനാൽ $AB = PQ \Rightarrow$ A യിൽ P യും Bയിൽ Q ഉം.

അതുപോലെ $BC = QR \Rightarrow$ C യിൽ R ഉം.

ഇപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും കൃത്യമായും ചേർന്നിരിക്കുന്നു.

$$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta PQR$$

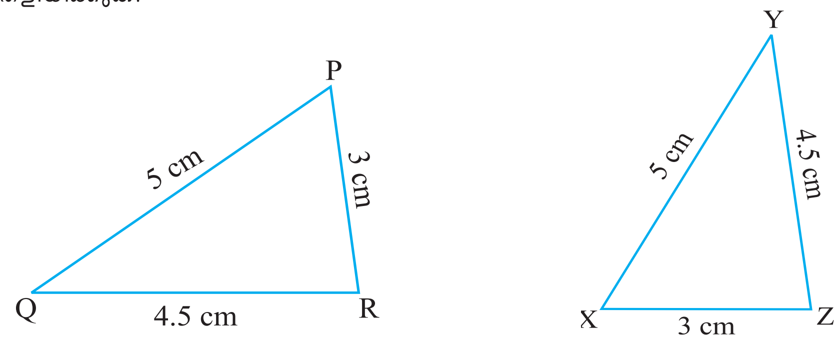
ഇവിടെ നമ്മൾ നിരീക്ഷിച്ചത് AB = PQ , BC = QR , CA = RP

അതിനാൽ നമുക്കെഴുതാം $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$.

ഇതിന്റെ അംശബന്ധം 1 ന് സമമല്ല എങ്കിൽ എന്ത് സംഭവിക്കും ?

ഉദാഹരണം 3.7

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ SSS അടിസ്ഥാനപ്രമാണ പ്രകാരം ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



നിർദ്ധാരണം

ΔPQR കൂടാതെ ΔXYZ വശങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

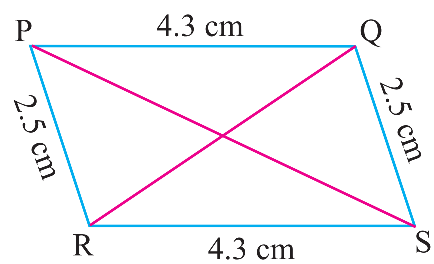
PQ = XY = 5 സെ.മീ. , QR = YZ = 4.5 സെ.മീ. കൂടാതെ RP = ZX = 3 സെ.മീ.

ΔPQR നെ ΔXYZ ന് മേൽപതിപ്പിക്കുമ്പോൾ

Pൽ Xഉം, Qൽ Yഉം, Rൽ Z ഉം കൂടാതെ ΔPQR നെ ΔXYZ മൊത്തമായും ചേർന്നിരിക്കും.

$\therefore \triangle PQR \equiv$ DXYZ [SSS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം].

ഉദാഹരണം 3.8



ചിത്രം, PQSR ഒരു സാമാന്തരികം PQ = 4.3 സെ.മീ.കൂടാതെ QR = 2.5 സെ.മീ. എങ്കിൽ $\triangle PQR \equiv$ DPSR ആണോ ?

നിർദ്ധാരണം

ΔPQR കൂടാതെ $\triangle PSR$ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ PQ = SR = 4.3 സെ.മീ.

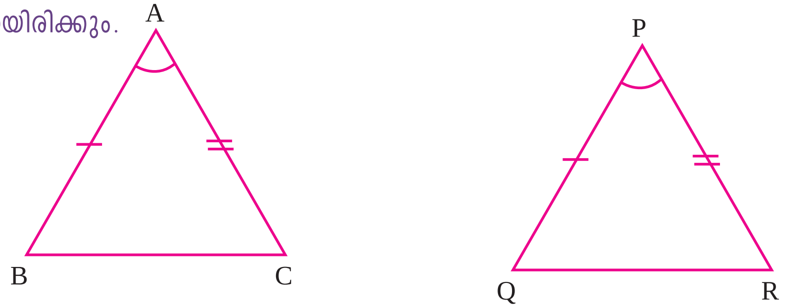
കൂടാതെ PR =QS = 2.5 സെ.മീ. PR = PR [പൊതുവശം]

$\therefore \triangle PQR \equiv \triangle RSP$ [SSS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം]

$\therefore \triangle PQR \not\equiv \triangle PSR$ [ΔRSP, ΔPSR വ്യത്യസ്ത ക്രമം]

(ii) SSS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (വശം – കോൺ – വശം അടിസ്ഥാന പ്രമാണം)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങളും അവയെ ഉൾകൊള്ളുന്ന കോണിനോടും യഥാക്രമം തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.



$\triangle ABC$ കൂടാതെ $\triangle PQR$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. $AB = PQ$, $AC = PR$

കൂടാതെ BAC ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോൺ = QPR ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോൺ

$\triangle ABC$ യുടെ പ്രതിഛായ ചിത്രമെടുത്ത് $\triangle PQR$ നുമേൽ പതിപ്പിക്കുമ്പോൾ AB യിൽ PQ വും കൂടാതെ ACയിൽ PR.

ഇ PR ഉം വരുന്നു. A യ്ക്ക് മേൽ P ഉം B യ്ക്ക് മേൽ Q ഉം C യ്ക്ക് മേൽ R ഉം വരുന്നു.

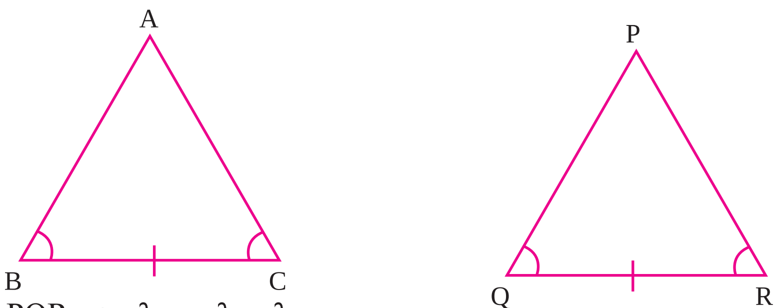
$AB = PQ$, $AC = PR, BC = QR$

$\therefore \triangle ABC$, $\triangle PQR$ നെ പൂർണമായും പതിഞ്ഞിരിക്കും.

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle PQR$

(iii) ASA അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (കോൺ – വശം – കോൺ അടിസ്ഥാന പ്രമാണം)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകളും ഒരുവശവും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളോടും കോണിനോടും തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.



$\triangle ABC$ കൂടാതെ $\triangle PQR$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

ഇവിടെ $BC = QR, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$.

പ്രതിസ്ഥാപന രീതിയിൽ നിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കുന്നത് $\angle ABC$ യിൽ കൃത്യമായും $\angle PQR$ പതിഞ്ഞിരിക്കും. കൂടാതെ $\angle BCA$ യിൽ $\angle QRP$ കൃത്യമായും പതിഞ്ഞിരിക്കും.

അപ്പോൾ, B യിൽ Q ഉം കൂടാതെ Cയിൽ R ഉം. അതിനാൽ Aയിൽ P യും ആയിരിക്കും.

$\therefore \triangle ABC$ യിൽ $\triangle PQR$ പൂർണ്ണമായും പതിഞ്ഞിരിക്കും. അതിനാൽ $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

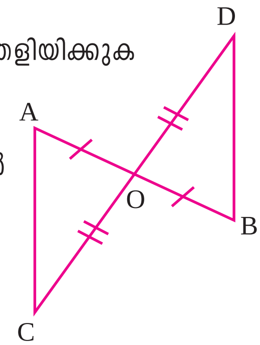
ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമായതിനാൽ ബാക്കിയുള്ള സമാനഭാഗങ്ങളും തുല്യമാകുന്നു.

(i.e.) $AB = PQ$, $AC = PR$, $\angle A = \angle P$

പ്രസ്താവന (Representation) : ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമായിരിക്കുമ്പോൾ ഒത്ത ഭാഗങ്ങളും സർവ്വസമമാകും ഇതിനെ ചുരുക്കത്തിൽ c.p.c.t.c എന്ന് കുറിക്കാം. (Corresponding parts of congruence Triangel are congruent) ഈ അടയാളം കണക്കുകളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.9

AB യും CD യും O-ൽ പ്രതിഛേദിയ്ക്കുന്നു AC = BD എന്ന് തെളിയിക്കുക



നിർദ്ധാരണം

സങ്കൽപം : AB കൂടാതെ CD യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു O-ൽ

$\therefore$ AO = OB കൂടാതെ CO = OD

അനുമാനം : AC = BD

തെളിവ് : ΔAOC യും ΔBOD യും

AO = OB [തന്നിട്ടുള്ളത്]

CO = OD [തന്നിട്ടുള്ളത്]

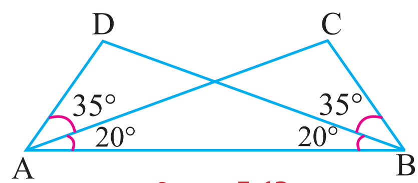
$\angle AOC = \angle BOD$ [(ശീർഷദ്വിമുഖകോണുകൾ)]

$\Delta AOC \equiv \Delta BOD$ [SAS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം]

അതിനാൽ, AC = BD [c.p.c.t.c.]

ഉദാഹരണം 3.10

ചിത്രത്തിൽ, $\triangle DAB$, $\triangle CAB$ എന്നിവയുടെ ആധാരം AB. എങ്കിൽ $\triangle DAB \equiv \triangle CAB$ എന്ന് തെളിയിക്കുക



ചിത്രം.5.13

നിർദ്ധാരണം

ΔDAB, ΔCAB എന്നിവയിൽ

$\angle DAB = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ = \angle CBA$ [തന്നിട്ടുള്ളത്]

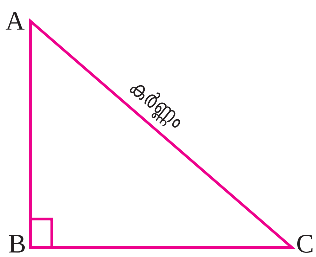
$\angle DBA = \angle CAB = 20^\circ$ [തന്നിട്ടുള്ളത്]

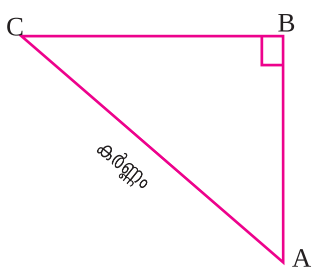
രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾക്കും AB പൊതുവശം

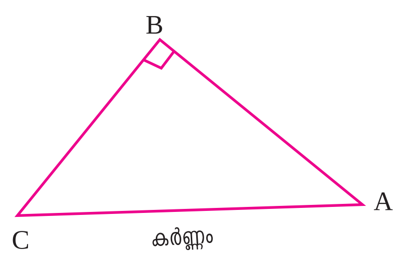
$\therefore \Delta DBA \equiv \Delta CAB$ [SAS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം]

കർണ്ണം

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ കർണ്ണം എന്നാൽ എന്ത് ? കർണ്ണം എന്നവാക്ക് സമകോണത്രികോണവുമായിട്ട് ബന്ധപ്പെട്ടതാണ്.



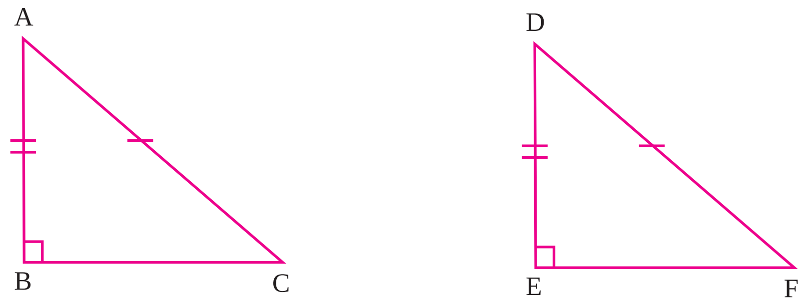




സമകോണത്രികോണം ABC പരിഗണിക്കുക. $\angle B$ സമകോൺ സമകോണിന് എതിരേയുള്ള വശം കർണ്ണം. ഇവിടെ AC കർണ്ണം.

(iv) RHS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം (സമകോൺ –കർണ്ണം– വശം)

രണ്ടു സമകോണ ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ കർണ്ണവും ഒരു വശവും മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിനോടും സമാന വശത്തിനോടും തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വ സമമായിരിക്കും.



$\triangle ABC$ കൂടാതെ $\triangle DEF$ എന്നിവയിൽ, $\angle B = \angle E = 90°$

കർണ്ണം AC = കർണ്ണം DF [തന്നിട്ടുള്ളത്]

വശം AB = വശം DE [തന്നിട്ടുള്ളത്]

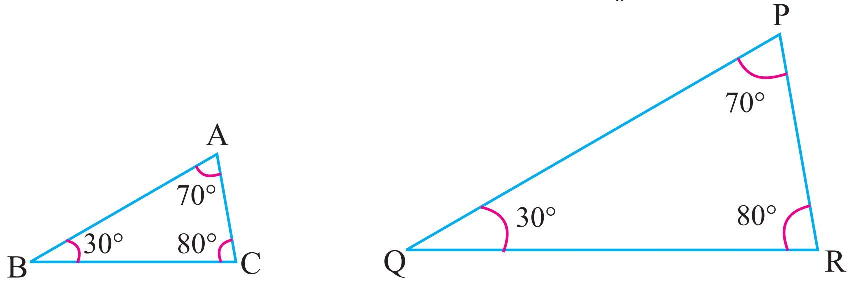
രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും ഒന്നിനു മേൽ മറ്റൊന്ന് പതിപ്പിച്ചാൽ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

3.3.4 ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാകുന്നതിന് പര്യാപ്തമല്ലാത്ത നിബന്ധനകൾ

(i) AAA (കോൺ – കോൺ – കോൺ)

ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാകുന്നതിനുള്ള മതിയായ നിബന്ധനയല്ല. എന്ത്കൊണ്ട് ?

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്ന് അതിന്റെ കാരണം കണ്ടുപിടിക്കാം.



മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുളള ചിത്രങ്ങളിൽ,

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ കൂടാതെ $\angle C = \angle R$

$\triangle ABC$ എന്നത് $\triangle PQR$ നേക്കാളും വലിപ്പത്തിൽ ചെറുതാണ്.

$\therefore$ $\triangle ABC$ യെ $\triangle PQR$, ന് മുകളിൽ പതിഞ്ഞിരിക്കത്തക്കവിധത്തിൽ വച്ചാൽ ത്രികോണങ്ങൾ ഒന്നിന് മേൽ കൃത്യമായി പതിഞ്ഞിരിക്കുന്നില്ല.

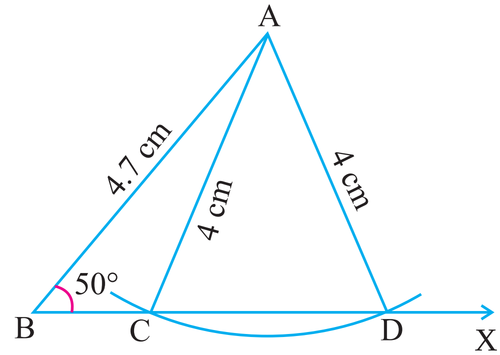
അതുകൊണ്ട് $\triangle ABC \not\equiv \triangle PQR$

(ii) SSA (വശം – വശം – കോൺ)

നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുളള സന്ദർഭം പരിശോധിക്കാം.

$\triangle ABC$ യിൽ $\angle B = 50°$, AB = 4.7 സെ.മീ. AC = 4 സെ.മീ., BC യെ X വരെ നീട്ടുക A കേന്ദ്രമാക്കി AC യുടെ വ്യാസാർദ്ധം 4 സെ.മീ. എടുത്ത് ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് BX നെ C,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

$\therefore$ AD= 4സെ.മീ. [$\because$ AC യും AD യും ഒരേ വൃത്തത്തിലെ വ്യാസാർദ്ധം]



DABC കൂടാതെ DABD യിൽ

$\angle$B പൊതുകോൺ

AB പൊതുവശം AC = AD = 4സെ.മീ.

[നിർമ്മിതി]

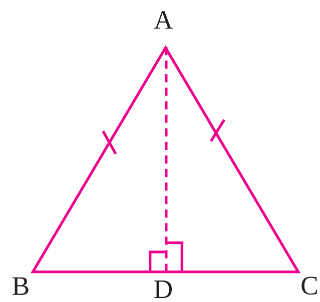
DABC യിൽ വശം AC, വശം AB, $\angle$B യും
ΔABD യിൽ വശം AD , വശം AB, $\angle$B യും
സർവ്വസമം എന്നാൽ BCയും BD യും സമമല്ല
അതുകൊണ്ട് D ABC $\not\equiv$ D ABD.

ഉദാഹരണം *3.11*

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമമായ വശങ്ങൾക്കെതിരേയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുളള ത്രികോണം ABC യിൽ AB = AC.



അനുമാനം : AB യുടെ എതിർകോൺ = AC യുടെ എതിർകോൺ (i.e.) $\angle C = \angle B$.

നിർമ്മിതി : BC യ്ക്ക് ലംബമായി വരയ്ക്കുക AD
$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

തെളിവ് : $\triangle$ABDകൂടാതെ $\triangle$ACD എന്നിവയിൽ
AD പൊതുവശം

AB = AC [$\triangle$ABC ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ [നിർമ്മിതി]

$\therefore$ DADB = DADC [RHS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം]

അതുകൊണ്ട് $\angle ABD = \angle ACD$ [c.p.c.t.c]

(അല്ലെങ്കിൽ) $\angle ABC = \angle ACB$.

$\angle B = \angle C$. സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു

ഇതിനെ ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണ സിദ്ധാന്തം എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം *3.12*

ഒരുത്രികോണത്തിന്റെ സമകോണുകൾക്കെതിരേയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

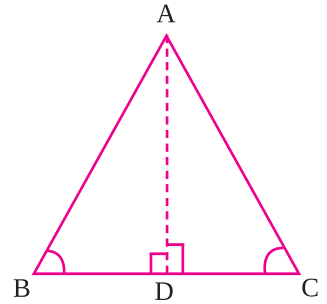
നിർദ്ധാരണം

സങ്കൽപം : DABC യിൽ $\angle B = \angle C$.

അനുമാനം : AB = AC.

നിർമ്മിതി : BCയ്ക്ക് ലംബമായി AD വരയ്ക്കുക

തെളിവ് :



$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ [നിർമ്മിതി]

$\angle B = \angle C$ [തന്നിട്ടുള്ളത്]

AD പൊതുവശം.

$\therefore \Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (AAS അടിസ്ഥാന പ്രമാണം)

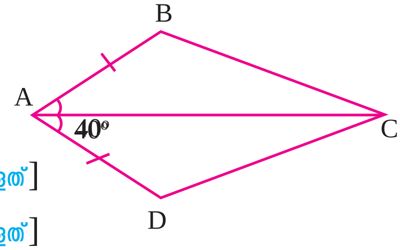
$AB = AC.$ [c.p.c.t.c]

അതുകൊണ്ട് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമകോണുകൾക്കെതിരേയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യം

ഇതിനെ ദ്വിസമഭുജത്രികോണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ മറുവശം എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.13

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$.എങ്കിൽ $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$? ശരിയാണോ ? മറ്റ് സമാന ജോടികളേയും എഴുതുക.



നിർദ്ധാരണം

ΔABC, ΔADC എന്നിവയിൽ AC പൊതുവശം

$\angle BAC = \angle DAC$ [തന്നിട്ടുള്ളത്]

$AB = AD$ [തന്നിട്ടുള്ളത്]

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ [വശം – കോൺ – വശം അടിസ്ഥാന പ്രമാണം]

അതുകൊണ്ട് മറ്റ് സമാനജോടികൾ

$BC = DC$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle ACB = \angle ACD$. [by c.p.c.t.c]

ഉദാഹരണം 3.14

ΔPQR എന്ന ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തിൽ $PQ = PR$, QP യെ S വരെ നീട്ടിയാൽ PT ബാഹ്യ കോൺ $2x°$-യെ രണ്ടായിപിരിക്കുന്നു, എങ്കിൽ $\angle Q = x°$ എന്നും $PT \parallel QR$ എന്നു തെളിയിക്കുക ?

നിർദ്ധാരണം

സങ്കൽപ്പം : ΔPQR ദ്വിസമഭുജത്രികോണം $PQ = PR$.

അനുമാനം : ബാഹ്യകോൺ $\angle SPR$ ന്റെ ദ്വിഭാജകമാണ് PT $\angle SPT = \angle TPR = x°$

$\therefore \angle Q = \angle R$. [ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ മറുവശം]

നമുക്കറിയാം ഏതൊരു ത്രികോണത്തിലും,

ബാഹ്യകോൺ = ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ തുക

$\therefore \Delta PQR$ ൽ ബാഹ്യകോൺ $\angle SPR = \angle PQR + \angle PRQ$

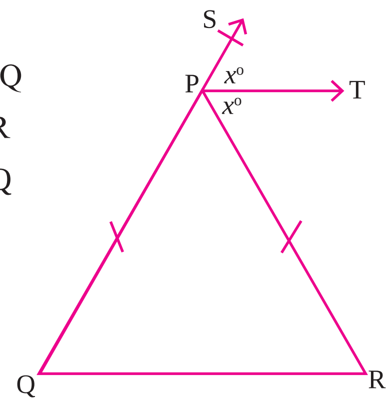
$2x° = \angle Q + \angle R$

$= \angle Q + \angle Q$

$2x° = 2\angle Q$

$x° = \angle Q$

അതിനാൽ $\angle Q = x°$.



തെളിവ് : PT ∥ QR

SQ എന്നത് PT, QR ന്റെ ഛേദക രേഖയാകുന്നു. $\angle SPT = x^\circ$.

നേരത്തെ തെളിയിച്ചതിൽ നിന്നും $\angle Q = x^o$.

ഇവിടെ, $\angle SPT$, $\angle PQR$ എന്നിവ സമാനകോണുകൾ. $\therefore$ PT ∥ QR.

അഭ്യാസം 3.2

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക:

(i) ദ്വിസമഭുജ $\triangle XYZ$,ൽ XY = YZ ആണെങ്കിൽ താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള കോണളവുകളിൽ ഏത് സമം?

(A) $\angle X$ കൂടാതെ $\angle Y$ (B) $\angle Y$ കൂടാതെ $\angle Z$ (C) $\angle Z$ കൂടാതെ $\angle X$

(D) $\angle X$, $\angle Y$ കൂടാതെ $\angle Z$

(ii) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $\angle B = \angle E$, AB = DE, BC = EF. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമാകുന്നതിന് ______ അടിസ്ഥാന പ്രമാണം

(A) SSS (B) AAA (C) SAS (D) ASA

(iii) രണ്ട് ചിത്രങ്ങൾ സർവ്വസമമാകുന്നതിന് അവ

(A) ഒരേ വലിപ്പം (B) ഒരേ ആകൃതി

(C) ഒരേ വലിപ്പവും, ആകൃതിയും (D) ഒരേ വലിപ്പവും വ്യത്യസ്ത ആകൃതിയും

(iv) ത്രികോണം ABC യിൽ $\angle A = 60^\circ$, AB = AC എങ്കിൽ ABC ______ ത്രികോണം.

(A)സമകോണം (B) സമഭുജം (C) ദ്വിസമഭുജം (D) വിഷമഭുജം

(v) ത്രികോണം ABC യിൽ $\angle A = 90^0$ എങ്കിൽ കർണ്ണം ______.

(A) AB (B)BC (C) CA (D) ഇവയിൽ ഒന്നുമില്ല

(vi) $\triangle PQR$ ൽ PQ, PR എന്നീ വശങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്നകോൺ

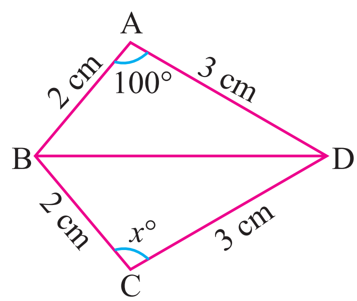
(A) $\angle P$ (B) $\angle Q$

(C) $\angle R$ (D) ഇവിയിൽ ഒന്നുമില്ല

(vii) ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് x° യുടെ മുല്യം ----------

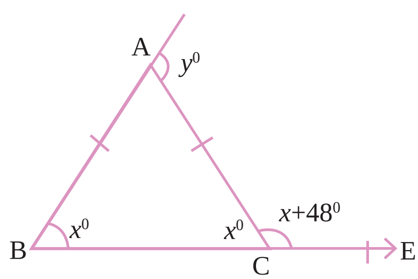
(A) 80° (B) 100°

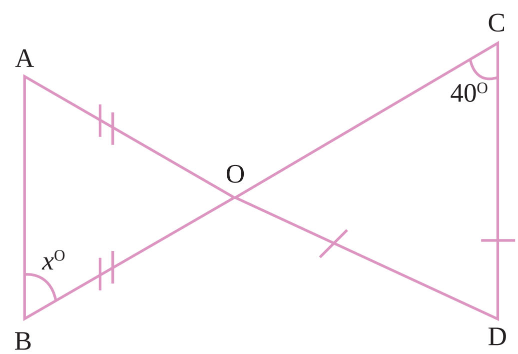
(C) 120° (D) 200°



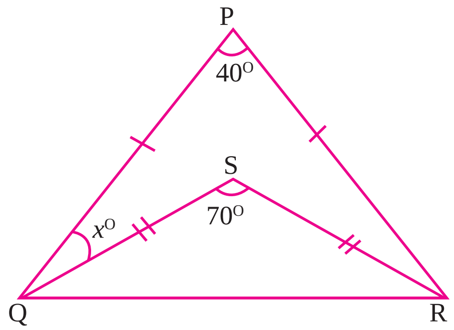
2. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം ABC ഒരു ത്രികോണം AB = AC. എങ്കിൽ x° കൂടാതെ y° എന്നിവ കാണുക.

3. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, x° കാണുക.

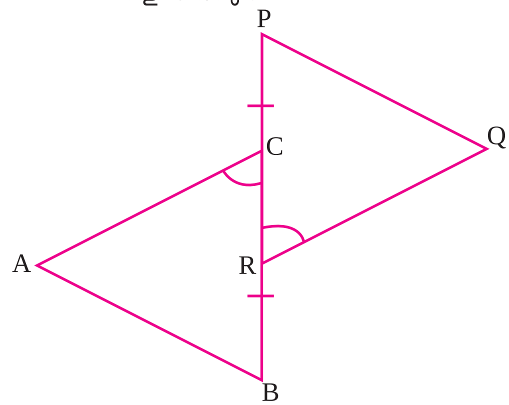




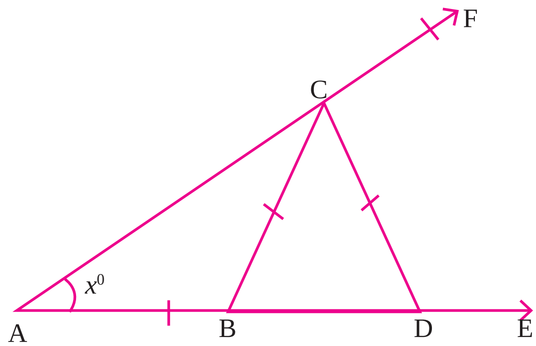
4. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ $\triangle PQR, \triangle SQR$ എന്നിവ ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം എങ്കിൽ x° കാണുക ?



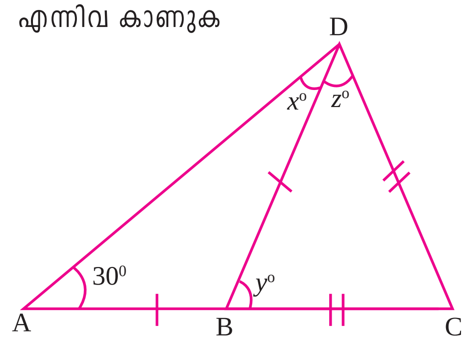
5. ചിത്രത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ളത് $BR = PC$, $\angle ACB = \angle QRP$, $AB \parallel PQ$ എങ്കിൽ $AC = QR$.എന്ന് തെളിയിക്കുക



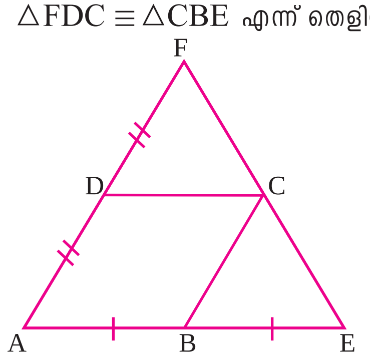
6. ചിത്രത്തിൽ, $AB = BC = CD$, $\angle A = x^\circ$. എങ്കിൽ $\angle DCF = 3\angle A$ എന്ന് തെളിയിക്കുക



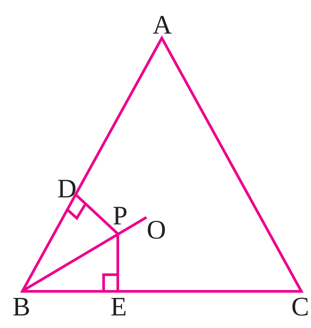
7. ചിത്രത്തിൽ $AB = BD$, $BC = DC$, $\angle DAC = 30^\circ$ എങ്കിൽ $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ എന്നിവ കാണുക



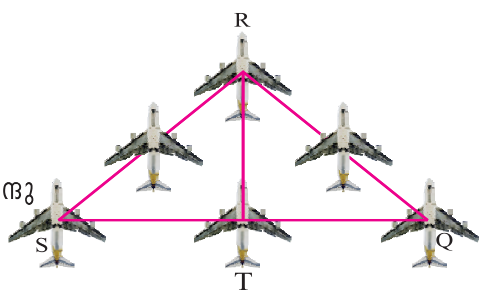
8. ചിത്രത്തിൽ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം AB യെ E വരെ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $AB = BE$, AD യെ F വരെ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $AD = DF$ $\triangle FDC \equiv \triangle CBE$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.



9. $\triangle ABC$ യിൽ $\angle ABC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം BO. BO യിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P . BA, BC യ്ക്ക് P ൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ സമം എന്ന് തെളിയിക്കുക.



10. പടത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് പോലെ ഇന്ത്യൻ നേവിയുടെ വിമാനം ഒരു പൊതുവശമുള്ളരണ്ട് ത്രികോണാകൃതിയിൽ പറക്കുന്നു. SQ ന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു T. $SR = RQ$. $\triangle SRT \equiv \triangle QRT$, എന്ന് തെളിയിക്കുക.



Concept Summary

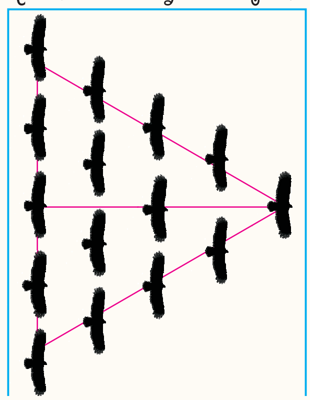
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് കോണുകളുടേയും തുക 180^0.
- ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ബാഹ്യകോൺ രണ്ട് ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടുവശങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും.
- രണ്ട് രൂപങ്ങൾ, ഒന്നിനു മുകളിൽ മറ്റൊന്ന് പതിപ്പിക്കുമ്പോൾ അവ പരസ്പരം ആവരണം ചെയ്തിരുന്നാൽ അവ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും, ഇതിനെ " $\equiv$" ഈ ചിഹ്നം, കൊണ്ട് കുറിയ്ക്കുന്നു.
- രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാകുന്നതിന് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളും, മൂന്ന് കോണുകളും മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളോടും മൂന്ന് കോണുകളോടും സമമായിരിയ്ക്കണം.
- ***SSS* അടിസ്ഥാ പ്രമാണം** : ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളോട് തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.
- ***SAS* അടിസ്ഥാന പ്രമാണം** : ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങളോടും അവയെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണിനോടും യഥാക്രമം തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.
- ***ASA* അടിസ്ഥാന പ്രമാണം** : ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകളും ഒരു വശവും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളോടും കോണിനോടും തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും
- ***RHS* അടിസ്ഥാന പ്രമാണം** : ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണവും ഒരു വശവും മറ്റൊരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിനോടും ഒരു വശത്തിനോടും തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമായിരിക്കും.

ഗണിത സമാജ പ്രവൃത്തി

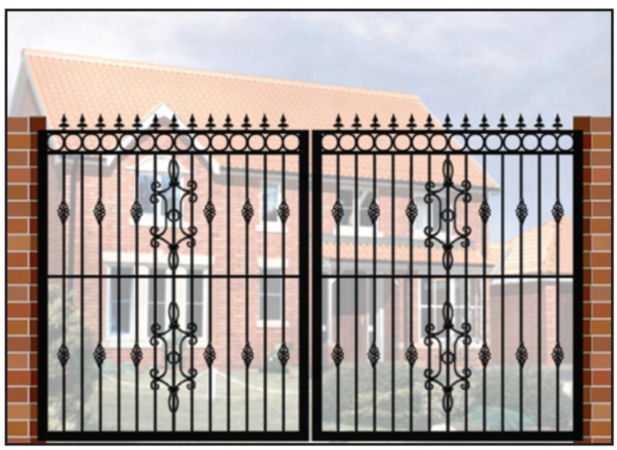
സർവ്വസമത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം

സർവ്വസമത്തിന്റെ ആശയം നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ ധാരാളം രീതികളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. നമ്മുടെ വീട്ടിലെ രണ്ട് പാളികതകുകൾ, രണ്ട് പാളി ഗേറ്റ്, പക്ഷികളുടെ ചിറകുകൾ, മനുഷ്യ ശരീരിത്തിലെ കൈകൾ, കാലുകൾ എന്നിവ ഒന്നിനൊന്ന് സർവ്വസമമാകുന്നു. ഇതുപോലെ ധാരാളം ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് പറയാം.

പക്ഷികൾ ആകാശത്ത് പറക്കുമ്പോൾ അവ ഒരു ത്രികോണാകൃതി രൂപം പ്രാപിക്കുന്നു. ആദ്യം നയിക്കുന്ന പക്ഷിയിൽ നിന്ന് ഒരു മാധ്യമം വരയ്ക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് സർവ്വ സമത കാണാം. പക്ഷികളെല്ലാം ഒരേ ദിശയിൽ പറക്കാതിരുന്നാൽ അവയുടെ സർവ്വസമതയും തകരും.



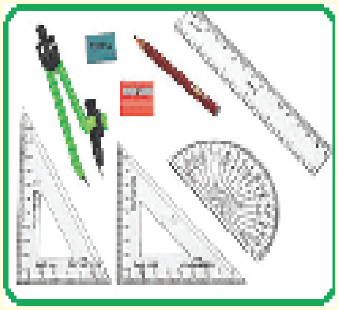
നമ്മുടെ ജീവിതചര്യകളിലും പ്രകൃതിയിലുമുള്ള സർവ്വസമതകളെ തിരിച്ചറിയാൻ ശ്രമിക്കുക.



4

പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി

4.1 ആമുഖം
4.2 ചതുർഭുജം
4.3 ലംബകം
4.4 സാമാന്തരീകം



4.1 ആമുഖം

പുരാതന ഈജിപ്തുകാർ തങ്ങൾക്ക് ജ്യാമിതിയിലുള്ള പ്രായോഗികമായ അറിവിനെ സർവ്വേ നടത്തുന്നതിനും പദ്ധതികളുടെ നിർമ്മാണത്തിനുമായി പ്രയോഗിച്ചിരുന്നു. പുരാതന ഗ്രീക്കുകാർ അനുഭവാധിഷ്ഠിതമായ ജ്യാമിതി അവരുടെ സംസ്കാരത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. കോമ്പസ്സും, സ്കെയിലും ഉപയോഗിച്ച് വൈവിധ്യമാർന്ന ധാരാളം നിർമ്മിതികൾക്ക് അവർ രൂപം കൊടുത്തിരുന്നു.

പ്രാചീന കാലം മുതൽക്കേ ഗണിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ശാഖയാണ് ജ്യാമിതി ജ്യാമിതിയെ താത്വിക ജ്യാമിതി എന്നും പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി എന്നും തരം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. താത്വിക ജ്യാമിതിയിൽ ജ്യാമിതിയ രൂപങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങൾക്ക് അടിസ്ഥാന പ്രമാണങ്ങളും വാദങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് തെളിവുകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് മാതൃകാ ചിത്രങ്ങളാണ് വരയ്ക്കുന്നത്. ജ്യാമിതിയ ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നതാണ് പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി.

ചില സമതല ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ നിർവചനം ഗുണങ്ങൾ കൂടാതെ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഈ പാഠത്തിൽ ജ്യാമിതിയ ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില സമതല ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ നിർമ്മിതിയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

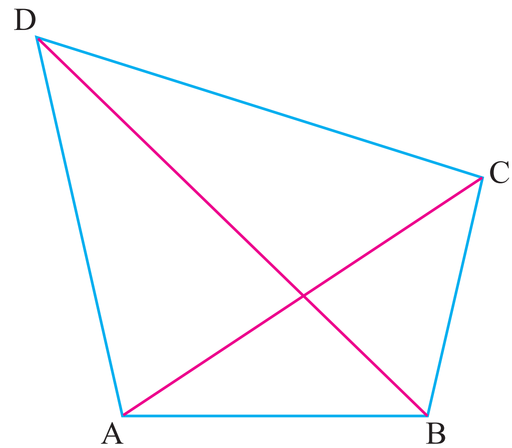
ഗാസ്സ്

[1777-1855 A.D.]

ജർമ്മൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗാസ്സ് തന്റെ 17-ാ മത്തെ വയസ്സിൽ തന്നെ P ഭുജങ്ങളുടെ (P - gons) അതായത് P വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ നിർമ്മിതിയെക്കുറിച്ച് സൂക്ഷമ പരിശോധന നടത്തിയിരുന്നു. ഇവിടെ P എന്നത് ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യയാകുന്നു. $p = 3$ കൂടാതെ $p = 5$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾക്കു മാത്രമേ അന്ന് നിർമ്മിതി അറിയാമായിരുന്നുള്ളൂ. P ഒരു അഭാജ്യം "Fermat Number" (i.e.) $p = 2^{2^n} + 1$ ആയിരുന്നാൽ മാത്രമേ ക്രമമായ P-gons നിർമ്മിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ എന്ന് ഗാസ്സ് കണ്ടുപിടിച്ചു.

4.2 ചതുർഭുജം

4.2.1 ആമുഖം



ചിത്രം. *4.1*

ചതുർഭജത്തെ കുറിച്ചും ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ചും നമ്മൾ ഏഴാം തരത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. നമുക്ക് അവ ഒന്നുകൂടി ഓർമ്മിക്കാം.

ചിത്രം 6.1 ൽ A, B, C, D എന്നിവ ഒരു തലത്തിലെ നാല് ബിന്ദുക്കളാണ്. മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നില്ല.

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ എന്നിവ ശീർഷങ്ങളിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുന്നു. ഒരു ചതുർഭുജമെന്നത് നാല് വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമതല രൂപമാണെന്ന് നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് കോണുകളുടേയും തുക 360^0 ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

$(\overline{AB}, \overline{AD})$, $(\overline{AB}, \overline{BC})$, $(\overline{BC}, \overline{CD})$, $(\overline{CD}, \overline{DA})$ എന്നിവ സമീപ വശങ്ങളും $\overline{AC}$ യും $\overline{BD}$ യും വികർണ്ണങ്ങളും ആകുന്നു.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ കൂടാതെ $\angle D$ (അല്ലെങ്കിൽ $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$) എന്നിവ ചതുർഭുജം ABCD യുടെ കോണുകൾ ആകുന്നു.

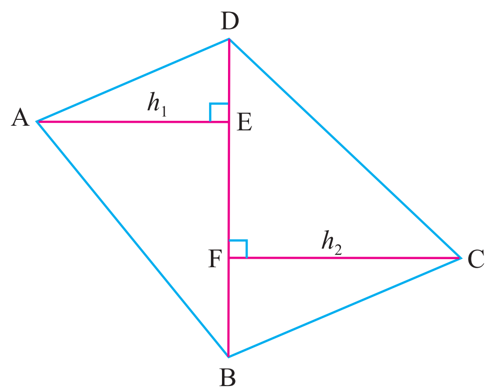
$$\therefore\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

കുറിപ്പ് : (i) ചതുർഭുജത്തെ ചക്രീയരീതിയിൽ ABCD എന്നോ BCDA എന്നോ പേരു കൊടുക്കണം

(ii) സമചതുരം, ദീർഘചതുരം, സമചതുർഭുജം, സാമാന്തരികം, ലംബകം എന്നിവയെല്ലാം **ചതുർഭുജങ്ങളാകുന്നു**.

(iii) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന് നാലു ശീർഷങ്ങളും, നാലു വശങ്ങളും, നാലു കോണുകളും രണ്ട് വികർണ്ണങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കും.

4.2.2 ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. *4.2*

ABCD ഒരു ചതുർഭുജമണെന്നിരിയ്ക്കട്ടെ $\overline{BD}$ വികർണ്ണങ്ങളിൽ ഒന്നാകുന്നു. $\overline{AE}$ കൂടാതെ $\overline{FC}$ എന്നിവ യഥാക്രമം Aയും Cയും ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നു $\overline{BD}$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതികളാണെന്നിരിയ്ക്കട്ടെ.

ചിത്രം 6.2 ൽ നിന്നും ചതുർഭുജം **ABCD** യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \triangle$ ABD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $+ \triangle$ BCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times (AE + CF) = \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$$ ചതുരശ്രമാത്ര.

ഇവിടെ BD = d, AE = h_1 കൂടാതെ CF = h_2.

വികർണ്ണത്തിന്റെയും വികർണ്ണത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കപ്പെട്ട രണ്ട് ഉന്നതികളുടെ തുകയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

$A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ ചതുരശ്ര മാത്രകൾ ഇവിടെ 'd' വികർണ്ണമാകുന്നു കൂടാതെ; 'h_1' , 'h_2' എന്നിവ എതിർ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്ന് വികർണ്ണത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ഉന്നതികളാകുന്നു.

പ്രവർത്തി

പേപ്പർ മടക്കുന്ന വിദ്യ ഉപയോഗിച്ച്, $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ ശരിനോക്കുക

4.2.3 ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമിതി

ഈ ക്ലാസ്സിൽ, ഒരു **ചതുർഭുജം** നിർമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം

ഒരു ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നതിന്, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിച്ച് അതിനുശേഷം നാലാമത്തെ ശീർഷം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്നതിന്, മൂന്ന് സ്വതന്ത്രഅളവുകൾ ആവശ്യമാണ്. നാലാമത്തെ ശീർഷം കാണുന്നതിന് രണ്ടളവുകൾ കൂടിവേണം, അതിനാൽ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുന്നതിന് **അഞ്ച് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ** ആവശ്യമാണ്.

താഴെ തന്നിട്ടുളള അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച്, നമുക്ക് ഒരു ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കാം.

(i) നാലുവശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും
(ii) നാലു വശങ്ങളും ഒരു കോണും
(iii) മൂന്നു വശങ്ങളും, ഒരു വികർണ്ണവും ഒരു കോണും.
(iv) മൂന്നു വശങ്ങളും രണ്ടു കോണുകളും
(v) രണ്ടു വശങ്ങളും മൂന്നു കോണുകളും

4.2.4 നാലു വശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും തന്നിരുന്നാൽ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

ഉദാഹരണം 4.1

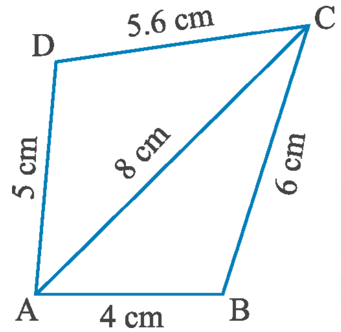
AB = 4 സെ.മീ., BC = 6 സെ.മീ., CD = 5.6 സെ.മീ.

DA = 5സെ.മീ. കൂടാതെ AC = 8 സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളോടുകൂടിയ ചതുർഭുജം ABCD നിർമ്മിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : AB = 4സെ.മീ., BC = 6 സെ.മീ., CD = 5.6 സെ.മീ. DA = 5സെ.മീ. കൂടാതെ AC = 8 സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. 4.3

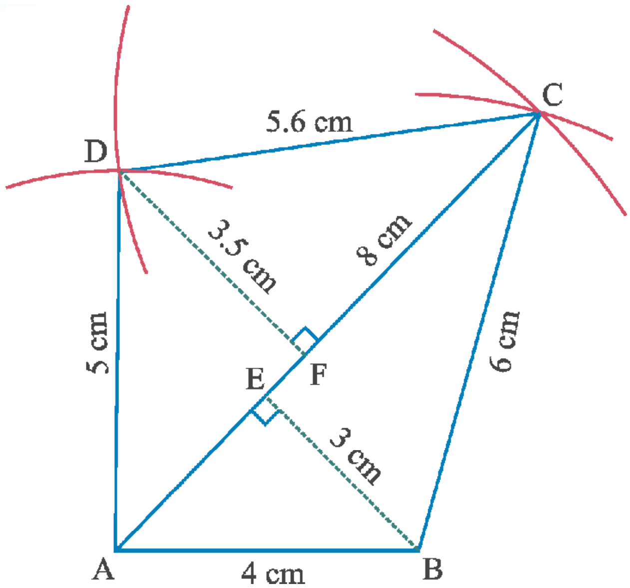
ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു സഹായ ചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക

വഴി 2 : രേഖാഖണ്ഡം AB = 4 സെ.മീ. വരയ്ക്കുക

വഴി 3 : Aയും Bയും കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 8 സെ.മീ.ഉം, 6 സെ.മീ. ഉം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ വൃത്ത ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക അവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം. *4.4*

വഴി 4 : $\overline{AC}$ കൂടാതെ $\overline{BC}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക

വഴി 5 : A കൂടാതെ C എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 5സെ.മീ., 5.6 സെ.മീ. എന്നീ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ D യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക

വഴി 6 : $\overline{AD}$ ഉം $\overline{CD}$ ഉം യോജിപ്പിക്കുക.

ABCD ആവശ്യമായ ചതുർഭുജം

വഴി 7: B യിൽ നിന്നും $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ യും D യിൽ നിന്ന് $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ യും വരച്ച് BE യുടെയും DF ന്റെയും നീളം അളക്കുക. BE = $h_1 = 3$ സെ.മീ., DF = $h_2 = 3.5$സെ.മീ., AC = $d = 8$ സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ

ചതുർഭുജം ABCD ൽ സെ.മീ. , $d = 8$ സെ.മീ., $h_1 = 3$ സെ.മീ. കൂടാതെ $h_2 = 3.5$ സെ.മീ.

ചതുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(8)(3 + 3.5)$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6.5$

$= 26$ സെ.മീ.^{2}.

4.2.5 നാലുവശങ്ങളും ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

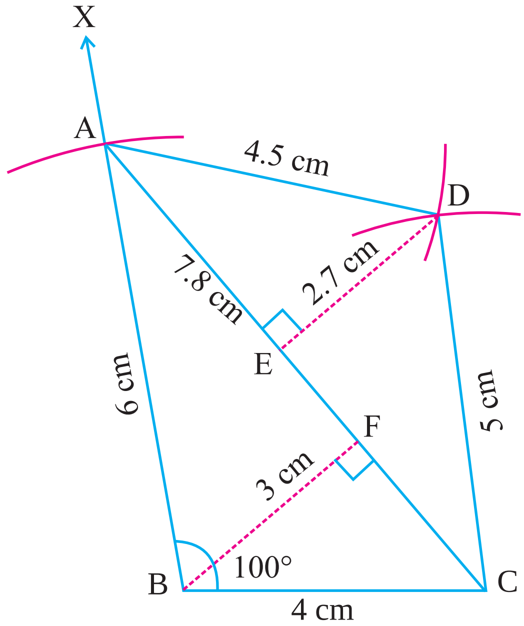
ഉദാഹരണം 4.2

AB = 6 സെ.മീ. , BC = 4 സെ.മീ. , CD = 5 സെ.മീ. , DA = 4.5 സെ.മീ. , $\angle$ ABC = 100° എന്നീ അളവുകളുള്ള ചതുർഭുജം വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

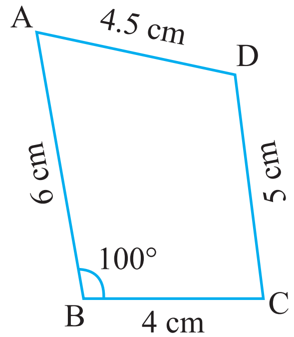
തന്നിട്ടുള്ളവ : AB = 6സെ.മീ., BC = 4 സെ.മീ.,CD = 5 സെ.മീ., DA = 4.5സെ.മീ. $\angle$ ABC = 100°.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. *4.6*

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. *4.5*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു സഹായചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക

വഴി 2 : BC = 4 സെ.മീ.നീളത്തിൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : $\overline{BC}$ യിലെ B എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\angle CBX = 100°$ വരത്തക്കവിധം കോൺ അളന്നെടുക്കുക.

വഴി 4 : B കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക ഇത് $\overrightarrow{BX}$ - നെ A യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. $\overline{CA}$ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 5 : C കൂടാതെ A എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 5 സെ.മീ. ഉം 4.5 സെ.മീ. ഉം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ D യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് വരയ്ക്കുക.

വഴി 6 : $\overline{CD}$ കൂടാതെ $\overline{AD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക
ABCD ആവശ്യമായ ചതുർഭുജമാകുന്നു.

വഴി 7 : B യിൽ നിന്ന് $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ യും D യിൽ നിന്ന് $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ യും വരയ്ക്കുക അതിനുശേഷം അവയുടെ നീളങ്ങൾ BFഉം DE യും അളക്കുക. BF= $h_1 = 3$ സെ.മീ., DE = $h_2 = 2.7$ സെ.മീ., AC = d = 7.8 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ചതുർഭുജം ABCD, ൽ $d =$ 7.8 സെ.മീ., $h_1 =$ 3സെ.മീ. കൂടാതെ $h_2 =$ 2.7 സെ.മീ.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(7.8)(3 + 2.7)$

$= \frac{1}{2} \times 7.8 \times 5.7 =$ 22.23 സെ.മീ.^{2}.

4.2.6 മൂന്നുവശവും, ഒരു വികർണ്ണവും കൂടാതെ ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

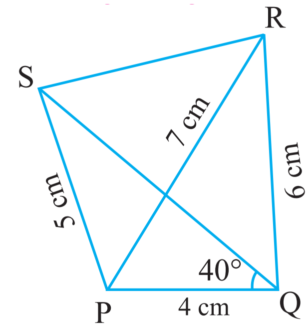
ഉദാഹരണം 4.3

PQ = 4 സെ.മീ., QR = 6 സെ.മീ., PR = 7 സെ.മീ., PS = 5സെ.മീ.കൂടാതെ $\angle$PQS = 40°എന്നീ അളവുകളോടു കൂടിയ ചതുർഭുജം വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

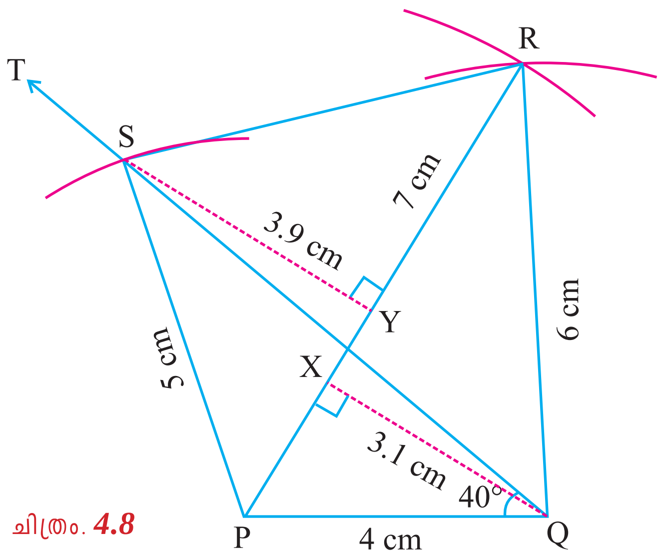
തന്നിട്ടുള്ളവ: PQ = 4 സെ.മീ., QR = 6 സെ.മീ., PR= 7 സെ.മീ., PS= 5 സെ.മീ. , കൂടാതെ $\angle$PQS = 40°.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. 4.7

ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. 4.8

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : PQ = 4സെ.മീ. ആകത്തക്കവിധം രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : P കൂടാതെ Q എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 7 സെ.മീ. ഉം 6സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ രണ്ടു വൃത്ത ചാപങ്ങൾ R ൽ ഛേദിക്കുമാറ് വരയ്ക്കുക.

വഴി 4 : $\overline{PR}$ കൂടാതെ $\overline{QR}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 5 : $\overline{PQ}$ വിലെ Q ൽ നിന്ന് 40° അളവിൽ $\lfloor$PQT നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 6 : P കേന്ദ്രമാക്കി 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. ഇത് $\overrightarrow{QT}$ യെ S - ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 7 : $\overline{PS}$ യോജിപ്പിക്കുക. PQRS ആവശ്യമായ ചതുർഭുജം.

വഴി 8 : Q ൽ നിന്ന് $\overline{QX} \perp \overline{PR}$ ഉം വരച്ച് S ൽ നിന്ന് $\overline{SY} \perp \overline{PR}$ ഉം വരച്ച് QX ഉം SY ഉം അളക്കുക.

QX = h_1 = 3.1 സെ.മീ., SY = h_2 = 3.9സെ.മീ., PR = d = 7 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ചതുർഭുജം PQRS, ൽ d = 7 സെ.മീ., h_1 = 3.1സെ.മീ. കൂടാതെ h_2 = 3.9 സെ.മീ.

ചതുർഭുജം PQRS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(7)(3.1 + 3.9)$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7$

= 24.5 സെ.മീ.^{2}.

4.2.7 മൂന്നു വശവും രണ്ടു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

ഉദാഹരണം 4.4

AB = 6.5 സെ.മീ., AD = 5 സെ.മീ., CD = 5 സെ.മീ., ∠BAC = 40° കൂടാതെ ∠ABC = 50°, എന്നീ അളവുകളുള്ള ചതുർഭുജം ABCD വരച്ച് അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

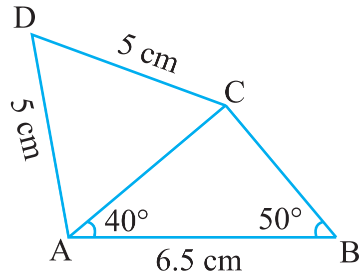
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ :

AB = 6.5 സെ.മീ., AD = 5 സെ.മീ., CD = 5 സെ.മീ.,

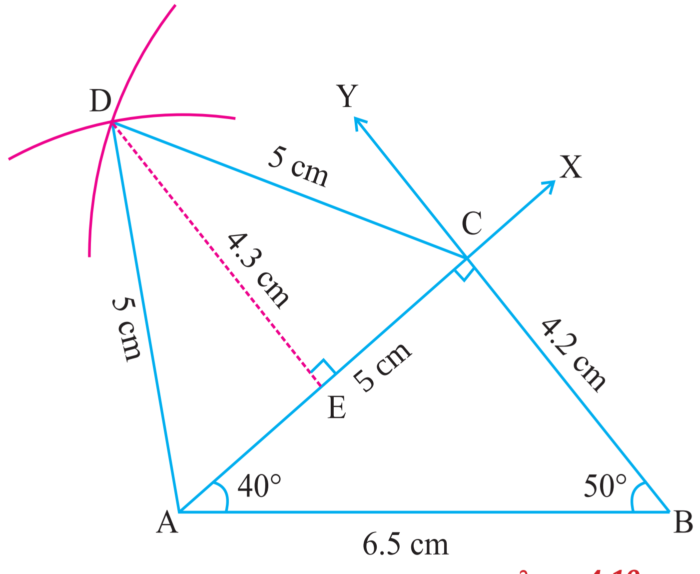
∠BAC = 40° കൂടാതെ ∠ABC = 50°.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. *4.9*

ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. *4.10*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു സഹായചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളുവകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 6.5 സെ.മീ.നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : A യിൽ നിന്നും 40° യിൽ ∠BAX ഉം B യിൽ നിന്ന് 50° യിൽ ∠ABY യും നിർമ്മിക്കുക. അവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 4 : C കൂടാതെ A എന്നിവയിൽ നിന്നും യഥാക്രമം 5 സെ.മീ., 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ Dയിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : $\overline{AD}$ കൂടാതെ $\overline{CD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക

ABCD ആവശ്യമായ ചതുർഭുജം

വഴി 6 : D യിൽ നിന്നും $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ യും B യിൽ നിന്ന് $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ യും വരയ്ക്കുക. BCകൂടാതെ DE നീളങ്ങൾ അളക്കുക. BC = h_1 = 4.2 സെ.മീ., DE = h_2 = 4.3 സെ.മീ. , AC = d = 5 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ചതുർഭുജം ABCD, d = 5 സെ.മീ., BC = h_1 = 4.2 സെ.മീ. കൂടാതെ h_2 = 4.3 സെ.മീ.

ചതുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(5)(4.2 + 4.3)$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8.5 = 21.25$ സെ.മീ.^{2}.

4.2.8 രണ്ടു വശങ്ങളും മൂന്നു കോണുകളും തന്നിരുന്നാൽ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

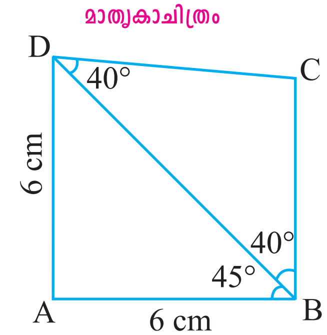
ഉദാഹരണം 4.5

AB = 6 സെ.മീ., AD = 6 സെ.മീ., ∠ ABD = 45°, ∠ BDC = 40° കൂടാതെ ∠ DBC = 40° എന്നീ അളവുകളുള്ള ചതുർഭുജം ABCD വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

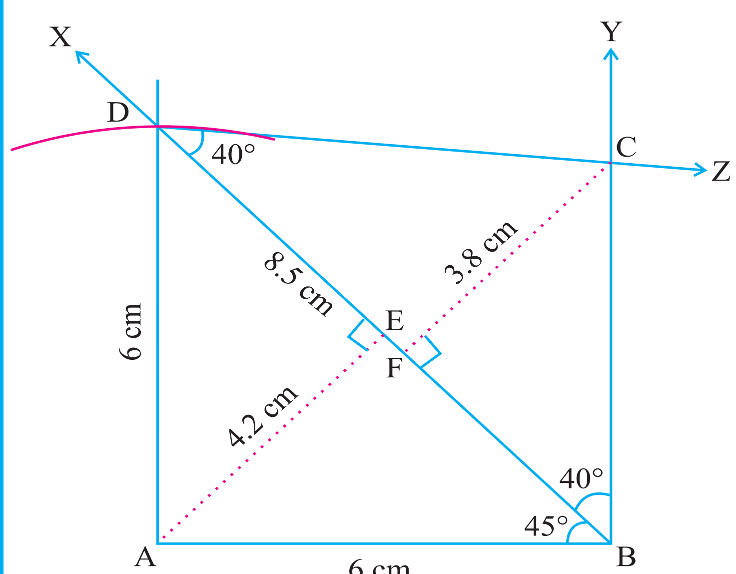
തന്നിട്ടുള്ളവ : AB = 6 സെ.മീ., AD = 6 സെ.മീ., ∠ABD = 45°, ∠BDC = 40° കൂടാതെ ∠DBC = 40°.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.11

ചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം.4.12

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃക ചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 6 സെ.മീ. വരയ്ക്കുക

വഴി 3 : $\overline{AB}$ യിലെ B യിന്മേൽ 45^0 വരത്തക്കവിധം $\angle ABX$ നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 4 : A കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് $\overrightarrow{BX}$ നെ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : $\overline{AD}$ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 6 : $\overline{BD}$ യിന്മേൽ B യിൽ നിന്ന് 40° അളവിൽ $\angle DBY$ നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 7 : $\overline{BD}$ യിന്മേൽ D യിൽ നിന്ന് 40° അളവിൽ $\angle BDZ$ നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 8 : $\overrightarrow{BY}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{DZ}$ എന്നിവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.
ABCD ആവശ്യമായ ചതുർഭുജം.

വഴി 9 : A യിൽ നിന്ന് $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ യും C യിൽ നിന്ന് $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ യും വരയ്ക്കുക അതിനുശേഷം AE കൂടാതെ CF അവയുടെ നീളങ്ങൾ അളക്കുക.
$AE = h_1 = 4.2$ സെ.മീ., $CF = h_2 = 3.8$ സെ.മീ., $BD = d = 8.5$ സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ചതുർഭുജം ABCD, ൽ $d = 8.5$ സെ.മീ. $h_1 = 4.2$ സെ.മീ., $h_2 = 3.8$ സെ.മീ.

ചതുർഭുജം ABCD ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{2}(8.5)(4.2 + 3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.5 \times 8 = 34 \text{ സെ.മീ}^2$$

അഭ്യാസം 4.1

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ചതുർഭുജം ABCD വരച്ച് അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

1. AB = 5 സെ.മീ., BC = 6 സെ.മീ., CD = 4 സെ.മീ., DA= 5.5 സെ.മീ. കൂടാതെ AC = 7 സെ.മീ.
2. AB = 7 സെ.മീ., BC = 6.5 സെ.മീ., AC = 8 സെ.മീ., CD= 6 സെ.മീ. കൂടാതെ DA = 4.5 സെ.മീ.
3. AB = 8 സെ.മീ., BC = 6.8 സെ.മീ., CD = 6 സെ.മീ., AD= 6.4 സെ.മീ. കൂടാതെ $\angle B = 50^\circ$.
4. AB = 6 സെ.മീ., BC = 7സെ.മീ., AD = 6 സെ.മീ., CD= 5 സെ.മീ., കൂടാതെ $\angle BAC = 45^\circ$.
5. AB = 5.5 സെ.മീ., BC = 6.5 സെ.മീ., BD = 7 സെ.മീ., AD= 5 സെ.മീ. കൂടാതെ $\angle BAC = 50^\circ$.
6. AB = 7 സെ.മീ., BC = 5 സെ.മീ., AC = 6 സെ.മീ., CD= 4 സെ.മീ., കൂടാതെ $\angle ACD = 45^\circ$.
7. AB = 5.5 സെ.മീ., BC = 4.5 സെ.മീ., AC = 6.5 സെ.മീ., $\angle CAD = 80^\circ$ കൂടാതെ $\angle ACD = 40^\circ$.
8. AB = 5 സെ.മീ., BD = 7 സെ.മീ., BC = 4 സെ.മീ., $\angle BAD = 100^\circ$ കൂടാതെ $\angle DBC = 60$.
9. AB = 4 സെ.മീ., AC = 8 സെ.മീ., $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ കൂടാതെ $\angle CAD = 40^\circ$.
10. AB = 6സെ.മീ., BC = 6സെ.മീ., $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$ കൂടാതെ $\angle CAD = 100^\circ$.

4.3 ലംബകം

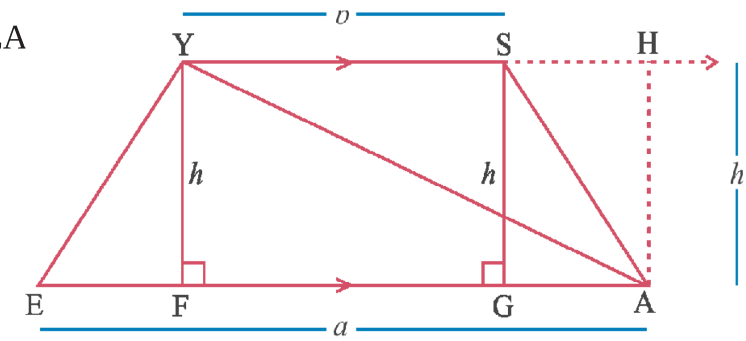
4.3.1 ആമുഖം

ഏഴാം തരത്തിൽ പ്രത്യേക ചതുർഭുജങ്ങളായ ലംബകം കൂടാതെ ദ്വിസമഭുജ ലംബകം എന്നിവയെക്കുറിച്ചും അവയുടെ ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ചും നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ലംബകത്തിന്റെ നിർവചനത്തേയും സവിശേഷതകളെയും കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങൾ ആയിട്ടുള്ള ചതുർഭുജത്തെ ലംബകം എന്നു പറയുന്നു.

4.3.2 ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

ലംബകം EA



ചിത്രം.4.13

വികർണ്ണം $\overline{YA}$ വരച്ച് മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ലംബകത്തെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിക്കാം. ഒരു ത്രികോണത്തിന് $\overline{EA}$ എന്ന ആധാരമാണുള്ളത് (EA = a മാത്രകൾ)

മറ്റേ ത്രികോണത്തിന് $\overline{YS}$ എന്ന ആധാരമാണുള്ളത് (YS = b മാത്രകൾ)

$\overline{EA} \parallel \overline{YS}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം

$YF = HA = h$ മാത്രകൾ

ഇപ്പോൾ $\triangle$ EAYന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}$ ah. $\triangle$ YAS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}$ bh.

അതിനാൽ ലംബകം EASY ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $\triangle$ EAY ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + $\triangle$ YAS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}h(a+b) \text{ ചതുരശ്രമാത്രകൾ}$$

$= \frac{1}{2}$ x ഉയരം x (സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുക) ചതുരശ്രമാത്രകൾ

ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$A = \frac{1}{2}h(a+b)$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ, ഇവിടെ '*a*' കൂടാതെ '*b*' എന്നിവ സമാന്തരവശങ്ങളും '*h*' സമാന്തരവശങ്ങൾക്കിടയ്ക്കുള്ള ലംബ ദൂരവും ആകുന്നു.

4.3.3 ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

പൊതുവായി ഒരു ലംബകം നിർമ്മിക്കുമ്പോൾ സമാന്തരവശങ്ങളിൽ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശത്തെ ആധാരമായി കണക്കാക്കുന്നു. ആ ആധാരത്തിന്മേൽ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്നു. ഈ ത്രികോണം സമാന്തരവശങ്ങൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരത്തിന് എതിരേയുള്ള ശീർഷം, ആധാരത്തിന് എതിരേയുള്ള സമാന്തരത്തിൽ തന്നെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ഈ ശീർഷം വഴി ആധാരത്തിന് സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക. നാലാമത്തെ ശീർഷം ഈ രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ബാക്കി അളവിന്റെ സഹായത്തോടുകൂടി നാലാമത്തെ ശീർഷം നിർണ്ണയിക്കുന്നു. ഉചിതമായ ശീർഷങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കൽ വഴി നമുക്ക് ആവശ്യമായ ലംബകം ലഭിക്കുന്നു.

ഒരു ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് നാല് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ഒരു ലംബകം നിർമ്മിക്കാൻ സാധിക്കും.

(i) മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും
(ii) മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു കോണും
(iii) രണ്ടും വശങ്ങളും രണ്ടു കോണും
(iv) നാല് വശങ്ങൾ

4.3.4 മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും തന്നിരുന്നാൽ ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

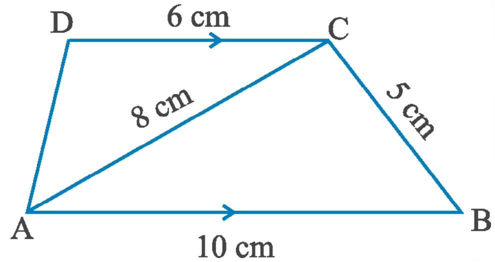
ഉദാഹരണം 4.6

$\overline{AB}$ യ്ക്ക് സമാന്തരം $\overline{DC}$ വരത്തക്കവിധം ലംബകം ABCD നിർമ്മിക്കുക. AB = 10 സെ.മീ., BC = 5 സെ.മീ., AC = 8 സെ.മീ.കൂടാതെ CD = 6 സെ.മീ. ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

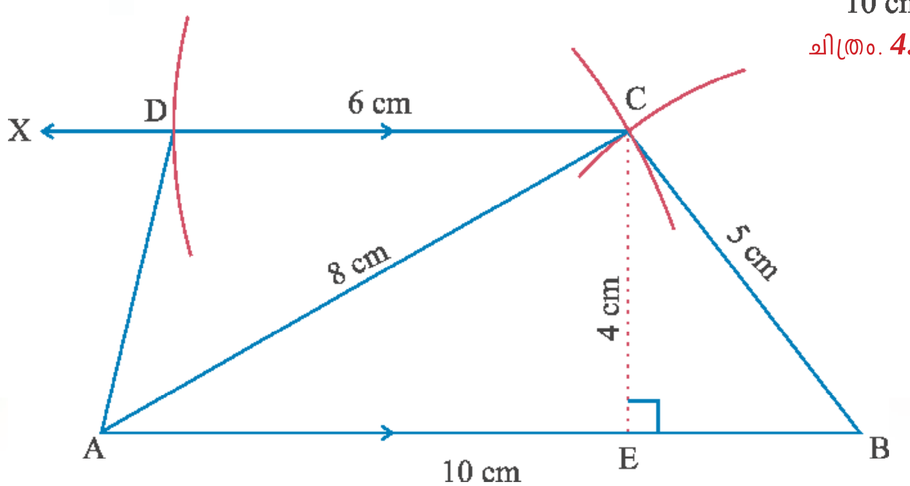
തന്നിട്ടുള്ളവ : $\overline{AB}$ എന്നത് $\overline{DC}$, യ്ക്ക് സമാന്തരം AB = 10 സെ.മീ., BC = 5 സെ.മീ., AC = 8 സെ.മീ. കൂടാതെ CD = 6 സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. *4.14*

ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. *4.15*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 10 സെ.മീ. ൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : A യുംB യും കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 8 സെ.മീ., കൂടാതെ 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ C യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് വൃത്തചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

വഴി 4 : $\overline{AC}$ കൂടാതെ $\overline{BC}$ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 5 : $\overrightarrow{CX}$ ന് $\overline{BA}$ സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുക.

വഴി 6 : C കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\overrightarrow{CX}$ നെ D യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക.

വഴി 7 : $\overline{AD}$ യോജിപ്പിക്കുക ABCD ആവശ്യമായ ലംബകം ആകുന്നു

വഴി 8 : C യിൽ നിന്നും $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് CE യുടെ നീളം അളക്കുക. CE = h = 4 സെ.മീ., AB = a = 10 സെ.മീ., DC = b = 6 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ലംബകം ABCD യിൽ, a = 10 സെ.മീ., b = 6സെ.മീ. കൂടാതെ h = 4 സെ.മീ.

ലംബകം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} h\,(a + b)$

$= \frac{1}{2}(4)\,(10 + 6)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 16$

$= 32$ സെ.മീ.^{2}

4.3.5 മൂന്നു വശവും ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

ഉദാഹരണം 4.7

$\overline{SR}$ ന് സമാന്തമായി PQ വരത്തക്കവിധം ലംബകം PQRS വരയ്ക്കുക, $\overline{PQ}$ = 8 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ PQR = 70°, QR = 6 സെ.മീ. കൂടാതെ PS = 6സെ.മീ. ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

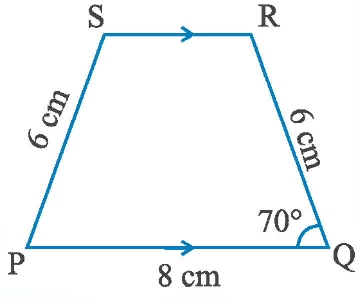
തന്നിട്ടുള്ളവ :

$\overline{PQ}$ എന്നത് $\overline{SR}$,ന് സമാന്തരം

PQ = 8സെ.മീ., ∠PQR = 70°,

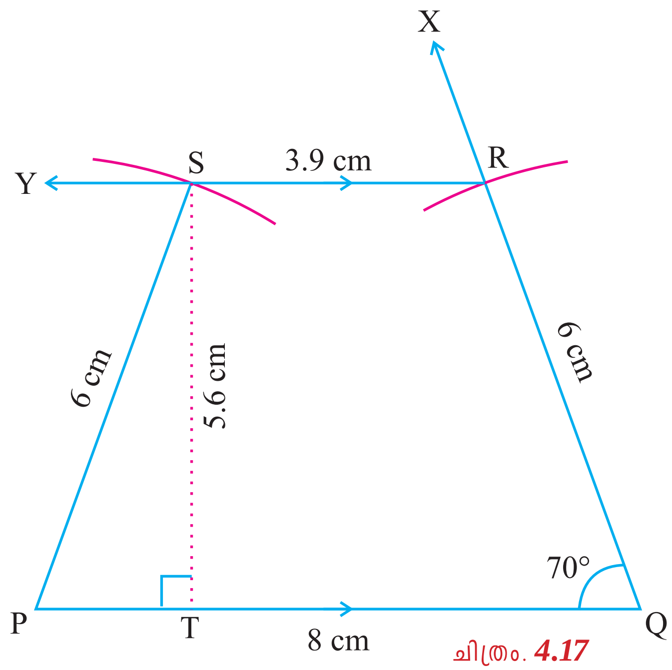
QR = 6 സെ.മീ. കൂടാതെ PS = 6സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.16

ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. **4.17**

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : PQ = 8 സെ.മീ. ൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : $\overline{PQ}$ വിന്മേൽ Q ൽ നിന്ന് 70° അളവിൽ $\angle PQX$ നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 4 : Q കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. ചാപം $\overrightarrow{QX}$ നെ R ൽ ഛേദിക്കുന്നു

വഴി 5 : $\overrightarrow{RY}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $\overline{QP}$ വരയ്ക്കുക.

വഴി 6 : P കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\overrightarrow{RY}$ യെ S ൽ ഛേദിക്കുമാറ് ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക .

വഴി 7 : $\overline{PS}$ യോജിപ്പിക്കുക. PQRS ആവശ്യമായ ലംബകം

വഴി 8 : S ൽ നിന്നും $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$ വരച്ച് ST യുടെ നീളം അളക്കുക.
ST = h = 5.6 സെ.മീ.,
RS = b = 3.9 സെ.മീ. PQ = a = 8 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ലംബകം PQRS ൽ a = 8 സെ.മീ., b = 3.9 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 5.6 സെ.മീ.

ലംബകം PQRS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} h(a+b)$

$= \frac{1}{2}(5.6)(8+3.9)$

$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11.9$

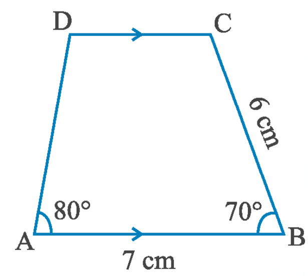
= 33.32 സെ.മീ^{2}.

4.3.6. രണ്ടു വശവും രണ്ടു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം.

ഉദാഹരണം 4.8

$\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$ ആകത്തക്കവിധം ലംബകം ABCD നിർമ്മിക്കുക AB = 7 സെ.മീ., BC = 6 സെ.മീ., ∠BAD = 80° കൂടാതെ ∠ABC = 70° ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.18

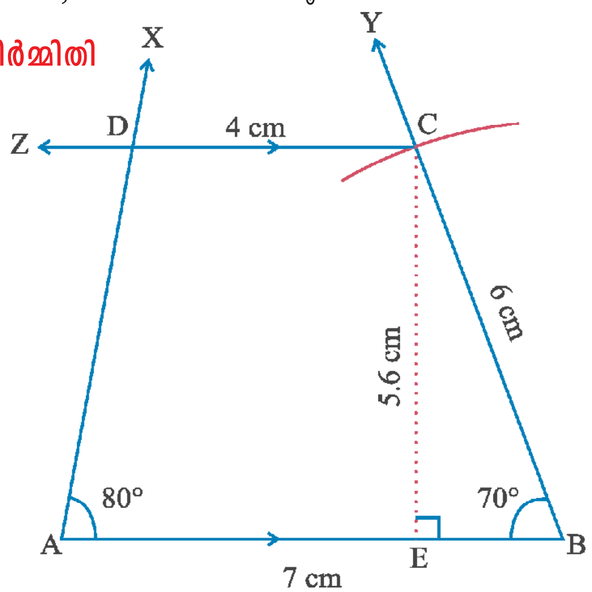
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ :

$\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$, AB = 7 സെ.മീ.,

BC = 6 സെ.മീ., ∠BAD = 80° കൂടാതെ ∠ABC = 70°.

ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. 4.19

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 7 സെ.മീ.നീളത്തിൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : $\overline{AB}$ യിന്മേൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ 80° വരത്തക്കവിധം ∠BAXനിർമ്മിക്കുക.

വഴി 4 : $\overline{AB}$ യിന്മേൽ B എന്ന ബിന്ദുവിൽ 70° വരത്തക്കവിധം ∠ABY നിർമ്മിക്കുക.

വഴി 5 : B കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. ചാപം $\overrightarrow{BY}$ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 6 : $\overline{AB}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $\overrightarrow{CZ}$ വരയ്ക്കുക ഇത് $\overrightarrow{AX}$ നെ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ABCD ആവശ്യമായ ലംബകം ആകുന്നു.

വഴി 7 : C യിൽ നിന്ന് $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് CE യുടെ നീളം അളക്കുക.

CE = h = 5.6 സെ.മീ.കൂടാതെ CD = b = 4 സെ.മീ.,

AB = a = 7സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ലംബകം ABCD ൽ a = 7 സെ.മീ., b = 4 സെ.മീ.കൂടാതെ h = 5.6 സെ.മീ.

ലംബകം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} h(a+b)$

$$= \frac{1}{2}(5.6)\ (7+4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11$$

= 30.8 സെ.മീ.^{2}.

4.3.7. നാലു വശങ്ങൾ തന്നിരുന്നാൽ ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം

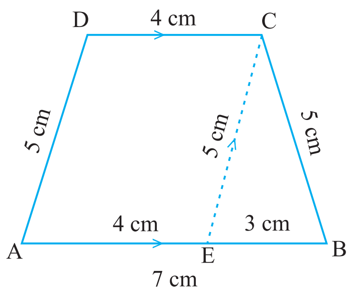
ഉദാഹരണം 4.9

$\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$ വരത്തക്കവിധം ലംബകം ABCD നിർമ്മിക്കുക AB = 7 സെ.മീ., BC = 5 സെ.മീ., CD = 4 സെ.മീ. കൂടാതെ AD = 5 സെ.മീ. ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

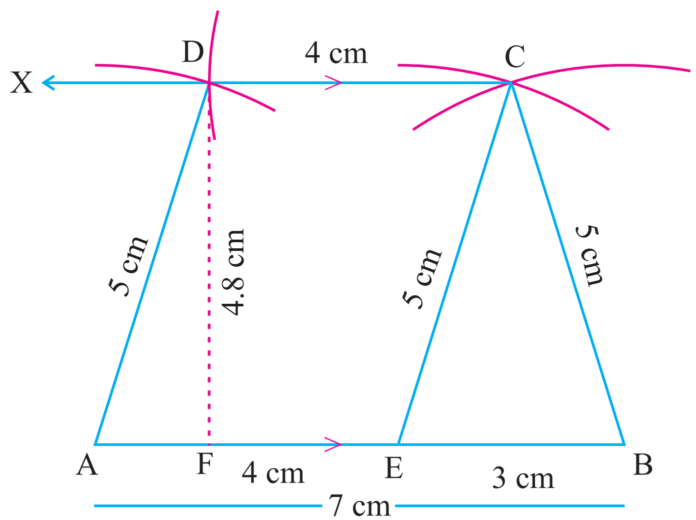
തന്നിട്ടുള്ളവ :
$\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$, BC = 5 സെ.മീ.,
CD = 4 സെ.മീ. കൂടാതെ AD = 5 സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം. **4.20**

ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. **4.21**

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.
$\overline{CE} \parallel \overline{DA}$ വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ AECD ഒരു സാമാന്തരികം ആകുന്നു.
EC = 5സെ.മീ., AE = DC = 4 സെ.മീ., EB = 3സെ.മീ.

വഴി 2 : AB = 7 സെ.മീ. വരത്തക്കവിധം രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : AE = 4 സെ.മീ. വരത്തക്കവിധം $\overline{AB}$ യിന്മേൽ E അടയാളപ്പെടുത്തുക.
[∵ DC = 4 സെ.മീ.]

വഴി 4 : B കൂടാതെ Eഎന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി 5 സെ.മീ. വീതം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : $\overline{BC}$ കൂടാതെ $\overline{EC}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക

വഴി 6 : C കൂടാതെ A എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി 4 സെ.മീ. കൂടാതെ 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധ ങ്ങളിൽ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 7 : $\overline{AD}$ കൂടാതെ $\overline{CD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

ABCD ആവശ്യമായ ലംബകം.

വഴി 8 : D വഴി $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് DF അളക്കുക.

DF = h = 4.8 സെ.മീ. AB = a = 7 സെ.മീ., CD = b = 4 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ലംബകം ABCD യിൽ a = 7സെ.മീ., b = 4 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 4.8 സെ.മീ.

ലംബകം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} h(a+b)$

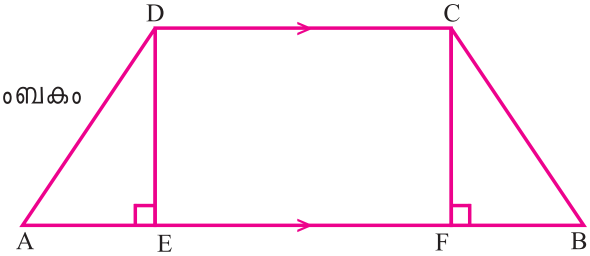
$= \frac{1}{2}(4.8)\ (7+4)$

$= \frac{1}{2} \times 4.8 \times 11$

$= 2.4 \times 11$

= 26.4 സെ.മീ.^{2}.

4.3.8 ദ്വിസമഭുജ ലംബകം



ചിത്രം. *4.22*

ചിത്രം 6.22 ൽ ABCD ഒരു ദ്വിസമഭുജ ലംബകം

(i) സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത വശങ്ങൾ അളവിൽ തുല്യമാകുന്നു. AD = BC

(ii) $\angle$ A = $\angle$ B കൂടാതെ $\angle$ ADC =$\angle$ BCD

(iii) വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും

ie, AC = BD

(iv) AE = BF, (DB $\perp$ AB, CF $\perp$ BA)

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു നിബന്ധനകൾ കാരണം ഒരു ദ്വിസമഭുജലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് **മൂന്ന് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ** ആവശ്യമാണ്.

(i) ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങൾ ആകുന്നു.

(ii) സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത വശങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

4.3.9. ദ്വിസമഭുജ ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

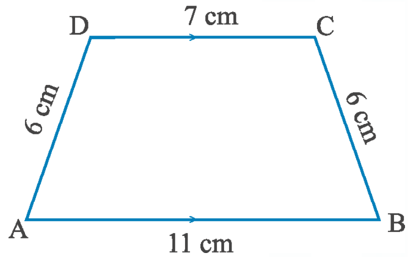
ഉദാഹരണം 4.10

$\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$ ആയിട്ടുള്ള ദ്വിസമഭുജം ലംബകം ABCD നിർമ്മിക്കുക, AB = 11സെ.മീ., DC = 7 സെ.മീ., കൂടാതെ AD = BC = 6 സെ.മീ. വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക

നിർദ്ധാരണം

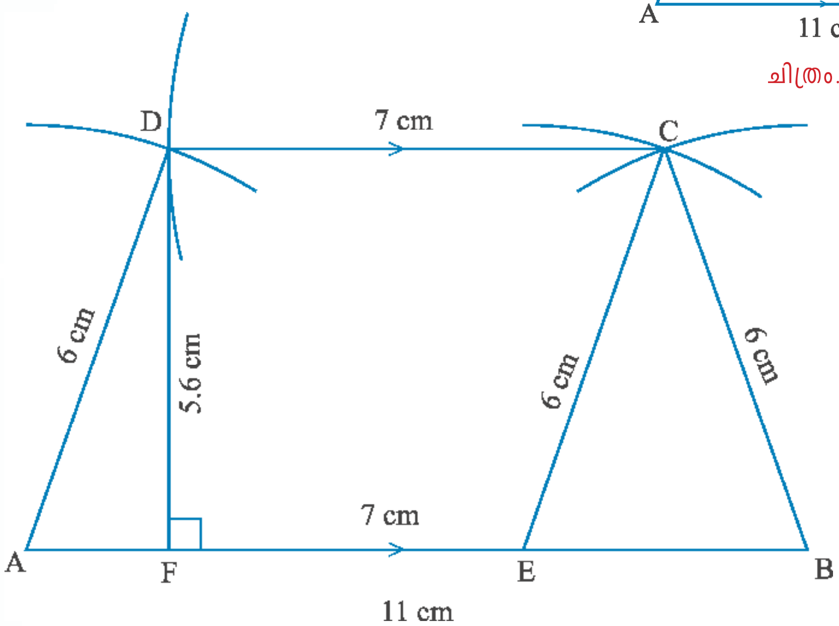
തന്നിട്ടുള്ളവ : $\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$, AB = 11 സെ.മീ., DC = 7 സെ.മീ.,കൂടാതെ AD = BC = 6 സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.*4.23*

ദ്വിസമഭുജ ലംബകത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം.*4.24*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 11 സെ.മീ. രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക

വഴി 3 : AE = 7 സെ.മീ. വരത്തക്കവിധം $\overline{AB}$ യിന്മേൽ E അടയാളപ്പെടുത്തുക (DC = 7സെ.മീ. ആയതിനാൽ)

വഴി 4 : Eയും Bയും കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി 6 സെ.മീ. വീതം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ (AD = EC = 6 സെ.മീ.) രണ്ടും ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക അവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : $\overline{BC}$ കൂടാതെ $\overline{EC}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക

വഴി 6 : C കൂടാതെ A എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 7 സെ.മീ., 6 സെ.മീ. എന്നീ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക അവ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 7 : $\overline{AD}$ കൂടാതെ $\overline{CD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക ABCD ആവശ്യമായ ദ്വിസമഭുജലംബകം.

വഴി 8 : D യിൽ നിന്ന് $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് DF അളക്കുക.
DF = h = 5.6 സെ.മീ.AB = a = 11സെ.മീ കൂടാതെ CD = b = 7 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

ദ്വിസമഭുജ ലംബകം ABCD, യിൽ a = 11സെ.മീ., b = 7സെ.മീ. കൂടാതെ h = 5.6 സെ.മീ.

ദ്വിസമഭുജ ലംബകം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} h \ (a+b)$

$= \frac{1}{2}(5.6) \ (11+7)$

$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 18$

= 50.4 സെ.മീ.^{2}.

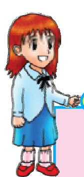
അഭ്യാസം 4.2

I. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ലംബകം PQRS നിർമ്മിക്കുക. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക,

1. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 6.8 സെ.മീ., QR = 7.2 സെ.മീ., PR = 8.4സെ.മീ., RS = 8 സെ.മീ.
2. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 8 സെ.മീ., QR = 5 സെ.മീ., PR = 6 സെ.മീ, RS = 4.5 സെ.മീ.
3. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 7 സെ.മീ., $\angle$ Q = 60°,QR = 5 സെ.മീ., RS = 4 സെ.മീ.
4. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 6.5സെ.മീ., QR = 7 സെ.മീ., $\angle$ PQR = 85°, $\overline{PS}$ = 9 സെ.മീ
5. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 7.5സെ.മീ., PS = 6.5സെ.മീ.,$\angle$ QPS = 100°,$\angle$ PQR= 45°.
6. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 6 സെ.മീ., PS = 5 സെ.മീ., $\angle$ QPS = 60° , $\angle$ PQR = 100°.
7. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 8 സെ.മീ., QR = 5 സെ.മീ., RS = 6 സെ.മീ. , SP = 4സെ.മീ.
8. $\overline{PQ}$ സമാന്തരം $\overline{SR}$, PQ = 4.5സെ.മീ., QR = 2.5സെ.മീ., RS =3സെ.മീ., SP = 2സെ.മീ.

II. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളോടുകൂടിയ ദ്വിസമഭുജലംബകം ABCD വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

1. $\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$, AB = 9 സെ.മീ., DC = 6 സെ.മീ. , AD = BC = 5 സെ.മീ.
2. $\overline{AB}$ സമാന്തരം $\overline{DC}$, AB = 10 സെ.മീ., DC = 6 സെ.മീ. , AD = BC = 7 സെ.മീ.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

പുരാതന ഇന്ത്യക്കാർക്ക് ചതുർഭുജത്തിന്റെ ധാരാളം ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ച് അറിയാമായിരുന്നു. ബൗധിയാന സൂത്രത്തിൽ വളരെ വ്യക്തമായി പറഞ്ഞിട്ടുള്ള രണ്ട് ജ്യാമിതീയ സിദ്ധാന്തം താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു:

i) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു. അവ ദീർഘചതുരത്തെ നാല് ഭാഗങ്ങൾ ആക്കുന്നു. അവയിൽ ഓരോ ജോടികൾ തുല്യം.

ii) ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമകോണുകളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

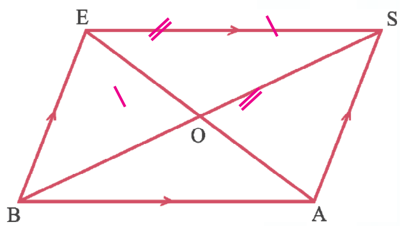
4.4 സാമാന്തരികം

4.4.1. മുഖവുര

ഏഴാം തരത്തിൽ നാം സാമാന്തരികത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാനിടയായിട്ടുണ്ട്. അത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായാൽ അതിനെ ഒരു സാമാന്തരികം എന്നു വിളിയ്ക്കുന്നു.

ചിത്രം 6.25ലെ BASE എന്ന സാമന്തരികം പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം.*4.25*

ഇനി നമുക്ക് അതിന്റെ ഗുണങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാം.

(i) $\overline{BA} \parallel \overline{ES}$; $\overline{BE} \parallel \overline{AS}$

(ii) BA = ES , BE = AS

(iii) എതിർകോണുകളുടെ അളവുകൾ തുല്യം

$\angle BES = \angle BAS; \angle EBA = \angle ESA$

(iv) വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു

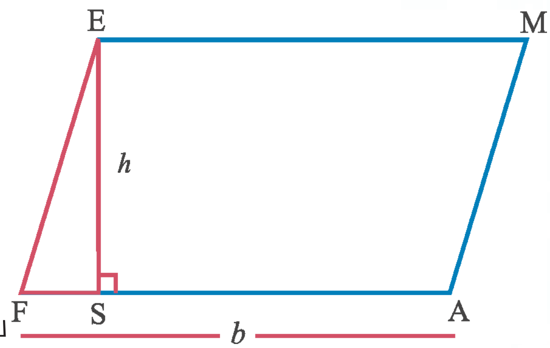
OB = OS; OE = OA, എന്നാൽ $BS \neq AE$.

(v) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സമീപ കോണുകളുടെ തുക 180°.

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി, വിസ്തീർണ്ണം കാണൽ എന്നിവയെ പറ്റി പഠിക്കാം.

4.4.2 സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

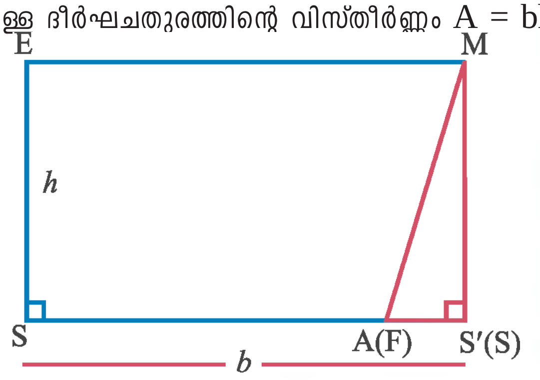
സാമാന്തരികം FAME ൽ നിന്ന് ചുവന്ന ഭാഗം (സമകോണ ത്രികോണം EFS) വെട്ടിമാറ്റാം അതിനെ സാമാന്തരികം FAME യുടെ വലുതു ഭാഗത്ത് ഉറപ്പിക്കുക. അതിന്റെ ഫലമായി കിട്ടുന്ന രൂപം ഒരു ദീർഘചതുരമാകുന്നു. ചിത്രം 4.27 നോക്കുക.



ചിത്രം.*4.26*

b മാത്രകൾ നീളവും h മാത്രകൾ ഉയരവുമുള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A = bh മാത്രകളാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇവിടെ നാം സാമന്തരികം FAME നെ ഒരു ദീർഘചതുരമാക്കി മാറ്റുന്നു. അതിനാൽ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A = bh ചതുരശ്രമാത്രകൾ ആകുന്നു. 'b' എന്നത് സാമാന്തരികത്തിന്റെ ആധാരവും 'h' എന്നത് സമാന്തരികവശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ലംബദൂരവും ആകുന്നു.



ചിത്രം. *4.27*

4.4.3 സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

ചിത്രത്തെ അനുയോജ്യമായ ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിച്ചാണ് സാമാന്തരികങ്ങൾ നിർമ്മിക്കപ്പെടുന്നത് തന്നിട്ടുള്ള വിവരമുപയോഗിച്ച് ആദ്യം ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്നു അതിനുശേഷം നാലാമത്തെ ശീർഷം കണ്ടുപിടിക്കപ്പെടുന്നു. ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് മൂന്ന് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്.

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള അളവുകൾ തന്നിരുന്നാൽ നമുക്ക് ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കാൻ സാധിക്കും.

(i) രണ്ടു സമീപവശങ്ങളും ഒരു കോണും
(ii) രണ്ടു സമീപവശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും
(iii) രണ്ടു വികർണ്ണങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു കോണും
(iv) ഒരു വശം, ഒരു വികർണ്ണം കൂടാതെ ഒരു കോൺ

4.4.4 രണ്ടു സമീപവശങ്ങളും ഒരു കോണും തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം.

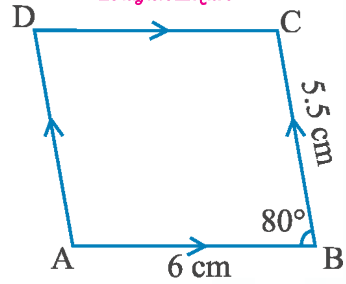
ഉദാഹരണം 4.11

AB = 6 സെ.മീ., BC = 5.5സെ.മീ. കൂടാതെ $\angle ABC = 80°$ എന്നീ അളവുകളോടുകൂടിയ ABCD സാമാന്തരികം നിർമ്മിച്ച് വിസ്തീർണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

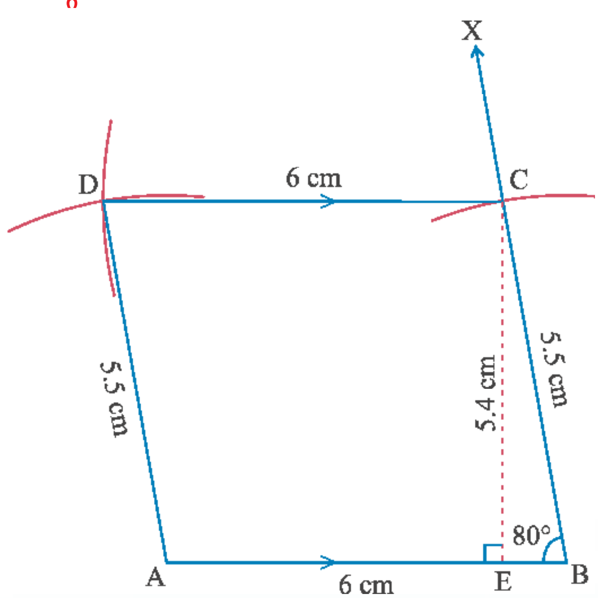
തന്നിട്ടുള്ളവ : AB = 6 സെ.മീ., BC = 5.5 സെ.മീ.
കൂടാതെ $\angle ABC = 80°$.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.*4.28*

സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം. *4.29*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 6 സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക

വഴി 3 : $\overline{AB}$ യിലെ B എന്ന ബിന്ദുവിന്മേൽ 80° വരത്തക്കവിധം ∠ABX നിർമ്മിക്കുക

വഴി 4 : B കേന്ദ്രമാക്കി 5.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക അവ $\overrightarrow{BX}$ നെ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : Cയും A യും കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 6 സെ.മീ., 5.5 സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളിൽ D യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

വഴി 6 : $\overline{AD}$ യും $\overline{CD}$ യും യോജിപ്പിക്കുക

ABCD ആവശ്യമായ സാമാന്തരികം

വഴി 7 : C യിൽ $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് CE യുടെ നീളം അളക്കുക.

CE = h = 5.4 സെ.മീ. കൂടാതെ AB = b = 6 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

സാമാന്തരികം ABCD, ൽ b = 6 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 5.4 സെ.മീ.

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = b × h = 6 × 5.4

= 32.4 സെ.മീ.^{2}.

4.4.5. രണ്ടു സമീപവശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും തന്നിരുന്നാൽ സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

ഉദാഹരണം 4.12

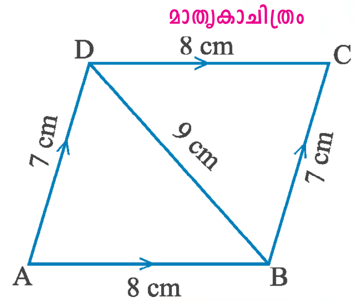
AB = 8 സെ.മീ., AD = 7 സെ.മീ. കൂടാതെ BD = 9 സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളിൽ ABCD സാമാന്തരികം നിർമ്മിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

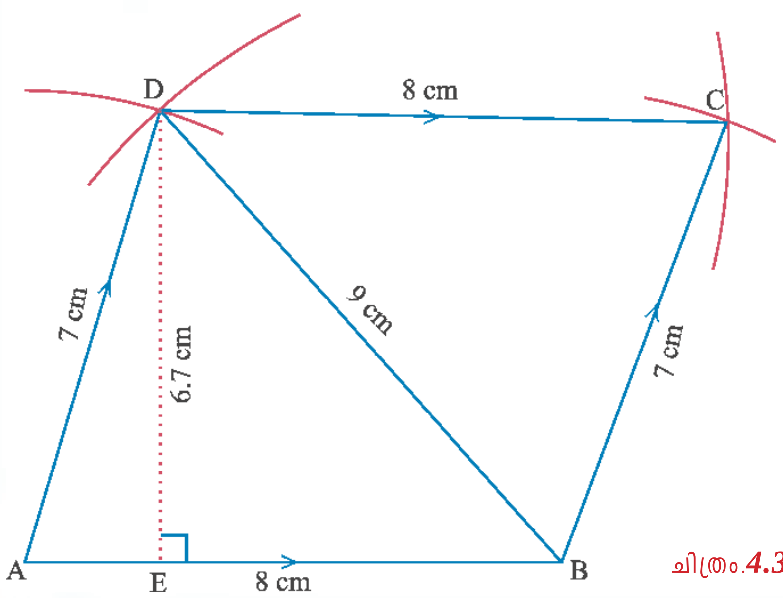
തന്നിട്ടുള്ളത് : AB = 8 സെ.മീ., AD = 7 സെ.മീ. കൂടാതെ BD = 9 സെ.മീ.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.30



ചിത്രം.4.31

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 8 സെ.മീ.രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : A കൂടാതെ B കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 7 സെ.മീ. കൂടാതെ 9 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ രണ്ട് ചാപങ്ങൾ D യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് വരയ്ക്കുക.

വഴി 4 : $\overline{AD}$ കൂടാതെ $\overline{BD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 5 : B യും D യും കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം 7 സെ.മീ. കൂടാതെ 8 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽ രണ്ട് ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 6 : $\overline{CD}$ കൂടാതെ $\overline{BC}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.
ABCD ആവശ്യമായ സാമാന്തരികം.

വഴി 7 : D യിൽ നിന്ന് $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് DE യുടെ നീളം അളക്കുക.
DE = h = 6.7 സെ.മീ. AB = DC= b = 8 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

സാമാന്തരികം ABCD, ൽ b = 8 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 6.7 സെ.മീ.

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= b \times h$

$= 8 \times 6.7 = 53.6$ സെ.മീ.^{2}.

4.4.6. രണ്ടു വികർണ്ണങ്ങളും ഒരു ആന്തരകോണും തന്നിരുന്നാൽ സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം

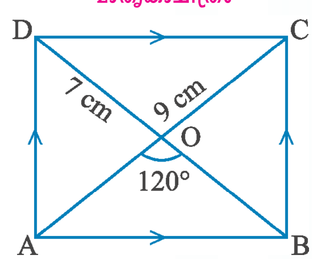
ഉദാഹരണം 4.13

AC = 9 സെ.മീ., BD = 7 സെ.മീ. കൂടാതെ $\angle AOB = 120°$ എന്നീ അളവുകളിൽ $\overline{AC}$ കൂടാതെ $\overline{BD}$ എന്നിവ ‘O’ യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് ABCD സാമാന്തരികം നിർമ്മിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

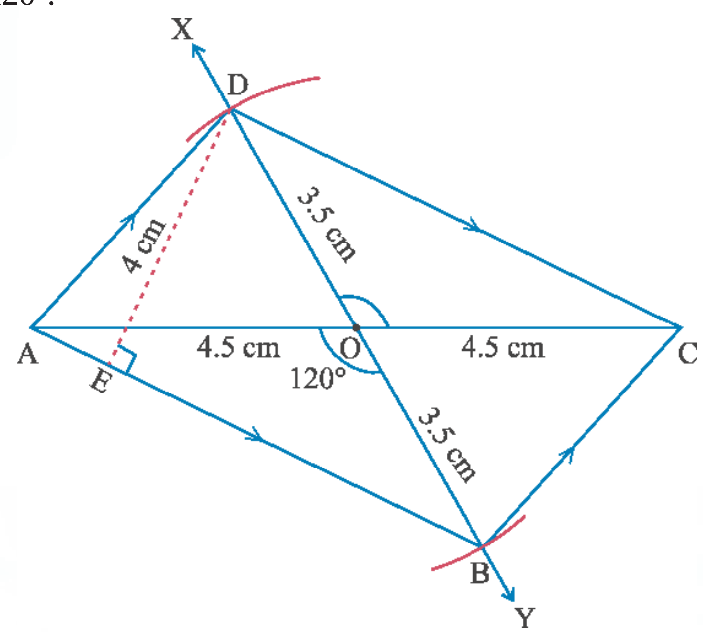
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : AC = 9 സെ.മീ., BD = 7 സെ.മീ. കൂടാതെ $\angle AOB = 120°$.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.32



ചിത്രം. 4.33

സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AC = 9 സെ.മീ.നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : $\overline{AC}$ യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു 'O' അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 4 : 'O' വഴിയായി രേഖ $\overleftrightarrow{XY}$ വരയ്ക്കുമ്പോൾ $\angle AOY = 120°$ കിട്ടുന്നു.

വഴി 5 : O കേന്ദ്രമാക്കി $\overline{AC}$ യുടെ ഇരുവശങ്ങളിലുമായി $\overrightarrow{OX}$ നെ D യിലും $\overrightarrow{OY}$ യെ B യിലും ഛേദിക്കുമാറ് $\overleftrightarrow{XY}$ യിന്മേൽ 3.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

വഴി 6 : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ കൂടാതെ $\overline{DA}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. ABCD ആവശ്യമായ സാമാന്തരികം ആകുന്നു.

വഴി 7 : D യിൽ നിന്ന് $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് DE അളക്കുക. DE = h = 4 സെ.മീ. കൂടാതെ AB = b = 7 സെ.മീ. എന്നീ നീളങ്ങൾ അളക്കുക.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ :

സാമാന്തരികം ABCD, ൽ b = 7 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 4 സെ.മീ.

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= b \times h = 7 \times 4 = 28$ സെ.മീ^{2}.

4.4.7. ഒരു വശവും ഒരു വികർണ്ണവും , ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്നവിധം

ഉദാഹരണം 4.14

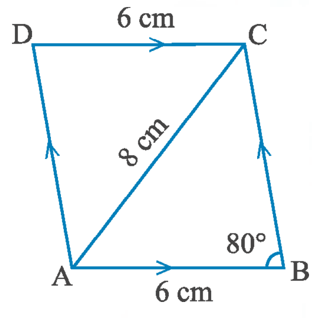
AB = 6 സെ.മീ., $\angle ABC = 80°$ കൂടാതെ AC = 8 സെ.മീ. അളവുകളിലുള്ള ABCD സാമാന്തരികം വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : AB = 6 സെ.മീ., $\angle ABC = 80°$

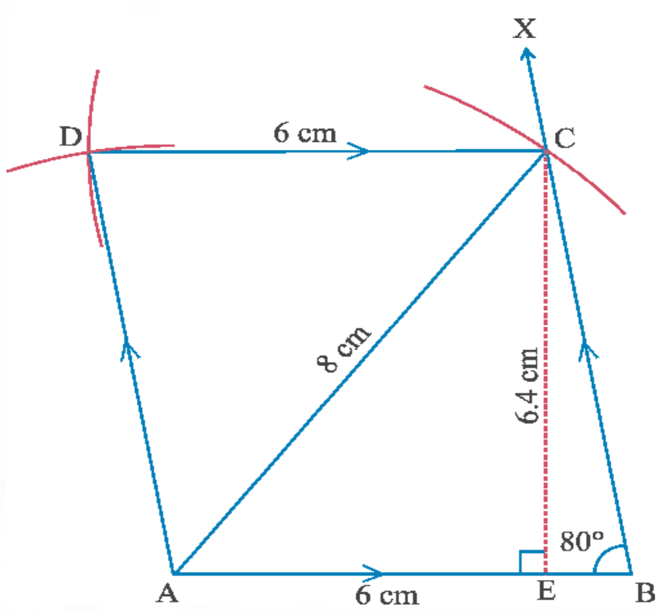
കൂടാതെ AC = 8 സെ.മീ.

മാതൃകാചിത്രം



ചിത്രം.4.34

സാമാന്തരികത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം.4.35

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : AB = 6 സെ.മീ.നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക

വഴി 3 : $\overline{AB}$ യിന്മേലുള്ള *B* യിൽ 80° അളവിൽ ∠ABX നിർമ്മിക്കുക

വഴി 4 : A കേന്ദ്രമാക്കി 8 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക അത് $\overrightarrow{BX}$ നെ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5 : $\overline{AC}$. യോജിപ്പിക്കുക

വഴി 6 : C കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക..

വഴി 7 : BC യുടെ അതേ അളവിൽ A കേന്ദ്രമായി വേറൊരു ചാപം വരയ്ക്കുക രണ്ടു ചാപങ്ങളും D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 8 : $\overline{AD}$ കൂടാതെ $\overline{CD}$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

ABCD ആവശ്യമായ സാമാന്തരികം ആകുന്നു

വഴി 9 : C യിൽ നിന്ന് $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ വരച്ച് CE അളക്കുക. CE = h = 6.4സെ.മീ. കൂടാതെ AB = b = 6 സെ.മീ.

വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ:

സാമാന്തരികം ABCD, ൽ b = 6 സെ.മീ. കൂടാതെ h = 6.4 സെ.മീ.

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = b × h

= 6 × 6.4

= 38.4 സെ.മീ.^{2}.

അഭ്യാസം 4.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളോടുകൂടി സാമാന്തരികം ABCD വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

1. AB = 7 സെ.മീ., BC = 5 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ ABC = 60°.
2. AB = 8.5 സെ.മീ., AD = 6.5 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ DAB = 100°.
3. AB = 6 സെ.മീ., BD = 8 സെ.മീ. കൂടാതെ AD = 5 സെ.മീ.
4. AB = 5 സെ.മീ., BC = 4 സെ.മീ., AC = 7 സെ.മീ.
5. AC = 10 സെ.മീ., BD = 8 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ AOB = 100°, $\overline{AC}$ കൂടാതെ $\overline{BD}$ ‘O’ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു
6. AC = 8 സെ.മീ., BD = 6 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ COD = 90°, $\overline{AC}$ കൂടാതെ $\overline{BD}$ ‘O’ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു
7. AB = 8 സെ.മീ., AC = 10 സെ.മീ. കൂടാതെ ∠ ABC = 100°.
8. AB = 5.5 സെ.മീ., ∠ DAB = 50° കൂടാതെ BD = 7 സെ.മീ.

Concept Summary

- **ഒരു ചതുർഭുജമെന്നത് നാല് രേഖാഖണ്ഡങ്ങളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട ഒരു സമതല രൂപമാണ്.**
- **ഒരു ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് അഞ്ച് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്**
- **ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർ വശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായാൽ അത് ഒരു ലംബകമായിരിക്കും**
- **ഒരു ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് നാല് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്**
- **സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങൾ തുല്യമായിട്ടുള്ള ലംബകത്തെ ദ്വിസമഭുജ ലംബകം എന്നു പറയുന്നു.**
- **ഒരു ദ്വിസമഭുജ ലംബകം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് മൂന്ന് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്**
- **ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഓരോ ജോടി എതിർ വശങ്ങളും സമാന്തരങ്ങളായിരുന്നാൽ അതൊരു സാമാന്തരികം ആയിരിക്കും.**
- **ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് മൂന്ന് സ്വതന്ത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്**
- **ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ, ഇവിടെ 'd' വികർണ്ണവും 'h_1'കൂടാതെ 'h_2' എന്നിവ എതിർ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്ന് വികർണ്ണത്തിലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതികളും ആകുന്നു.**
- **ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \frac{1}{2} h (a + b)$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ ഇവിടെ 'a' കൂടാതെ 'b' എന്നിവ സമാന്തര വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളും 'h' രണ്ട് സമാന്തര വശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ലംബദൂരവും ആകുന്നു.**
- **സാമാന്തരീകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $A = bh$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ 'b' സാമാന്തരീകത്തിന്റെ ആധാരവും 'h' സമാന്തര വശങ്ങൾക്കിടയിലെ ലംബ ദൂരവും ആകുന്നു.**

രസകരമായ കാര്യം

സുവർണ്ണ ദീർഘചതുരം എന്നത് വർഷാതീതകാലങ്ങളായി കലകളിലും വാസ്തുവിദ്യയിലും കാണാൻ സാധിക്കുന്ന ദീർഘചതുരമാണ്. സുവർണ്ണ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ അനുപാതം ഏകദേശം 1:16 ആയിരിക്കും. ഈ അനുപാതത്തിനെ സുവർണ്ണ അനുപാതം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സുവർണ്ണദീർഘചതുരം കണ്ണുകൾക്ക് ആനന്ദകരമായിരിക്കും ബി.സി. അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ, മദ്ധ്യകാലത്തിൽ ഗ്രീക്കുകാരാണ് സുവർണ്ണ അനുപാതം കണ്ടുപിടിച്ചത്.

1855 - ൽ അന്തരിച്ച ഗാസ്സ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തന്റെ ശവകുടീരത്തിൽ 17 വശങ്ങളുളള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം വരയ്ക്കണമെന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ടിരുന്നു. പക്ഷെ ആ ചിത്രം ശില്പിയുടെ കാഴ്ചപ്പാടിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രൂപ സാദൃശ്യമായി ശിലാലേഖനം ചെയ്യപ്പെട്ടു.

നിഗൂഢ ഷഡ്ഭുജം : നിഗൂഢ ഷ്ഡ്ഭുജം എന്നത് ഒരു ക്രമ ഷഡ്ഭുജം അതിന്റെ, എല്ലാ വികർണ്ണങ്ങളും വരയ്ക്കപ്പെട്ടതാകുന്നു.

ഉത്തരങ്ങൾ

അദ്ധ്യായം 1

അഭ്യാസം 1.1

1. i) A ii) C iii) B iv) D v) A

2. i) ക്രമവിനിമേയം ii) ക്രമവിനിമേയം iii) ക്രമവിനിമേയം
   iv) സങ്കലന അനന്യത v) സങ്കലന വിപരീതം

3. i) ക്രമവിനിമേയം ii) ഗുണന അനന്യത
   iii) ഗുണന വ്യുൽക്രമം iv) സംയോജനം
   v) ഗുണനത്തിന് സങ്കലനത്തിൻ മേലുള്ള വിതരണ ഗുണം

6. i) $\frac{-505}{252}$ ii) $\frac{-1}{14}$

അഭ്യാസം 1.2

1. i) $\frac{13}{15}$ ii) $\frac{23}{84}$ iii) $\frac{117}{176}$ iv) $\frac{53}{24}$

2. i) $\frac{31}{70}, \frac{51}{140}$ ii) $\frac{111}{110}, \frac{243}{220}$ iii) $\frac{17}{30}, \frac{9}{20}$ iv) $\frac{-1}{24}, \frac{1}{12}$

3. i) $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{9}{32}$ ii) $\frac{41}{60}, \frac{83}{120}, \frac{167}{240}$
   iii) $\frac{7}{12}, \frac{1}{8}, \frac{-5}{48}$ iv) $\frac{5}{48}, \frac{11}{96}, \frac{23}{192}$

കുറിപ്പ് : മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള 1, 2 കൂടാതെ 3 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് വരാൻ സാധ്യതയുള്ള ഒരു ഉത്തരമാണ്.

അഭ്യാസം 1.3

1. i) A ii) B iii) C iv) A v) B

2. i) $2\frac{7}{24}$ ii) $\frac{16}{17}$ iii) $\frac{11}{32}$ iv) $1\frac{7}{18}$ v) $\frac{-8}{19}$
   vi) $4\frac{23}{32}$ vii) 4 viii) $-5\frac{41}{60}$

അഭ്യാസം 1.4

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) C
   vi) A vii) B viii) B ix) B x) D

2. i) $\frac{-1}{64}$ ii) $\frac{1}{64}$ iii) 625 iv) $\frac{2}{675}$ v) $\frac{1}{3^{22}}$
   vi) 54 vii) 1 viii) $256\,p^q$ ix) 231 x) $5\frac{1}{3}$

3. i) 5 ii) $\frac{1}{2}$ iii) 29 iv) 1 v) $5\frac{1}{16}$ vi) $\frac{6}{7^{21}}$

4. i) $m = 2$ ii) $m = 3$ iii) $m = 3$ iv) $m = 3$ v) $m = -6$ vi) $m = \frac{1}{4}$

5. a) i) 4 ii) 4 iii) 256 iv) 64 v) $\frac{1}{4}$

5. b) i) 4 ii) 2187 iii) 9 iv) 6561 v) $\frac{1}{9}$

അഭ്യാസം 1.5

1. (ii), (iii), (v) പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല.

2. i) 4 ii) 9 iii) 1 iv) 5 v) 4

3. i) 64 ii) 16 iii) 81

4. i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11 + 13 ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

   iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 iv) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

5. i) $\frac{9}{64}$ ii) $\frac{49}{100}$ iii) $\frac{1}{25}$ iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{961}{1600}$

6. i) 9 ii) 49 iii) 0.09 iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{9}{16}$ vi) 0.36

7. a) $4^2 + 5^2 + \underline{20^2} = 21^2$ b) 10000200001

   $5^2 + \underline{6^2} + 30^2 = 31^2$ 100000020000001

   $6^2 + 7^2 + \underline{42^2} = \underline{43^2}$

അഭ്യാസം 1.6

1. i) 12 ii) 10 iii) 27 iv) 385

2. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) 7 iv) 4

3. i) 48 ii) 67 iii) 59 iv) 23 v) 57

   vi) 37 vii) 76 viii) 89 ix) 24 x) 56

4. i) 27 ii) 20 iii) 42 iv) 64 v) 88

   vi) 98 vi) 77 viii) 96 ix) 23 x) 90

5. i) 1.6 ii) 2.7 iii) 7.2 iv) 6.5 v) 5.6

   vi) 0.54 vii) 3.4 viii) 0.043

6. i) 2 ii) 53 iii) 1 iv) 41 v) 31

7. i) 4 ii) 14 iii) 4 iv) 24 v) 149

8. i) 1.41 ii) 2.24 iii) 0.13 iv) 0.94 v) 1.04

9.21 m 10. i) $\frac{15}{56}$ ii) $\frac{46}{59}$ iii) $\frac{23}{42}$ iv) $1\frac{13}{76}$

അഭ്യാസം 1.7

1. i) A ii) C iii) B iv) A v) B
   vi) D vii) A viii) A ix) A x) D
2. ii) 216 iii) 729 v) 1000
3. i) 128 ii) 100 v) 72 vi) 625
4. i) 3 ii) 2 iii) 5 iv) 3 v) 11 vi) 5
5. i) 3 ii) 2 iii) 3 iv) 5 v) 10
6. i) 9 ii) 7 iii) 8 iv) 0.4 v) 0.6
   vi) 1.75 vii) – 1.1 viii) – 30
7. 2.7 സെ.മീ.

അഭ്യാസം 1.8

1. i) 12.57 ii) 25.42 കി.ഗ്രാം iii) 39.93 മീ.
   iv) 56.60 മീ. v) 41.06 മീ. vi) 729.94 കി.മീ.
2. i) 0.052 മീ. ii) 3.533 കി.മീ. iii) 58.294 *l*
   iv) 0.133 ഗ്രാം v) 365.301 vi) 100.123
3. i) 250 ii) 150 iii) 6800 iv) 10,000
   v) 36ലക്ഷം vi) 104 കോടി
4. i) 22 ii) 777 iii) 402 iv) 306 v) 300 vi) 10,000

അഭ്യാസം 1.9

1. i) 25, 20, 15 ii) 6, 8, 10 iii) 63, 56, 49
   iv) 7.7, 8.8, 9.9 v) 15, 21, 28 vi) 34, 55, 89
   vii) 125, 216, 343
2. a) 11ചാട്ടം b) 5 ചാട്ടം
3. a) 10 വരി ആപ്പിൾ = 55 ആപ്പിൾ b) 210 ആപ്പിൾ

വരികൾ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ആകെ ആപ്പിൾ	1	3	6	10	15	21	28	36	45

അദ്ധ്യായം 2

അഭ്യാസം 2.1

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) A
   vi) D vii) B viii) C ix) A x) C
2. i) 180 സെ.മീ, 1925 സെ.മീ^{2} ii) 54 സെ.മീ, 173.25സെ.മീ^{2}
   iii) 32.4 മീ., 62.37 മീ^{2} iv) 25.2 മീ., 37.73 മീ^{2}
3. i) 7.2 സെ.മീ, 3.08 സെ.മീ^{2} ii) 144 സെ.മീ, 1232 സെ.മീ^{2}
   iii) 216 സെ.മീ, 2772 സെ.മീ^{2} iv) 288മീ., 4928 മീ^{2}
4. i) 350 സെ.മീ, 7546സെ.മീ^{2} ii) 250 സെ.മീ, 3850 സെ.മീ^{2}
   iii) 150 മീ., 1386 മീ^{2} iv) 100 മീ., 616 മീ^{2}
5. 77 സെ.മീ^{2}, 38.5സെ.മീ^{2} 6. `540

അഭ്യാസം 2.2

1. i) 32 സെ.മീ ii) 40 സെ.മീ iii) 32.6 സെ.മീ
   iv) 40 സെ.മീ v) 98 സെ.മീ
2. i) 124 സെ.മീ^{2} ii) 25 മീ^{2} iii)273 സെ.മീ^{2} iv) 49.14 സെ.മീ^{2} v) 10.40മീ^{2}
3. i) 24 മീ^{2} ii) 284സെ.മീ^{2} iii)308സെ.മീ^{2}
   iv) 10.5സെ.മീ^{2} v) 135.625സെ.മീ^{2} vi)6.125സെ.മീ^{2}
4. 770സെ.മീ^{2} 5. 1286 മീ^{2} 6. 9384 മീ^{2}
7. 9.71സെ.മീ^{2} 8. 203സെ.മീ^{2} 9. 378സെ.മീ^{2}
10. i) 15,100 മീ^{2}, ii) 550000 മീ^{2}

അദ്ധ്യായം 3

പുനഃപരിശോധന അഭ്യാസം

1. $y° = 52°$ 2. $x° = 40°$ 3. + A = 110° 4. $x° = 40°$

5. $x° = 105°$ 6. i) സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ, ii) ഏകാന്തരകോണുകൾ,
   iii) സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ

അഭ്യാസം 3.1

1. i) B ii) A iii) A iv) B v) A
2. $x° = 65°$ 3. $x° = 42°$ 5. i)$x° = 58°, y° = 108°$ ii) $x° = 30°, y° = 30°$
   iii) $x° = 42°, y° = 40°$ 6. $x° = 153°, y° = 132°, z° = 53°$.

അഭ്യാസം 3.2

1.i)C ii) C iii) C iv) C v) B vi) A vii) B

2. $x° = 66°, y° = 132°$ 3. $x° = 70°$

4.$x° = 15°, y° = 55°$ 7. $x° = 30°, y° = 60°, z° = 60°$

സംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള കളി

Sequential Inputs of numbers with 8

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

Sequential 8's with 9

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

8 ഇല്ലാതെ

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 36 = 444444444$$
$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

Numeric Palindrome with 1's

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$111111 \times 111111 = 12345654321$$
$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$
$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$
$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

'എനിക്കും സാധിക്കും, ഞാൻ ചെയ്തു'
('I can,I did')
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ പ്രവർത്തനവിവരസൂചിക

വിഷയം

ക്രമ നമ്പർ	തിയതി	പാഠഭാഗം	പാഠത്തിന്റെ തലക്കെട്ട്	പ്രവർത്തനം	കുറിപ്പ്