गणित

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

साहिबजादा अजीत सिंह नगर

संस्करण 2016......................... 10,000 प्रतियाँ

संयोजक : प्रितपाल सिंह कथूरीया,
विष्य माहिर,
पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड, मोहाली।
चित्रकार : मनजीत सिंह ढिल्लों

चेतावनी

1. कोई भी एजेंसी-होल्डर अधिक पैसे लेने के उद्देश्य से पाठ्य-पुस्तकों पर जिल्दबन्दी नहीं कर सकता। (एजेंसी-होल्डरों के साथ हुए समझौते की धारा नं. 7 के अनुसार)
2. पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा मुद्रित तथा प्रकाशित पाठ्य-पुस्तकों के जाली और नकली प्रकाशन (पाठ्य-पुस्तकों) की छपाई, प्रकाशन, स्टॉक करना, जमाखोरी या बिक्री आदि करना भारतीय दंड प्रणाली के अन्तर्गत गैरकानूनी जुर्म है।

   (पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड की पाठ्य-पुस्तकें बोर्ड के 'वाटर मारक' वाले कागज़ के ऊपर ही मुद्रित की जाती हैं।)

मूल्य : ₹ 198-00

सचिव : पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड, विद्या भवन, फेज़-8, साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर-160062 द्वारा प्रकाशित एवं मैसर्स नोवा पब्लिकेशन्ज़, सी-51, फोकल प्वाईंट एक्सटेन्शन, जालन्धर द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड पाठ्यक्रमों और पाठ्‌य-पुस्तकों के संशोधन और तैयार करने के कार्य में निरन्तर प्रयत्नशील है। आधुनिक युग में, विद्यार्थियों को सही शिक्षा देना अभिभावक और अध्यापकों का साँझा उतरदायित्व है। इस उत्तरदायित्व और शैक्षिक आवश्यकताओं को समझते हुए गणित के पाठ्‌यक्रम और पाठ्‌य-पुस्तकों में राष्ट्रीय पाठ्‌यचर्या की रूपरेखा (2005) के आधार पर महत्वपूर्ण परिवर्तन किये जा रहे हैं।

स्कूल पाठ्‌यचर्या में गणित विषय का महत्वपूर्ण योगदान है और आवश्यक शैक्षिक परिणाम प्राप्त करने के लिए अच्छी पाठ्‌य-पुस्तक का होना प्राथमिकता है। अतः इस पाठ्‌य-पुस्तक में विषय सामग्री इस प्रकार व्यवस्थित की गई है जिससे विद्यर्थियों की तार्किक क्षमता विकसित होने का साथ-साथ विष्य को समझने की योग्यता में बढ़ोतरी होगी। अभ्यास प्रश्न विद्यार्थियों की तार्किक क्षमता विकसित होने के साथ-साथ विषय को समझने की योग्यता में बढ़ोतरी होगी। अभ्यास प्रश्न विद्यार्थियों के मानसिक स्तर के अनुसार तैयार किया गये हैं। यह पाठ्‌य-पुस्तक एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा ग्यारवीं कक्षा के लिए तैयार की गई और पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा ग्यारवीं कक्षा के लिए तैयार की गई और पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा एन.सी.ई.आर.टी. से अनुमति प्राप्त करने के उपरान्त प्रकाशित की गई है।

पाठ्‌य-पुस्तक को विद्यार्थियों और अध्यापकों के लिए अधिक से अधिक उपयोगी बनाने का भरपूर प्रायास किया गया है। फिर भी, पुस्तक को और अधिक अच्छा बनाने के लिए क्षेत्र से आये बढ़िया सुझाव आदर सहित स्वीकार किये जायेंगे।

चेयरपरसन

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

NCERT की पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति

एस.वी. नारलीकर, *प्रोफ़ेसर,* इंटर युनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲस्ट्रॉनॉमि एंड ॲस्ट्रोफिजिक्स, (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे युनिवर्सिटी, पुणे

मुख्य सलाहकार

पी.के जैन, *प्रोफ़ेसर,* दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

सदस्य

आशुतोष के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

ए.के.राजपूत, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल

उदय सिंह, *लेक्चरर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली।

एस.के.एस. गौतम, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

एस.बी. त्रिपाठी, *लेक्चरर,* राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली

प्रदिप्तो होरे, *वरिष्ठ गणित अध्यापक,* सरला बिड़ला अकादमी बंगलौर, कर्नाटक

बी.एस.पी. राजू, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर, कर्नाटक।

संजय कुमार सिन्हा, *पी.जी.टी,* संस्कृति स्कूल, चाणक्यापुरी, नई दिल्ली

संजय मुदगल, *लेक्चरर,* सी.आई.ई.टी., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

सी.आर.प्रदीप, *सहायक प्रोफ़ेसर,* गणित विभाग, भारतीय विज्ञान संस्थान, बंगलौर, कर्नाटक

सुजाथा वर्मा, *रीडर,* इ.गा.मु.वि.वि., नई दिल्ली

स्नेहा टाइट्स, *गणित अध्यापक,* आदिति माल्या स्कूल एलहारिका, बंगलौर, कर्नाटक

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

हिंदी रूपांतरणकर्ता

आर.पी. गिहारे, *विकास खंड स्रोत समन्वयक,* जनपद शिक्षा केंद्र चिचोली, जनपद-बेतूल, मध्य प्रदेश

ए. के. राजपूत, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल, मध्य प्रदेश

एस.बी.त्रिपाठी, *लेक्चरर,* राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली

पी.एन.मल्होत्रा, *सह शिक्षा निदेशक* (विज्ञान केंद्र-3), शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार, नई दिल्ली

पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन

सुमत कुमार जैन, *लेक्चरर,* के.एल.जैन इंटर कालेज, सासनी जनपद-हाथरस, उ.प्र.

हिंदी समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

विषय-सूची

अध्याय 1

समुच्चय (Sets)

❖*In these days of conflict between ancient and modern studies; there must purely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest* — G.H.HARDY ❖

1.1 भूमिका (Introduction)

वर्तमान समय में गणित के अध्ययन में समुच्चय की परिकल्पना आधारभूत है। आजकल इस परिकल्पना का प्रयोग गणित की प्रायः सभी शाखाओं में होता है। समुच्चय का प्रयोग संबंध एवं फलन को परिभाषित करने के लिए किया जाता है। ज्यामितीय, अनुक्रम, प्रायिकता आदि के अध्ययन में समुच्चय के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है।

समुच्चय सिद्धांत का विकास जर्मन गणितज्ञ Georg Cantor (1845-1918) द्वारा किया गया था। त्रिकोणमितीय श्रेणी के प्रश्नों को सरल करते समय उनका समुच्चय से पहली बार परिचय हुआ था। इस अध्याय में हम समुच्चय से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं पर विचार करेंगे।

Georg Cantor
(1845-1918 A.D.)

1.2 समुच्चय और उनका निरूपण (Sets and their Representations)

दैनिक जीवन में हम बहुधा वस्तुओं के संग्रह की चर्चा करते हैं, जैसे ताश की गड्डी, व्यक्तियों की भीड़, क्रिकेट टीम आदि। गणित में भी हम विभिन्न संग्रहों, की चर्चा करते हैं, उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं का संग्रह बिंदुओं का संग्रह, अभाज्य संख्याओं का संग्रह आदि। विशेषतः, हम निम्नलिखित संग्रह पर विचार करेंगे:

(i) 10 से कम विषम प्राकृत संख्याएँ, अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9

(ii) भारत की नदियाँ,

(iii) अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वर, यानी, $a, e, i, o, u,$

(iv) विभिन्न प्रकार के त्रिभुज,

(v) संख्या 210 के अभाज्य गुणनखंड, अर्थात्, 2, 3, 5 तथा 7,

(vi) समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$, के मूल अर्थात्, 2 तथा 3

यहाँ हम यह देखते हैं कि उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरणों में से वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह इस अर्थ में है कि किसी वस्तु के संबंध में हम यह निर्णय निश्चित रूप से ले सकते हैं कि वह वस्तु एक प्रदत्त संग्रह में है अथवा नहीं है। उदाहरणतः हम यह निश्चित रूप से कह सकते हैं कि 'नील नदी', भारत की नदियों के संग्रह में नहीं है। इसके विपरीत गंगा नदी इस संग्रह में निश्चितरूप से है।

हम नीचे ऐसे समुच्चय के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं, जिनका प्रयोग गणित में विशेषरूप से किया जाता है;

N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

Z : पूर्णांकों का समुच्चय

Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय

R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

Z^+ : धन पूर्णांकों का समुच्चय

Q^+ : धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय

R^+ : धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

इन विशेष समुच्चयों के लिए निर्धारित उपर्युक्त प्रतीकों का प्रयोग हम इस पुस्तक में निरंतर करते रहेंगे।

इसके अतिरिक्त विश्व के पाँच सर्वाधिक विख्यात गणितज्ञों का संग्रह एक सुपरिभाषित समुच्चय नहीं है, क्योंकि सर्वाधिक विख्यात गणितज्ञों के निर्णय करने का मापदंड एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति के लिए भिन्न-भिन्न हो सकता है। अत: यह एक सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

अत: 'वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह' को हम एक समुच्चय कहते हैं। यहाँ पर हमें निम्नलिखित बिंदुओं पर ध्यान देना है:

(i) समुच्चय के लिए वस्तुएँ, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची पद हैं।

(ii) समुच्चय को प्राय: अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित करते हैं, जैसे A, B, C, X, Y, Z आदि

(iii) समुच्चय के अवयवों को अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित करते हैं, जैसे a, b, c, x, y, z आदि

यदि a, समुच्चय A का एक अवयव है, तो हम कहते हैं कि 'a समुच्चय A में है'। वाक्यांश 'अवयव है' 'सदस्य है' या 'में है' को सूचित करने के लिए यूनानी प्रतीक "$\in$ (epsilon)" का प्रयोग किया जाता है। अत: हम '$a \in A$' लिखते हैं। यदि b, समुच्चय A का अवयव नहीं है, तो हम '$b \notin A$' लिखते हैं और इसे "b समुच्चय A में नहीं है" पढ़ते हैं।

इस प्रकार अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय V के सम्बंध में $a \in V$ किंतु $b \notin V$. इसी प्रकार संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चय P के लिए, $3 \in P$ किंतु $15 \notin P$.

किसी समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं:

(i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप

(ii) समुच्चय निर्माण रूप

(i) रोस्टर रूप में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को, एक दूसरे से, अर्ध-विराम द्वारा पृथक किया जाता है और उन सभी को एक मझले कोष्ठक के भीतर लिखते हैं। उदाहरणार्थ, 7 से कम सभी सम धन पूर्णांकों के समुच्चय का वर्णन रोस्टर रूप में $\{2, 4, 6\}$ द्वारा किया जाता है। किसी समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रदर्शित करने के कुछ और उदाहरण नीचे दिए हैं:

(a) संख्या 42 को विभाजित करने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ है।

(b) अंग्रेज़ी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ है।

(c) विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\{1, 3, 5, \ldots\}$ है। अंत के बिंदु, जिनकी संख्या तीन होती है, यह बतलाते हैं कि इन विषम संख्याओं की सूची अंतहीन है।

नोट कीजिए कि रोस्टर रूप में अवयवों को सूचीबद्ध करने में उनके क्रम का महत्व नहीं होता है। इस प्रकार उपर्युक्त समुच्चय को $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42\}$ प्रकार भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

टिप्पणी यह ध्यान रखना चाहिए कि समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यत: दोबारा नहीं लिखते हैं, अर्थात्, प्रत्येक अवयव दूसरे से भिन्न होता है। उदाहरण के लिए शब्द 'SCHOOL' में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय $\{S, C, H, O, L\}$ है।

(ii) समुच्चय निर्माण रूप में, किसी समुच्चय के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म होता है जो समुच्चय से बाहर के किसी अवयव में नहीं होता है। उदाहरणार्थ समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म है कि इनमें से प्रत्येक अवयव अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है और इस गुणधर्म वाला कोई अन्य अक्षर नहीं है।

इस समुच्चय को V से निरूपित करते हुए हम लिखते हैं कि,

$V = \{x : x$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$।

यहाँ ध्यान देना चाहिए कि किसी समुच्चय के अवयवों का वर्णन करने के लिए हम प्रतीक 'x' का प्रयोग करते हैं, (x के स्थान पर किसी अन्य प्रतीक का भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसे, अक्षर y, z आदि।) जिसके उपरांत कोलन का चिह्न " : " लिखते हैं। कोलन के चिह्न के बाद समुच्चय के अवयवों के विशिष्ट गुणधर्म को लिखते हैं और फिर संपूर्ण कथन को मझले कोष्ठक { } के भीतर लिखते हैं। समुच्चय V के उपर्युक्त वर्णन को निम्नलिखित प्रकार से पढ़ा जाता है, "सभी x का समुच्चय जहाँ x अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है।"

इस वर्णन में कोष्ठक का प्रयोग "सभी x का समुच्चय" के लिए और कोलन का प्रयोग 'जहाँ x' के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए

A = {$x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $3 < x < 10$} को निम्नलिखित प्रकार से पढ़ते हैं :

''सभी x का समुच्चय, जहाँ x एक प्राकृत संख्या है और x,3 और 10 के बीच में हैं। अत: संख्याएं 4,5,6,7,8 और 9 समुच्चय A के अवयव हैं।

यदि हम ऊपर (a), (b) और (c) में रोस्टर रूप में वर्णित समुच्चयों को क्रमश: A, B, C से प्रकट करें, तो A, B और C को समुच्चय निर्माण रूप में, निम्नलिखित प्रकार से भी निरूपित किया जा सकता है।

A = {$x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो संख्या 42 को विभाजित करती है}

B = {$y : y$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है}

C = {$z : z$ एक विषम प्राकृत संख्या है}

उदाहरण 1 समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए।

हल प्रदत्त समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$(x - 1)\ (x + 2) = 0$, अर्थात् $x = 1, - 2$

अत: प्रदत्त समीकरण का हल समुच्चय रोस्टर रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है $\{1, - 2\}$.

उदाहरण 2 समुच्चय {$x : x$ एक धन पूर्णांक है और $x^2 < 40$} को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल 1, 2, 3, 4, 5, और 6 अभीष्ट संख्याएँ हैं। अत: {1, 2, 3, 4, 5, 6} प्रदत्त समुच्चय का रोस्टर रूप है।

उदाहरण 3 समुच्चय A = {1, 4, 9, 16, 25, . . . } को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल समुच्चय A को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

A = {$x : x$ एक प्राकृत संख्या का वर्ग है}

विकल्पत: हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

A = {$x : x = n^2$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$}

उदाहरण 4 समुच्चय $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल हम देखते हैं कि दिए गए समुच्चय के प्रत्येक अवयव का अंश उसके हर से 1 कम है। यह भी कि अंश एक प्राकृत संख्या है जो 1 से प्रारंभ होकर उत्तरोत्तर एक से अधिक होती जाती है और 6 से अधिक नहीं है। अत: समुच्चय निर्माण रूप में इसे इस प्रकार लिखते हैं,

$$\left\{ x : x = \frac{n}{n+1}, n, \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 1 \le n \le 6 \right\}$$

उदाहरण 5 बाईं ओर रोस्टर रूप में वर्णित प्रत्येक समुच्चय का दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चय से सही मिलान कीजिए:

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a)	{$x : x$ एक धन पूर्णांक है तथा 18 का भाजक है}
(ii)	{ 0 }	(b)	{$x : x$ एक पूर्णांक है और $x^2 - 9 = 0$}
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c)	{$x : x$ एक पूर्णांक है और $x + 1 = 1$}
(iv)	{3, –3}	(d)	{$x : x$ शब्द PRINCIPAL dk ,d v{kj gS}

हल चूँकि (d) में, शब्द PRINCIPAL में 9 अक्षर हैं और दो अक्षर P और I की पुनरावृत्ति हुई है, अतः (i) का सही मिलान (d) से होता है। इसी प्रकार (ii) का सही मिलान (c) से होता है, क्योंकि $x + 1 = 1$ का तात्पर्य है कि $x = 0$. यह भी कि, 1, 2, 3, 6, 9 और 18 में से प्रत्येक 18 का भाजक है, इसलिए (iii) का सही मिलान (a) से होता है। अंत में $x^2 - 9 = 0$ अर्थात् $x = 3, -3$ और इसलिए (iv) का सही मिलान (b) से होता है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित में कौन से समुच्चय हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) J अक्षर से प्रारंभ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।

(ii) भारत के दस सबसे अधिक प्रतिभाशाली लेखकों का संग्रह।

(iii) विश्व के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह।

(iv) आपकी कक्षा के सभी बालकों का संग्रह।

(v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का संग्रह।

(vi) लेखक प्रेमचंद द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह।

(vii) सभी सम पूर्णांकों का संग्रह।

(viii) इस अध्याय में आने वाले प्रश्नों का संग्रह।

(ix) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह।

2. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक $\in$ अथवा $\notin$ भरिए।

(i) 5. . .A (ii) 8 . . . A (iii) 0. . .A

(iv) 4. . . A (v) 2. . .A (vi) 10. . .A

3. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $A = \{x : x$ एक पूर्णांक है और $-3 < x < 7\}$

(ii) $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

(iii) $C = \{x : x$ दो अंकों की ऐसी प्राकृत संख्या है जिसके अंकों का योगफल 8 है$\}$

(iv) $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो संख्या 60 की भाजक है$\}$

(v) E = TRIGONOMETRY शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

(vi) F = BETTER शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

4. निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2,4,8,16,32\}$ (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$

(iv) $\{2, 4, 6, . . .\}$ (v) $\{1,4,9, . . .,100\}$

5. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी अवयवों (सदस्यों) को सूचीबद्ध कीजिए:

(i) $A = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$

(ii) $B = \{x : x$ एक पूर्णांक है, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$ $\}$

(iii) $C = \{x : x$ एक पूर्णांक है, $x^2 \le 4\}$

(iv) $D = \{x : x$, LOYAL शब्द का एक अक्षर है$\}$

(v) $E = \{x : x$ वर्ष का एक ऐसा महीना है, जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं$\}$

(vi) $F = \{x : x$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक व्यंजन है, जो k से पहले आता है$\}$।

6. बाईं ओर रोस्टर रूप में लिखित और दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए:

(i) $\{1, 2, 3, 6\}$ (a) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है$\}$

(ii) $\{2, 3\}$ (b) $\{x : x$ संख्या 10 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$

(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S} (c) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 6 की भाजक है$\}$

(iv) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $\{x : x$ MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है$\}$।

1.3 रिक्त समुच्चय (The Empty Set)

समुच्चय A = { $x : x$ किसी स्कूल की कक्षा XI में अध्ययनरत एक विद्यार्थी है }

हम उस स्कूल में जा कर कक्षा XI में अध्ययनरत विद्यार्थियों को गिन कर उनकी संख्या ज्ञात कर सकते हैं। अत: समुच्चय A के अवयवयों की संख्या सीमित है।

अब नीचे लिखे समुच्चय B पर विचार कीजिए:

B = { $x : x$ वर्तमान में कक्षा X तथा XI दोनों में अध्ययनरत विद्यार्थी हैं}

हम देखते हैं कि एक विद्यार्थी एक साथ दोनों कक्षाओं X तथा XI में अध्ययन नहीं कर सकता है। अत: समुच्चय B में कोई भी अवयव नहीं है।

परिभाषा 1 एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, **रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय** कहलाता है। इस परिभाषा के अनुसार B एक रिक्त समुच्चय है जब कि A एक रिक्त समुच्चय नहीं है। रिक्त समुच्चय को प्रतीक ϕ अथवा { } से प्रदर्शित करते हैं।

हम नीचे रिक्त समुच्चयों के कुछ उदाहरण दे रहे हैं:

(i) मान लीजिए कि $A = \{x : 1 < x < 2, x$ एक प्राकृत संख्या है$\}$.यहाँ A रिक्त समुच्चय है, क्योंकि 1 और 2 के मध्य कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है।

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0$ और x एक परिमेय संख्या है$\}$. यहाँ B रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $x^2 - 2 = 0$, x के किसी भी परिमेय मान से संतुष्ट नहीं होता है।

(iii) $C = \{x : x$ संख्या 2 से अधिक एक सम अभाज्य संख्या है$\}$ तो C रिक्त समुच्चय है, क्योंकि केवल संख्या 2 ही सम अभाज्य संख्या है।

(iv) $D = \{ x : x^2 = 4, x$ विषम है$\}$. तो D रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $x^2 = 4$, x के किसी विषम मान से संतुष्ट नहीं होता है।

1.4 परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and Infinite Sets)

मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, g\}$

तथा C = { इस समय विश्व के विभिन्न भागों में रहने वाले पुरुष}

हम देखते हैं कि A में 5 अवयव हैं और B में 6 अवयव हैं। C में कितने अवयव हैं? जैसा कि स्पष्ट है कि C के अवयवों की संख्या हमें ज्ञात नहीं है, किंतु यह एक प्राकृत संख्या है, जो बहुत बड़ी हो सकती है। किसी समुच्चय S के अवयवों की संख्या से हमारा अभिप्राय समुच्चय के भिन्न अवयवों की संख्या से है और इसे हम प्रतीक n (S) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि n (S) एक प्राकृत संख्या है, तो S एक आरिक्त परिमित समुच्चय होता है।

आइए प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर विचार करें। हम देखते हैं इस समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित नहीं है, क्योंकि प्राकृत संख्याओं की संख्या असीमित होती है। इस प्रकार हम कहते हैं कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय होता है। उपर्युक्त समुच्चय A, B तथा C परिमित समुच्चय हैं और $n(A) = 5$, $n(B) = 5$ और $n(C)$ = कोई सीमित संख्या।

परिभाषा 2 एक समुच्चय, जो रिक्त है अथवा जिसके अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है, अन्यथा समुच्चय **अपरिमित समुच्चय** कहलाता है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

(i) यदि W सप्ताह के दिनों का समुच्चय है, तो W परिमित है।

(ii) मान लीजिए कि S, समीकरण $x^2 - 16 = 0$ के हलों का समुच्चय है, तो S परिमित है।

(iii) मान लीजिए कि G, किसी रेखा पर स्थित सभी बिंदुओं का समुच्चय है, तो G अपरिमित है।

जब हम किसी समुच्चय को रोस्टर रूप में निरूपित करते हैं, तो हम उस समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { } के भीतर लिखते हैं। किसी अपरिमित समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { } के भीतर लिखना संभव नहीं है, क्योंकि ऐसे समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित नहीं होती है। अतः हम किसी अपरिमित समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रकट करने के लिए उसके कम से कम इतने अवयवों को लिखते है, जिससे उस समुच्चय की संरचना स्पष्ट हो सके और तदोपरांत तीन बिंदु लगाते हैं।

उदाहरणार्थ, $\{1, 2, 3 \ldots\}$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और $\{\ldots,-3, -2, -1, 0,1, 2 ,3, \ldots\}$ पूर्णांकों का समुच्चय है। ये सभी समुच्चय अपरिमित हैं।

टिप्पणी सभी अपरिमित समुच्चय का वर्णन रोस्टर रूप में नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का वर्णन इस रूप में नहीं किया जा सकता है, क्योंकि इस समुच्चय के अवयवों का कोई विशेष पैटर्न (प्रतिमान) नहीं होता है।

उदाहरण 6 बतलाइए कि निम्नलिखित समुच्चयों में कौन परिमित है और कौन अपरिमित है:

(i) $\{x : x \in$ N और $(x - 1) (x -2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in$ N और $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in$ N और $2x -1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in$ N और x एक अभाज्य संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \in$ N और x विषम है$\}$

हल (i) प्रदत्त समुच्चय $= \{1, 2\}$. अतः यह परिमित है।

(ii) प्रदत्त समुच्चय $= \{2\}$. अतः यह परिमित है।

(iii) प्रदत्त समुच्चय $= \phi$. अतः यह परिमित है।

(iv) दिया हुआ समुच्चय सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और क्योंकि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है; अतः प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

(v) क्योंकि विषम प्राकृत संख्याएँ अनंत हैं, अतः प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

1.5 समान समुच्चय (Equal Sets)

दो दिए गए समुच्चयों A और B, में, यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B, समान कहलाते हैं। स्पष्टतया दोनों समुच्चयों में तथ्यत: समान अवयव होते हैं।

परिभाषा 3 दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं, यदि उनमें तथ्यत: समान अवयव हों और हम लिखते हैं $A = B$, अन्यथा समुच्चय असमान कहलाते हैं और हम लिखते हैं $A \neq B$.

आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 1, 4, 2\}$. तो $A = B$.

(ii) मान लीजिए कि A, 6 से कम अभाज्य संख्याओं तथा P, 30 के अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चय हैं। स्पष्ट है कि समुच्चय A और P समान हैं, क्योंकि केवल 2, 3 और 5 ही संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं और 6 से कम भी हैं।

टिप्पणी यदि किसी समुच्चय के एक या एक से अधिक अवयवों की पुनरावृत्ति होती है, तो समुच्चय बदलता नहीं है। उदाहरण के लिए समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ समान हैं, क्योंकि A का प्रत्येक अवयव B में हैं और इसका विलोम भी सत्य है। इसी कारण हम प्राय: किसी समुच्चय का वर्णन करते समय उसके अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं करते हैं।

उदाहरण 7 समान समुच्चयों के युग्म छाँटिए, यदि ऐसा कोई युग्म है, और कारण भी बतलाइए:

A = {0}, B = {x : x > 15 और x < 5},
C = {x : x – 5 = 0 }, D = {x : x^2 = 25},
E = {x : x समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ का एक धन पूर्णांक मूल है}.

हल यहाँ 0 ∈ A और 0 समुच्चयों B, C, D और E, में से किसी में भी नहीं है, अत: A ≠ B, A ≠ C, A ≠ D, A ≠ E.
क्योंकि B = φ किंतु और कोई समुच्चय रिक्त नहीं है।
अत: B ≠ C, B ≠ D तथा B ≠ E.
C = {5} परंतु –5 ∈ D, इसलिए C ≠ D
यहाँ क्योंकि E = {5}, C = E , D = {–5, 5} और E = {5}, अत: D ≠ E.
इस प्रकार समान समुच्चयों का युग्म केवल C तथा E है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) X, शब्द "ALLOY" के अक्षरों का समुच्चय तथा B, शब्द "LOYAL" के अक्षरों का समुच्चय।
(ii) A = {n : n ∈ Z तथा $n^2 \le 4$} और B = {x : x ∈ R तथा $x^2 - 3x + 2 = 0$}.

हल (i) यहाँ X = {A, L, L, O, Y}, B = {L, O, Y, A, L}. अत: X और B समान समुच्चय हैं, क्योंकि किसी समुच्चय के अवयवों की पुनरावृत्ति से समुच्चय बदलता नहीं है। अत:
X = {A, L, O, Y} = B
(ii) A = {–2, –1, 0, 1, 2}, B = {1, 2}. क्योंकि 0 ∈ A और 0 ∉ B, इसलिए A और B समान नहीं हैं।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित में से कौन से रिक्त समुच्चय के उदाहरण हैं?
(i) 2 से भाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।
(ii) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।
(iii) { x : x एक प्राकृत संख्या है, x < 5 और साथ ही साथ x > 7 }
(iv) { y : y किन्हीं भी दो समांतर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु है}

2. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित और कौन अपरिमित हैं?
(i) वर्ष के महीनों का समुच्चय।
(ii) {1, 2, 3, . . .}
(iii) {1, 2, 3, . . .99, 100}
(iv) 100 से बड़े धन पूर्णांकों का समुच्चय।
(v) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णांकों का समुच्चय।

3. निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि कौन परिमित है और कौन अपरिमित है?
(i) x-अक्ष के समांतर रेखाओं का समुच्चय।
(ii) अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।
(iii) उन संख्याओं का समुच्चय जो 5 के गुणज हैं।
(iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय।
(v) मूल बिंदु (0,0) से हो कर जाने वाले वृत्तों का समुच्चय।

4. निम्नलिखित में बतलाइए कि A = B है अथवा नहीं है:
(i) A = { a, b, c, d } B = { d, c, b, a }
(ii) A = { 4, 8, 12, 16 } B = { 8, 4, 16, 18}

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{ x : x$ सम धन पूर्णांक है और $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x$ संख्या 10 का एक गुणज है$\}$, $B = \{ 10, 15, 20, 25, 30, . . . \}$

5. क्या निम्नलिखित समुच्चय युग्म समान हैं? कारण सहित बताइए।

(i) $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x$ समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का एक हल है$\}$

(ii) $A = \{ x : x$ शब्द 'FOLLOW' का एक अक्षर है$\}$

$B = \{ y : y$ शब्द 'WOLF' का एक अक्षर है$\}$

6. नीचे दिए हुए समुच्चयों में से समान समुच्चयों का चयन कीजिए:

$A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$,
$E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6 उपसमुच्चय (Subsets)

नीचे दिए समुच्चयों पर विचार कीजिए:

X = आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय,

Y = आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

हम देखते हैं कि Y का प्रत्येक अवयव, X का भी एक अवयव है, हम कहते हैं कि Y, X का एक उपसमुच्चय हैं X का एक उपसमुच्चय है, प्रतीकों में $X \subset Y$ द्वारा प्रकट करते हैं। प्रतीक $\subset$, कथन 'एक उपसमुच्चय है', अथवा 'अंतर्विष्ट है' के लिए प्रयुक्त होता है।

परिभाषा 4 यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का **उपसमुच्चय** कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, $A \subset B$, यदि जब कभी $a \in A$, तो $a \in B$. बहुधा प्रतीक '$\Rightarrow$', जिसका अर्थ 'तात्पर्य है' होता है, का प्रयोग सुविधाजनक होता है। इस प्रतीक का प्रयोग कर के, हम उपसमुच्चय की परिभाषा इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$A \subset B, \text{ यदि } a \in A \Rightarrow a \in B$$

हम उपर्युक्त कथन को इस प्रकार पढ़ते हैं, "A, B का एक उपसमुच्चय है, यदि इस तथ्य का, कि a, A का एक अवयव है तात्पर्य है कि a, B का भी एक अवयव है"। यदि A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है, तो हम लिखते हैं कि $A \not\subset B$ ।

हमें ध्यान देना चाहिए कि A को B, का समुच्चय होने के लिए केवल मात्र यह आवश्यक है कि A का प्रत्येक अवयव B में है। यह संभव है कि B का प्रत्येक अवयव A में हो या न हो। यदि ऐसा होता है कि B का प्रत्येक अवयव A में भी है, तो $B \subset A$. इस दशा में, A और B समान समुच्चय हैं और इस प्रकार $A \subset B$ और $B \subset A \Leftrightarrow A = B$, जहाँ '$\Leftrightarrow$' द्विधा तात्पर्य (two way implications) के लिए प्रतीक है और जिसे प्राय: 'यदि और केवल यदि' पढ़ते हैं तथा संक्षेप में 'iff' लिखते हैं।

परिभाषा से निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक समुच्चय स्वयम् का उपसमुच्चय है, अर्थात् $A \subset A$ । चूँकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता है अत: हम इस बात से सहमत हैं कि ϕ प्रत्येक समुच्चय का एक उपसमुच्चय है। अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं:

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q,** वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** का एक उपसमुच्चय है और हम लिखते हैं कि $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

(ii) यदि A, संख्या 56 के सभी भाजकों का समुच्चय है और B, संख्या 56 के सभी अभाज्य भाजकों का समुच्चय है, तो B, A का एक उपसमुच्चय है और हम लिखते हैं कि $B \subset A$.

(iii) मान लीजिए कि $A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$ तो $A \subset B$ तथा $B \subset A$, अत: $A = B$

(iv) मान लीजिए कि $A = \{ a, e, i, o, u\}$ और $B = \{ a, b, c, d\}$. तो A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है तथा B भी A का उपसमुच्चय नहीं है।

मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं। यदि $A \subset B$ तथा $A \neq B$, तो A, B का **उचित उपसमुच्चय** कहलाता है और B, A का **अधिसमुच्चय** कहलाता है। उदाहरणार्थ,–

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ का एक उचित उपसमुच्चय है।

यदि समुच्चय A में केवल एक अवयव हो, तो हम इसे एक **एकल समुच्चय** कहते हैं। अत: $\{ a \}$ एक एकल समुच्चय है।

उदाहरण 9 नीचे लिखे समुच्चयों पर विचार कीजिए:

$$\phi, A = \{ 1, 3 \}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

प्रत्येक समुच्चय युग्म के बीच सही प्रतीक $\subset$ अथवा $\not\subset$ भरिए;

(i) $\phi \ldots B$ (ii) $A \ldots B$ (iii) $A \ldots C$ (iv) $B \ldots C$

हल (i) $\phi \subset B$, क्योंकि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$ क्योंकि $3 \in A$ और $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1, 3 \in A$ तथा $1, 3 \in C$

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B का प्रत्येक अवयव C में भी है।

उदाहरण 10 मान लीजिए $A = \{ a, e, i, o, u\}, B = \{ a, b, c, d\}$. क्या A, B का एक उपसमुच्चय है? नहीं (क्यों?)। क्या A, B का उप समुच्चय हैं? नहीं (क्यों?)

उदाहरण 11 मान लीजिए A, B और C तीन समुच्चय हैं। यदि $A \in B$ तथा $B \subset C$, तो क्या यह सत्य है कि $A \subset C$? यदि नहीं तो एक उदाहरण दीजिए।

हल मान लीजिए कि $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ और $C = \{\{1\}, 2, 3\}$ स्पष्टतया यहाँ $A \in B$ क्योंकि $A = \{1)$ तथा $B \subset C$ सत्य है। परंतु $A \not\subset C$ क्योंकि $1 \in A$ और $1 \notin C$.

नोट कीजिए कि किसी समुच्चय का एक अवयव उस समुच्चय का उपसमुच्चय नहीं हो सकता है।

1.6.1 *वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चय*

जैसा कि अनुच्छेद 1.6 से स्पष्ट होता है कि समुच्चय **R** के बहुत से महत्वपूर्ण उपसमुच्चय हैं। इनमें से कुछ के नाम हम नीचे दे रहे हैं:

प्राकृत सख्याओं का समुच्चय $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q} = \{ x : x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}$ तथा $q \neq 0\}$, जिनको इस प्रकार पढ़ते हैं:

"**Q** उन सभी संख्याओं x का समुच्चय इस प्रकार है, कि x भागफल $\dfrac{p}{q}$, के बराबर है, जहाँ p और q पूर्णांक है और q शून्य नहीं है।'' **Q** के अवयवों में -5 (जिसे $-\dfrac{5}{1}$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है) $, \dfrac{5}{7}, 3\dfrac{1}{2}$ (जिसे $\dfrac{7}{2}$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है) और $-\dfrac{11}{3}$ आदि सम्मिलित हैं।

अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय, जिसे **T**, से निरूपित करते हैं, शेष अन्य वास्तविक संख्याओं (परिमेय संख्याओं को छोड़कर) से मिलकर बनता है।

अत: $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ और $x \notin \mathbf{Q}\} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ अर्थात् वह सभी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं है। **T** के सदस्यों में $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ और π आदि सम्मिलित हैं।

इन समुच्चयों के मध्य कुछ स्पष्ट संबंध इस प्रकार हैं;

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}.$

1.6.2 ***अंतराल R के उपसमुच्चय के रूप में (Interval as subsets of R)*** मान लीजिए कि $a, b \in \mathbf{R}$ और $a < b$. तब वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{ y : a < y < b\}$ एक विवृत अंतराल कहलाता है और प्रतीक (a, b) द्वारा निरूपित होता है। a और b के बीच स्थित सभी बिंदु इस अंतराल में होते हैं परंतु a *और* b स्वयं इस अंतराल में नहीं होते हैं।

वह अंतराल जिसमें अंत्य बिंदु भी होते हैं, संवृत (बंद) अंतराल कहलाता है और प्रतीक $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है। अतः $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

ऐसे अंतराल भी हैं जो एक अंत्य बिंदु पर बंद और दूसरे पर खुले होते हैं

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$, a से b, तक एक खुला अंतराल है, जिसमें a अंतर्विष्ट है किंतु b अपवर्जित है।

$(a, b] = \{ x : a < x \le b \}$ a से b, तक एक खुला अंतराल है, जिसमें b सम्मिलित है किंतु a अपवर्जित है।

इन संकेतों द्वारा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चयों के उल्लेख करने की एक वैकल्पिक विधि मिलती है। उदाहरण के लिए, यदि $A = (–3, 5)$ और $B = [–7, 9]$, तो $A \subset B$. समुच्चय $[0, \infty)$ ऋणेतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है, जबकि $(– \infty, 0)$ ऋण वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। $(– \infty, \infty)$, $– \infty$ से ∞ तक विस्तृत रेखा से संबंधित वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

आकृति 1.1

वास्तविक रेखा पर **R** के उपसमुच्चयों के रूप में वर्णित उपर्युक्त अंतरालों को आकृति 1.1 में दर्शाया गया है:

यहाँ हम ध्यान देते हैं कि एक अंतराल में असंख्य असीम मात्रा में अनेक बिंदु होते हैं। उदाहरणार्थ, समुच्चय समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R} : –5 < x \le 7\}$ को अंतराल $(–5, 7]$ रूप में लिख सकते हैं तथा अंतराल $[–3, 5)$ को समुच्चय निर्माण रूप में $\{x : –3 \le x < 5\}$ द्वारा लिख सकते हैं। संख्या $(b – a)$ को अंतराल (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ तथा $(a, b]$ में से किसी की भी लंबाई कहते हैं।

1.7 घात समुच्चय (Power Set)

समुच्चय $\{1, 2\}$ पर विचार कीजिए। समुच्चय $\{1, 2\}$ के सभी उपसमुच्चयों को लिखिए। हमें ज्ञात है कि ϕ सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है। इसलिए ϕ, समुच्चय $\{1, 2\}$ का एक उपसमुच्चय है। हम देखते हैं कि $\{1\}$ और $\{ 2 \}$ भी समुच्चय $\{1, 2\}$के उपसमुच्चय हैं। हमें यह भी ज्ञात है कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है। इसलिए $\{ 1, 2 \}$ भी समुच्चय $\{1, 2\}$ का एक उपसमुच्चय है। अतः समुच्चय $\{ 1, 2 \}$ के कुल मिला कर चार उपसमुच्चय हैं, नामतः ϕ, $\{ 1 \}$, $\{ 2 \}$ और $\{ 1, 2 \}$. इन सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय $\{ 1, 2 \}$ का **घात समुच्चय** कहते हैं।

परिभाषा 5 समुच्चय A के उपसमुच्चयों के संग्रह को A का **घात समुच्चय** कहते हैं। इसे P(A) से निरूपित करते है। P(A) का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय होता है।

अतः उपर्युक्त विवरण में, यदि $A = \{ 1, 2 \}$, तो

$$P(A) = \{ \phi,\{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1,2 \}\}$$

यह भी नोट कीजिए कि $n [P (A)] = 4 = 2^2$

व्यापकरूप से, यदि A एक ऐसा समुच्चय है कि $n(A) = m$, तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि $n [P(A)] = 2^m$.

1.8 सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set)

सामान्यतः किसी विशेष संदर्भ में हमें एक आधारभूत समुच्चय के अवयवों और उपसमुच्चयों पर विचार करना पड़ता है, जो कि उस विशेष संदर्भ में प्रासंगिक होते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या-प्रणाली का अध्ययन करते समय हमें प्राकृत संख्याओं के समुच्चय और उसके उपसमुच्चयों में रुचि होती है, जैसे अभाज्य संख्याओं का समुच्चय, सम संख्याओं का समुच्चय इत्यादि। यह आधारभूत

समुच्चय '**सार्वत्रिक समुच्चय**' कहलाता है। सार्वत्रिक समुच्चय को सामान्यत: प्रतीक U से निरूपित करते हैं और इसके उपसमुच्चयों को अक्षर A, B, C, आदि द्वारा।

उदाहरणार्थ, पूर्णांकों के समुच्चय Z के लिए, परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q, एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है, या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** भी एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। एक अन्य उदाहरण में मानव जनसंख्या अध्ययन के लिए विश्व के समस्त मानव का समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय होगा।

प्रश्नावली 1.3

1. रिक्त स्थानों में प्रतीक $\subset$ या $\not\subset$ को भर कर सही कथन बनाइए:

(i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

(iii) $\{x : x$ आपके विद्यालय की कक्षा XI का एक विद्यार्थी है$\}\ldots\{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है$\}$

(iv) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक वृत्त है$\}\ldots\{x : x$ एक समान समतल में वृत्त है जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।$\}$

(v) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक आयत है$\}$

(vi) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक समबाहु त्रिभुज है$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\}$

(vii) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\} \ldots \{x : x$ एक पूर्णांक है$\}$

2. जाँचिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य हैं:

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

(ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है$\} \subset \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, जो संख्या 36 को विभाजित करती है$\}$

3. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ । निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है और क्यों?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$

(ix) $\phi \in A$ (x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए:

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. P(A) के कितने अवयव हैं, यदि $A = \phi$?

6. निम्नलिखित को अंतराल रूप में लिखिए:

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \le 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \le x \le 4\}$

7. निम्नलिखित अंतरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए:

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए आप कौन-सा सार्वत्रिक समुच्चय प्रस्तावित करेंगे?

(i) समकोण त्रिभुजों का समुच्चय। (ii) समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय।

9. समुच्चय $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ प्रदत्त हैं। इन तीनों समुच्चय A, B और C के लिए निम्नलिखित में से कौन सा (से) सार्वत्रिक समुच्चय लिए जा सकते हैं?

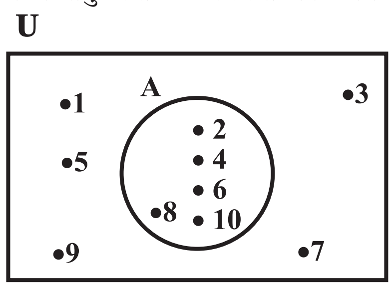
(i) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) ϕ

(iii) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (iv) {1,2,3,4,5,6,7,8}

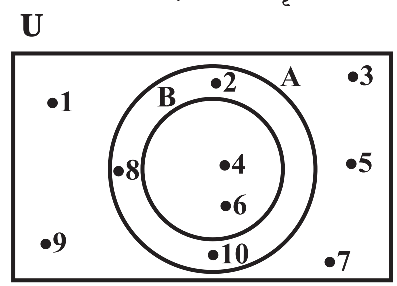
1.9 वेन आरेख (Venn Diagrams)

समुच्चयों के बीच अधिकांश संबंधों को आरेखों द्वारा निरूपित किया जा सकता है जिन्हें **वेन आरेख** कहते हैं। वेन आरेख का नाम अंग्रेज तर्कशास्त्री John Venn (1834 ई॰– 1883 ई॰) के नाम पर रखा गया है। इन आरेखों में आयत और बंद वक्र सामान्यत: वृत्त होते हैं। किसी सार्वत्रिक समुच्चय को प्राय: एक आयत द्वारा और उसके उपसमुच्चयों को एक वृत्त द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

किसी वेन आरेख में समुच्चयों के अवयवों को उनके विशेष समुच्चय में लिखा जाता है जैसे आकृति 1.2 और 1.3 में



आकृति 1.2



आकृति 1.3

दृष्टांत 1 आकृति 1.2 में, U = {1,2,3, ..., 10} एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A = {2,4,6,8,10} उसका एक उपसमुच्चय है,

दृष्टांत 2 आकृति 1.3 में, U = {1,2,3, ..., 10} एक सार्वत्रिक समुच्चय है, जिसके A = {2,4,6,8,10} और B = {4, 6} उपसमुच्चय हैं और $B \subset A$.

पाठक वेन आरेखों का विस्तृत प्रयोग देखेंगे जब हम समुच्चयों के सम्मिलन, सर्वनिष्ठ और अंतर पर विचार करेंगे।

1.10 समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on Sets)

पिछली कक्षाओं में हम सीख चुके हैं कि संख्याओं पर योग, अंतर, गुणा और भाग की संक्रियाएँ किस प्रकार संपन्न की जाती हैं। इनमें से प्रत्येक संक्रिया को दो संख्याओं पर संपन्न किया गया था, जिससे एक अन्य संख्या प्राप्त हुई थी। उदाहरण के लिए दो संख्याओं 5 और 13 पर योग की संक्रिया संपन्न करने से हमें संख्या 18 प्राप्त होती है। पुन: संख्याओं 5 और 13 पर गुणा की संक्रिया संपन्न करने पर हमें संख्या 65 प्राप्त होती है। इसी प्रकार, कुछ ऐसी संक्रियाएँ है, जिनको दो समुच्चयों पर संपन्न करने से, एक अन्य समुच्चय बन जाता है। अब हम समुच्चयों पर होने वाली कुछ संक्रियाओं को परिभाषित करेंगे और उनके गुणधर्मो की जाँच करेंगे। यहाँ से आगे हम समुच्चयों का उल्लेख किसी सार्वत्रिक समुच्चय के उपसमुच्चयों के रूप में करेंगे।

1.10.1 ***समुच्चयों का सम्मिलन (Union of sets)*** मान लीजिए कि A और B कोई दो समुच्चय हैं। A और B का सम्मिलन वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयवों के साथ B के भी सभी अवयव हों, तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार लिया गया हो। प्रतीक '$\cup$' का प्रयोग सम्मिलन को निरूपित करने के लिए किया जाता है। प्रतीकात्मक रूप में हम $A \cup B$ लिखते हैं और इसे 'A सम्मिलन B' पढ़ते हैं।

उदाहरण 12 मान लीजिए कि A = {2, 4, 6, 8} और B = { 6, 8, 10, 12}. $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि $A \cup B$ = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}

नोट कीजिए कि $A \cup B$ लिखते समय उभयनिष्ठ अवयव 6 और 8 को केवल एक बार लिखते हैं।

उदाहरण 13 मान लीजिए कि A = { *a, e, i, o, u* } और B = { *a, i, u* }. दर्शाइए कि $A \cup B = A$.

हल स्पष्टतया $A \cup B$ = { *a, e, i, o, u* } = A.

इस उदाहरण से स्पष्ट होता है कि किसी समुच्चय A और उसके उपसमुच्चय B का सम्मिलन समुच्चय A स्वयं होता है, अर्थात् यदि $B \subset A$, तो $A \cup B = A$.

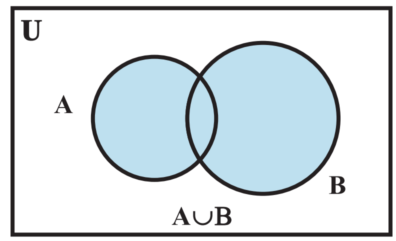
उदाहरण 14 मान लीजिए कि X = {राम, गीता, अकबर} कक्षा XI के विद्यार्थियों का जो विद्यालय की हाकी टीम में हैं, एक समुच्चय है। मान लीजिए कि Y = {गीता, डेविड, अशोक} कक्षा XI के विद्यार्थियों का, जो विद्यालय की फुटबाल टीम में हैं, एक समुच्चय है। $X \cup Y$ ज्ञात कीजिए और इस समुच्चय की व्याख्या कीजिए।

हल यहाँ $X \cup Y$ = {राम, गीता, अकबर, डेविड, अशोक}. यह कक्षा XI के उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो या तो विद्यालय की हाकी टीम में हैं या फुटबाल टीम में हैं या दोनों टीमों में हैं।
अत: हम दो समुच्चयों के सम्मिलन की परिभाषा इस प्रकार कर सकते हैं:

परिभाषा 6 दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें वे सभी अवयव हैं, जो या तो A में हैं या B में हैं (उन अवयवों को सम्मिलित करते हुए जो दोनों में हैं)। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cup B = \{ x : x \in A$ या $x \in B \}$ है।

दो समुच्चयों के सम्मिलन को आकृति 1.4 में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है।

आकृति 1.4 में छायांकित भाग $A \cup B$ को प्रदर्शित करता है।



आकृति 1.4

सम्मिलन की संक्रिया के कुछ गुणधर्म:

(i) $A \cup B = B \cup A$ (क्रम विनिमय नियम)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (साहचर्य नियम)

(iii) $A \cup \phi = A$ (तत्समक नियम, ϕ संक्रिया $\cup$ का तत्समक अवयव है)

(iv) $A \cup A = A$ (वर्गसम नियम)

(v) $U \cup A = U$ (U का नियम)

1.10.2 ***समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets)*** समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ है। प्रतीक '$\cap$' का प्रयोग सर्वनिष्ठ को निरूपित करने के लिए किया जाता है। समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में हों। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

उदाहरण 15 उदाहरण 12 के समुच्चय A और B पर विचार कीजिए। $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि केवल 6 और 8 ही ऐसे अवयव हैं जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। अत: $A \cap B = \{ 6, 8 \}$

उदाहरण 16 उदाहरण 14 के समुच्चय X और Y पर विचार कीजिए। $X \cap Y$ ज्ञात कीजिए।

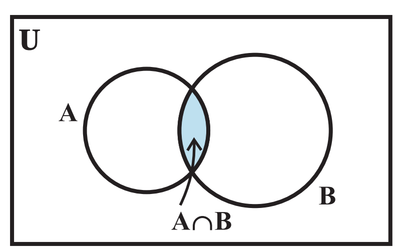
हल हम देखते हैं केवल 'गीता' ही एक मात्र ऐसा अवयव है, जो दोनों में उभयनिष्ठ है। अत: $X \cap Y$ = {गीता}

उदाहरण 17 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ और $B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$
$A \cap B$ ज्ञात कीजिए और इस प्रकार दिखाइए कि $A \cap B = B$.

हल हम देखते हैं कि $A \cap B = \{ 2, 3, 5, 7 \} = B$ हम ध्यान देते हैं कि $B \subset A$ और $A \cap B = B$

परिभाषा 7 समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में हो। प्रतीकात्मक रूप में, हम लिखते हैं कि

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$$



आकृति 1.5

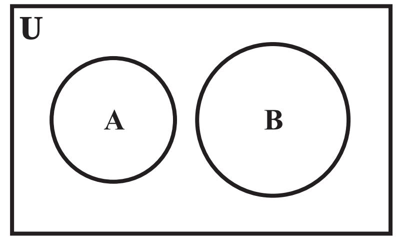
आकृति 1.5 में छायांकित भाग, A और B के सर्वनिष्ठ को प्रदर्शित करता है।

यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। उदाहरण के लिए

मान लीजिए कि A = { 2, 4, 6, 8 } और B = { 1, 3, 5, 7 }, तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, क्योंकि A और B में कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।

असंयुक्त समुच्चयों को वेन आरेख द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जैसा आकृति 1.6 में प्रदर्शित है।

उपर्युक्त आरेख में A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।



आकृति 1.6

सर्वनिष्ठ संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cap B = B \cap A$ (क्रम विनिमय नियम)

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (साहचर्य नियम)

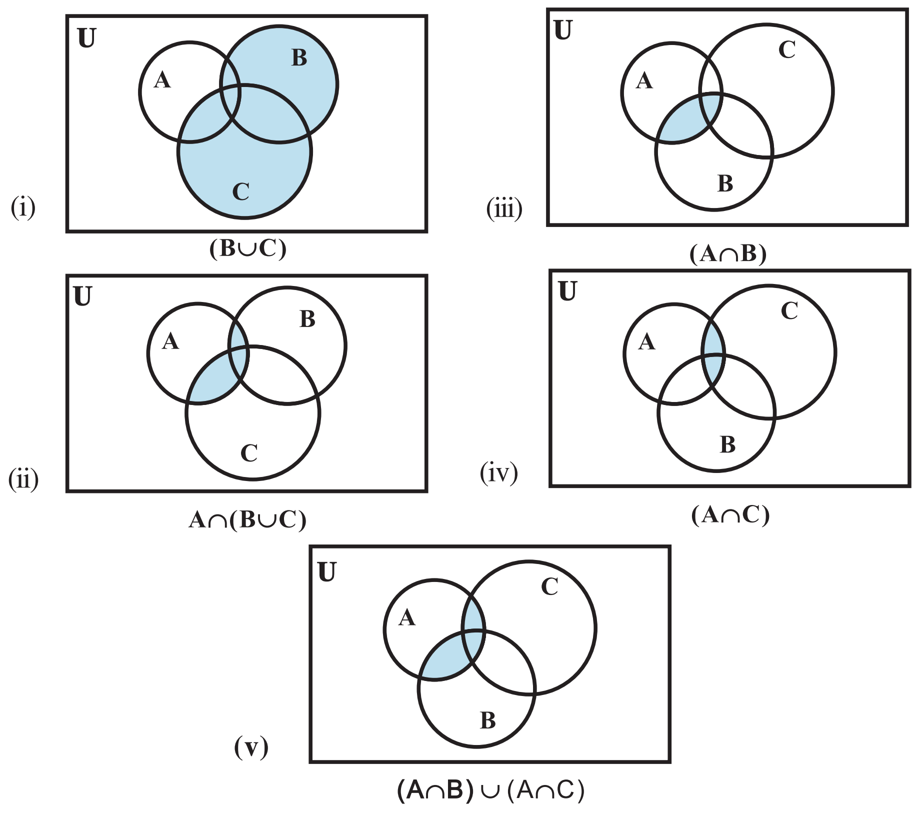
(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ (ϕ और U के नियम)।

(iv) $A \cap A = A$ (वर्गसम नियम)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (वितरण या बंटन नियम)

अर्थात् $\cap$ वितरित होता है $\cup$ पर।

नीचे बने वेन आरेखों [आकृतियों 1.7 (i)–(v)] द्वारा इस बात को सरलता से देख सकते हैं।

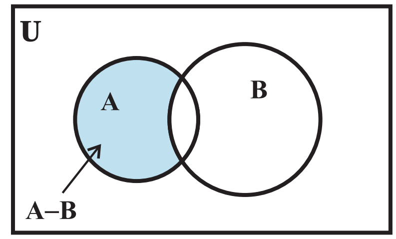


1.10.3 ***समुच्चयों का अंतर (Difference of sets)*** समुच्चयों A और B का अंतर उन अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं, जब कि A और B को इसी क्रम में लिया जाए। प्रतीतात्मक रूप में इसे A–B लिखते हैं और "A अंतर B" पढ़ते हैं।

उदाहरण 18 मान लीजिए कि A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = { 2, 4, 6, 8 } A – B और B – A ज्ञात कीजिए ।

हल हम प्राप्त करते हैं कि, A – B = { 1, 3, 5 }, क्योंकि अवयव 1, 3, 5 समुच्चय A में हैं किंतु B में नहीं हैं तथा B – A = { 8 }, क्योंकि अवयव 8, B में है किंतु A में नहीं है।

हम देखते हैं कि $A - B \neq B - A$



आकृति 1.8

उदाहरण 19 मान लीजिए कि $V = \{ a, e, i, o, u \}$ तो $B = \{ a, i, k, u\}$, तो $V - B$ और $B - V$ ज्ञात कीजिए।

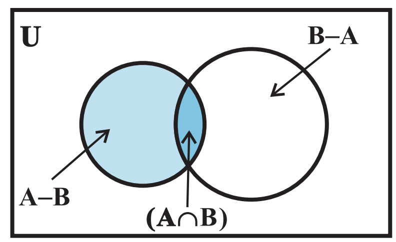
हल यहाँ, $V - B = \{ e, o \}$, क्योंकि अवयव e, o समुच्चय V में हैं किंतु B में नहीं है तथा $B - V = \{ k \}$, क्योंकि अवयव k समुच्चय B में है परंतु V में नहीं है।

हम नोट करते हैं कि $V - B \neq B - V$ समुच्चय निर्माण संकेतन का प्रयोग करते हुए हम समुच्चयों के अंतर की परिभाषा को पुन: इस प्रकार लिख सकते हैं:

$A - B = \{ x : x \in A$ और $x \notin B \}$

दो समुच्चयों A और B के अंतर को वेन आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है जैसा कि आकृति 1.8 में प्रदर्शित है।

छायांकित भाग दो समुच्चय A और B के अंतर को दर्शाता है।



आकृति 1.9

टिप्पणी समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ और $B - A$ परस्पर असंयुक्त होते हैं अर्थात् इनमें से किसी दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय एक रिक्त समुच्चय होता है जैसा कि आकृति 1.9 में प्रदर्शित है।

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक समुच्चय युग्म का सम्मिलन ज्ञात कीजिए:

(i) $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

(ii) $A = [a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c\}$

(iii) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है$\}$
$B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

(iv) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $1 < x \leq 6 \}$
$B = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $6 < x < 10 \}$

(v) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \phi$

2. मान लीजिए कि $A = \{ a, b \}$, $B = \{a, b, c\}$. क्या $A \subset B$? $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $A \cup B$ क्या है ?

4. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8 \}$ और $D = \{ 7, 8, 9, 10\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$

(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

5. प्रश्न 1 में दिए प्रत्येक समुच्चय युग्म का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \{ 3, 5, 7, 9, 11 \}$, $B = \{7, 9, 11, 13\}$, $C = \{11, 13, 15\}$ और $D = \{15, 17\}$; तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$

(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$

(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. यदि $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है$\}$, $B = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\}$
$C = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$ $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$

(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

8. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त हैं?

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ तथा $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $4 \le x \le 6\}$

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{c, d, e, f\}$

(iii) $\{x : x$ एक सम पूर्णांक है$\}$ और $\{x : x$ एक विषम पूर्णांक है$\}$

9. यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$; तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$

(v) $C - A$ (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$

(ix) $C - B$ (x) $D - B$ (xi) $C - D$ (xii) $D - C$

10. यदि $X = \{a, b, c, d\}$ और $Y = \{f, b, d, g\}$, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

11. यदि **R** वास्तविक संख्याओं और **Q** परिमेय संख्याओं के समुच्चय हैं, तो $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ क्या होगा ?

12. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए:

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ तथा $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{a, b, c, d\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ तथा $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iv) $\{2, 6, 10\}$ तथा $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

1.11 समुच्चय का पूरक (Complement of a Set)

मान लीजिए कि सभी अभाज्य संख्याओं का सार्वत्रिक समुच्चय U है तथा A, U का वह उपसमुच्चय है, जिसमें वे सभी अभाज्य संख्याएँ हैं जो 42 की भाजक नहीं हैं। इस प्रकार $A = \{x : x \in U$ और x संख्या 42 का भाजक नहीं है$\}$। हम देखते हैं कि $2 \in U$ किंतु $2 \notin A$, क्योंकि 2 संख्या 42 का एक भाजक है। इसी प्रकार $3 \in U$ किंतु $3 \notin A$, तथा $7 \in U$ किंतु $7 \notin A$ अब केवल 2, 3 तथा 7 ही U के ऐसे अवयव हैं जो A में नहीं हैं। इन तीन अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अर्थात् समुच्चय $\{2, 3, 7\}$, U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक A' से निरूपित किया जाता है। अत: $A' = \{2, 3, 7\}$ इस प्रकार हम देखते हैं कि $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A\}$ है। इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

परिभाषा 8 मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का एक उपसमुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय U के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में हम U के सापेक्ष A के पूरक को प्रतीक A' से निरूपित करते हैं। अत: $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A\}$ हम लिख सकते हैं। $A = U - A$

ध्यान दीजिए कि A के पूरक समुच्चय को, विकल्पत:, सार्वत्रिक समुच्चय U तथा समुच्चय A के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

उदाहरण 20 मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ और $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ है तो A' ज्ञात कीजिए।

हल हम नोट करते हैं केवल 2, 4, 6, 8, 10 ही U के ऐसे अवयव हैं जो A में नहीं हैं।
अत: $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

उदाहरण 21 मान लीजिए कि U एक सह शिक्षा विद्यालय के कक्षा XI के सभी विद्यार्थियों का सार्वत्रिक समुच्चय है और A, कक्षा XI की सभी लड़कियों का समुच्चय है तो A' ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि A, कक्षा XI की सभी लड़कियों का समुच्चय है, अतः A' स्पष्टतया कक्षा के सभी लड़कों का समुच्चय है।

टिप्पणी यदि A सार्वत्रिक समुच्चय U का एक उपसमुच्चय है, तो इसका पूरक A' भी U का एक उपसमुच्चय होता है।

पुनः उपर्युक्त उदाहरण 20 में,

$$A' = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

अतः $(A')'$ $= \{x : x \in U$ और $x \notin A'\}$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$$

पूरक समुच्चय की परिभाषा से स्पष्ट है कि सार्वत्रिक समुच्चय U के किसी उपसमुच्चय A' के लिए $(A')' = A$

अब निम्नलिखित उदाहरण में हम $(A \cup B)'$ तथा $A' \cap B'$ के हल निकालेंगे।

उदाहरण 22 मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$, A', B', $A' \cap B', A \cup B$ ज्ञात कीजिए और फिर सिद्ध कीजिए कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

हल स्पष्टतया $A' = \{1, 4, 5, 6\}, B' = \{ 1, 2, 6 \}$। अतः $A' \cap B' = \{ 1, 6 \}$

पुनः $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ है। इसलिए $(A \cup B)' = \{ 1, 6 \}$

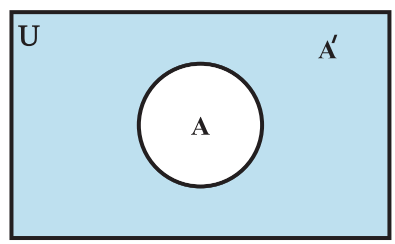
$$(A \cup B)' = \{ 1, 6 \} = A' \cap B'$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$. यह सिद्ध किया जा सकता है कि उपर्युक्त परिणाम व्यापक रूप से सत्य होता है यदि A और B सार्वजनिक समुच्चय U के कोई दो उपसमुच्चय हैं, तो $(A \cup B)' = A' \cap B'$. इसी प्रकार $(A \cap B)' = A' \cup B'$ इन परिणामों को शब्दों में इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

''दो समुच्चयों के सम्मिलन का पूरक उनके पूरक समुच्चयों का सार्वनिष्ठ होता है तथा दोनों समुच्चयों के सार्वनिष्ठ का पूरक उनके पूरक समुच्चयों का सम्मिलन होता है।'' इनको De Morgan के नियम कहते हैं।

यह नाम गणितज्ञ De Morgan के नाम पर रखा गया है।

किसी समुच्चय A के पूरक A' को वेन आरेख द्वारा निरूपित किया जा सकता है जैसा कि आकृति 1.10 में प्रदर्शित है।



आकृति 1.10

छायांकित भाग समुच्चय A के पूरक A' को दर्शाता है।

पूरकों के कुछ गुणधर्म

1. पूरक नियम : (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. De Morgan का नियम : (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B = A' \cup B'$

3. द्वि-पूरक नियम : $(A')' = A$

4. ϕ' और U के नियम : $\phi' = U$ और $U' = \phi$.

इन नियमों का सत्यापन वेन आरेखों द्वारा किया जा सकता है।

प्रश्नावली 1.5

1. मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8 \}$ और $C = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$

2. If $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, तो निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए:

(i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$

(iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$

3. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय मानते हुए, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक लिखिए:

(i) $\{x : x$ एक प्राकृत सम संख्या है$\}$ (ii) $\{x : x$ एक प्राकृत विषम संख्या है$\}$

(iii) $\{x : x$ संख्या 3 का एक धन गुणज है$\}$ (iv) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$

(v) $\{x : x$, 3 और 5 से विभाजित होने वाली एक संख्या है$\}$

(vi) $\{x : x$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है$\}$ (vii) $\{x : x$ एक पूर्ण घन संख्या है$\}$

(viii) $\{x : x + 5 = 8\}$ (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$

(x) $\{x : x \geq 7\}$ (xi) $\{x : x \in N$ और $2x + 1 > 10\}$

4. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$, तो सत्यापित कीजिए कि:

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए उपर्युक्त वेन आरेख खींचिए:

(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

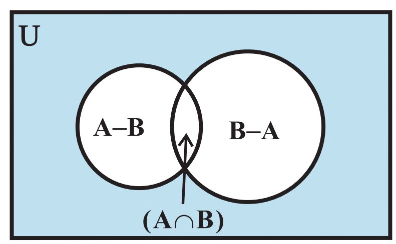
6. मान लीजिए कि किसी समतल में स्थित सभी त्रिभुजों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय U है। यदि A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनमें कम से कम एक कोण 60^0 से भिन्न है, तो A' क्या है?

7. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$

(iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

1.12 दो समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ पर आधारित व्यावहारिक प्रश्न Practical Problems on Union and Intersection of Two Sets



आकृति 1.11

पहले के अनुच्छेदों में हम दो समुच्चयों के सम्मिलन, सर्वनिष्ठ तथा अंतर के बारे में सीख चुके हैं। इस अनुच्छेद में हम अपने प्रतिदिन के जीवन से सम्बन्धित कुछ प्रश्नों को सरल करेंगे। इस अनुच्छेद में प्राप्त सूत्रों का प्रयोग आगे आने वाले अध्यायों, जैसे प्रायिकता (अध्याय 16) में भी किया जाएगा।

(i) मान लीजिए कि A और B परिमित समुच्चय हैं। यदि $A \cap B = \phi$, तो

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \ldots (1)$$

$A \cup B$ के अवयव या तो A में हैं या B में हैं परंतु दोनों में नहीं हैं, क्योंकि $A \cap B = \phi$. अत: परिणाम (1) तत्काल प्राप्त होता है।

(ii) व्यापक रूप से यदि A और B परिमित समुच्चय है, तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \ldots (2)$

नोट कीजिए कि समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ तथा $B - A$ असंयुक्त हैं और इनका सम्मिलन $A \cup B$ है (आकृति 1.11)। इसलिए

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ जो परिणाम (2) को सत्यापित करता है।} \end{aligned}$$

(iii) पुन: यदि A, B और C परिमित समुच्चय हैं, तो

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots (3)$$

वास्तव में हम देखते हैं कि

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [(2) द्वारा]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [(2) द्वारा]

क्योंकि $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, हमें प्राप्त होता है कि

$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

अत: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

इस प्रकार परिणाम (3) सिद्ध हुआ।

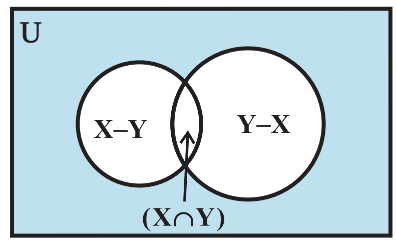
उदाहरण 23 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 50 अवयव हैं, X में 28 अवयव हैं और Y में 32 अवयव हैं, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव हैं?

हल दिया है कि $n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$, $n(Y) = 32$, $n(x \cap Y) = ?$

सूत्र $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ के प्रयोग द्वारा हम देखते हैं कि

$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$

$= 28 + 32 - 50 = 10$



आकृति 1.12

विकल्पत: मान लीजिए कि $n(X \cap Y) = k$, तो

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (आकृति 1.12 के वेन आरेख द्वारा)

इससे मिलता है कि $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$

$= (28 - k) + k + (32 - k)$

अत: $k = 10$.

उदाहरण 24 एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 4 भौतिकी और गणित दोनों को पढ़ाते हैं। कितने अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं?

हल मान लीजिए कि M उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो गणित पढ़ाते हैं और P उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें प्रश्न के कथन में आने वाले शब्द 'या' से सम्मिलन तथा शब्द 'और' से सर्वनिष्ठ का संकेत मिलता है। इसलिए

$n(M \cup P) = 20$, $n(M) = 12$ और $n(M \cap P) = 4$

हम $n(P)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

परिणाम $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$, के प्रयोग द्वारा,

$20 = 12 + n(P) - 4$

अत: $n(P) = 12$

अतएव 12 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

उदाहरण 25 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 24 क्रिकेट खेलना पसंद करते हैं और 16 फुटबाल खेलना पसंद करते हैं। इसके अतिरिक्त प्रत्येक विद्यार्थी कम से कम एक खेल अवश्य खेलना पसंद करता है। कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबाल दोनों खेलना पसंद करते हैं?

हल मान लीजिए कि क्रिकेट खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय X है। मान लीजिए कि फुटबाल खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय Y है। इस प्रकार $X \cup Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो कम से कम एक खेलना पसंद करते

हैं और $X \cap Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो दोनों ही खेल खेलना पसंद करते हैं।

दिया है कि $n(X) = 24, n(Y) = 16, n(X \cup Y) = 35, n(X \cap Y) = ?$

सूत्र $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$, के प्रयोग द्वारा, हम प्राप्त करते हैं।

$$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$$

इसलिए, $n(X \cap Y) = 5$

अर्थात् 5 विद्यार्थी दोनों खेल खेलना पसंद करते हैं।

उदाहरण 26 किसी स्कूल के 400 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण में 100 विद्यार्थी सेब का रस, 150 विद्यार्थी संतरे का रस और 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरे दोनों का रस पीने वाले पाए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न संतरे का ही?

हल मान लीजिए कि U सर्वेक्षण किए गए विद्यार्थियों के समुच्चय को निरूपित करता है। तथा A सेब का रस पीने वाले और B संतरे का रस पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चयों को निरूपित करते है। इस प्रकार $n(U) = 400, n(A) = 100, n(B) = 150$ और $n(A \cap B) = 75$.

अब $n(A' \cap B') = n(A \cup B)'$

$= n(U) - n(A \cup B)$

$= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$

$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$

अत: 225 विद्यार्थी न तो सेब का और न संतरे का रस पीते हैं।

उदाहरण 27 200 व्यक्ति किसी चर्म रोग से पीड़ित हैं, इनमें 120 व्यक्ति रसायन C_1, 50 व्यक्ति रसायन C_2, और 30 व्यक्ति रसायन C_1 और C_2 दोनों ही से प्रभावित हुए हैं, तो ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रभावित हुए हों :

(i) रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं,

(ii) रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं,

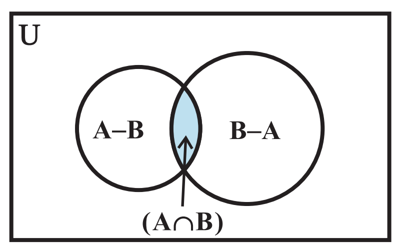
(iii) रसायन C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित हुए हैं।

हल मान लीजिए कि U, चर्म रोग से पीड़ित व्यक्तियों के सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करता है, A, रसायन C_1 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को तथा B, रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को निरूपित करते हैं।

यहाँ पर $n(U) = 200, n(A) = 120, n(B) = 50$ तथा $n(A \cap B) = 30$

(i) दिए हुए वेन आरेख (आकृति 1.13) में हम देखते हैं कि

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$.



आकृति 1.13

अत: $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(क्योंकि $A - B$) और $A \cap B$ असंयुक्त हैं)

अथवा $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) =$

$120 - 30 = 90$

अत: रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 90 है।

(ii) आकृति 1.13 से $B = (B - A) \cup (A \cap B)$.

इसलिए $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$ (क्योंकि $A - B$ तथा $A - B$ अंसयुक्त हैं।)

अथवा $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B$

$= 50 - 30 = 20$

अत: रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 20 है।

(iii) रसयान C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों की संख्या अर्थात्

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 120 + 50 - 30 = 140.$$

प्रश्नावली 1.6

1. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17, n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, तो $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए।
2. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 18, X में 8 और Y में 15 अवयव हों, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव होंगे?
3. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिंदी तथा 200 अंग्रेज़ी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिंदी तथा अंग्रेज़ी दोनों बोल सकते हैं?
4. यदि S और T दो ऐसे समुच्चय हैं कि S में 21, T में 32 और $S \cap T$ में 11 अवयव हों, तो $S \cup T$ में कितने अवयव होंगे?
5. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि X में 40, $X \cup Y$ में 60 और $X \cap Y$ में 10 अवयव हों, तो Y में कितने अवयव होंगे?
6. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफ़ी, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम से कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफ़ी और चाय दोनों को पसंद करते हैं?
7. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट, और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?
8. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोल सकते हैं?

विविध उदाहरण

उदाहरण 28 दिखाइए कि शब्द " CATARACT " के वर्ण विन्यास के अक्षरों का समुच्चय तथा शब्द " TRACT" के वर्णविन्यास के अक्षरों का समुच्चय समान है।

हल मान लीजिए कि X "CATARACT" के अक्षरों का समुच्चय है, तो

$$X = \{ C, A, T, A, R, A, C, T \} = \{ C, A, T, R \}$$

मान लीजिए कि Y " TRACT" के अक्षरों का समुच्चय है, तो

$$Y = \{ T, R, A, C \}$$

क्योंकि X का प्रत्येक अवयव Y में है तथा Y का प्रत्येक अवयव X में है, अत: $X = Y$

उदाहरण 29 समुच्चय $\{ -1, 0, 1 \}$ के सभी उपसमुच्चयों की सूची बनाइए।

हल माना $A = \{-1, 0, 1\}$ है। समुच्चय A का वह उपसमुच्चय जिसमें कोई भी अवयव नहीं है रिक्त समुच्चय ϕ है। A के एक अवयव वाले उपसमुच्चय $\{ -1 \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}$ हैं। A के दो अवयव वाले समुच्चय $\{ -1, 0 \}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$ हैं। A के तीन अवयव वाला उपसमुच्चय A स्वयं है। इस प्रकार A के सभी उपसमुच्चय $\phi, \{ -1 \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$ तथा $\{-1, 0, 1\}$ हैं।

उदाहरण 30 सिद्ध कीजिए कि $A \cup B = A \cap B$ का तात्पर्य है कि $A = B$

हल यदि कोई अवयव $a \in A$, तो $a \in A \cup B$. क्योंकि $A \cup B = A \cap B$, इसलिए $a \in A \cap B$. अत: $a \in B$.

इस प्रकार $A \subset B$. इसी प्रकार यदि $b \in B$, तो $b \in A \cup B$. क्योंकि
$A \cup B = A \cap B$ इसलिए, $b \in A \cap B$. इस प्रकार $b \in A$. अत: $B \subset A$ अतएव $A = B$.

उदाहरण 31 समुच्चयों A, B के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

हल मान लीजिए कि $X \in P(A \cap B)$, तो $X \subset A \cap B$. इसलिए $X \in P(A)$ तथा $X \in P(B)$, जिसका तात्पर्य हुआ कि $X \in [P(A) \cap P(B)]$. इस प्रकार $P(A \cap B) \subset [P(A) \cap P(B)]$. मान लीजिए कि $Y \in [P(A) \cap P(B)]$, तो $Y \in P(A)$ तथा $Y \in P(B)$, इस प्रकार $Y \subset A$ और $Y \subset B$. इसलिए $Y \subset A \cap B$, जिसका तात्पर्य है कि $Y \in P(A \cap B)$, अतएव $[P(A) \cap P(B)] \subset P(A \cap B)$, अत: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

उदाहरण 32 एक बाजार अनुसंधान समूह ने 1000 उपभोक्ताओं का सर्वेक्षण किया और सूचित किया कि 720 उपभोक्ताओं ने उत्पाद A तथा 450 उपभोक्ताओं ने उत्पाद B पसंद किया। दोनों उत्पादों को पसंद करने वाले उपभोक्ताओं की न्यूनतम संख्या क्या है?

हल मान लीजिए कि U सर्वेक्षण उपभोक्ताओं का समुच्चय है, S उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होनें उत्पाद A पसंद किया और T उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होंने उत्पाद B पसंद किया। दिया है कि,

$$n(U) = 1000, n(S) = 720, n(T) = 450$$

इस प्रकार $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$$

स्पष्ट है कि $n(S \cup T)$ अधिकतम तब होगा जब $n(S \cap T)$ न्यूनतम है, किंतु $S \cup T \subset U$, जिसका तात्पर्य है कि $n(S \cup T) \leq n(U) = 1000$ । इस प्रकार $n(S \cup T)$ का अधिकतम मान 1000 है। इसलिए $n(S \cap T)$ का न्यूनतम मान 170 है। अत: दोनों उत्पादों को पसंद करने वाले उपभोक्ताओं की न्यूनतम संख्या 170 है।

उदाहरण 33 500 कार मालिकों से पूछताछ करनें पर पाया गया कि 400 लोग A प्रकार की कार के, 200 लोग B प्रकार की कार के तथा 500 लोग A और B दोनों प्रकार की कारों के मालिक थे। क्या ये आँकड़े सही हैं?

हल मान लीजिए कि पूछताछ किए गए कार मालिकों का समुच्चय U है, A प्रकार की कार के मालिकों का समुच्चय M है और B प्रकार की कार के मालिकों का समुच्चय S है।

दिया है कि $n(U) = 500, n(M) = 400, n(S) = 200$ और $n(S \cap M) = 50$.

इस प्रकार $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

किंतु $S \cup M \subset U$ जिसका तात्पर्य है कि $n(S \cup M) \leq n(U)$.
यह एक विरोधोक्ति है। अत: प्रदत्त आँकड़े सही नहीं है।

उदाहरण 34 एक महाविद्यालय में फुटबाल के लिए 38, बास्केट बाल के लिए 15 और क्रिकेट के लिए 20 पदक प्रदान किए गए। यदि ये पदक कुल 58 लोगों को मिले और केवल तीन लोगों को तीनों खेलों के लिए मिले, तो कितने लोगों को तीन में से ठीक-ठीक दो खेलों के लिए मिले?

हल मान लीजिए कि F, B तथा C उन लोगों के समुच्चय निरूपित करते हैं जिन्हें क्रमश: फुटबाल, बास्केटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले।

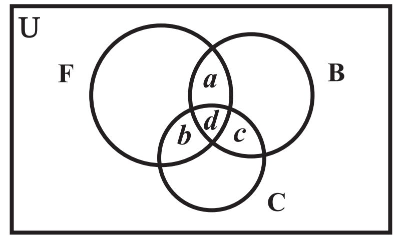
यहाँ $n(F) = 38, n(B) = 15, n(C) = 20, \quad n(F \cup B \cup C) = 58$ और $n(F \cap B \cap C) = 3$

पुन: $n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C) - n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C)$
$+ n(F \cap B \cap C)$,

इस प्रकार $n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$

आकृति 1.14 में दिए वेन आरेख पर विचार कीजिए:

यहाँ a उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल फुटबाल तथा बास्केटबाल के लिए पदक मिले, b उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल फुटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले और c उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल बास्केटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले। d उन लोगों की संख्या है जिनको तीनो ही खेलों के लिए पदक मिले। इस प्रकार $d = n(F \cap B \cap C) = 3$ और $a + d + b + d + c + d = 18$



आकृति 1.14

अत: $a + b + c = 9$, जोकि उन लोगों की संख्या है, जिनकों तीनों खेलों में से दो खेलों के लिए पदक मिले।

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन किसका उपसमुच्चय है, इसका निर्णय कीजिए:
$A = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएँ $x\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $D = \{6\}$.

2. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सत्य है या असत्य है। यदि सत्य है, तो उसे सिद्ध कीजिए। यदि असत्य है, तो एक उदाहरण दीजिए।
(i) यदि $x \in A$ तथा $A \in B$, तो $x \in B$
(ii) यदि $A \subset B$ तथा $B \in C$, तो $A \in C$
(iii) यदि $A \subset B$ तथा $B \subset C$, तो $A \subset C$
(iv) यदि $A \not\subset B$ तथा $B \not\subset C$, तो $A \not\subset C$
(v) यदि $x \in A$ तथा $A \not\subset B$, तो $x \in B$
(vi) यदि $A \subset B$ तथा $x \notin B$, तो $x \notin A$

3. मान लीजिए A, B, और C ऐसे समुच्चय हैं कि $A \cup B = A \cup C$ तथा $A \cap B = A \cap C$, तो दर्शाइए कि $B = C$.

4. दिखाइए कि निम्नलिखित चार प्रतिबंध तुल्य हैं:
(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

5. दिखाइए कि यदि $A \subset B$, तो $C - B \subset C - A$.

6. मान लीजिए कि $P(A) = P(B)$, सिद्ध कीजिए कि $A = B$

7. किन्हीं भी समुच्चयों A तथा B के लिए, क्या यह सत्य है कि
$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

8. किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए सिद्ध कीजिए कि,
$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ और $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

9. समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि:
(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. दिखलाइए कि $A \cap B = A \cap C$ का तात्पर्य $B = C$ आवश्यक रूप से नहीं होता है।

11. मान लीजिए कि A और B समुच्चय हैं। यदि किसी समुच्चय X के लिए $A \cap X = B \cap X = \phi$ तथा $A \cup X = B \cup X$, तो सिद्ध कीजिए कि $A = B$.
(**संकेत:** $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ और वितरण नियम का प्रयोग कीजिए)

12. ऐसे समुच्चय A, B और C ज्ञात कीजिए ताकि $A \cap B$, $B \cap C$ तथा $A \cap C$ आरिक्त समुच्चय हों और $A \cap B \cap C = \phi$.

13. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफ़ी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफ़ी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफ़ी पीते हैं।

14. विद्यार्थियों के एक समूह में, 100 विद्यार्थी हिंदी, 50 विद्यार्थी अंग्रेज़ी तथा 25 विद्यार्थी दोनों भाषाओं को जानते हैं। विद्यार्थियों में से प्रत्येक या तो हिंदी या अंग्रेज़ी जानता है। समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

15. 60 लोगों के सर्वेक्षण में पाया गया कि 25 लोग समाचार पत्र H, 26 लोग समाचार पत्र T, 26 लोग समाचार पत्र I, 9 लोग H तथा I दोनों, 11 लोग H तथा T दोनों, 8 लोग T तथा I दोनों और 3 लोग तीनों ही समाचार पत्र पढ़ते हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

(ii) ठीक-ठीक केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

16. एक सर्वेक्षण में पाया गया कि 21 लोग उत्पाद A, 26 लोग उत्पाद B, 29 लोग उत्पाद C पसंद करते हैं। यदि 14 लोग उत्पाद A तथा B, 12 लोग उत्पाद C तथा A, 14 लोग उत्पाद B तथा C और 8 लोग तीनो ही उत्पादों को पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने लोग केवल उत्पाद C को पसंद करते हैं।

सारांश

इस अध्याय में समुच्चयों से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं पर विचार किया गया है। जिसका सार नीचे दिया है।

- एक समुच्चय वस्तुओं का सुपरिभाषित संग्रह होता है।
- एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय कहलाता है।
- एक समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा अपरिमित समुच्चय कहलाता है।
- दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं यदि उनमें तथ्यत: समान अवयव हों।
- एक समुच्चय A किसी समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव हो। अंतराल समुच्चय R के उपसमुच्चय होते हैं।
- किसी समुच्चय A का घात समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का संग्रह होता है।
- दो समुच्चय A और B का सम्मिलन उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो या तो A में हों या B में हों।
- दो समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों। दो समुच्चय A और B का अंतर, जब A तथा B इसी क्रम में हो, उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A में हों किंतु B में नहीं हों।
- किन्हीं दो समुच्चय A तथा B के लिए, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ तथा $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- यदि A और B ऐसे परिमित समुच्चय हैं कि $A \cap B = \phi$, तो,
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ और
  यदि $A \cap B \neq \phi$, तो
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

जर्मन गणित Georg Cantor (1845 ई॰ – 1918 ई॰) को आधुनिक समुच्चय सिद्धांत के अधिकांश भाग का जन्मदाता माना जाता है। समुच्चय सिद्धांत पर उनके शोध पत्र 1874 ई॰ से 1897 ई॰ के बीच के किसी समय में प्रकाश में आए। उनका समुच्चय सिद्धांत का अध्ययन उस समय हुआ जब वे $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$ के रूप की त्रिकोणमितीय श्रेणी का अध्ययन कर रहे थे।

1874 ई॰ में अपने एक शोध पत्र में यह प्रकाशित किया कि वास्तविक संख्याओं को पूर्णांकों के साथ एक-एक संगतता में नहीं रखा जा सकता है। 1879 ई॰ के उत्तरार्ध में अमूर्त समुच्चयों के विभिन्न गुणधर्मों को दर्शाने वाले उनके अनेक शोध पत्र प्रकाशित हुए।

Cantor के शोध को एक अन्य विख्यात गणितज्ञ Richard Dedekind (1831ई॰-1916ई॰) ने प्रशंसनीय ढंग से स्वीकार किया। लेकिन Kronecker (1810-1893 ई॰) ने अपरिमित समुच्चयों को, उसी प्रकार से लेने के लिए जिस प्रकार परिमित समुच्चयों को लिया जाता है, उनकी भर्त्सना की। एक दूसरे जर्मन गणितज्ञ Gottlob Frege ने शताब्दी की समाप्ति पर समुच्चय सिद्धांत को तर्कशास्त्र के नियमों के रूप में प्रस्तुत किया। उस समय तक संपूर्ण समुच्चय सिद्धांत सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना पर आधारित था। यह विख्यात अंग्रेज दार्शिनिक Bertand Russell (1872 ई.-1970 ई॰) थे जिन्होंने 1902 ई॰ में बतलाया कि सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना एक विरोधोक्ति को जन्म देती है। इस प्रकार Russell की विख्यात विरोधोक्ति मिली। Paul R.Halmos ने इसके बारे में अपनी पुस्तक 'Naïve Set Theory' में लिखा है कि "कुछ नहीं में सब कुछ समाहित है"।

इन सभी विरोधोक्तियों के परिणामस्वरूप समुच्चय सिद्धांत का पहला अभिगृहीतीकरण 1908 ई॰ में Ernst Zermelo द्वारा प्रकाशित किया गया। 1922 ई॰ में Abraham Fraenkel ने एक दूसरा प्रस्ताव भी दिया। 1925 ई॰ में John Von Neumann ने नियमितीकरण का अभिगृहीत स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया। इसके बाद 1937 ई॰ में Paul Bernays ने सन्तोषजनक अभिगृहीतिकरण प्रस्तुत किया। इन अभिगृहीतों में सुधार, Kurt Gödel द्वारा 1940 ई॰ में अपने मोनोग्राफ में प्रस्तुत किया गया। इस सुधार को Von Neumann-Bernays (VNB) अथवा Gödel-Bernays (GB) का समुच्चय सिद्धांत कहते हैं।

इन सभी कठिनाइयों के बावजूद, Cantor के समुच्चय सिद्धांत को वर्तमान काल के गणित में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में आजकल गणित के अधिकांश संकल्पनाएँ तथा परिणामों को समुच्चय सैद्धांतिक भाषा में प्रस्तुत करते हैं।

अध्याय **2**

संबंध एवं फलन
(Relations and Functions)

❖ *Mathematics is the indispensable instrument of all physical research.– BERTHELOT* ❖

2.1 भूमिका (Introduction)

गणित का अधिकांश भाग पैटर्न अर्थात् परिवर्तनशील राशियों के बीच अभिज्ञेय (पहचान योग्य)कड़ियों को ज्ञात करने के बारे में है। हमारे दैनिक जीवन में, हम संबंधों को चित्रित करने वाले अनेक पैटर्नों के बारे में जानते हैं, जैसे भाई और बहन, पिता और पुत्र, अध्यापक और विद्यार्थी इत्यादि। गणित में भी हमें बहुत से संबंध मिलते हैं जैसे 'संख्या m, संख्या n, से छोटी है', 'रेखा l, रेखा m, के समांतर है', 'समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है'। इन सभी में हम देखते हैं कि किसी संबंध मं ऐसे युग्म सम्मिलित होते हैं जिनके घटक एक निश्चित क्रम में होते हैं। इस अध्याय में हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो समुच्चयों के सदस्यों के युग्म बनाए जा सकते हैं और फिर उन युग्मों में आने वाले दोनों सदस्यों के बीच बनने वाले संबंधों को सुस्पष्ट करेंगे। अंत में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे में जानेंगे, जो फलन बनने के योग्य हैं। फलन की परिकल्पना गणित में अत्यंत महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह एक वस्तु से दूसरी वस्तु के बीच गणितानुसार यथातथ्य संगतता के विचार का अभिग्रहण करती है।

G.W.Leibnitz (1646-1716 A.D.)

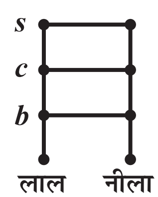
2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

मान लीजिए कि A, दो प्रकार के रंगों का और B, तीन वस्तुओं का समुच्चय है, अर्थात्

$$A = \{\text{लाल, नीला}\} \text{ और } B = \{b, c, s\},$$

जहाँ b, c और s क्रमशः किसी विशेष बैग, कोट और कमीज को निरूपित करते हैं। इन दोनों समुच्चयों से कितने प्रकार की रंगीन वस्तुओं के युग्म बनाए जा सकते हैं? क्रमबद्ध तरीके से प्रगति करते हुए हम देखते हैं कि निम्नलिखित 6 भिन्न-भिन्न युग्म प्राप्त होते हैं। (लाल, b), (लाल, c), (लाल, s), (नीला, b), (नीला, c), (नीला, s)। इस प्रकार हमें 6 भिन्न-भिन्न वस्तुएँ प्राप्त होती हैं (आकृति 2.1)।

पिछली कक्षाओं से स्मरण कीजिए कि, एक क्रमित युग्म, अवयवों का वह युग्म है, जिसे वक्र कोष्ठक में लिखते हैं और जिनको एक दूसरे से किसी विशेष क्रम में समूहित किया जाता है अर्थात् (p,q), $p \in$ P और $q \in$ Q। इसे निम्नलिखित परिभाषा से स्पष्ट किया जा सकता है।



आकृति 2.1

परिभाषा 1 दो अरिक्त समुच्चयों P तथा Q का कार्तीय गुणन $P \times Q$ उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है, जिनको प्रथम घटक P से तथा द्वितीय घटक Q, से लेकर बनाया जा सकता है। अतः

$$P \times Q = \{ (p,q) : p \in P, q \in Q \}$$

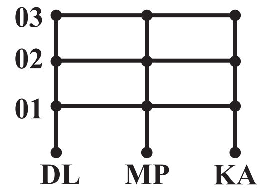
यदि P या Q में से कोई भी रिक्त समुच्चय है, तो उनका कार्तीय गुणन भी रिक्त समुच्चय होता है, अर्थात् $P \times Q = \phi$

उपरोक्त दृष्टांत से हम जानते हैं कि

$A \times B$ = {(लाल,b), (लाल,c), (लाल,s), (नीला,b), (नीला,c), (नीला,s)}।

पुनः निम्नलिखित दो समुच्चयों पर विचार कीजिए।

A = {DL, MP, KA}, जहाँ DL, MP, KA दिल्ली, मध्य प्रदेश, तथा कर्नाटक को निरूपित करते हैं और B = {01,02, 03}क्रमशः दिल्ली, मध्य प्रदेश और कर्नाटक द्वारा गाड़ियों के लिए जारी लाइसेंस प्लेट की सांकेतिक संख्याएँ प्रकट करते हैं।

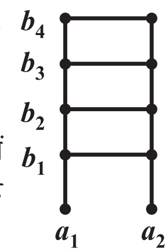


आकृति 2.2

यदि तीन राज्य दिल्ली, मध्य प्रदेश और कर्नाटक, गाड़ियों के लाइसेंस प्लेट के लिए संकेत पद्धति (संकेतिकी) इस प्रतिबंध के साथ बना रहे हों कि संकेत पद्धति, समुच्चय A के अवयव से प्रारंभ हो, तो इन समुच्चयों से प्राप्त होने वाले युग्म कौन से हैं तथा इन युग्मों की कुल संख्या कितनी है (आकृति 2.2)?

प्राप्त होने वाले युग्म इस प्रकार हैं, (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) और समुच्चय A तथा समुच्चय B का कार्तीय गुणन इस प्रकार होगा,

A × B = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.



आकृति 2.3

यह सरलता से देखा जा सकता है कि कार्तीय गुणन में इस प्रकार 9 युग्म हैं क्योंकि समुच्चय A और B में से प्रत्येक में 3 अवयव हैं। इससे हमें 9 संभव संकेत पद्धतियाँ मिलती हैं। यह भी नोट कीजिए कि इन अवयवों के युग्म बनाने का क्रम महत्त्वपूर्ण (निर्णायक) है। उदाहरण के लिए सांकेतिक संख्या (DL, 01) वही नहीं है जो सांकेतिक संख्या (01, DL) है।

अंत में स्पष्टीकरण के लिए समुच्चय A= $\{a_1, a_2\}$ और B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ पर विचार कीजिए (आकृति 2.3)। यहाँ

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}.$$

यदि A और B, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चय हों, तो इस प्रकार प्राप्त 8 क्रमित युग्म किसी समतल के बिंदुओं की स्थिति निरूपित करते हैं तथा यह स्पष्ट है कि (a_1, b_2) पर स्थित बिंदु, (b_2, a_1) पर स्थित बिंदु से भिन्न हैं।

टिप्पणी

(i) दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों।

(ii) यदि A में p अवयव तथा B में q अवयव हैं, तो A × B में pq अवयव होते हैं अर्थात् यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$.

(iii) यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हैं और A या B में से कोई अपरिमित है, तो A × B भी अपरिमित समुच्चय होता है।

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रिक कहलाता है।

उदाहरण 1 यदि $(x + 1, y - 2) = (3,1)$, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि क्रमित युग्म समान है, इसलिए संगत घटक भी समान होंगे।

अतः $x + 1 = 3$ और $y - 2 = 1$.

सरल करने पर $x = 2$ और $y = 3$.

उदाहरण 2 यदि $P = \{a, b, c\}$ और $Q = \{r\}$, तो P × Q तथा Q × P ज्ञात कीजिए। क्या दोनों कार्तीय गुणन समान हैं?

हल कार्तीय गुणन की परिभाषा से

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ और $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

क्योंकि, क्रमित युग्मों की समानता की परिभाषा से, युग्म (a, r) युग्म (r, a), के समान नहीं है और यह बात कार्तीय गुणन के

प्रत्येक युग्म के लिए लागू होती है, जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$P \times Q \neq Q \times P$.

तथापि, प्रत्येक समुच्चय में अवयवों की संख्या समान है।

उदाहरण 3 मान लीजिए कि $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ और $C = \{4,5,6\}$. निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

हल (i) दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ की परिभाषा से $(B \cap C) = \{4\}$.

अत: $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$.

(ii) अब $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

और $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

इसलिए $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

(iii) क्योंकि $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$

अत: $A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

(iv) भाग (ii) से $A \times B$ तथा $A \times C$ समुच्चयों के प्रयोग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

उदाहरण 4 यदि $P = \{1, 2\}$, तो समुच्चय $P \times P \times P$ ज्ञात कीजिए।

हल $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

उदाहरण 5 यदि $\mathbf{R}$ समस्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो कार्तीय गुणन $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ और $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ क्या निरूपित करते हैं?

हल कार्तीय गुणन $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ समुच्चय $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$

को निरूपित करता है, जिसका प्रयोग द्विविम समष्टि के बिंदुओं के निर्देशांकों को प्रकट करने के लिए किया जाता है। $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ समुच्चय $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$

को निरूपित करता है, जिसका प्रयोग त्रिविमीय आकाश के बिंदुओं के निर्देशांकों को प्रकट करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 6 यदि $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, तो A और B को ज्ञात कीजिए।

हल A = प्रथम घटकों का समुच्चय $= \{p, m\}$

B = द्वितीय घटकों का समुच्चय $= \{q, r\}$.

प्रश्नावली 2.1

1. यदि $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।
2. यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय $B = \{3, 4, 5\}$, तो $(A \times B)$ में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. यदि $G = \{7, 8\}$ और $H = \{5, 4, 2\}$, तो $G \times H$ और $H \times G$ ज्ञात कीजिए।
4. बतलाइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है अथवा असत्य है। यदि कथन असत्य है, तो दिए गए कथन को सही बना कर लिखिए।

(i) यदि $P = \{m, n\}$ और $Q = \{n, m\}$, तो $P \times Q = \{(m, n),(n, m)\}$.

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं, तो $A \times B$ क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय है, इस प्रकार कि $x \in A$ तथा $y \in B$.

(iii) यदि $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$, तो $A \times (B \cap \phi) = \phi$.

5. यदि $A = \{-1, 1\}$, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A \times B = \{(a, x),(a , y), (b, x), (b, y)\}$ तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$. सत्यापित कीजिए कि

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (ii) $A \times C$, $B \times D$ का एक उपसमुच्चय है।

8. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$. $A \times B$ लिखिए। $A \times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे? उनकी सूची बनाइए।

9. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ $n(A) = 3$ और $n(B) = 2$. यदि $(x, 1)$, $(y, 2)$, $(z, 1)$, $A \times B$ में हैं, तो A और B, को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

10. कार्तीय गुणन $A \times A$ में 9 अवयव हैं, जिनमें $(-1,0)$ तथा $(0,1)$ भी है। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A \times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

2.3 संबंध (Relation)

दो समुच्चयों $P = \{a,b,c\}$ तथा Q = {Ali, Bhanu, Binoy, Chandra, Divya} पर विचार कीजिए। P तथा Q के कार्तीय गुणन में 15 क्रमित युग्म हैं, जिन्हें इस प्रकार सूचीबद्ध किया जा सकता है,

$P \times Q = \{(a, \text{Ali}), (a, \text{Bhanu}), (a, \text{Binoy}), ..., (c, \text{Divya})\}$.

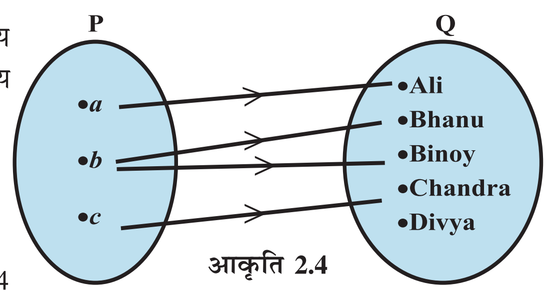
अब हम प्रत्येक क्रमित युग्म (x, y) के प्रथम घटक x तथा द्वितीय घटक y के बीच एक संबंध R स्थापित कर $P \times Q$ का एक उपसमुच्चय इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

R = { (x,y): x, नाम y का प्रथम अक्षर है, $x \in P$, $y \in Q$}

इस प्रकार

$R = \{(a, \text{Ali}), (b, \text{Bhanu}), (b, \text{Binoy}), (c, \text{Chandra})\}$

संबंध R का एक दृष्टि-चित्रण, जिसे तीर आरेख कहते हैं, आकृति 2.4 में प्रदर्शित है।



आकृति 2.4

परिभाषा 2 किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है यह उपसमुच्चय $A \times B$ के क्रमति युग्मों के प्रथम तथा द्वितीय घटकों के मध्य एक संबंध स्थापित करने से प्राप्त होता है। द्वितीय घटक, प्रथम घटक का प्रतिबिंब कहलाता है।

परिभाषा 3 समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत कहते हैं।

परिभाषा 4 समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं। समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत कहलाता है। नोट कीजिए कि, परिसर $\subseteq$ सहप्रांत

टिप्पणी (i) एक संबंध का बीजीय निरूपण या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि द्वारा किया जा सकता है।
(ii) एक तीर आरेख किसी संबंध का एक दृष्टि चित्रण है।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ द्वारा A से A में एक संबंध परिभाषित कीजिए।

(i) इस संबंध को एक तीर आरेख द्वारा दर्शाइए।

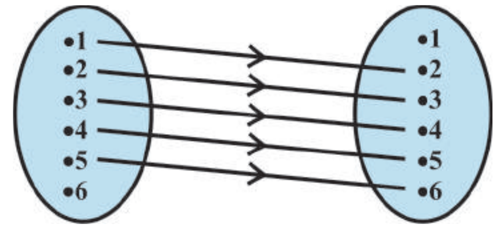
(ii) R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर लिखिए।

हल (i) परिभाषा द्वारा

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$.

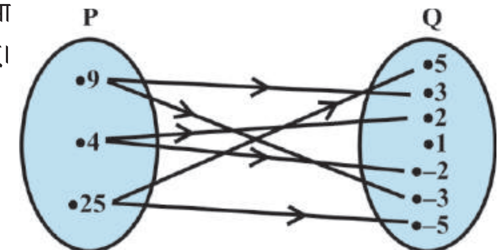
संगत तीर आरेख आकृति 2.5 में प्रदर्शित है।

(ii) हम देख सकते हैं कि प्रथम घटकों का समुच्चय अर्थात् प्रांत$=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$ इसी प्रकार, द्वितीय घटकों का समुच्चय अर्थात् परिसर $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा सहप्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



आकृति 2.5

उदाहरण 8 नीचे आकृति 2.6 में समुच्चय P और Q के बीच एक संबंध दर्शाया गया है। इस संबंध को (i) समुच्चय निर्माण रूप में (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत तथा परिसर क्या हैं?



आकृति 2.6

हल स्पष्टत: संबंध R, "x, y का वर्ग है"

(i) समुच्चय निर्माण रूप में, $R = \{(x, y): x,\ y$ का वर्ग है, $x \in P,\ y \in \mathbf{Q}\}$

(ii) रोस्टर रूप में, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

इस संबंध का प्रांत $\{4, 9, 25\}$ है।

इस संबंध का परिसर $\{-2, 2, -3, 3, -5, 5\}$.

नोट कीजिए कि अवयव 1, P के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है तथा समुच्चय Q इस संबंध का सहप्रांत है।

टिप्पणी किसी समुच्चय A से समुच्चय B में संबंधों की कुल संख्या, $A \times B$ के संभव उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती है। यदि $n(A) = p$ और $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$ और संबंधों की कुल संख्या 2^{pq} होती है।

उदाहरण 9 मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$. A से B में संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

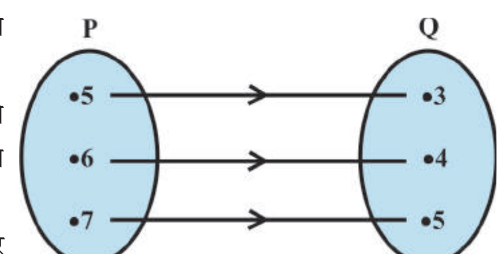
हल यहाँ $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

क्योंकि $n(A\times B) = 4$, इसलिए $A\times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या 2^4 है। इसलिए A से B के संबंधों की संख्या 2^4 है।

टिप्पणी A से A के संबंध को 'A पर संबंध' भी कहते हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, जहाँ $x, y \in A\}$ द्वारा, A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।
2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर $R = \{(x, y) : y = x + 5$, x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in \mathbf{N}\}$ द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को (i) रोस्टर रूप में इसके प्रांत और परिसर लिखिए।
3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ और $B = \{4, 6, 9\}$. A से B में एक संबंध $R = \{(x, y): x$ और y का अंतर विषम है, $x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।
4. आकृति 2.7, समुच्चय P से Q का एक संबंध दर्शाती है। इस संबंध को (i) समुच्चय निर्माण रूप (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत तथा परिसर क्या हैं?



आकृति 2.7

5. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. मान लीजिए कि R, A पर

$\{(a, b): a\ , b \in A$, संख्या a संख्या b को यथावथ विभाजित करती है$\}$द्वारा परिभाषित एक संबंध है।

(i) R को रोस्टर रूप में लिखिए

(ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए

(iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

7. संबंध $R = \{(x, x^3) : x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

8. मान लीजिए कि $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1, 2\}$, A से B के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए कि R, **Z** पर, $R = \{(a,b): a,\ b \in \mathbf{Z}, a - b$ एक पूर्णांक है$\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

2.4 फलन (Function)

इस अनुच्छेद में, हम एक विशेष प्रकार के संबंध का अध्ययन करेंगे, जिसे **फलन** कहते हैं। हम फलन को एक नियम के रूप में देख सकते हैं, जिससे कुछ दिए हुए अवयवों से नए अवयव उत्पन्न होते हैं। फलन को सूचित करने के लिए अनेक पद प्रयुक्त किए जाते हैं, जैसे 'प्रतिचित्र' अथवा 'प्रतिचित्रण'

परिभाषा 5 एक समुच्चय A से समुच्चय B का संबंध, f एक फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में, एक और केवल एक प्रतिबिंब होता है।

दूसरे शब्दों में, फलन f, किसी अरिक्त समुच्चय A से एक अरिक्त समुच्चय B का है, इस प्रकार का संबंध कि f का प्रांत A है तथा f के किसी भी दो भिन्न क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान नहीं हैं।

यदि f, A से B का एक फलन है तथा $(a, b) \in f$, तो $f(a) = b$, जहाँ b को f के अंतर्गत a का प्रतिबम्ब तथा a को b का '**पूर्व प्रतिबिंब**' कहते हैं।

A से B के फलन f को प्रतीकात्मक रूप में $f: A \rightarrow B$ से निरूपित करते हैं।

पिछले उदाहरणों पर ध्यान देने से हम सरलता से देखते हैं कि उदाहरण 7 में दिया संबंध एक फलन नहीं है, कयोंकि अवयव 6 का कोई प्रतिबिंब नहीं है।

पुनः उदाहरण 8 में दिया संबंध एक फलन नहीं है क्योंकि इसके प्रांत के कुछ अवयवों के एक से अधिक प्रतिबिंब हैं। उदहारण 9 भी फलन नहीं है (क्यों?)। नीचे दिए उदाहरणों में बहुत से संबंधों पर विचार करेंगे, जिनमें से कुछ फलन हैं और दूसरे फलन नहीं हैं।

उदाहरण 10 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हे और N पर परिभाषित एक संबंधR इस प्रकार है कि

$R = \{(x, y) : y = 2x,\ x,\ y \in \mathbf{N}\}$.

R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर क्या हैं? क्या यह संबंध, एक फलन है?

हल R का प्रांत, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय **N** है। इसका सहप्रांत भी **N** है। इसका परिसर सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक ही प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

उदाहरण 11 नीचे दिए संबंधों में से प्रत्येक का निरीक्षण कीजिए और प्रत्येक दशा में कारण सहित बतलाइए कि क्या यह फलन है अथवा नहीं?

(i) $R = \{(2,1),(3,1), (4,2)\}$, (ii) $R = \{(2,2),(2,4),(3,3), (4,4)\}$

(iii) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4), (4,5), (5,6), (6,7)\}$

हल (i) क्योंकि R के प्रांत के प्रत्येक अवयव 2, 3, 4 के प्रतिबिंब अद्वितीय हैं, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

(ii) क्यांकि एक ही प्रथम अवयव 2, दो भिन्न-भिन्न प्रतिबिंबों 2 और 4 से संबंधित है, इसलिए यह संबंध एक फलन नहीं हैं।

(iii) क्योंकि प्रत्येक अवयव का एक और केवल एक प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

परिभाषा 6 एक ऐसे फलन को जिसका परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, **वास्तविक मान फलन** कहते हैं। यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय हो तो इसे **वास्तविक फलन** भी कहते हैं।

उदाहरण 12 मान लीजिए कि **N** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = 2x + 1$, द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इस परिभाषा का प्रयोग करके, नीचे दी गई सारणी को पूर्ण कीजिए।

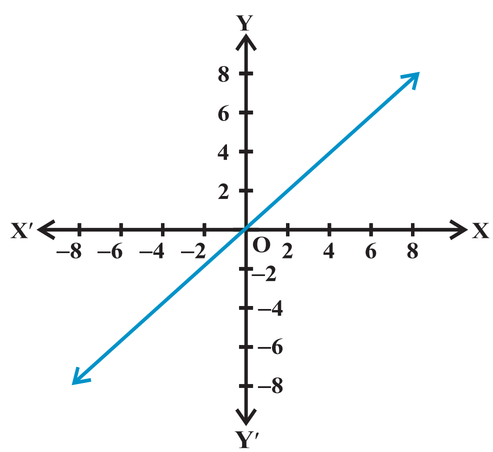
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = ...$	$f(2) = ...$	$f(3) = ...$	$f(4) = ...$	$f(5) = ...$	$f(6) = ...$	$f(7) = ...$

हल पूर्ण की हुई सारणी नीचे दी गई है:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

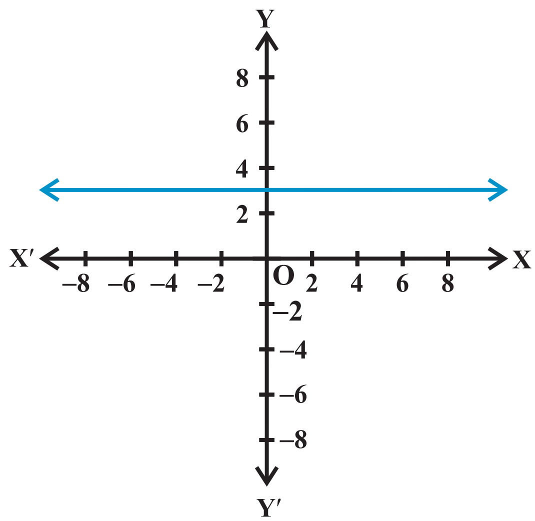
2.4.1 कुछ फलन और उनके आलेख *(Some functions and their graphs)*

(i) **तत्समक फलन (Identity function)** मान लीजिए **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $y = f(x)$, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ है। इस प्रकार के फलन को **तत्समक फलन** कहते हैं। यहाँ पर f के प्रांत तथा परिसर **R** हैं। इसका आलेख एक सरल रेखा होता है (आकृति 2.8)। यह रेखा मूल बिंदु से हो कर जाती है।



$f(x) = x$ **आकृति 2.8**

(ii) **अचर फलन (Constant function)** $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है और प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ है। यहाँ पर f का प्रांत **R** है और उसका परिसर $\{c\}$ है। f का आलेख x-अक्ष के समांतर एक रेखा है, उदाहरण के लिए यदि $f(x)=3$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ है, तो इसका आलेख आकृति 2.9 में दर्शाई रेखा है।



$f(x) = 3$

आकृति 2.9

(iii) **बहुपद फलन या बहुपदीय फलन (Polynomial function)** फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, एक बहुपदीय फलन कहलाता है, यदि $\mathbf{R}$ के प्रत्येक x के लिए, $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, जहाँ n एक ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$.

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$, और $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\,x$, द्वारा परिभाषित फलन एक बहुपदीय फलन है जब कि $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ द्वारा परिभाषित फलन h, बहुपदीय फलन नहीं है। (क्यों?)

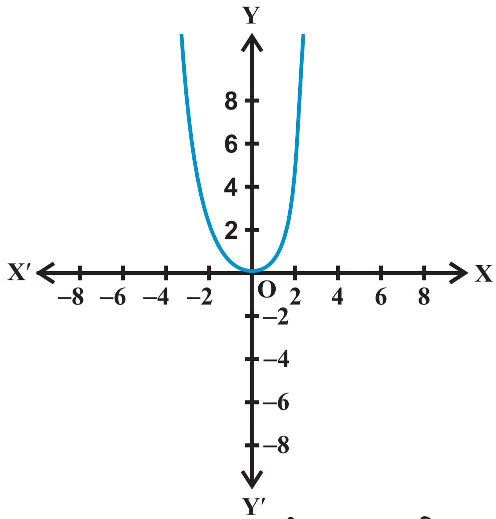
उदाहरण 13 $y = f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ द्वारा फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, की परिभाषा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं? f का आलेख भी खींचिए।

x	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

हल पूरी की हुई तालिका नीचे दी गई है:

x	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f का प्रांत $= \{x : x \in \mathbf{R}\}$, f का परिसर $= \{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. f का आलेख आकृति 2.10 में प्रदर्शित है।



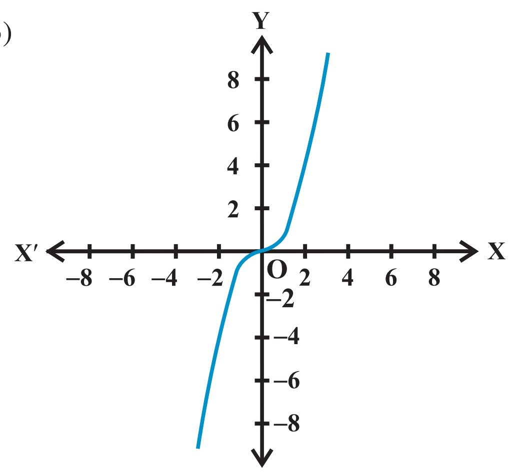
$f(x) = x^2$ आकृति 2.10

उदाहरण 14 $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का आलेख खींचिए।

हल यहाँ पर

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8, f(3) = 27; f(-3) = -27$, इत्यादि।

$f = \{(x, x^3): x \in \mathbf{R}\}$ f का आलेख आकृति 2.11 में खींचा गया है।



$f(x) = x^3$ आकृति 2.11

(iv) **परिमेय फलन (Rational functions)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, के प्रकार के फलन जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपदीय फलन हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$ **परिमेय फलन** कहलाते हैं।

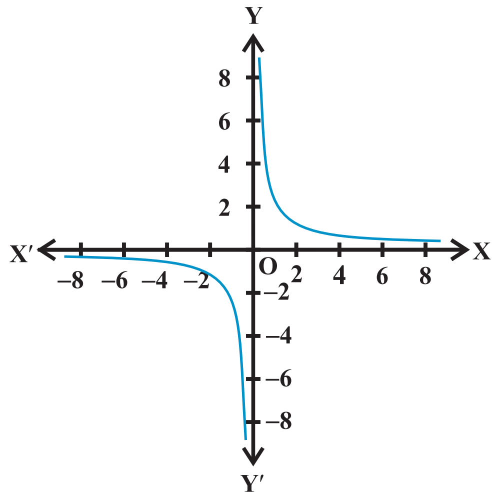
उदाहरण 15 एक वास्तविक मान फलन $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ की परिभाषा $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ द्वारा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके निम्नलिखित तालिका को पूर्ण कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	…	…	…	…	…	…	…	…	…

हल पूर्ण की गई तालिका इस प्रकार है:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5

इसका प्रांत, शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं तथा इसका परिसर भी शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। f का आलेख आकृति 2.12 में प्रदर्शित है।

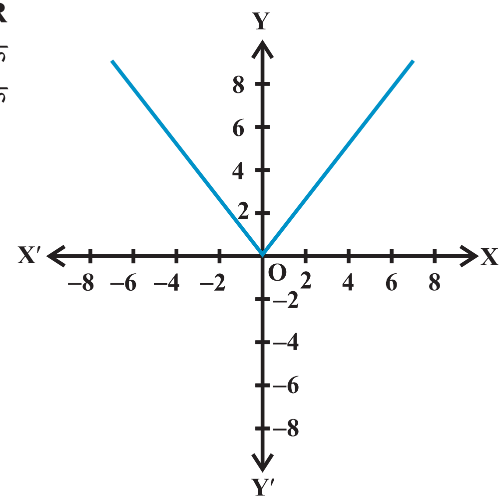


$f(x) = \frac{1}{x}$ आकृति 2.12

(v) **मापांक फलन (Modulus functions)** $f(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f: **R→R, मापांक फलन** कहलाता है। x के प्रत्येक ऋणेत्तर मान के लिए $f(x)$, x के बराबर होता है। परंतु x के ऋण मानों के लिए, $f(x)$ का मान x, के मान के ऋण के बराबर होता है, अर्थात्

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

मापांक फलन का आलेख आकृति 2.13 में दिया है। मापांक फलन को **निरपेक्ष मान फलन** भी कहते हैं।



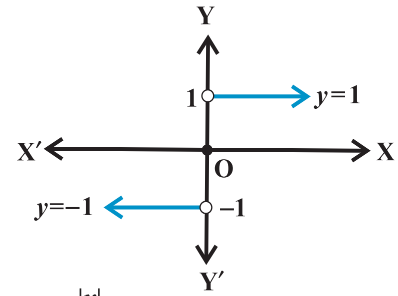
$f(x) = |x|$

आकृति 2.13

(vi) **चिह्न फलन (Signum functions)** प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$, के लिए

$$f(x) = \begin{matrix} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0 \end{matrix}$$

द्वारा परिभाषित फलन f:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत $\mathbf{R}$ है। परिसर समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ है। आकृति 2.14 में चिह्न फलन का आलेख दर्शाया गया है।



$f(x) = \frac{|x|}{x}$

आकृति 2.14

(vii) **महत्तम पूर्णांक फलन** (**Greatest integer functions**) $f(x) = [x], x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण (धारण) करता है ऐसा फलन **महत्तम पूर्णांक फलन** कहलाता है।

$[x]$, की परिभाषा से हम देख सकते हैं कि

$[x] = -1$ यदि $-1 \leq x < 0$

$[x] = 0$ यदि $0 \leq x < 1$

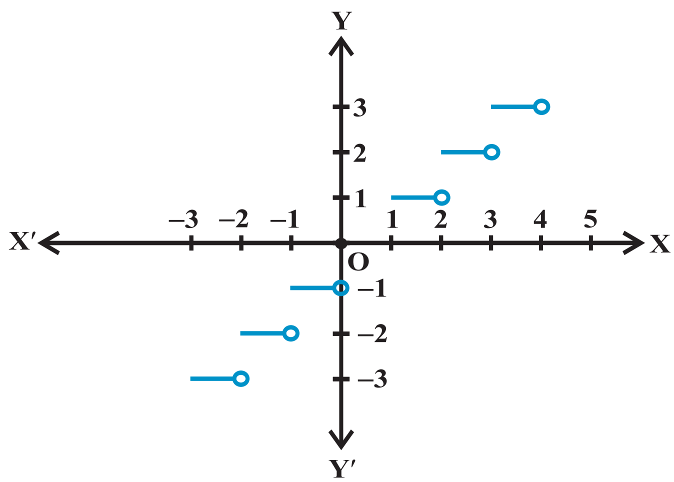
$[x] = 1$ यदि $1 \leq x < 2$

$[x] = 2$ यदि $2 \leq x < 3$ इत्यदि

इस फलन का आलेख आकृति 2.15 में दर्शाया गया है।

2.4.2 *वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real functions)*

इस अनुच्छेद में, हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो वास्तविक फलनों को जोड़ा जाता है, एक वास्तविक फलन को दूसरे में से घटाया जाता है, एक वास्तविक फलन को किसी अदिश (यहाँ आदिश का अभिप्राय वास्तविक संख्या से है) से गुणा किया जाता है, दो वास्तविक फलनों का गुणा किया जाता है तथा एक वास्तविक फलन को दूसरे से भाग दिया जाता है।



$f(x) = [x]$ यदि $x \neq 0$ तथा 0 यदि $x = 0$

आकृति 2.15

(i) **दो वास्तविक फलनों का योग** मान लीजिए कि $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f + g)$: $X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) **एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना** मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ को सभी $x \in X$, के लिए $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) **एक अदिश से गुणा** मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ एक वास्तविक मान फलन है तथा α एक अदिश है। यहाँ अदिश से हमारा अभिप्राय किसी वास्तविक संख्या से है। तब गुणनफल αf, X से $\mathbf{R}$ में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$ से परिभाषित होता है।

(iv) **दो वास्तविक फलनों का गुणन** दो वास्तविक फलनों f: $X \to \mathbf{R}$ तथा g: $X \to \mathbf{R}$ का गुणनफल (या गुणा) एक फलन fg: $X \to \mathbf{R}$ है, जो सभी $(fg)(x) = f(x)\, g(x), x \in X$ द्वारा परिभाषित है। इसे **बिंदुशः गुणन** भी कहते हैं।

(v) **दो वास्तविक फलनों का भागफल** मान लीजिए कि f तथा g, $X \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित, दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. f का g से भागफल, जिसे $\frac{f}{g}$ से निरूपित करते हैं, एक फलन है, जो सभी $x \in X$ जहाँ $g(x) \neq 0$, के लिए,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, द्वारा परिभाषित है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x + 1$ दो वास्तविक फलन हैं।

$(f + g)(x), (f - g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टत:

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

उदाहरण 17 मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f + g)(x), (f - g)(x)\ (fg)(x)$ और $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x, \ (f - g)(x) = \sqrt{x} - x,$$

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ और } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

प्रश्नावली 2.3

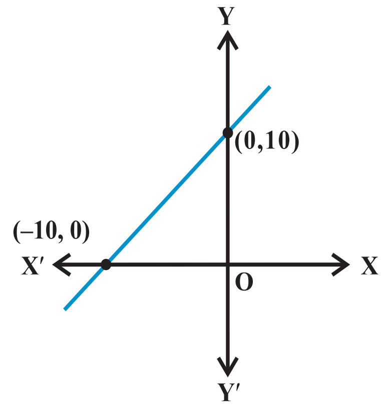
1. निम्नलिखित संबंधों में कौन से फलन हैं? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि संबंध एक फलन है, तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए :
   (i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$
   (ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$
   (iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$.
2. निम्नलिखित वास्तविक फलनों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए:
   (i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
3. एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए:
   (i) $f(0)$, (ii) $f(7)$, (iii) $f(-3)$.
4. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(\text{C}) = \frac{9\text{C}}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित हैं निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:
   (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C का मान, जब $t(\text{C}) = 212$.
5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए:
   (i) $f(x) = 2 - 3x$, $x \in \text{R}$, $x > 0$.
   (ii) $f(x) = x^2 + 2$, x एक वास्तविक संख्या है।
   (iii) $f(x) = x$, x एक वास्तविक संख्या है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 18 मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। एक वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ को $f(x) = x + 10$
द्वारा परिभाषित कीजिए ओर इस फलन का आलेख खींचिए।

हल यहाँ, हम देखते हैं कि $f(0) = 10, f(1) = 11, f(2) = 12, ..., f(10) = 20$, आदि और $f(-1) = 9, f(-2) = 8, ..., f(-10) = 0$, इत्यादि।

अत: दिए हुए फलन के आलेख का आकार आकृति 2.16 में दर्शाए गए रूप का होगा।



$f(x) = x + 10$
आकृति 2.16

टिप्पणी $f(x) = mx + c$, $x \in \mathbf{R}$, एक रैखिक फलन कहलाता है, जहाँ m एवं c अचर हैं। उपरोक्त फलन रैखिक फलन का एक उदाहरण है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि R, $\mathbf{Q}$ से $\mathbf{Q}$ में $R = \{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ तथा $a - b \in \mathbf{Z}\}$. द्वारा परिभाषित, एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a,a) \in R$ सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए

(ii) $(a,b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$ और $(b,c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a,c) \in R$

हल (i) क्योंकि $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$, जिससे निष्कर्ष निकलता है कि $(a, a) \in R$.

(ii) $(a,b) \in R$ का तात्पर्य है कि $a - b \in \mathbf{Z}$. इसलिए, $b - a \in \mathbf{Z}$ अत:, $(b, a) \in R$

(iii) (a, b) तथा $(b, c) \in R$ तात्पर्य है कि $a - b \in \mathbf{Z}$. $b - c \in \mathbf{Z}$. इसलिए, $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$. अत:, $(a,c) \in R$

उदाहरण 20 यदि $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$, $\mathbf{Z}$ से $\mathbf{Z}$.में एक 'रैखिक फलन है, तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

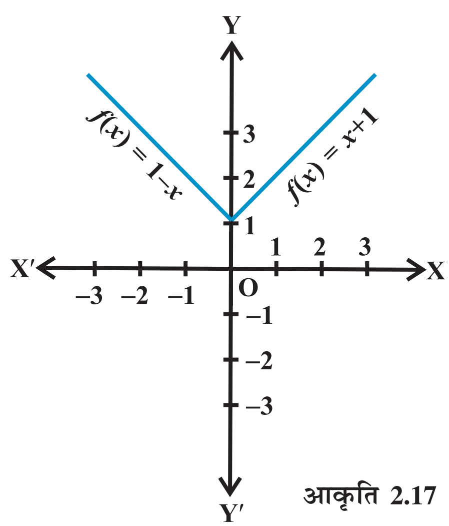
हल क्योंकि f एक रैखिक फलन है, इसलिए $f(x) = mx + c$. पुन: क्योंकि $(1, 1), (0, -1) \in R$ है। इसलिए, $f(1) = m + c$ = तथा $f(0) = c = -1$. इससे हमें $m = 2$ मिलता है और इस प्रकार $f(x) = 2x - 1$.

उदाहरण 21 फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, इसलिए फलन f, $x = 4$ और $x = 1$ के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। अत: f का प्रांत $\mathbf{R} - \{1, 4\}$ है।

उदाहरण 22 फलन f,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



आकृति 2.17

द्वारा परिभाषित है। $f(x)$ का आलेख खींचिए।

हल यहाँ $f(x) = 1 - x, x < 0,$ से

$f(-4) = 1 - (-4) = 5;$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4,$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2;$ इत्यादि

और $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$ इत्यादि, क्योंकि $f(x) = x + 1, x > 0.$

अत: f का आलेख आकृति 2.17 में दर्शाए रूप का होगा।

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. संबंध f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

संबंध g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है।

2. यदि $f(x) = x^2$, तो $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ ज्ञात कीजिए।

3. फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

5. $f(x) = |x - 1|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ **R** से **R** में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

7. मान लीजिए कि $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$. द्वारा परिभाषित है। $f + g$, $f - g$ और $\dfrac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

8. मान लीजिए कि $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1, -3)\}$ **Z** से **Z** में, $f(x) = ax + b$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b. कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

9. $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित **N** से **N** में, एक संबंध **R** है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) $(a,a) \in R$, सभी $a \in \mathbf{N}$, (ii) $(a,b) \in R$, का तात्पर्य है कि $(b,a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a,c) \in R$?

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

10. मान लीजिए कि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5,9,11,15,16\}$ और $f = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) f, A से B में एक संबंध है। (ii) f, A से B में एक फलन है।

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बतलाइए।

11. मान लीजिए कि f, $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ का एक उपसमुच्चय है। क्या f, $\mathbf{Z}$ से $\mathbf{Z}$ में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

12. मान लीजिए कि $A = \{9,10,11,12,13\}$ तथा $f : A \to \mathbf{N}$, $f(n) = n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा, परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

सारांश

इस अध्याय में हमनें संबंध तथा फलन का अध्ययन किया है। इस अध्याय की मुख्य बातों को नीचे दिया जा रहा है।

- ***क्रमित युग्म*** किसी विशेष क्रम में समूहित अवयवों का एक युग्म।
- ***कार्तीय गुणन*** समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन, समुच्चय

  $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ होता है। विशेष रूप से

  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$ और $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- यदि $(a, b) = (x, y)$, तो $a = x$ तथा $b = y$.
- यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$.
- $A \times \phi = \phi$
- सामान्यत: $A \times B \neq B \times A$.
- ***संबंध*** समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R, कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है, जिसे $A \times B$ के क्रमित युग्मों के प्रथम घटक x तथा द्वितीय घटक y के बीच किसी संबंध को वर्णित करके प्राप्त किया जाता है।
- किसी अवयव x का, संबंध R के अंतर्गत, प्रतिबिंब y होता है, जहाँ $(x, y) \in R$,
- संबंध R के क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय, संबंध R का प्रांत होता है।
- संबंध R के क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का समुच्चय, संबंध R का परिसर होता है।
- ***फलन*** समुच्चय A से समुच्चय B में फलन f एक विशिष्ट प्रकार का संबंध होता है, जिसमें समुच्चय A के प्रत्येक अवयव x का समुच्चय B में एक और केवल एक प्रतिबिंब y होता है इस बात को हम f: A→B जहाँ $f(x) = y$ लिखते हैं। ।
- A फलन f का प्रांत तथा B उसका सहप्रांत होता है।
- फलन f का परिसर, f के प्रतिबिंबों का समुच्चय होता है।
- किसी वास्तविक फलन के प्रांत तथा परिसर दोनों ही वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका एक उपसमुच्चय होता है:
- ***फलनों का बीजगणित*** फलन $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : X \to \mathbf{R}$, के लिए हम निम्नलिखित परिभाषाएँ देते हैं।

$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in X$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in X$

$(f.g)(x) = f(x) . g(x), x \in X$, k कोई अचर है।

$(kf)(x) = k(f(x)), x \in X$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X, g(x) \neq 0$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

फलन शब्द सर्वप्रथम Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716 ई०) द्वारा सन् 1673 में लिखित लैटिन पाण्डुलिपि "Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus" में परिलक्षित हुआ है। Leibnitz ने इस शब्द का प्रयोग अविश्लेषणात्मक भाव में किया है। उन्होंने फलन को 'गणितीय कार्य' तथा 'कर्मचारी' के पदों द्वारा उत्पन्न मात्र एक वक्र के रूप में अधिकल्पित किया है।

जुलाई 5, सन् 1698 में John Bernoulli नें Leibnitz को लिखे एक प्रत्र में पहली बार सुविचारित रूप से फलन शब्द का विश्लेषणात्मक भाव में विशिष्ट प्रयोग निर्धारित किया है। उसी माह में Leibnitz ने अपनी सहमति दर्शाते हुए उत्तर भी दे दिया था।

अंग्रेज़ी भाषा में फलन (Function) शब्द सन् 1779 के Chamber's Cyclopaedia में पाया जाता है। बीजगणित में फलन शब्द का प्रयोग चर राशियों और संख्याओं अथवा स्थिर राशियों द्वारा संयुक्त रूप से बने विश्लेषणात्मक व्यंजको के लिए किया गया है।

अध्याय **3**

त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions)

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

3.1 भूमिका (Introduction)

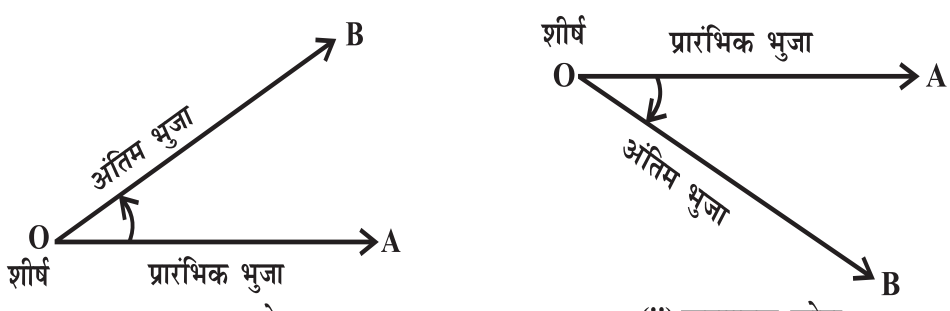
शब्द 'ट्रिगोनोमेट्री' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'ट्रिगोन' तथा 'मेट्रोन' से हुई है तथा इसका अर्थ त्रिभुज की भुजाओं को मापना' होता है। इस विषय का विकास मूलत: त्रिभुजों से संबंधित ज्यामितीय समस्याओं को हल करने के लिए किया गया था। इसका अध्ययन समुद्री यात्राओं के कप्तानों, सर्वेयरों, जिन्हें नए भू–भागों का चित्र तैयार करना होता था तथा अभियंताओं आदि के द्वारा किया गया। वर्तमान में इसका उपयोग बहुत सारे क्षेत्रों जैसे विज्ञान, भूकंप शास्त्र, विद्युत परिपथ (सर्किट) के डिजाइन तैयार करने, अणु की अवस्था का वर्णन करने, समुद्र में आनेवाले ज्वार की ऊँचाई के विषय में पूर्वानुमान लगाने में, सांगीतिक लय (टोन) का विश्लेषण करने तथा अन्य दूसरे क्षेत्रों में होता है।

Arya Bhatt
(476-550 B.C.)

पिछली कक्षाओं में हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात के विषय में अध्ययन किया है, जिसे समकोणीय त्रिभुजों की भुजाओं के अनुपात के रूप में बताया गया है। हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं तथा उनके त्रिकोणमितीय अनुपातों के अनुप्रयोगों को ऊँचाई तथा दूरी के प्रश्नों को हल करने में किया है। इस अध्याय में, हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों का त्रिकोणमितीय फलनों के रूप में व्यापकीकरण करेंगे तथा उनके गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

3.2 कोण (Angles)

एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारंभिक बिंदु के परित: घूमने पर बनता है। किरण के घूर्णन की मूल स्थिति को प्रारंभिक भुजा तथा घूर्णन के अंतिम स्थिति को कोण की अंतिम भुजा कहते हैं। घूर्णन बिंदु को **शीर्ष** कहते हैं। यदि घूर्णन वामावर्त्त है तो कोण **धनात्मक** तथा यदि घूर्णन दक्षिणावर्त्त है तो कोण **ऋणात्मक** कहलाता है (आकृति 3.1)।

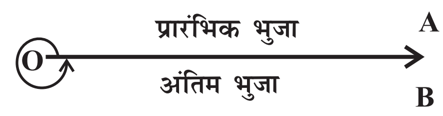


(i) धनात्मक कोण

(ii) ऋणात्मक कोण

आकृति 3.1

किसी कोण का माप, घूर्णन (घुमाव) की वह मात्रा है जो भुजा को प्रारंभिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक घुमाने पर प्राप्त होता है। कोण को मापने के लिए अनेक इकाइयाँ हैं। कोण की परिभाषा इसकी इकाई का संकेत देती है, उदाहरण के लिए प्रारंभिक रेखा की स्थिति से एक पूर्ण घुमाव को कोंण की एक इकाई लिया जा सकता है जैसा, आकृति 3.2 में दर्शाया गया है।

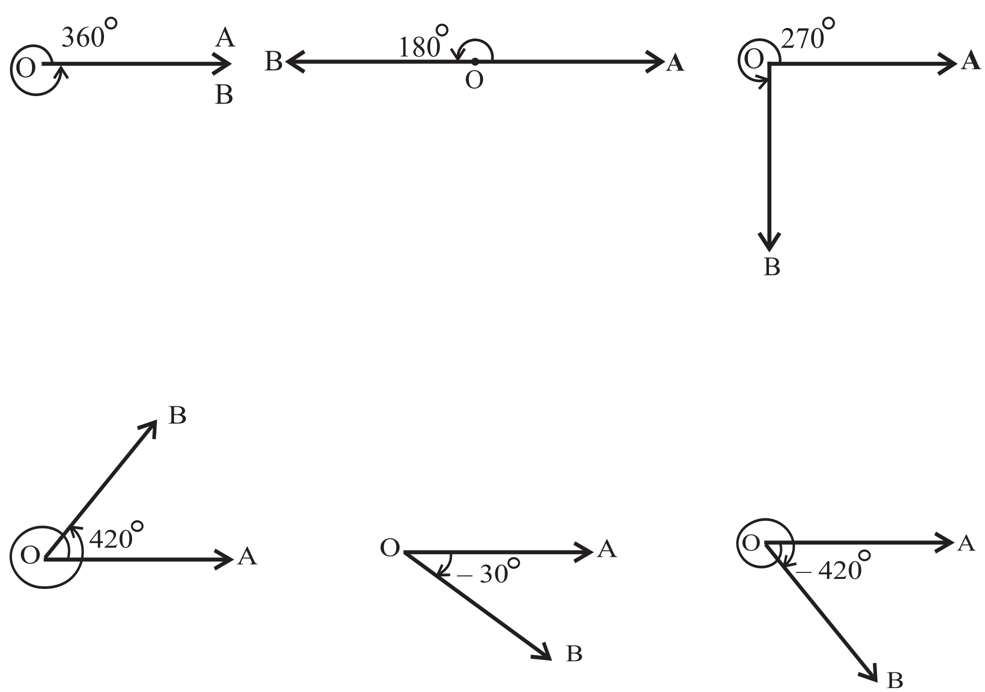


आकृति 3.2

यह सर्वदा बड़े कोणों के लिए सुविधाजनक है। उदाहरणत: एक घूमते हुए पहिये के घुमाव में बनाए गए कोण के विषय में कह सकते हैं कि यह 15 परिक्रमा प्रति सेकंड है। हम कोण के मापने की दो अन्य इकाइयों के विषय में बताएँगे जिनका सामान्यत: प्रयोग किया जाता है, ये डिग्री माप तथा रेडियन माप हैं।

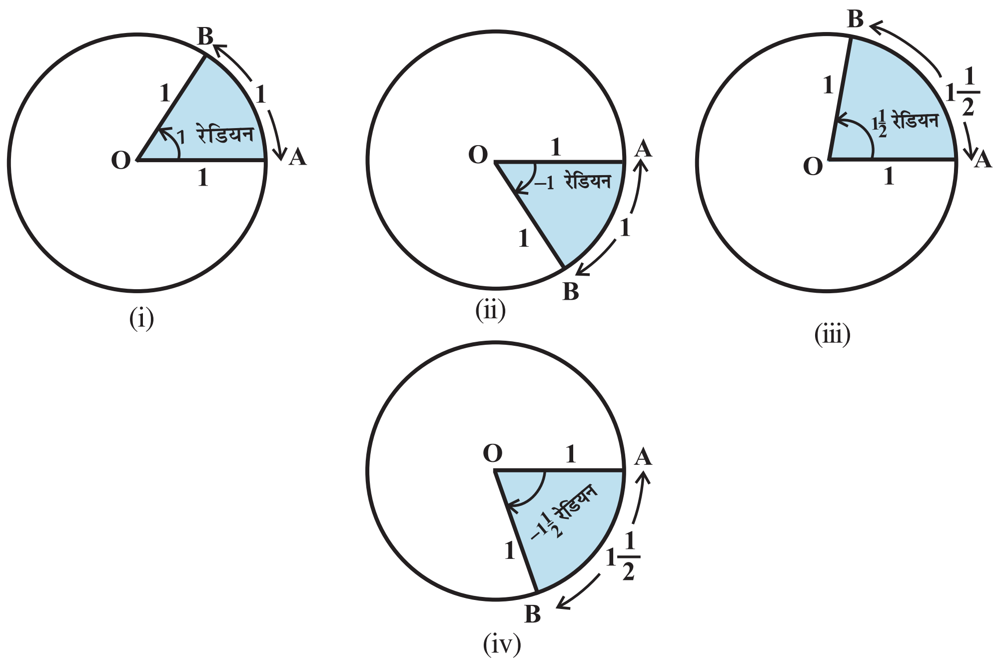
3.2.1 ***डिग्री माप (Degree measure)*** यदि प्रारंभिक भुजा से अंतिम भुजा का घुमाव एक पूर्ण परिक्रमण का $\left(\frac{1}{360}\right)$वाँ भाग हो तो हम कोण का माप एक डिग्री कहते हैं, इसे $1°$ से लिखते हैं। एक डिग्री को मिनट में तथा एक मिनट को सेकंड में विभाजित किया जाता है। एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है, इसे $1'$ से लिखते हैं तथा एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकंड कहलाता है, इसे $1''$ से लिखते हैं। अर्थात् $1° = 60'$, $1' = 60''$

कुछ कोण जिनका माप $360°$, $180°$, $270°$, $420°$, $-30°$, $-420°$ है उन्हें आकृति 3.3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3.3

3.2.2 रेडियन माप (Radian measure) कोण को मापने के लिए एक दूसरी इकाई भी है, जिसे रेडियन माप कहते हैं। इकाई वृत्त (वृत्त की त्रिज्या एक इकाई हो) के केंद्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन माप कहते हैं। आकृति 3.4 (i)-(iv) में, OA प्रारंभिक भुजा है तथा OB अंतिम भुजा है।



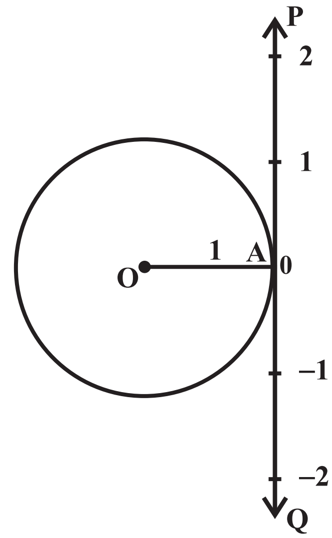
आकृति 3.4 (i) – (iv)

आकृतियों में कोण दिखाए गए हैं जिनके माप 1 रेडियन, –1 रेडियन, $1\frac{1}{2}$ रेडियन तथा $-1\frac{1}{2}$ रेडियन हैं। हम जानते हैं कि इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि 2π होती है। अत: प्रारंभिक भुजा की एक पूर्ण परिक्रमा केंद्र पर 2π रेडियन का कोण अंतरित करती है।

यह सर्वविदित है कि r त्रिज्या वाले एक वृत्त में, r लंबाई का चाप केंद्र पर एक रेडियन का कोण अंतरित करता है। हम जानते हैं कि वृत्त के समान चाप केंद्र पर समान कोण अंतरित करते हैं। चूंकि r त्रिज्या के वृत्त में r लंबाई का चाप केंद्र पर एक रेडियन का कोण अंतरित करता है, इसलिए l लंबाई का चाप केंद्र पर $\frac{l}{r}$ रेडियन का कोण अंतरित करेगा। अत: यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंतरित कोण θ रेडियन है, तो हम पाते हैं कि $\theta = \frac{l}{r}$ या $l = r\,\theta$.

3.2.3 *रेडियन तथा वास्तविक संख्याओं के मध्य संबंध (Relation between radian and real numbers)*

(Relation between radian and real numbers) माना कि इकाई वृत्त का केंद्र, O पर हैं तथा वृत्त पर कोई बिंदु A है। माना कोण की प्रारंभिक भुजा OA है, तो वृत्त के चाप की लंबाई से वृत्त के केंद्र पर चाप द्वारा अंतरित कोण की माप रेडियन में प्राप्त होती है। मान लीजिए वृत्त के बिंदु A पर स्पर्श रेखा PAQ है। माना बिंदु A वास्तविक संख्या शून्य प्रदर्शित करता है, AP धनात्मक वास्तविक संख्या दर्शाता है तथा AQ ऋणात्मक वास्तविक संख्या दर्शाता है (आकृति 3.5)। यदि हम वृत्त की ओर रेखा AP को घड़ी की विपरीत दिशा में घुमाने पर तथा रेखा AQ को घड़ी की दिशा में घुमाएँ तो प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत रेडियन माप होगा तथा विलोमत:। इस प्रकार रेडियन माप तथा वास्तविक संख्याओं को एक तथा समान मान सकते हैं।



आकृति 3.5

3.2.4 *डिग्री तथा रेडियन के मध्य संबंध (Relation between degree and radian)*

क्योंकि वृत्त, केंद्र पर एक कोण बनाता है जिसकी माप 2π रेडियन है तथा यह $360°$ डिग्री माप है, इसलिए

$$2\pi \text{ रेडियन} = 360° \quad \text{या} \quad \pi \text{ रेडियन} = 180°$$

उपर्युक्त संबंध हमें रेडियन माप को डिग्री माप तथा डिग्री माप को रेडियन माप में व्यक्त करते हैं। π का निकटतम मान $\frac{22}{7}$ का उपयोग करके, हम पाते हैं कि

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' \text{ निकटतम}$$

पुन: $$1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} = 0.01746 \text{ रेडियन (निकटतम)}$$

कुछ सामान्य कोणों के डिग्री माप तथा रेडियन माप के संबंध निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं:

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

सांकेतिक प्रचलन

चूँकि कोणों की माप या तो डिग्री में या रेडियन में होती है, अत: प्रचलित परिपाटी के अनुसार जब हम कोण $\theta°$ लिखते हैं, हम समझते हैं कि कोण का माप θ डिग्री है तथा जब हम कोण β लिखते हैं, हम समझते हैं कि कोण का माप β रेडियन है।

ध्यान दीजिए जब कोण को रेडियन माप में व्यक्त करते हैं, तो प्राय: रेडियन लिखना छोड़ देते हैं अर्थात् $\pi = 180°$ और $\frac{\pi}{4} = 45°$ को इस विचार को ध्यान में रखकर लिखते हैं कि π तथा $\frac{\pi}{4}$ की माप रेडियन है। अत: हम कह सकते हैं कि

$$\text{रेडियन माप} = \frac{\pi}{180} \times \text{डिग्री माप}$$

$$\text{डिग्री माप} = \frac{180}{\pi} \times \text{रेडियन माप}$$

उदाहरण 1 $40°\ 20'$ को रेडियन माप में बदलिए।

हल हम जानते हैं कि $180° = \pi$ रेडियन

इसलिए, $40°\ 20' = 40\frac{1}{3}$ डिग्री $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ रेडियन $= \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

इसलिए $40°\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

उदाहरण 2 6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए।

हल हम जानते हैं कि π रेडियन $= 180°$

इसलिए 6 रेडियन $= \frac{180}{\pi} \times 6$ डिग्री $= \frac{1080 \times 7}{22}$ डिग्री

$= 343\frac{7}{11}$ डिग्री $= 343° + \frac{7 \times 60}{11}$ मिनट [क्योंकि $1° = 60'$]

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ मिनट [क्योंकि $1' = 60''$]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343° 38'\ 11''$ निकटतम

इसलिए 6 रेडियन $= 343°\ 38'\ 11''$ निकटतम

उदाहरण 3 उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसमें $60°$ का केंद्रीय कोण परिधि पर 37.4 सेमी लंबाई का चाप काटता है ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)।

हल यहाँ $l = 37.4$ सेमी तथा $\theta = 60° = \frac{60\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{\pi}{3}$

अत: $r = \frac{l}{\theta}$, से हम पाते हैं

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 4 एक घड़ी में मिनट की सुई 1.5 सेमी लंबी है। इसकी नोक 40 मिनट में कितनी दूर जा सकती हैं ($\pi = 3.14$ का प्रयोग करें)?

हल 60 मिनट में घड़ी की मिनट वाली सुई एक परिक्रमण पूर्ण करती है, अत: 40 मिनट में मिनट की सुई एक परिक्रमण का $\frac{2}{3}$ भाग पूरा करती है। इसलिए

$$\theta = \frac{2}{3} \times 360° \text{ या } \frac{4\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

अत: तय की गई वांछित दूरी

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ सेमी} = 2\pi \text{ सेमी} = 2 \times 3.14 \text{ सेमी} = 6.28 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 5 यदि दो वृत्तों के चापों की लंबाई समान हो और वे अपने केंद्र पर क्रमशः 65° तथा 110° का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 तथा r_2 हैं तो

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ रेडियन}$$

तथा $$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36} \text{ रेडियन}$$

माना कि प्रत्येक चाप की लंबाई l है, तो $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$, जिससे

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ अर्थात्, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

इसलिए $$r_1 : r_2 = 22 : 13.$$

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए:

   (i) 25°   (ii) – 47°30′   (iii) 240°   (iv) 520°

2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें):

   (i) $\frac{11}{16}$ (ii) – 4   (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. एक पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है तो एक सेकंड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

4. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लंबाई की चाप वृत्त के केंद्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)।

5. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

6. यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केंद्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई निम्नलिखित हैं:

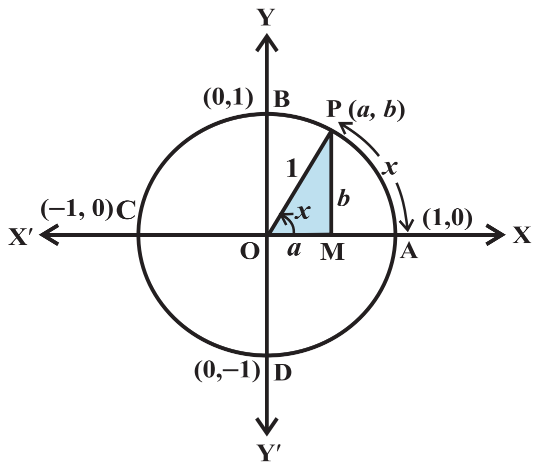
   (i) 10 सेमी

   (ii) 15 सेमी

   (iii) 21 सेमी

3.3 त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function)

पूर्व कक्षाओं में, हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के रूप में अध्ययन किया है। अब हम किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा को रेडियन माप के पदों में तथा त्रिकोणमितीय फलन के रूप में अध्ययन करेंगे।



आकृति 3.6

मान लीजिए कि एक इकाई वृत्त, जिसका केंद्र निर्देशांक अक्षों का मूल बिंदु हो। माना कि P (a, b) वृत्त पर कोई बिंदु है तथा कोण AOP $= x$ रेडियन अर्थात् चाप की लंबाई AP $= x$ (आकृति 3.6) है। हम परिभाषित करते हैं:

$\cos x = a$ तथा $\sin x = b$

चूँकि ΔOMP समकोण त्रिभुज है, हम पाते हैं,

$OM^2 + MP^2 = OP^2$ या $a^2 + b^2 = 1$

इस प्रकार इकाई वृत्त पर प्रत्येक बिंदु के लिए, हम पाते हैं कि

$a^2 + b^2 = 1$ या $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

क्योंकि एक पूर्ण परिक्रमा (घूर्णन) द्वारा वृत्त के केंद्र पर 2π रेडियन का कोण अंतरित होता है, इसलिए $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ तथा $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$। $\frac{\pi}{2}$ के प्रांत गुणज वाले सभी कोणों को **चतुर्थांशीय कोण** या **वृत्तपादीय कोण** (quadrantal angles) कहते हैं।

बिंदुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (1, 0), (0, 1), (–1, 0) तथा (0, –1) हैं, इसलिए चतुर्थांशीय कोणों के लिए हम पाते हैं,

$$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

अब, यदि हम बिंदु P से एक पूर्ण परिक्रमा लेते हैं, तो हम उसी बिंदु P पर पहुँचते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि x, 2π के पूर्णांक गुणज में बढ़ते (या घटते) हैं, तो त्रिकोणमितीय फलनों के मानों में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

इस प्रकार $\sin (2n\pi + x) = \sin x$, $n \in \mathbf{Z}$

$\cos (2n\pi + x) = \cos x$, $n \in \mathbf{Z}$

पुनः $\sin x = 0$, यदि $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$ अर्थात् x, π का पूर्णांक गुणज है।

तथा $\cos x = 0$, यदि $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, ...$ अर्थात् $\cos x = 0$, जब x, $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणज है। इस प्रकार

$\sin x = 0$ से प्राप्त होता है कि **$x = n\pi$,** जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cos x = 0$ से प्राप्त होता है कि $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

अब हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों को sine तथा cosine के पदों में परिभाषित करते हैं:

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x},\ x \neq n\pi, \text{ जहाँ } n \text{ कोई पूर्णांक है।}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ जहाँ } n \text{ कोई पूर्णांक है।}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ जहाँ } n \text{ कोई पूर्णांक है।}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq n\pi, \text{ जहाँ } n \text{ कोई पूर्णांक है।}$$

हम सभी वास्तविक x के लिए देखते हैं कि $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

इस प्रकार $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (क्यों?)

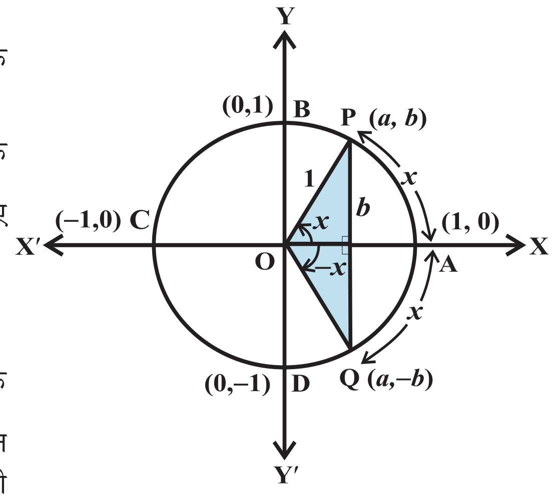
$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$ (क्यों?)

पूर्व कक्षाओं में, हम $0°, 30°, 45°, 60°$ तथा $90°$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों की चर्चा कर चुके हैं। इन कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों के मान वही हैं जो पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके त्रिकोणमितीय अनुपातों के हैं। इस प्रकार, हम निम्नलिखित सारणी पाते हैं:

	$0°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	0

cosec x, sec x तथा cot x का मान क्रमश: sin x, cos x तथा tan x के मान से उल्टा (विलोम) है।

3.3.1 *त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न (Signs of trigonometric functions)* माना कि इकाई वृत्त पर P (a, b) कोई बिंदु हैं, जिसका केंद्र मूल बिंदु हैं, तथा $\angle AOP = x$, यदि $\angle AOQ = -x$, तो बिंदु Q के निर्देशांक $(a, -b)$ होंगे (आकृति 3.7)। इसलिए $\cos(-x) = \cos x$ तथा $\sin(-x) = -\sin x$ चूँकि इकाई वृत्त के प्रत्येक बिंदु P (a, b) के लिए $-1 \le a \le 1$ तथा $-1 \le b \le 1$, अत:, हम x के सभी मानों के लिए $-1 \le \cos x \le 1$ तथा $-1 \le \sin x \le 1$, पाते हैं। पिछली कक्षाओं से हमको ज्ञात है कि प्रथम चतुर्थांश $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ में a तथा b दोनों धनात्मक हैं, दूसरे चतुर्थांश $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ में a ऋणात्मक तथा b



आकृति 3.7

धनात्मक हैं, तीसरे चतुर्थांश $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$ में a तथा b दोनों ऋणात्मक हैं, तथा चतुर्थ चतुर्थांश $(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ में a धनात्मक तथा b ऋणात्मक है। इसलिए $0 < x < \pi$ के लिए $\sin x$ धनात्मक तथा $\pi < x < 2\pi$ के लिए ऋणात्मक होता है। इसी प्रकार, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए $\cos x$ धनात्मक, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ के लिए ऋणात्मक तथा $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ के लिए धनात्मक होता है। इसी प्रकार, हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न विभिन्न चतुर्थांशों में ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए हमारे पास निम्नलिखित सारणी है:

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\text{cosec } x$	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.3.2 *त्रिकोणमितीय फलनों का प्रांत तथा परिसर (Domain and range of trigonometric functions)* sine तथा cosine फलनों की परिभाषा से, हम यह पाते हैं कि वे सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित हैं। पुनः, हम यह भी पाते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए,

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ तथा } -1 \leq \cos x \leq 1$$

अतः $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ का प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा परिसर अंतराल $[-1, 1]$, अर्थात्, $-1 \leq y \leq 1$ है।

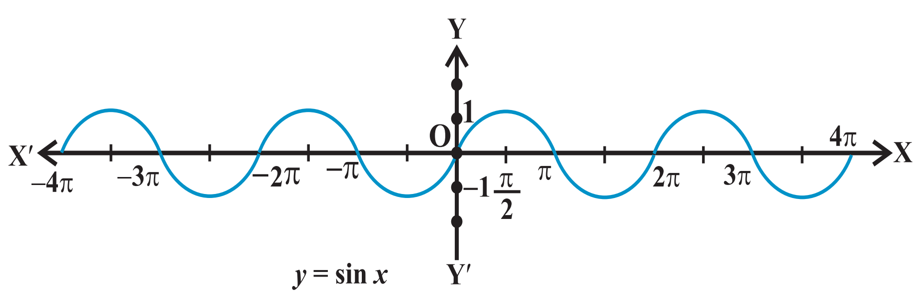
चूँकि, $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \text{cosec } x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ या $y \leq -1\}$ है। इसी प्रकार, $y = \sec x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ तथा, परिसर, समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \leq -1$ या $y \geq 1\}$ है। $y = \tan x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}\}$ तथा परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $y = \cot x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$, परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।हम देखते हैं कि प्रथम चतुर्थांश में, जब x, 0 से $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है, तो sin

$\sin x$ भी 0 से 1 की ओर बढ़ता है, दूसरे चतुर्थांश में जब x, $\frac{\pi}{2}$ से π की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, 1 से 0 की ओर घटता है। तीसरे चतुर्थांश में जब x, π से $\frac{3\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, 0 से –1 की ओर घटता है तथा अंत में कोण $\frac{3\pi}{2}$ से 2π की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, –1 से 0 की ओर बढ़ता जाता है। इसी प्रकार हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के विषय में विचार कर सकते हैं। वस्तुतः हमारे पास निम्नलिखित सारणी है:

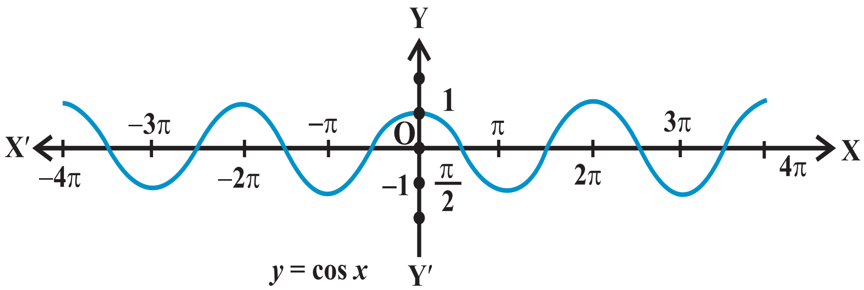
	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
sin	0 से 1 की ओर बढ़ता है	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है
cos	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है	0 से 1 की ओर बढ़ता है
tan	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	–∞ से 0 की ओर बढ़ता है	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	–∞ से 0 की ओर बढ़ता है
cot	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से –∞ की ओर घटता है	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से –∞ की ओर घटता है
sec	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	–∞ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से –∞ की ओर घटता है	∞ से 1 की ओर घटता है
cosec	∞ से 1 की ओर घटता है	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	–∞ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से –∞ की ओर घटता है

टिप्पणी उपर्युक्त सारणी में, यह कथन कि अंतराल $0 < x < \frac{\pi}{2}$ में $\tan x$ का मान 0 से ∞ (अनंत) तक बढ़ता है का अर्थ है कि जैसे-जैसे x का मान $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है वैसे-वैसे $\tan x$ का मान बहुत अधिक हो जाता है। इसी प्रकार, जब हम यह कह सकते हैं कि चतुर्थ चतुर्थांश में $\text{cosec}\, x$ का मान –1 से $-\infty$ (ऋणात्मक अनंत) तक में घटता है तो इसका अर्थ है कि जब $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ तब जैसे-जैसे $x, 2\pi$ की ओर अग्रसर होता है, $\text{cosec}\, x$ बहुत अधिक ऋणात्मक मान लेता है। साधारणतः चिह्न ∞ तथा $-\infty$ फलनों तथा चरों के विशेष प्रकार के व्यवहार को बताते हैं।

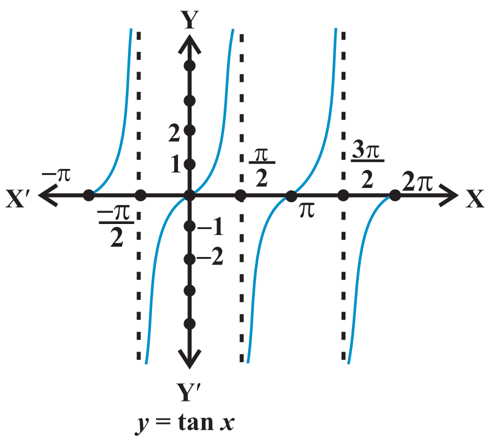
हमने देखा कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों का अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। जैसे, $\text{cosec}\, x$ तथा $\sec x$ के मानों की भी अंतराल 2π के बाद पुनरावृत्ति होती है। हम अगले अनुच्छेद में $\tan(\pi + x) = \tan x$ देखते हैं। जैसे, $\tan x$ के मानों में अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है, क्योंकि $\cot x$, $\tan x$ का पूरक है, इसके मानो में भी अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय फलनों में इस ज्ञान (गुणधर्म) तथा व्यवहार का उपयोग करने पर, हम फलनों का आलेख खींच सकते हैं। इन फलनों का आलेख नीचे दिए गए हैं:



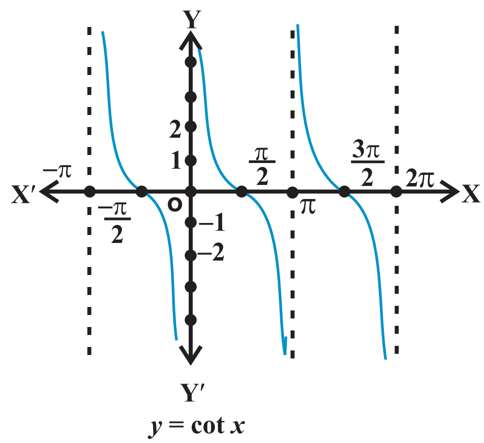
आकृति 3.8



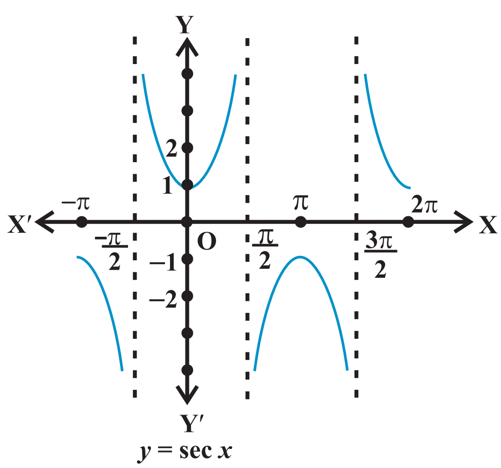
आकृति 3.9



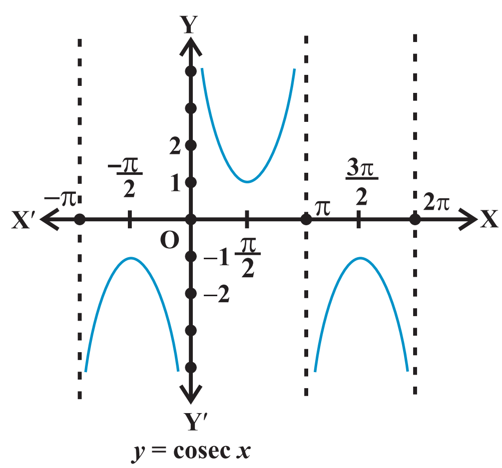
आकृति 3.10



आकृति 3.11



आकृति 3.12



आकृति 3.13

उदाहरण 6 यदि $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मानों को ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\cos x = -\dfrac{3}{5}$, हम पाते हैं कि $\sec x = -\dfrac{5}{3}$

अब $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ या $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

या $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

अतः $\sin x = \pm \dfrac{4}{5}$

चूँकि x तृतीय चतुर्थांश में है, तो $\sin x$ का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\text{cosec}\, x = -\frac{5}{4}$$

पुनः, हम पाते हैं

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \quad \text{तथा} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

उदाहरण 7 यदि $\cot x = -\dfrac{5}{12}$ हो और x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हैं, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\cot x = -\dfrac{5}{12}$, हम पाते हैं $\tan x = -\dfrac{12}{5}$

अब $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{144}{25} = \dfrac{169}{25}$

अतः $\sec x = \pm \dfrac{13}{5}$

चूँकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sec x$ का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sec x = -\frac{13}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

पुनः हम पाते हैं

$$\sin x = \tan x \cos x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

तथा $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{13}{12}$

उदाहरण 8 $\sin \dfrac{31\pi}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\sin x$ के मानों में अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

उदाहरण 9 $\cos(-1710°)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\cos x$ के मानों में अंतराल 2π या $360°$ के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\cos(-1710°) = \cos(-1710° + 5 \times 360°)$$
$$= \cos(-1710° + 1800°) = \cos 90° = 0$$

प्रश्नावली 3.2

निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए:

1. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

2. $\sin x = \dfrac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

3. $\cot x = \dfrac{3}{4}$, x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

4. $\sec x = \dfrac{13}{5}$, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

5. $\tan x = -\dfrac{5}{12}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

प्रश्न संख्या 6 से 10 के मान ज्ञात कीजिए:

6. $\sin 765°$

7. $\operatorname{cosec}(-1410°)$

8. $\tan \dfrac{19\pi}{3}$

9. $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$

10. $\cot\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$

3.4 दो कोणों के योग और अंतर का त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions of Sum and Difference of two Angles)

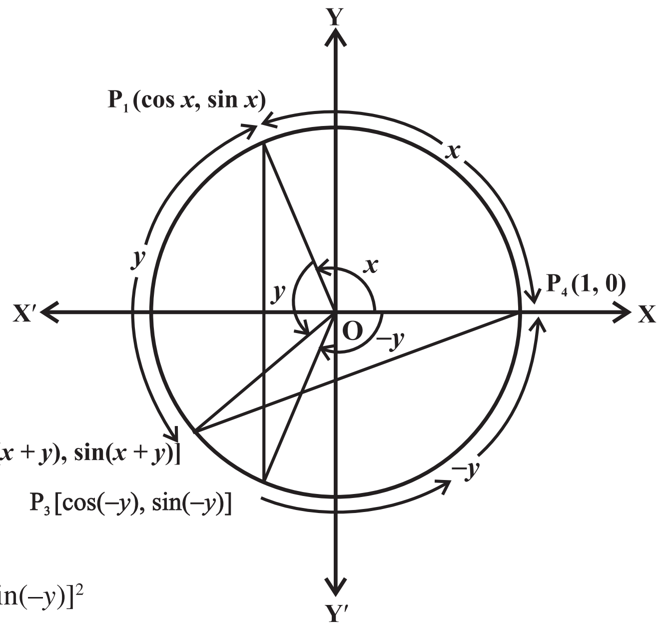
इस भाग में हम दो संख्याओं (कोणों) के योग एवं अंतर के लिए त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनसे संबंधित व्यंजकों को व्युत्पन्न करेंगे। इस संबंध में इन मूल परिणामों को हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहेंगे। हम देखते हैं कि

1. $\sin(-x) = -\sin x$

2. $\cos(-x) = \cos x$

अब हम कुछ और परिणाम सिद्ध करेंगे:

3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$



आकृति 3.14

इकाई वृत्त पर विचार कीजिए, जिसका केंद्र मूल बिंदु पर हो। माना कि कोण P_4OP_1, x तथा कोण P_1OP_2, y हैं तो कोण P_4OP_2, $(x+y)$ होगा। पुनः माना कोण P_4OP_3, $(-y)$ हैं। अतः P_1, P_2, P_3 तथा P_4 के निर्देशांक $P_1(\cos x, \sin x)$, $P_2[\cos(x+y), \sin(x+y)]$, $P_3[\cos(-y), \sin(-y)]$ और $P_4(1, 0)$ होंगे (आकृति 3.14)।

त्रिभुजों P_1OP_3 तथा P_2OP_4 पर विचार कीजिए। वे सर्वांगसम हैं (क्यों)। इसलिए P_1P_3 और P_2P_4 बराबर हैं। दूरी सूत्र का उपयोग करने पर

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$
$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x\sin y$$
$$= 2 - 2(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \qquad \text{(क्यों?)}$$

पुनः $$P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$$
$$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$$
$$= 2 - 2\cos(x+y)$$

क्योंकि $P_1P_3 = P_2P_4$, हम पाते हैं; $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

इसलिए, $2 - 2(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$

अतः $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

4. $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

सर्वसमिका 3 में y के स्थान पर $-y$ रखने पर

$$\cos(x + (-y)) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y)$$

या $$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

सर्वसमिका 4 में x के स्थान पर $\frac{\pi}{2}$ तथा y के स्थान पर x रखने पर हम पाते हैं

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

सर्वसमिका 5 का उपयोग करने पर हम पाते हैं

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos x.$$

7. sin $(x + y)$ = sin x cos y + cos x sin y

हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. sin $(x - y)$ = sin x cos y – cos x sin y

यदि हम सर्वसमिका 7 में y के स्थान पर $-y$ रखें तो उपरोक्त परिणाम पाते हैं।

9. x और y के उपर्युक्त मानों को सर्वसमिकाओं 3, 4, 7 और 8 में रखने पर हम निम्नलिखित परिणाम निकाल सकते हैं:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

इसी प्रकार के संगत परिणाम tan x, cot x, sec x एवं cosec x के लिए sin x और cos x के फलनों के परिणामों से आसानी से निकाले जा सकते हैं।

10. यदि x, y और $(x + y)$ में से कोई $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं तो,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

क्योंकि x, y तथा $(x + y)$ में से कोई $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं, इसलिए cos x, cos y तथा cos $(x + y)$ शून्य नहीं हैं। अब

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

अंश और हर में cos x cos y, से विभाजित करने पर हम पाते हैं।

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$= \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

11. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$

यदि सर्वसमिका 10 में y के स्थान पर $-y$ रखने पर, हम पाते हैं

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1-\tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$$

12. यदि x, y तथा $(x+y)$ में से कोई भी कोण π, का गुणांक नहीं हैं, तो

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

क्योंकि x, y तथा $(x+y)$ कोणों में से कोई भी π, का गुणांक नहीं हैं, इसलिए $\sin x$, $\sin y$ तथा $\sin(x+y)$ शून्य नहीं हैं। अब

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

अंश और हर को $\sin x \sin y$, से विभाजित करने पर, हम पाते हैं

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

13. $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$ जहाँ x, y तथा $x-y$; π के गणांक नहीं हैं।

यदि सर्वसमिका 12 में y के स्थान पर $-y$ रखते हैं तो हम उपरोक्त परिणाम पाते हैं।

14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

हम जानते हैं कि

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

y के स्थान पर x, रखें तो, हम पाते हैं

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

पुन: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

अत: हम पाते हैं $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

अंश और हर को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$$ जहाँ n पूर्णांक है।

15. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

पुनः $$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

प्रत्येक पद को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं:

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम जानते हैं कि

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

17. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x+x)\\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\
&= 2\sin x \cos x \cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x\\
&= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\
&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

18. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x)\\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)\\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

19. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$ $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम पाते हैं, $\tan 3x = \tan(2x+x)$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x \,.\, \tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

हम जानते हैं कि

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ... (1)

और $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ... (2)

(1) और (2) को जोड़ने एवं घटाने पर, हम पाते हैं,

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$ ... (3)

और $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$ ... (4)

और भी $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ... (5)

और $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ... (6)

(5) और (6) को जोड़ने एवं घटाने पर, हम पाते हैं,

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$ ... (7)

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$ ... (8)

माना कि $x + y = \theta$ तथा $x - y = \phi$, इसलिए

$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ तथा $y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

(3), (4), (7) तथा (8) में x और y के मान रखने पर, हम पाते हैं,

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

क्योंकि θ तथा ϕ को कोई वास्तविक संख्या मान सकते हैं। हम θ के स्थान पर x तथा ϕ के स्थान पर y रखने पर, हम पाते हैं:

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

टिप्पणी सर्वसमिका 20 से हम निम्न परिणाम पाते हैं:

21. **(i)** $\mathbf{2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)}$

(ii) $\mathbf{-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)}$

(iii) $\mathbf{2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)}$

(iv) $\mathbf{2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)}$

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिए:

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$$

हल बायाँ पक्ष $= 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1 =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 11 $\sin 15°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण 12 $\tan\frac{13\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}.$$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

अंश और हर को $\cos x \cos y$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 14 दिखाइए

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

हल हम जानते हैं कि $3x = 2x + x$

इसलिए $\tan 3x = \tan(2x + x)$

या $$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

या $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

या $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

या $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

उदाहरण 15 सिद्ध कीजिए:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$$

हल सर्वसमिका 20(i) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 16 सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$

हल सर्वसमिकाओं 20(i) तथा 20(iv) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 17 सिद्ध कीजिए $\dfrac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x \cos 2x - 2\sin 3x}{-2\sin 3x \sin 2x} = -\frac{\sin 3x\,(\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्नावली 3.3

सिद्ध कीजिए:

1. $\sin^2 \dfrac{\pi}{6} + \cos^2 \dfrac{\pi}{3} - \tan^2 \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}$

2. $2\sin^2 \dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \dfrac{7\pi}{6} \cos^2 \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

3. $\cot^2 \dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \dfrac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \dfrac{\pi}{6} = 6$

4. $2\sin^2 \dfrac{3\pi}{4} + 2\cos^2 \dfrac{\pi}{4} + 2\sec^2 \dfrac{\pi}{3} = 10$

5. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x + y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$

9. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

10. $\sin(n + 1)x \sin(n + 2)x + \cos(n + 1)x \cos(n + 2)x = \cos x$

11. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

13. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

14. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

15. $\cot 4x (\sin 5x + \sin 3x) = \cot x (\sin 5x - \sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x (1 - \tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometric Equations)

एक चर राशि में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को **त्रिकोणमितीय समीकरण** कहते हैं। इस अनुच्छेद में, हम ऐसे समीकरणों के हल ज्ञात करेंगे। हम पहले पढ़ चुके हैं कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों में 2π अंतराल के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है तथा $\tan x$ के मानों में π अंतराल के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जहाँ $0 \le x < 2\pi$ होता है, **मुख्य हल (principal solution)** कहलाते हैं। पूर्णांक 'n' से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है, उसे **व्यापक हल (general solution)** कहते हैं। हम पूर्णांकों के समुच्चय को '**Z**' से प्रदर्शित करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने में सहायक होंगे:

उदाहरण 18 समीकरण $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, मुख्य हल $x = \dfrac{\pi}{3}$ तथा $\dfrac{2\pi}{3}$ है।

उदाहरण 19 समीकरण $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. इस प्रकार, $\tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इस प्रकार $$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इसलिए, मुख्य हल $\dfrac{5\pi}{6}$ तथा $\dfrac{11\pi}{6}$ हैं।