भौतिक जगत (PHYSICAL WORLD)

CHAPTER 1

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

विज्ञान (Science)

'विज्ञान' शब्द का अभिप्राय है विशेष ज्ञान अर्थात् व्यापक रूप में प्रकृति का व्यवस्थित अध्ययन। विज्ञान शब्द का अंग्रेजी में वर्णन 'Science' द्वारा करते हैं। शब्द **'Science'** लैटिन क्रियात्मक शब्द **'Scientia'** (सिंटिया) से बना है जिससे तात्पर्य जानने **(To know)** से हैं। मनुष्य की जानने की संगठित कोशिश तथा उसके द्वारा अर्जित ज्ञान विज्ञान बन जाता है। **भौतिक जगत में जो भी घटित होता है उसका क्रमबद्ध अध्ययन विज्ञान कहलाता है।** विज्ञान के क्षेत्र में मनुष्य के ज्ञान का क्षेत्र विस्तृत होने पर विज्ञान में भी नये–नये क्षेत्र विकसित होते गये। जिन्हें वैज्ञानिकों ने अलग–अलग भागों में बाँट दिया जिससे इनका अध्ययन आसानी से हो सकें।

भौतिकी (Physics)

प्राचीन काल से "भौतिक" शब्द का प्रयोग संस्कृत वेदों में किया जाता है। जिसका अभिप्राय है प्राकृतिक। इसी से भौतिकी शब्द की उत्पत्ति हुई है। शब्द **'Physics'** ग्रीक शब्द **'fusis'** से बना है जिसका अभिप्राय है प्रकृति **(nature)**। भौतिक विज्ञान को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है–

"भौतिक विज्ञान, विज्ञान की वह शाखा है जो प्रकृति तथा प्राकृतिक घटनाओं की व्याख्या करती है।"

(The branch of science which is devoted to the study of nature and natural phenomena is called 'physics')

दैनिक जीवन में होने वाली अनेक प्राकृतिक घटनाओं जैसे वर्ष के मौसम, बादलों का बनना, वर्षा का होना, चन्द्र तथा सूर्य ग्रहण आदि की व्याख्यायें भौतिक विज्ञान के आधार पर दी गई है। भौतिक विज्ञान के अनुसार–

"भौतिक विज्ञान, विज्ञान की वह शाखा है जिसमें द्रव्य, ऊर्जा के विभिन्न स्वरूपों तथा द्रव्य से उनकी अन्योन्य क्रियाओं का अध्ययन किया जाता है।"

(Physics is that branch of Science in which we study matter, all forms of energy and their interaction with matter.)

भौतिकी में विभिन्न राशियों को यथार्थता से मापने के प्रयास किये जाते हैं। इसलिए भौतिकी को मापन का विज्ञान भी कहा जाता है।

1.2 भौतिकी का कार्यक्षेत्र एवं विस्तार (Scope and Expansion of Physics)

भौतिकी की विभिन्न शाखाओं को मुख्यतः दो भागों में विभाजित किया गया है–(a) चिरसम्मत भौतिकी (Classical physics) तथा (b) आधुनिक भौतिकी (Modern physics)

(a) चिरसम्मत भौतिकी (Classical physics)

(i) यांत्रिकी (Mechanics)–इस विषय के अन्तर्गत वस्तुओं की (निम्न वेगों पर) व्यवस्थित गति का अध्ययन किया जाता है। इसकी एक शाखा तरल यांत्रिकी (fluid mechanics) है जिसमें तरल (द्रव तथा गैस) के गतिक व्यवहार का अध्ययन किया जाता है।

(ii) ऊष्मागतिकी (Thermodynamics)–इस विषय के अन्तर्गत ऊष्मा, ताप तथा सूक्ष्म कणों से बने निकाय में गति का अध्ययन किया जाता है।

(iii) विद्युत-चुम्बकत्व (Electromagnetism)–इस विषय के अन्तर्गत विद्युत, चुम्बकत्व तथा विद्युत चुम्बकीय तरंगों के सिद्धान्तों का अध्ययन किया जाता है।

(iv) चिरसम्मत तरंग यांत्रिकी तथा ध्वनि (Classical wave mechanics and sound)–इस विषय के अन्तर्गत कम्पनों व प्रगामी व अप्रगामी तरंगों का अध्ययन किया जाता है।

(v) प्रकाशिकी (Optics)–इस विषय के अन्तर्गत प्रकाश की प्रकृति तथा संचरण का अध्ययन किया जाता है। लैंस तथा दर्पणों के माध्यमों से बनने वाले प्रतिबिम्बों, अपवर्तन (refraction), परावर्तन (reflection), व्यतिकरण (interference), विवर्तन (diffraction) तथा ध्रुवण (polarization) को समझने के लिए इस विषय का ज्ञान होना आवश्यक है।

(b) आधुनिक भौतिकी (Modern physics)

(i) आपेक्षिकता (Relativity)–इस विषय के अन्तर्गत उन पिण्डों की गति का अध्ययन किया जाता है जो प्रकाश के वेग के तुल्य वेग से गति करते हैं। वास्तव में यह प्रकृति में सापेक्षवाद का सिद्धान्त है।

(ii) क्वाण्टम यांत्रिकी (Quantum mechanics)–इस विषय के अन्तर्गत आधुनिक भौतिकी के सिद्धान्तों, प्रकाश तथा द्रव्य की द्वैत (dual) प्रकृति का अध्ययन किया जाता है। यह चिरसम्मत भौतिकी व आधुनिक भौतिक के मध्य एक सेतू का कार्य करती है।

(iii) परमाणु भौतिकी (Atomic physics)–इस विषय के अन्तर्गत परमाणु संरचना तथा परमाणु के गुणों के बारे में अध्ययन किया जाता है।

(iv) नाभिकीय भौतिकी (Nuclear physics)–इस विषय के अन्तर्गत परमाणु के नाभिक तथा उसके गुणों का अध्ययन किया जाता है। इसके अतिरिक्त कुछ अन्य विषय निम्न प्रकार है–

(i) ठोस अवस्था भौतिकी (solid state physics)
(ii) प्लाज्मा भौतिकी (Plasma physics)
(iii) उच्च ऊर्जा भौतिकी (High energy physics)
(iv) इलेक्ट्रोनिक्स (Electronics)
(v) अभियांत्रिकी भौतिकी (Engineering physics)
(vi) चिकित्सीय भौतिकी (Medical physics)
(vii) ब्रह्मांडिकी (Cosmology)
(viii) जीव भौतिकी (Bio physics)
(ix) रासायनिक भौतिकी (Chemical physics)
(x) भू–भौतिकी (Geo-physics)

1.3 प्रौद्योगिकी एवं समाज में भौतिकी का योगदान (Contribution of physics in Technology and Society)

भौतिक विज्ञान, विज्ञान की एक महत्वपूर्ण शाखा है जिसके ज्ञान के बिना विज्ञान का अन्य शाखाओं का विकास संभव नहीं है। भौतिक विज्ञान का विज्ञान की सभी शाखाओं के विकास तथा समाज के उत्थान में महत्वपूर्ण योगदान है।

(i) रसायन विज्ञान में भौतिकी का महत्व (Physics in relation to chemistry)–अणुओं के मध्य लगने वाले आन्तराण्विक बलों के आधार पर पदार्थ की रासायनिक संरचना, बंधों के प्रकार आदि का अध्ययन संभव हुआ है। X-किरणों के विवर्तन, परमाणु की संरचना, रेडियो एक्टिवता के आधार पर अनेक ठोसों की संरचनाओं का विस्तृत अध्ययन संभव हुआ है।

(ii) जीव विज्ञान में भौतिकी का महत्व (Physics in relation to biological sciences)–प्रकाशीय सूक्ष्मदर्शी की सहायता से अनेक जैविक प्रतिदर्शी का अध्ययन किया जाता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी के निर्माण से अनेक शारीरिक संरचनाओं का अध्ययन संभव हो सका।

(iii) खगोल विज्ञान में भौतिकी का महत्व (Physics in relation to Astronomy)–प्रकाशीय दूरदर्शी की सहायता से विभिन्न ग्रहों की गति तथा आकाशीय पिण्डों का अध्ययन संभव हुआ है।

(iv) गणित में भौतिकी का महत्व (Physics related to Mathematics)–भौतिकी के सिद्धान्तों द्वारा अनेक गणितीय विधियों का विकास संभव हुआ है। तकनीकी विकास विशेष रूप से भौतिकी के अनुप्रयोग (application) से सम्बन्धित है। भौतिकी के अनुप्रयोग पर आधारित कुछ नयी तकनीकों के उदाहरण निम्न प्रकार है–

(1) विद्युत उत्पादन विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित है।

(2) डीजल, इंजन, पेट्रोल इंजन, भाप इंजन आदि ऊष्मागतिकी के नियमों पर आधारित है।

(3) रेडियो, टेलीविजन, S.T.D., I.S.D., फैक्स, वायरलैस आदि विद्युत चुम्बकीय तंरगों के संचरण पर आधारित है।

(4) परमाणु भट्टी तथा परमाणु बम का विकास नाभिकीय विखण्डन पर आधारित है।

(5) रॉकेट नोदन न्यूटन के गति के द्वितीय तथा तृतीय नियम पर आधारित है।

(6) वायुयानों का उड़ना बरनौली सिद्धान्त पर आधारित है।

भौतिक विज्ञान तथा समाज का सम्बन्ध–

भौतिक विज्ञान पर आधारित खोजों का समाज पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ा है। आवागमन के साधनों तथा दूरसंचार के कारण सम्पूर्ण विश्व निकट आ गया है। आज हम विश्व के किसी भी कोने में तथा चन्द्रमा पर भी कम समय में जा सकते हैं। आवागमन के साधनों के कारण विभिन्न देशों तथा प्रदेशों के लोगों के बीच अन्तर समाप्त हो गया है। टेलीफोन, मोबाइल, टेलीप्रिंटर की सहायता से विश्व के दूरस्थ भागों में भी संदेशों का आदान–प्रदान तुरन्त हो जाता है। रेड़ियो तथा टेलीविजन की सहायता से हम सभी घटनाओं की जानकारी प्राप्त करते हैं। कम्प्यूटर हमारे लिए बहुत अधिक उपयोगी है इसकी सहायता से जटिल गणनाओं को आसानी से हल किया जा सकता है। भौतिक विज्ञान के विकास के कारण ही आज जीवन आसान व सुविधाजनक हो गया है।

1.4 मापन की आवश्यकता (Need of Measurement)

प्रकृति व प्राकृतिक परिघटनाओं के अध्ययन एवं विश्लेषण को भौतिकी कहते हैं। प्रकृति में विभिन्न घटनाएँ कुछ मौलिक नियमों के अनुसार ही घटित होती हैं। प्रेक्षित घटनाओं से इन नियमों को व्यक्त करने के लिए अध्ययन को भौतिक विज्ञान कहते हैं।

भौतिक विज्ञान प्रकृति का अध्ययन है, अतः वास्तविक है। प्रकृति के मौलिक अथवा मूल नियम पहले से ही बने हैं। हम केवल इनकी खोज करते हैं। आर्यभट्ट, न्यूटन, आइन्सटीन या फाईनमेन महान भौतिक विज्ञानी हैं क्योंकि उन्होंने अपने समय में उपलब्ध प्रेक्षणों के आधार पर नियमों को इस प्रकार व्यक्त किया जो सही ढंग से उन प्रेक्षणों को समझा सके।

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है कि भौतिकी प्रकृति के नियमों की व्याख्या करती है। अतः नियमों के अध्ययन के लिए राशियों का मापन व विभिन्न भौतिक राशियों का तुलनात्मक विवरण जानना आवश्यक होता है। **किसी भौतिक राशि के मापन के लिए उस राशि का कोई मानक मात्रक ज्ञात होना अनिवार्य है।** भौतिकी में भौतिक राशियाँ परिमाणात्मक दृष्टि से उस राशि की इकाई में व्यक्त की जाती है। भौतिक राशि का मापन दो भागों में व्यक्त करते हैं। प्रथम भाग मानक इकाई से कितने गुना दर्शाता है व दूसरा भाग मानक इकाई। उदाहरण के लिए मुझे 2 घंटे पढ़ना है, वहाँ संख्यात्मक भाग 2 दर्शाता है कि समय के इकाई का दो गुना व घंटा समय की चुनी गई इकाई दर्शाता है।

1.5 भौतिक राशियाँ (Physical Quantities)

वे राशियाँ जिन्हें मापा या तोला जा सके, भौतिक राशियाँ कहलाती है। जैसे–द्रव्यमान,लम्बाई, समय, बल, वेग, कार्य आदि।

- **मूल राशियाँ (Fundamental Quantities)**—वे भौतिक राशियाँ जो अन्य किसी भी राशि पर निर्भर नहीं करती है, मूल राशियाँ कहलाती है। यांत्रिकी में द्रव्यमान, लम्बाई, समय को मूल राशियाँ माना गया है।
- **व्युत्पन्न राशियाँ (Derived Quantities)**—वे भौतिक राशियाँ जो मूल राशि से व्युत्पन्न की जाती है तथा इन राशियों पर निर्भर करती है, व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती है। जैसे–संवेग, बल, कार्य आदि।

1.6 मात्रक (Unit)

भौतिक राशि के मापन के लिए नियत किये गये मान को मात्रक कहते हैं।

- **मानक मात्रक** (Standard Unit)—किसी भौतिक राशि के निश्चित वास्तविक मूर्त रूप को उस राशि का मानक मात्रक कहते हैं।

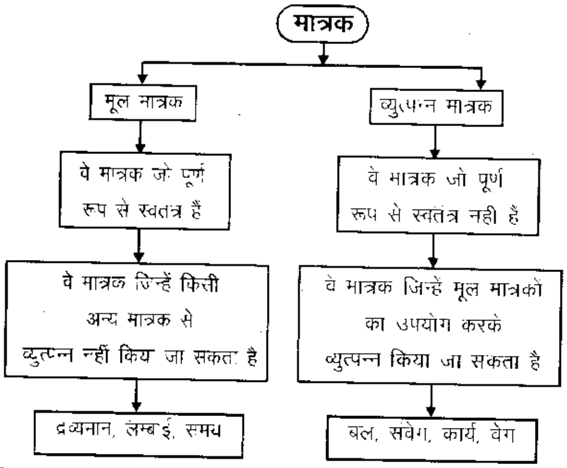
भौतिक राशि का मात्रक उसके आंकिक मान के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् $u \propto \frac{1}{n}$, जहाँ पर u व n क्रमशः किसी भी भौतिक राशि का मात्रक व संख्यात्मक मान (numerical value) है। मात्रक एवं संख्यात्मक मान के सम्बन्ध $n_1u_1 = n_2u_2$

किसी भी भौतिक राशि का मात्रक चयन करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए–

(i) चयन किए गये मात्रक सर्वमान्य,उचित आकार तथा परिमाण के हों।

(ii) चयनित मात्रक, ताप दाब व समय के परिवर्तन से प्रभावित नहीं हों।

(iii) चयनित मात्रक सरलता से परिभाषित किये जा सकें एवं प्रत्येक स्थान पर उनके प्रतिरूप सरलता से बनाये जा सकें।



1.7 मात्रक पद्धतियाँ (System of Unit)

भौतिक राशियाँ के मूल मात्रकों के आधार पर निम्नलिखित पद्धतियाँ प्रचलित हैं–

(i) C.G.S. (सेन्टीमीटर–ग्राम–सेकण्ड) पद्धति या गॉसीय पद्धति

(ii) M.K.S. (मीटर–किलोग्राम–सेकण्ड) पद्धति या जॉर्जी (Gorgi) पद्धति

(iii) F.P.S (फुट–पाउण्ड–सेकण्ड) पद्धति

(iv) International System of Units (S.I.) (अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति)

C.G.S. पद्धति या मैट्रिक पद्धति–इस पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई, समय को क्रमशः ग्राम, सेन्टीमीटर, सेकण्ड में नापा जाता है।

M.K.S. पद्धति–इस पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई, समय को क्रमशः किलोग्राम, मीटर, सेकण्ड में नापा जाता है।

F.P.S. पद्धति या ब्रिटिश पद्धति–इस पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई, समय की इकाई क्रमशः पाउण्ड, फुट, सेकण्ड होती है।

1.7.1 मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति (International System of Units)

(i) यह पद्धति 1960 में अन्तर्राष्ट्रीय माप तौल समिति (International Bureau of Weight and Measures) द्वारा लागू की गयी।

(ii) यह पद्धति M.K.S. का परिवर्तित रूप है।

(iii) अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर इसे अनुमोदित किया गया।

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) विद्युत धारा को मूल राशि लेने पर, इसका मात्रक एम्पियर (A) तब पद्धति MKSA कहलाती है।

(ii) आवेश (Q) को सम्मिलित करने पर इसका मात्रक कूलॉम तब पद्धति MKSQ कहलाती है।

S.I पद्धति में भौतिक राशियों को मूल मात्रक, व्युत्पन्न मात्रक तथा पूरक मात्रकों के रूप में वर्गीकृत किया गया है। S.I पद्धति मे सात मूल मात्रक तथा दो पूरक मात्रक होते है। जिन्हें निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है–

(A) मूल मात्रक–

क्र.सं.	भौतिक राशि का नाम	मात्रक	संकेत (प्रतीक)
1.	द्रव्यमान	किग्रा	kg
2.	लम्बाई	मीटर	m
3.	समय	सेकण्ड	s
4.	ताप	केल्विन	K
5.	विद्युत धारा	एम्पियर	A
6.	प्रदीपन तीव्रता	केण्डेला	cd
7.	पदार्थ की मात्रा	मोल	*mol*

(B) पूरक मात्रक–

क्र.सं.	भौतिक राशि का नाम	मात्रक	संकेत (प्रतीक)
1.	समतल कोण	रेडियन	rad
2.	ठोस कोण या घन कोण	स्टेरेडियन	sr

(C) व्युत्पन्न मात्रक–

वे भौतिक राशियाँ जो मूल भौतिक राशियों का उपयोग करके प्राप्त की जाती है, व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती है।

जैसे-क्षेत्रफल, आयतन, चाल, संवेग, बल, कार्य आदि। मूल मात्रकों पर आधारित कुछ सर्वाधिक प्रयुक्त होने वाली भौतिक राशियों के मात्रक सारणी में दिये गये हैं–

क्र. सं.	भौतिक राशि	व्युत्पन्न मात्रक	संकेत	तुल्य मात्रक
1.	आवृत्ति	हर्ट्ज	Hz	s^{-1}
2.	बल	न्यूटन	N	$kg\ ms^{-2}$
3.	कार्य, ऊर्जा, ऊष्मा की मात्रा	जूल	J	Nm
4.	दाब, प्रतिबल	पास्कल	Pa	Nm^{-2}
5.	शक्ति, विकिरण फ्लक्स	वॉट	W	Js^{-1}
6.	विद्युत आवेश	कूलॉम	C	As
7.	विद्युत विभव, विभवान्तर, विद्युत वाहक बल	वोल्ट	V	JC^{-1}
8.	विद्युत धारिता	फैरड	F	CV^{-1}
9.	प्रतिरोध	ओम	Ω	VA^{-1}
10.	विद्युत चालकता	सीमेन्स	S	AV^{-1}
11.	चुम्बकीय फ्लक्स	वेबर	Wb	JA^{-1}
12.	चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व	टेसला	T	Wbm^{-2}
13.	प्रेरकत्व	हेनरी	H	WbA^{-1}
14.	प्रदीप्ति फ्लक्स (ज्योति फ्लक्स), दीप्त शक्ति	ल्यूमैन	*lm*	sr^{-1}
15.	प्रदीप्ति घनत्व	लक्स	*lx*	$cdm^{-2}sr^{-1}$
16.	रेडियोएक्टिव विघटन की दर	बैकुरल	Bq	s^{-1}
17.	अवशोषित मात्रा, अवशोषित मात्रा सूचकांक	ग्रे	$Gy = \frac{J}{kg}$	m^2s^{-2}

महत्त्वपूर्ण तथ्य

यांत्रिकी में लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियाँ चुनी गयी है, परन्तु हम यांत्रिकी में कोई भी तीन राशियाँ मूलभूत राशियों की तरह ले सकते है तो अन्य राशियाँ इनके पदों में व्यक्त की जा सकती है।

उदाहरण के लिए, यदि चाल तथा समय को मूलभूत राशियों के रूप में लिया जाये तो लम्बाई व्युत्पन्न राशि बन जाती है क्योंकि लम्बाई अब चाल × समय के रूप में व्यक्त की जायेगी तथा यदि बल तथा त्वरण मूलभूत राशियाँ ली जायें तो द्रव्यमान को $\frac{\text{बल}}{\text{त्वरण}}$ से परिभाषित किया जायेगा तथा यह व्युत्पन्न राशि कहलाएगा।

1.7.2 मूल मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय परिभाषाएँ (International definitions of fundamental units)

(1) मीटर (metre)—एक मीटर व दूरी है जिसमें kr^{86} से उत्सर्जित नांरगी लाल प्रकाश की 16,50,763.73 तरंगे निर्वात् में स्थित होती हैं एवं दूसरे शब्दों में 1 मीटर वह दूरी है जो प्रकाश निर्वात् में $\frac{1}{299,792,458}$ सेकण्ड में तय करता है।

(2) किलोग्राम (Kilogram)—एक किलोग्राम अन्तर्राष्ट्रीय भार तथा माप संस्था (International Bureau of Weights and Measures) पेरिस में रखें प्लेटीनम–इरेडियम के एक विशेष बेलन के द्रव्यमान के बराबर होता है।

(i) यह 4°C पर एक लीटर जल का द्रव्यमान है।

(ii) एक किग्रा. मात्रा C^{12} के 5×10^{25} परमाणुओं के द्रव्यमान के बराबर है।

(3) सेकण्ड (Second)–एक सेकण्ड वह समय है जिसमें सीजियम परमाणु, परमाणुक घड़ी में 9,192,631,770 बार कम्पन्न करता है। परमाणु घड़िया इस परिभाषा पर आधारित होती हैं वे समय का यथार्थ मापन करती हैं और इनमें केवल 5000 वर्षो में एक सेकण्ड की त्रुटि हो सकती है।

(4) एम्पियर (Ampere)—एक एम्पियर वह विद्युत धारा है जो निर्वात में 1 मीटर की दूरी पर रखे दो सीधे, समान्तर, अनन्त लम्बाई व नगण्य वृत्ताकार परिच्छेद वाले तारों में प्रवाहित होने पर उनके मध्य प्रतिमीटर लम्बाई पर 2×10^{-7} N/m बल उत्पन्न करती है।

(5) केल्विन (Kelvin)—

(i) 1 केल्विन सामान्य वायुमण्डलीय दाब पर जल के क्वथनांक व बर्फ के गलनांक के अन्तर का $\frac{1}{100}$ वां भाग होता है।

केल्विन का प्रतीक K है। ताप को केल्विन में व्यक्त करने पर डिग्री नहीं लिखते हैं।

(ii) एक केल्विन जल के त्रिक बिन्दु पर **(273.16 K)** के ऊष्मागतिक ताप का $\frac{1}{273.16}$ वां भाग होता है।

(iii) जल का त्रिक बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर जल की तीनों अवस्थाएं (बर्फ, जल ,जल–वाष्प) साम्यावस्था में रहती है। इसका निश्चित मान 273.16 K होता है।

(6) केन्डेला (Candela)—एक केन्डेला कृष्णिका के तल के लम्बवत् दिशा में उसके $\frac{1}{60,000}$ मी^{2} क्षेत्रफल की प्रदीपन तीव्रता है जबकि कृष्णिका का दाब 101,325 N/m^2 तथा ताप प्लेटीनम के गलनांक के बराबर हो।

(7) मोल (Mole)—

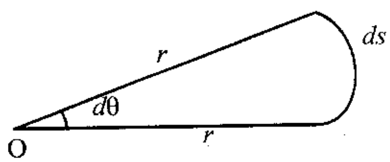
(i) एक मोल पदार्थ की वह द्रव्यमान मात्रा है जिसमें मूल अवयवों की संख्या उतनी ही है जितनी कि $_8O^{16}$ के 0.016 kg में ऑक्सीजन परमाणु की।

(ii) एक मोल पदार्थ की वह मात्रा है जिसमें मूल अवयवों की संख्या उतनी है जितनी की $_6C^{12}$ के 0.012 kg में कार्बन परमाणुओं की संख्या होती है।

1.7.3 पूरक मात्रकों की परिभाषाएँ (Definitions of supplementary Units)

(1) रेडियन (Radian) ; (2) स्टेरेडियन (Steradian)

1. रेडियन–एक रेडियन वह तलीय कोण है जो कि वृत्त की त्रिज्या के बराबर चाप वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित करता है।



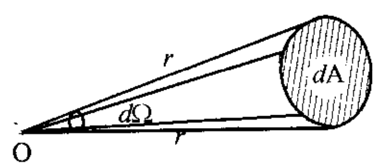
चित्र 1.1

समतल कोण $d\theta = \left(\frac{ds}{r}\right)$ रेडियन

यदि $ds = r$ तो $d\theta = 1$ रेडियन

1 रेडियन = $\frac{180}{\pi}$ डिग्री = 57.3 डिग्री

2. स्टेरेडियन–एक स्टेरेडियन वह ठोस कोण है जो कि गोले के पृष्ठ का एक भाग, जिसका क्षेत्रफल गोले की त्रिज्या के वर्ग (r^2) बराबर है, गोले के केन्द्र पर अन्तरित करता है।



चित्र 1.2

$$\text{ठोस कोण } (d\Omega) = \frac{\text{अभिलम्बवत् पृष्ठ क्षेत्रफल}}{(\text{त्रिज्या})^2}$$

$\therefore$ ठोस कोण $(d\Omega) = \left(\frac{dA}{r^2}\right)$ स्टेरेडियन

यदि $dA = r^2$ तब $d\Omega = 1$ स्टेरेडियन

यदि सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल हो तो उसके द्वारा अन्तरित घन कोण

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ स्टेरेडियन}$$

1.7.4 S.I. पद्धति की विशेषताएँ (Merits of S.I. System)

- यह मात्रको की परिमेयकृत पद्धति है अर्थात् इस पद्धति से एक भौतिक राशि के लिए एक ही मात्रक का उपयोग होता है।
- इस पद्धति में मात्रक अचर तथा उपलब्ध मानकों पर आधारित है।
- यह मात्रकों की सम्बद्ध पद्धति है अर्थात् इस पद्धति में सभी भौतिक राशियों के व्युत्पन्न मात्रक केवल मूल मात्रकों को गुणा एवं भाग करके प्राप्त हो सकते हैं।
- ये सभी मात्रक सुपरिभाषित एवं पुनः स्थापित होने वाले है।
- यह मैट्रिक या दशमलव पद्धति है।
- S.I. पद्धति विज्ञान की सभी शाखाओं में प्रयोग की जा सकती है परन्तु M.K.S. को केवल यांत्रिकी में प्रयोग किया जा सकता है।

1.7.5. अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में मात्रकों के नाम एवं संकेत लिखने के नियम (Rules for writing Names and Symbols of Units in International System)

1. भौतिक राशियों के प्रतीक तथा मात्रकों को अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है।

2. प्रतीक तथा मात्रकों के बाद विराम बिन्दु (Full Stop) नहीं लगाते हैं।

3. प्रतीक तथा मात्रकों को बहुवचन में नहीं लिखा जाता है, जैसे 5 मीटर को 5m लिखते हैं। 5ms या 5m's नहीं लिखा जाता है।

4. किसी मात्रक का अंग्रेजी में पूरा नाम लिखते समय नाम बड़े अक्षर (Capital Letter) से प्रारंभ नहीं करते हैं, चाहे वह नाम वैज्ञानिक के नाम पर आधारित हो, जैसे–न्यूटन को newton लिखते हैं। Newton नहीं लिखा जाता है।

5. सदिश राशियों को मोटे अक्षर (Bold Letter) में छपवाया जाता है।

6. जब मात्रक वैज्ञानिक के नाम पर होता है तब उसका प्रतीक बड़े अक्षर (Capital Letter) द्वारा व्यक्त किया जाता है, जैसे–एम्पियर (A), न्यूटन (N), कूलॉम (C), केल्विन (K) आदि। परन्तु मीटर (m), किलोग्राम (kg), सेकण्ड (s) आदि को छोटे अक्षर (small letter) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

7. सॉलिड्स (solidus) अर्थात् (/) का प्रयोग दो मात्रकों को पृथक दर्शाने में किया जाता है। एक से अधिक सॉलिड्स का प्रयोग नहीं किया जाता है। जैसे-प्रत्यास्थता गुणांक का मात्रक किग्रा/मीटर सेकण्ड^2 या किग्रा मीटर$^{-1}$ सेकण्ड^2 लिखा जाता है। (किग्रा/ मीटर/ सेकण्ड^2 नहीं लिखा जाता है।)

1.8 विमाएँ एवं विमीय विश्लेषण (Dimensions and Dimensional Analysis)

भौतिक राशि को मूल मात्रकों M.L.T (Mass, Length, Time) के रूप में प्रकट करने के लिए उन पर लगायी गयी घातों को उस भौतिक राशि की विमा कहते हैं।

(i) किसी भौतिक राशि की विमा व प्रत्येक मूल मात्रक को अंग्रेजी के एक बड़े अक्षर से व्यक्त करते हैं तथा उसे बड़े कोष्ठक में लिखते है।

(ii) भौतिक राशि की विमा उसको व्यक्त करने वाले मात्रकों की पद्धति पर निर्भर नहीं करती है।

(iii) शुद्ध संख्या और शुद्ध अनुपात की कोई विमा नहीं होती है। जैसे–अपवर्तनांक, आपेक्षिक घनत्व, $\cos\theta$, π, विकृति आदि।

(iv) समान विमाओं को जोड़ा या घटाया जा सकता है लेकिन ऐसा करने पर विमाएँ अपरिवर्तित रहती है।

(v) किसी भौतिक समीकरण के विमीय रूप से सही होने के लिए उसके समस्त पदों की विमाएँ एक समान होनी चाहिए इसे **विमीय समांगता का सिद्धान्त** कहते है।

उदाहरणार्थ-लम्बाई तथा चौड़ाई का मात्रक मीटर है जिससे क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई का मात्रक मीटर × मीटर = मीटर^2 या वर्ग मीटर होगा।

अब यदि लम्बाई या चौड़ाई के मूल मात्रक को L द्वारा व्यक्त किया जाये तब क्षेत्रफल को L^2 द्वारा व्यक्त किया जायेगा। अतः क्षेत्रफल की लम्बाई में विमा 2 होगी।

किसी भौतिक राशि Q को M, L तथा T मूल मात्रकों में व्यक्त करते हुए निम्न समीकरण के द्वारा लिखा जा सकता है–

$$Q = [M^a L^b T^c]$$

इस समीकरण को भौतिक राशि Q का विमीय समीकरण कहते हैं तथा $[M^a L^b T^c]$ को भौतिक राशि Q का विमीय सूत्र कहते हैं तथा a, b, c घातें हैं जिन्हें विमाएँ कहते है। भौतिक राशि का यह सूत्र बताता है कि राशि के व्युत्पन्न मात्रक कौन–कौन से हैं तथा इनकी घातें कितनी हैं।

इस प्रकार क्षेत्रफल का विमीय सूत्र $[M^0L^2T^0]$ होगा।

विभिन्न भौतिक राशियाँ, उनके मूल राशियों से सम्बन्ध तथा विमीय सूत्र

क्र. सं.	भौतिक राशि	अन्य राशियों से सम्बन्ध	विमीय सूत्र	S.I. पद्धति
1.	लम्बाई, चौड़ाई, उँचाई, गहराई, दूरी, विस्थापन	.	$L^1 = [M^0 L^1 T^0]$	m
2.	क्षेत्रफल (A)	-	$L \times L = L^2 = [M^0 L^2 T^0]$	m^2
3.	आयतन (V)	-	$L \times L \times L = L^3 = [M^0 L^3 T^0]$	m^3
4.	घनत्व (ρ)	$\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$	$\frac{M}{L^3} = [M^1 L^{-3} T^0]$	$\frac{kg}{m^3}$
5.	वेग (v), चाल	$\frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$	$\frac{L}{T} = LT^{-1} = [M^0 L^1 T^{-1}]$	$\frac{m}{s}$
6.	रेखिक संवेग (p)	द्रव्यमान × वेग	$M[LT^{-1}] = [M^1 L^1 T^{-1}]$	$\frac{kg \times m}{s}$
7.	त्वरण (a)	$\frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{समय}}$	$\frac{L/T}{T} = LT^{-2} = [M^0 L^1 T^{-2}]$	$\frac{m}{s^2}$
8.	गुरुत्वीय त्वरण (g), अभिकेन्द्रीय त्वरण	$\frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{समय}}$	$\frac{L/T}{T} = LT^{-2} = [M^0 L^1 T^{-2}]$	$\frac{m}{s^2}$
9.	बल (F)	द्रव्यमान × त्वरण	$M[LT^{-2}] = [M^1 L^1 T^{-2}]$	$\frac{kg \times m}{s^2} = N$ (न्यूटन)
10.	आवेग (J या I)	बल × समय	$[M^1 L^1 T^{-2}]T = [M^1 L^1 T^{-1}]$	N-s
11	दाब (P)	$\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$\frac{M^1 L^1 T^{-2}}{L^2} = [M^1 L^{-1} T^{-2}]$	$\frac{N}{m^2}$
12.	सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक (G)	$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ $G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$	$G = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2}$ $= [M^{-1}L^3T^{-2}]$	$\frac{Nm^2}{kg^2}$
13.	कार्य (W), ऊर्जा (E)	बल × विस्थापन	$[M^1 L^1 T^{-2}][L] = [M^1 L^2 T^{-2}]$	(जूल) joule (J)
14.	शक्ति(P)	$\frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$	$\frac{M^1 L^2 T^{-2}}{T^1} = [M^1 L^2 T^{-3}]$	(वॉट) watt
15.	पृष्ठ तनाव (T)	$\frac{\text{बल}}{\text{लम्बाई}}$	$\frac{M^1 L^1 T^{-2}}{L} = [M^1 L^0 T^{-2}]$	Nm^{-1}
16.	बल नियतांक(K)	$\frac{\text{बल}}{\text{विस्थापन}}$	$\frac{M^1 L^1 T^{-2}}{L} = [M^1 L^0 T^{-2}]$	$\frac{N}{m}$
17.	घूर्णन त्रिज्या या परिभ्रमण त्रिज्या (k)	दूरी	$(L) = [M^0 L^1 T^0]$	m
18.	जड़त्व आघूर्ण (I)	द्रव्यमान × $(\text{दूरी})^2$	$ML^2 = [M^1 L^2 T^0]$	$kg \times m^2$
19.	आवृत्ति (υ)	कम्पन समय	$\frac{1}{T} = [M^0 L^0 T^{-1}]$	(हर्ट्ज) *hertz (Hz)*
20.	प्लांक स्थिरांक (h)	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आवृत्ति}} \left(= \frac{E}{\upsilon}\right)$	$\frac{M^1 L^2 T^{-2}}{T^{-1}} = [M^1 L^2 T^{-1}]$	जूल × सेकण्ड
21.	वेग प्रवणता	$\frac{\text{वेग}}{\text{दूरी}}$	$\frac{M^0 L^1 T^{-1}}{L} = [M^0 L^0 T^{-1}]$	प्रति सेकण्ड
22.	बल आघूर्ण (τ)या बल युग्म	बल × दूरी	$[M^1 L^1 T^{-2}][L] = [M^1 L2 T^{-2}]$	न्यूटन × मीटर
23.	प्रतिबल	$\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$\frac{M^1 L^1 T^{-2}}{L^2} = [M^1 L^{-1} T^{-2}]$	$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2}$
24.	विकृति	$\frac{\text{विन्यास में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक विन्यास}}$	$\frac{L}{L} = 1 = [M^0 L^0 T^0]$	कोई मात्रक नहीं

क्र. सं.	भौतिक राशि	अन्य राशियों से सम्बन्ध	विमीय सूत्र	S.I. पद्धति
25.	प्रत्यास्थता गुणांक	$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	$\frac{N}{m^2}$
26.	तरंगदैर्ध्य (λ)	दूरी	$[M^0L^1T^0]$	मीटर
27.	हबल नियतांक (Hubble Constant)	हबल नियतांक $H_o = \frac{V}{D}$ $= \frac{\text{पश्चसरण चाल (Recession speed)}}{\text{दूरी}}$	$[M^0L^0T^{-1}]$	सेकण्ड$^{-1}$
28.	क्रान्तिक वेग (v_c)	$\frac{\text{रेनॉल्ड संख्या} \times \text{श्यानता गुणांक}}{\text{घनत्व} \times \text{त्रिज्या}}$	$[M^0L^1T^{-1}]$	$\frac{\text{मी.}}{\text{से.}}$
29.	पलायन वेग (v_e)	$\sqrt{2 \times \text{पृथ्वी की त्रिज्या} \times \text{गुरुत्वीय त्वरण}}$	$[M^0L^1T^{-1}]$	मी./से.
30.	दक्षता (η)	$\frac{\text{निर्गत कार्य अथवा ऊर्जा}}{\text{निवेशी कार्य अथवा ऊर्जा}}$	$[M^0L^0T^0]$ विमाहीन	मात्रकहीन
31.	क्षय नियतांक	$\frac{0.693}{\text{अर्द्धआयु}}$	$[M^0L^0T^{-1}]$	सेकण्ड$^{-1}$
32.	दाब प्रवणता	$\frac{\text{दाब}}{\text{दूरी}}$	$[M^1L^{-2}T^{-2}]$	$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^3}$
33.	श्यानता गुणांक (η)	$\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{वेग प्रवणता}}$	$[M^1L^{-1}T^{-1}]$	$\frac{\text{न्यूटन} \times \text{सेकण्ड}}{\text{मीटर}^2}$
34.	पृष्ठ ऊर्जा	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$[M^1L^0T^{-2}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{मीटर}^2}$
35.	विशिष्ट ऊष्मा	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{तापवृद्धि}}$	$[M^0L^2T^{-2}K^{-1}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{किग्रा.} \times \text{केल्विन}}$
36.	ऊष्मा धारिता, एन्ट्रॉपी	द्रव्यमान $\times$ विशिष्ट ऊष्मा	$[M^1L^2T^{-2}K^{-1}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{केल्विन}}$
37.	स्टीफन नियतांक (σ)	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{समय} \times \text{ताप}^4}$	$[M^1L^0T^{-3}K^{-4}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{मी}^2 \times \text{से.} \times \text{केल्विन}^4}$
38.	वोल्ट्जमान नियतांक (K)	$\frac{\text{गतिज ऊर्जा}}{\text{ताप}}$	$[M^1L^2T^{-2}K^{-1}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{केल्विन}}$
39.	सक्रियता (A)	$\frac{\text{विघटन}}{\text{समय}}$	$[M^0L^0T^{-1}]$	$\frac{\text{विघटन}}{\text{सेकण्ड}}$
40.	वीन नियतांक(b)	तरंगदैर्ध्य $\times$ तापान्तर	$[M^0L^1T^0K^1]$	$\frac{\text{मीटर}}{\text{केल्विन}}$
41.	दाब ऊर्जा	दाब $\times$ आयतन	$[ML^2T^{-2}]$	जूल
42.	गुप्त ऊष्मा	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान}}$	$[M^0L^2T^{-2}]$	जूल /किग्रा.
43.	तापीय प्रसार गुणांक अथवा ऊष्मीय प्रसरणीयता	$\frac{\text{विमा में परिवर्तन}}{\text{मूल विमा} \times \text{ताप}}$	$[M^0L^0K^{-1}]$	केल्विन$^{-1}$

क्र. सं.	भौतिक राशि	अन्य राशियों से सम्बन्ध	विमीय सूत्र	S.I. पद्धति
44.	ऊष्मा चालकता (K)	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा} \times \text{मोटाई}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{ताप} \times \text{समय}}$	$[M^1L^1T^{-3}K^{-1}]$	$\frac{\text{किग्रा.} \times \text{मी.}}{\text{से.}^3 \times \text{केल्विन}}$
45.	तरंग की तीव्रता	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{समय} \times \text{क्षेत्रफल}}$	$[M^1L^0T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.} \times \text{मी.}^2}$
46.	विकिरण दाब	$\frac{\text{तरंग की तीव्रता}}{\text{प्रकाश की चाल}}$	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{मी.}^3}$
47.	ऊर्जा घनत्व	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आयतन}}$	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{मी.}^3}$
48.	सार्वत्रिक गैस नियतांक (R)	$\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{मोल} \times \text{ताप}}$	$[M^1L^2T^{-2}K^{-1}]mol^{-1}$	$\frac{\text{जूल}}{\text{मोल} \times \text{केल्विन}}$
49	तरंग संख्या ($\bar{\upsilon}$)	$\frac{2\pi}{\text{तरंगदैर्ध्य}}$	$[M^0L^{-1}T^0]$	प्रति मीटर
50.	बहने की दर (Q)	$\frac{\text{आयतन}}{\text{समय}}$	$[M^0L^3T^{-1}]$	$\frac{\text{मीटर}^3}{\text{सेकण्ड}}$
51.	कोण, कोणीय विस्थापन (θ)	$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$	$\frac{L}{L} = 1 = [M^0L^0T^0]$	रेडियन
52.	ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक (J)	$\frac{\text{कार्य}}{\text{ऊष्मा}}$	$[M^0L^0T^0]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{कैलोरी}}$
53.	कोणीय वेग (ω), कोणीय आवृत्ति	$\frac{\text{कोण}}{\text{समय}}$	$\frac{1}{T} = T^{-1} = [M^0L^0T^{-1}]$	$\frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$
54.	कोणीय त्वरण (α)	$\frac{\text{कोणीय वेग}}{\text{समयान्तराल}}$	$\frac{1/T}{T} = T^{-2} = [M^0L^0T^{-2}]$	$\frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}^2}$
55.	कोणीय संवेग (J,L)	संवेग × लम्बवत् दूरी	$MLT^{-1} \times L = [M^1L^2T^{-1}]$	$\frac{\text{किग्रा.} \times \text{मी.}^2}{\text{सेकण्ड}}$ =जूल×से.
56.	कोणीय आवेग	बल आघूर्ण × समय	$[M^1L^2T^{-1}]$	न्यूटन × मी. × से.
57.	त्रिकोणमितीय अनुपात	$\frac{\text{लम्बाई}}{\text{लम्बाई}}$	$[M^0L^0T^0]$	मात्रकहीन
58.	विकिरण फ्लक्स, विकिरण शक्ति	$\frac{\text{उत्सर्जित ऊर्जा}}{\text{समय}}$	$[M^1L^2T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}}$
59.	विकिरण तीव्रता	$\frac{\text{विकिरण शक्ति}}{\text{घन कोण}}$	$[M^1L^2T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}}$
60.	दीप्त शक्ति अथवा स्त्रोत का ज्योति फ्लक्स	$\frac{\text{उत्सर्जित ज्योति ऊर्जा}}{\text{समय}}$	$[M^1L^2T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}}$

क्र. सं.	भौतिक राशि	अन्य राशियों से सम्बन्ध	विमीय सूत्र	S.I. पद्धति
61.	ज्योति तीव्रता अथवा स्त्रोत की प्रदीपन क्षमता	$\frac{\text{ज्योति फ्लक्स}}{\text{घन कोण}}$	$[M^1L^2T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}}$
62.	प्रदीपन तीव्रता	$\frac{\text{ज्योति तीव्रता}}{(\text{दूरी})^2}$	$[M^1L^0T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}\times\text{मी.}^2}$
63.	प्रदीप्ति घनत्व अथवा प्रदीप्ति	$\frac{\text{आपतित ज्योति फ्लक्स}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$[M^1L^0T^{-3}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{से.}\times\text{मी.}^2}$
64.	आवेश (q)	धारा × समय	$[M^0L^0T^1A^1]$	एम्पियर × सेकण्ड = कूलॉम
65.	विभवान्तर (V)	$\frac{\text{कार्य}}{\text{आवेश}}$	$[M^1L^2T^{-3}A^{-1}]$	$\frac{\text{जूल}}{\text{कूलॉम}}$ = वोल्ट
66.	प्रतिरोध (R)	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{धारा}}$	$[M^1L^2T^{-3}A^{-2}]$	$\frac{\text{वोल्ट}}{\text{एम्पियर}}$ = ओम
67.	धारिता (C)	$\frac{\text{आवेश}}{\text{विभवान्तर}}$	$[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]$	$\frac{\text{कूलॉम}}{\text{वोल्ट}}$ = फैरड
68.	धारा घनत्व (J)	$\frac{\text{विद्युत धारा}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$[M^0L^{-2}T^0A^1]$	$\frac{\text{एम्पियर}}{\text{मी.}^2}$
69.	फैराडे नियतांक (F)	आवोगाद्रो नियतांक × मूल आवेश	$[M^0L^0T^1A^1mol^{-1}]$	$\frac{\text{एम्पियर}\times\text{से.}}{\text{मोल}}$
70.	प्रेरणिक प्रतिघात (X_L)	(कोणीय आवृत्ति × प्रेरकत्व)	$[M^1L^2T^{-3}A^{-2}]$	ओम
71.	धारितीय प्रतिघात (X_C)	$(\text{कोणीय आवृत्ति}\times\text{धारिता})^{-1}$	$[M^1L^2T^{-3}A^{-2}]$	ओम
72.	विशिष्ट प्रतिरोध या प्रतिरोधकता (ρ)	$\frac{\text{प्रतिरोध}\times\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$	$[M^1L^3T^{-3}A^{-2}]$	ओम × मी.
73.	चालकता (G)	$\frac{1}{\text{प्रतिरोध}}$	$[M^{-1}L^{-2}T^3A^2]$	ओम^{-1}
74.	विद्युत क्षेत्र (E)	$\frac{\text{विद्युत बल}}{\text{आवेश}}$	$[M^1L^1T^{-3}A^{-1}]$	$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}}$ या $\frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$
75.	विद्युत फ्लक्स (ϕ_E)	विद्युत क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[M^1L^3T^{-3}A^{-1}]$	वोल्ट × मी.
76.	विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण (P)	$\frac{\text{बल आघूर्ण}}{\text{विद्युत क्षेत्र}}$	$[M^0L^1T^1A^1]$	कूलॉम × मीटर
77.	विद्युतशीलता (परावैद्युतांक) (∈)	$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\in}\frac{q_1q_2}{r^2}$ $\in=\frac{q_1q_2}{4\pi F\times r^2}$	$[M^{-1}L^{-3}T^4A^2]$	$\frac{\text{कूलॉम}^2}{\text{न्यूटन}\times\text{मी.}^2}$
78.	चुम्बकीय क्षेत्र (B)	$\frac{\text{बल}}{\text{धारा}\times\text{लम्बाई}}$	$[M^1L^0T^{-2}A^{-1}]$	$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{एम्पियर}\times\text{मीटर}}$ = टेसला
79.	चुम्बकीय फ्लक्स (ϕ_B)	चुम्बकीय क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[M^1L^2T^{-2}A^{-1}]$	वेबर
80.	चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण (M)	$\frac{\text{बल आघूर्ण}}{\text{चुम्बकीय क्षेत्र}}$	$[M^0L^2T^0A^1]$	$\text{एम्पियर}\times\text{मीटर}^2$
81.	चुम्बकशीलता (पारगम्यता) (μ)	$\because dB=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$ $\Rightarrow \mu_0=\frac{4\pi r^2\times dB}{Idl\sin\theta}$	$[M^1L^1T^{-2}A^{-2}]$	$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{एम्पियर}^2}$
82.	प्रेरकत्व (L)	$\frac{\text{चुम्बकीय फ्लक्स}}{\text{धारा}}$	$[M^1L^2T^{-2}A^{-2}]$	हेनरी

1.9 विमीय समीकरणों के उपयोग (Uses of Dimensional Equations)

विमीय समीकरणों का उपयोग निम्न प्रकार से किया जा सकता है–

(i) किसी भौतिक राशि के परिमाण को एक मात्रक पद्धति से किसी अन्य मात्रक पद्धति में परिवर्तित करना।

(ii) किसी भौतिक राशि की सत्यता की जांच करना।

(iii) विभिन्न भौतिक राशियों में सम्बन्ध अर्थात् सूत्र स्थापित करना।

(iv) जो मूल राशियाँ इस सूत्र में नहीं आती हैं उनकी विमा शून्य होती है।

(v) इस सूत्र से यह ज्ञात होता है कि व्युत्पन्न मात्रक किन–किन मूल मात्रकों पर तथा किस प्रकार निर्भर करता है।

(i) किसी भौतिक राशि के परिमाण को एक मात्रक पद्धति से दूसरी मात्रक पद्धति में परिवर्तित करना

यदि किसी भौतिक राशि का मात्रक u तथा आंकिक मान n हो तो

$$u \propto \frac{1}{n}$$

$$nu = \text{नियतांक}$$

यदि किसी भौतिक राशि का एक मात्रक पद्धति में मात्रक u_1 तथा परिमाण n_1 हो तो

$$Q = n_1 u_1 \quad ....(1)$$

इसी प्रकार यदि दूसरी मात्रक पद्धति में मात्रक u_2 तथा परिमाण n_2 हो तो

$$Q = n_2 u_2 \quad ......(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$n_1 u_1 = n_2 u_2 \quad ....(3)$$

यदि पहली पद्धति में

$u_1 = [M_1^a L_1^b T_1^c]$ हो जहां a, b, c क्रमशः विमाएँ हैं इसी प्रकार दूसरी पद्धति में

$u_2 = [M_2^a L_2^b T_2^c]$

u_1 तथा u_2 के मान समीकरण (3) में रखने पर

$$n_1[M_1^a L_1^b T_1^c] = n_2 [M_2^a L_2^b T_2^c]$$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

उदा. 1. गुरुत्वीय त्वरण g का मान MKS पद्धति में 9.8 m/s² है। विमीय विधि से इसका मान CGS पद्धति में ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 1.1)

हल– गुरुत्वीय त्वरण की विमा = $[M^0L^1T^{-2}]$

$\therefore \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = -2$

$n_1 = 9.8$

$$\because \quad n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$= 9.8\left[\frac{1kg}{1g}\right]^0\left[\frac{1m}{1cm}\right]^1\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2} = 9.8\left[\frac{1000g}{1g}\right]^0\left[\frac{100cm}{1cm}\right]^1[1]^{-2}$$

$$= 9.8\,[1000]^0\,[100]^1\,[1]^{-2} = 9.8 \times 1 \times 100 \times 1 = 980\ cm/s^2$$

उदा.2. विमीय विधि से ऊर्जा को एक जूल से अर्ग में परिवर्तित करो।

हल– ऊर्जा का मात्रक जूल M. K.S. में होता है तथा अर्ग C.G.S. में होता है अतः मात्रक को M. K. S. से C. G. S. में परिवर्तित करना है। ऊर्जा का विमीय सूत्र $[M^1 L^2 T^{-2}]$

अतः a = 1, b = 2, c = –2

M.K.S. से	C.G.S.
$M_1 = 1\,kg$	$M_2 = 1\,g$
$L_1 = 1m$	$L_2 = 1\,cm$
$T_1 = 1s$	$T_2 = 1s$
$n_1 = 1\,(J)$	$n_2 = ?$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c = 1\left[\frac{1kg}{1g}\right]^1\left[\frac{1m}{1cm}\right]^2\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 1\left[\frac{10^3 g}{1g}\right]^1\left[\frac{10^2 cm}{1cm}\right]^2[1]$$

$$n_2 = 10^3 \times 10^4 \times 1$$

$n_2 = 10^7$ अर्ग, $\quad$ 1 जूल = 10^7 अर्ग

(ii) भौतिक सूत्र की सत्यता की जांच करना–किसी भी विमीय समीकरण के दांयी ओर स्थित राशियों की विमा बांयी ओर स्थित राशियों की विमा के समान होनी चाहिए। इस सिद्धान्त को विमीय समांगता का सिद्धान्त कहते हैं। यदि किसी सूत्र की सत्यता की जांच करनी हो तो दांये पक्ष एवं बांये पक्ष में विमा रख कर देखना चाहिए कि दोनों पक्षों की विमाएं समान हैं या नहीं। **उदाहरण** के लिए, यदि $X = A \pm (BC)^2 \pm \sqrt{DEF}$ तो विमीय समांगता के सिद्धान्त से $[X] = [A] = [(BC)^2] = [\sqrt{DEF}]$

उदा.3. दो दृढ़ आधारों के बीच तनी हुई *l* लम्बाई वाली डोरी को कम्पन्न कराने पर उत्पन्न ध्वनि की आवृत्ति निम्न सूत्र के द्वारा दी जाती है-

(पुस्तक का उदाहरण 1.2)

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{m}}$$

Mg = डोरी का तनाव

m = डोरी की एकांक लम्बाई पर द्रव्यमान

तो सूत्र की सत्यता की जांच करो।

हल– सूत्र के बांये पक्ष n की विमा $[M^0L^0T^{-1}]$

सूत्र का दांया पक्ष

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad \because m = \frac{M}{l}$$

$$m = \frac{M^1}{L^1} = M^1L^{-1}$$

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \text{ की विमा} = \frac{1}{2[L^1]}\sqrt{\frac{ML^1T^{-2}}{M^1L^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{2[L^1]}\sqrt{L^{+2}T^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2[L^1]}[L^{+1}T^{-1}] = \frac{1}{2}[T^{-1}]$$

$$= [M^0L^0T^{-1}]$$

$$[M^0L^0T^{-1}] = [M^0L^0T^{-1}] \qquad ....(1)$$

यहाँ $\frac{1}{2}$ एक शुद्ध संख्या है इसलिए इसकी कोई विमा नहीं है। इस प्रकार समी. (1) से स्पष्ट है कि दिया गया समीकरण विमीय रूप से संगत है।

उदा.4. लाप्लास ने वायु में ध्वनि के वेग के लिए सूत्र $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}}$ प्राप्त किया। यहां v ध्वनि का वेग, P वायुमण्डलीय दाब है तथा d घनत्व तथा γ एक शुद्ध अनुपात है। इस सूत्र की यथार्थता की जांच करो।

हल–सूत्र के बांये पक्ष में स्थित राशि v की विमा होगी

$v = L^1T^{-1}$ तथा दांये पक्ष में स्थित राशियों में γ एक शुद्ध अनुपात है अतः γ एक विमाहीन राशि है। अन्य राशियों की विमा इस प्रकार है–

दाब (P) = $[M^1L^{-1}T^{-2}]$

घनत्व (d) = $[M^1L^{-3}T^0]$

दांये पक्ष की राशियों की विमा

$$= \sqrt{\frac{P}{d}} = \sqrt{\frac{M^1L^{-1}T^{-2}}{M^1L^{-3}}} = \sqrt{L^2T^{-2}} = L^1T^{-1}$$

L.H.S. = R.H.S.

(iii) भौतिक राशियों के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना (विमीय विधि के द्वारा सूत्र की स्थापना करना)

विमीय समांगता के नियम का उपयोग करते हुए विभिन्न भौतिक राशियों में सम्बन्ध व्युत्पन्न किया जा सकता है। यदि यह ज्ञात हो कि दी गयी भौतिक राशि अन्य किन राशियों पर निर्भर करती है तो एक ऐसा समीकरण लिखा जा सकता है जो इन राशियों के बीच सम्बन्ध प्रदर्शित करता है। इस प्रकार प्राप्त सम्बन्ध के बांये पक्ष की की विमा की दांये पक्ष की विमाओं से तुलना करके वांछित सूत्र व्युत्पन्न किया जा सकता है।

उदा.5. स्टोक्स ने यह ज्ञात किया कि यदि किसी पदार्थ की एक छोटी गेंद को श्यान माध्यम में गिरने दिया जाये तो उस गेंद पर माध्यम द्वारा आरोपित विस्कासिता बल F का मान निम्न बातों पर निर्भर करता हैं- (i) गेंद की त्रिज्या (r) (ii) विस्कासिता गुणांक (η) (iii) गेंद का वेग v, बल के लिए सूत्र स्थापित करो। (पुस्तक का उदाहरण 1.3)

हल–चूंकि बल F का मान त्रिज्या (r) विस्कासिता गुणांक (η) और वेग v पर निर्भर करता है। $F \propto r^x \eta^y v^z$

$F = Kr^x \eta^y v^z$ (यहाँ K एक नियतांक)

बांये पक्ष की विमा = $M^1L^1T^{-2}$

दांये पक्ष की विमा = $[L]^x [M^1L^{-1}T^{-1}]^y [L^1T^{-1}]^z$

$= [M^y L^{x-y+z} T^{-y-z}]$

K एक शुद्ध संख्या है इसकी कोई विमा नहीं होती है अतः नियमानुसार

बांये पक्ष की विमा = दांये पक्ष की विमा

$$[M^1 L^1 T^{-2}] = [M^y L^{x-y+z} T^{-y-z}]$$

तुलना करने पर

$y = 1, \quad x - y + z = 1, \quad -y - z = -2,$

$y + z = 2, \quad x = 1, \quad z = 1$

x, y, z के मान समी. (1) में रखने पर

$$F = Kr\eta v$$

प्रयोगों द्वारा गोलाकार गेंद के लिए $K = 6\pi$ प्राप्त होता है।

∴ η विस्कासिता गुणांक (श्यानता गुणांक) वाले माध्यम में r त्रिज्या की गेंद पर विस्कासिता बल $F = 6\pi\eta rv$

उदा.6. एक सरल लोलक का आवर्तकाल उसके द्रव्यमान (m), लम्बाई (*l*) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है सूत्र की स्थापना करो।

हल–

$$T \propto m^x l^y g^z$$

$$T = K m^x l^y g^z \qquad ...(1)$$

जहाँ K एक नियतांक एवं एक विमाहीन राशि है।

अतः बाकी राशियों की विमा निम्न होगी

$T = M^0L^0T^1 \qquad l = M^0L^1T^0$

$m = M^1L^0T^0 \qquad g = M^0L^1T^{-2}$

विमीय समांगता के नियम से

बांये पक्ष की विमा = दांये पक्ष की विमा

$$M^0L^0T^1 = [M^1L^0T^0]^x[M^0L^1T^0]^y[M^0L^1T^{-2}]^z$$

$$= M^x L^{y+z} T^{-2z}$$

तुलना करने पर

$x = 0, \quad y + z = 0, \quad -2z = 1,$

$y = \frac{1}{2}, \quad z = -\frac{1}{2}$

x, y, z के मान समी. (1) में रखने पर

$$T = K m^0 l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$$

$$T = K \frac{l^{1/2}}{g^{1/2}}$$

$$T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$$

प्रयोगों द्वारा $K = 2\pi$ प्राप्त होता है।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.10 विमीय समीकरणों के सीमाबन्धन (Limitations of Dimensional Equations)

(1) विमीय समीकरणों में किसी भौतिक राशि के सूत्र में विद्यमान शुद्ध संख्या एवं विमाहीन नियतांकों के बारे में सूचना प्राप्त नहीं की जा सकती है एवं विमीय विश्लेषण विधि से नियतांकों का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

(2) यदि कोई भौतिक राशि तीन से अधिक राशियों पर निर्भर करती हो तो उनके मध्य सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता है क्योंकि तीन मूल राशियों M.L,T से तीन समीकरण ही स्थापित कर सकते हैं। जैसे पृष्ठ तनाव $T = \frac{hrdg}{2\cos\theta}$

(3) इस विधि से उन सूत्रों को व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता है जिनमें लघुगणकीय, चरघातांकी तथा त्रिकोणमितीय फलनों का उपयोग होता है तथा ना ही इनकी यथार्थता की जांच कर सकते हैं।

(4) यह इस प्रकार की कोई जानकारी नहीं देते जिससे राशि के अदिश या सदिश की जानकारी प्राप्त हो।

महत्वपूर्ण तथ्य

- दो भौतिक राशियों जिनके मात्रक व विमा समान है आवश्यक नहीं है कि वे आपस में समान हों।
- किसी भी सूत्र में किसी भी राशि की घात जितनी अधिक होती है। इसके मापने में उतनी ही अधिक सावधानी बरतनी चाहिए।
- **SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ SI व्युत्पन्न मात्रक**

क्र. सं.	भौतिक राशि	SI मात्रक	
		नाम	प्रतीक
1.	सान्द्रता (पदार्थ की मात्रा की)	मोल / मी.^{3}	$mol\,m^{-3}$
2.	विशिष्ट आयतन	मी.^{3} / किग्रा.	m^3kg^{-1}
3.	शुद्ध गतिक श्यानता	मी.^{2} / से.	m^2s^{-1}
4.	रेखीय या क्षेत्रीय या आयतन प्रसरणीयता	1 / केल्विन	K^{-1}
5.	मोलर ऊर्जा	जूल / मोल	$Jmol^{-1}$

- **समान विमाओं की कुछ भौतिक राशियाँ–**

क्र. सं.	विमायें	राशियाँ
1.	$[M^0L^0T^{-1}]$	आवृत्ति, कोणीय आवृत्ति, कोणीय वेग, वेग प्रवणता, क्षय नियतांक
2.	$[M^1L^2T^{-2}]$	कार्य, आन्तरिक ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा, बल आघूर्ण
3.	$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	दाब, प्रतिबल, प्रत्यास्थता गुणांक, ऊर्जा घनत्व
4.	$[M^1L^1T^{-1}]$	संवेग, आवेग
5.	$[M^0L^1T^{-2}]$	गुरूत्वीय त्वरण, गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता, त्वरण
6.	$[M^1L^2T^{-1}]$	कोणीय संवेग,प्लांक नियतांक
7.	$[M^1L^0T^{-2}]$	पृष्ठ तनाव, पृष्ठीय ऊर्जा
8.	$[M^0L^0T^0]$	विकृति, अपवर्तनांक, सापेक्ष घनत्व, कोण, घनकोण, दूरी प्रवणता, सापेक्ष विद्युतशीलता (परावैद्युतांक), चुम्बकशीलता
9.	$[M^0L^0T^1]$	$\frac{L}{R}, \sqrt{LC}, RC$ जहाँ L = प्रेरकत्व, R = प्रतिरोध, C = धारिता

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. पूरक मात्रकों के नाम लिखिए।

प्र.2. किसी भौतिक राशि की विमा से क्या तात्पर्य है?

प्र.3. विमीय समांगता का सिद्धान्त लिखिए।

प्र.4. लक्स किस भौतिक राशि का मात्रक है?

प्र.5. 1 अश्व शक्ति कितने वॉट के तुल्य है?

प्र.6. $\frac{L}{R}$ किस भौतिक राशि की विमा के तुल्य है?

प्र.7. किसी भौतिक राशि के परिमाण को एक पद्धति से दूसरी पद्धति में परिवर्तन का सूत्र लिखिए।

उत्तरमाला

उ.1. रेडियन तथा स्टेरेडियन

उ.2. भौतिक राशि को मूल मात्रकों M, L, T के रूप में व्यक्त करने के लिए उन पर लगायी गयी घातों को उस भौतिक राशि की विमा कहते हैं।

उ.3. किसी भौतिक समीकरण के विमीय रूप से सही होने के लिए उसके समस्त पदों की विमाएँ एक समान होनी चाहिए इसे विमीय समांगता का सिद्धान्त कहते हैं।

उ.4. प्रदीप्ति घनत्व

उ.5. 1 अश्व शक्ति = 746 वॉट

उ.6. समय।

उ.7. $n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$

1.11 सूक्ष्म एवं वृहद् दूरियों का मापन (Measurement of very small and large distances)

(A) सूक्ष्म दूरियों का मापन (Measurement of very small distances)

अत्यन्त छोटी दूरियाँ (जैसे अणुओं का व्यास, परमाणुओं का आकार आदि) मापने के लिए विशेष तकनीक का उपयोग किया जाता है। इन मापों के लिए वर्नियर कैलिपर्स या पेंचमापी का उपयोग किया नहीं किया जा सकता। प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी की भी कुछ सीमाएँ हैं। प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी 4000 Å–7000 Å तरंगदैर्ध्य परास वाले दृश्य प्रकाश का उपयोग करता है। इसीलिए प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी केवल 10^{-6} मीटर की कोटि के आकार वाले कणों को नाप सकता है। इससे कम आकार वाले कणों को विभेदित नहीं किया जा सकता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में प्रकाश– पुंज के स्थान पर इलेक्ट्रॉन पुंज का उपयोग किया जाता है, इससे 1Å की कोटि के कणों के आकार का मापन किया जा सकता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी पदार्थ के अणुओं व परमाणुओं का विभेदन कर सकता है। आजकल सुरंगन सूक्ष्मदर्शी (tunnelling microscope) बनाये गये हैं जिनकी विभेदन सीमा और भी कम होती है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी व सुरंगन सूक्ष्मदर्शी के अतिरिक्त छोटी दूरियाँ नापने की अप्रत्यक्ष विधि निम्न है :–

1. आणविक व्यास का निर्धारण (Determination of molecular size) : यह औलिक अम्ल (Oelic Acid) के अणुओं का व्यास मापने की व्यावहारिक विधि है। औलिक अम्ल एक द्रव है जिसके अणुओं का व्यास अपेक्षाकृत अधिक होता है। इस विधि में जल पर औलिक अम्ल की सबसे पतली फिल्म बनाई जाती है। फिल्म की मोटाई आणविक व्यास के बराबर मानी जाती है। इसके लिये 20 सेमी^{3} एल्कोहल में 1 सेमी^{3} औलिक अम्ल घोलते हैं। पुनः इस घोल का 1 सेमी^{3} आयतन लेकर 20 सेमी^{3} एल्कोहल में घोलते हैं। इस प्रकार के घोल की सान्द्रता $c = \frac{1}{20 \times 20} = \frac{1}{400}$ सेमी^{3} औलिक अम्ल/एल्कोहल है। अब इस घोल की कुछ बूंदें लेकर एक समतल व चौड़ी ट्रेक में भरे जल के ऊपर डाल देते हैं। माना कि इस घोल की n-बूँदें जल के पृष्ठ पर डाली जाती है। औलिक अम्ल की फिल्म को जल के पृष्ठ पर सावधानी से फैला देते हैं। समय के साथ–साथ एल्कोहल वाष्पीकृत हो जाता है जबकि औलिक अम्ल की फिल्म पीछे रह जाती है। ट्रैसिंग पेपर व ग्राफ पेपर की सहायता से फिल्म का क्षेत्रफल सावधानीपूर्वक नाप लेते हैं।

माना प्रत्येक बूँद का आयतन V सेमी^{3} है।

घोल की n बूँदों का आयतन $= nV$ सेमी^{3}

घोल में औलिक अम्ल की मात्रा या आयतन $= nV \times \frac{1}{400}$ सेमी^{3} .....(1)

यदि फिल्म की मोटाई t हो तथा फिल्म का पृष्ठ क्षेत्रफल A हो, तो औलिक अम्ल का आयतन $= At$ सेमी^{3} ....(2)

समीकरणों (1) व (2) से

$$At = nV \times \frac{1}{400}$$

इससे $$t = \frac{nV}{400A} \text{ सेमी} \quad .....(3)$$

यदि यह माने कि फिल्म की मोटाई केवल एक आणविक व्यास की है, तो समीकरण (3) से फिल्म की मोटाई ज्ञात हो जाती है।

2. परमाणु के आकार के मापन की आवोगाद्रो विधि–

$$\text{परमाणु की त्रिज्या } r = \left(\frac{VM}{2\pi Nm}\right)^{1/3}$$

जहाँ m = पदार्थ का द्रव्यमान

M = पदार्थ का परमाणु भार

V = पदार्थ द्वारा घेरा गया आयतन

N = आवोगाद्रो संख्या। (आवोगाद्रो की परिकल्पना के अनुसार, किसी पदार्थ के एक ग्राम–परमाणु में $N = 6.023 \times 10^{23}$ परमाणु होते हैं, जो पदार्थ का लगभग दो–तिहाई आयतन घेरते है।)

उदा.7. यदि किसी नाभिक का आमाप (जो वास्तव में 10^{-15} से 10^{-14}m के परिसर में है) बढ़ाकर एक तीक्ष्ण पिन की नोक ($10^{-5}m$ से 10^{-4} m के परिसर में) के बराबर कर दिया जाए, तो परमाणु का लगभग आमाप क्या है?

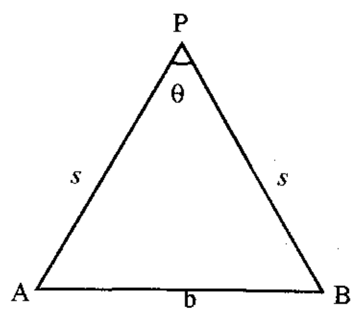
हल– नाभिक का आकार 10^{-15} मी. से 10^{-14} मी. के परिसर में है जबकि तीक्ष्ण पिन की नोंक का आकार 10^{-5} मी. से 10^{-4} मी. के परिसर में है अर्थात् नाभिक के आकार को 10^{10} गुना बढ़ा दिया है। अतः परमाणु के आकार की कोटि 10^{-10} मी. से 10^{10} गुनी बढ़ा दी जाये तब इसका आकार $10^0 = 1$ मी. हो जायेगा। इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी परमाणु में नाभिक आकार में उतना ही छोटा होता है जितनी छोटी लगभग 1 मी. व्यास के गोले के केन्द्र पर रखी गयी तीक्ष्ण पिन की नोक होती है।

(B) वृहद् दूरियों का मापन (Measurement of large distances)

बहुत बड़ी दूरियाँ (जैसे– चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी, किसी तारे की पृथ्वी से दूरी आदि) सीधे मीटर पैमाने या मापक–टेप (measuring tape) से नहीं नापी जा सकती। ऐसी स्थिति में लम्बन विधि का उपयोग किया जाता है।

लम्बन का अर्थ–यदि हम एक वस्तु (जैसे–पैन) को अपने सामने रखें तथा बारी–बारी से अपनी बायीं व दायीं आंख बन्द करके इसे देखें, तो हम देखते हैं कि पृष्ठभूमि के सापेक्ष वस्तु की स्थिति बदलती हुई प्रतीत होती है। इसी को लम्बन (Parallex) कहते हैं। दोनों प्रेक्षण बिन्दुओं के बीच की दूरी को आधारक (basis) कहते हैं। इसमें दोनों आंखों के बीच की दूरी आधारक है।

1. लम्बन विधि या विस्थापन विधि (Parallax Method)–पृथ्वी से दूरस्थ ग्रहों तथा तारों की दूरी मापने की यह सबसे उपयुक्त विधि है।



चित्र 1.3

चित्र के अनुसार किसी दूरस्थ ग्रह P की दूरी s ज्ञात करने के लिए हम इसे पृथ्वी पर दो विभिन्न स्थितियों A व B से, एक ही समय पर देखते हैं। A एवं B के बीच की दूरी AB = b है। इन दो स्थितियों से ग्रह की प्रेक्षण दिशाओं के बीच का कोण (θ) माप लिया जाता है।

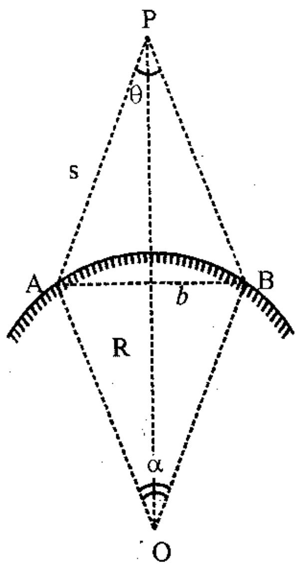
यह कोण $\angle APB = \theta$ लम्बन कोण या लाम्बनिक कोण कहलाता है।

ग्रह की पृथ्वी से दूरी बहुत अधिक हो अतः $\frac{b}{s} << 1$, अतः कोण θ बहुत ही छोटा होता है। ऐसी स्थिति में हम AB को केन्द्र P और त्रिज्या s वाले वृत्त का चाप b मान सकते हैं।

अतः $\theta = \frac{AB}{s} = \frac{b}{s} \Rightarrow s = \frac{b}{\theta}$ जहां θ रेडियन में है।

अतः आधारक b व कोण θ ज्ञात होने पर s की गणना की जा सकती है।

वैकल्पिक विधि–इसके लिए ग्रह को एक ही भेदशाला से दिन के विभिन्न समयों पर देखते हैं। पृथ्वी के घूर्णन को ध्यान में रखते हुए हम दो बिन्दु A व B प्राप्त कर सकते हैं, अतः आधारक $b = AB = R\,\alpha$ (चित्र से)



चित्र 1.4

जिसमें R पृथ्वी की त्रिज्या है (O पृथ्वी का केन्द्र है), α, पृथ्वी के केन्द्र O पर AB द्वारा अन्तरित कोण है। यदि दो प्रेक्षणों के बीच समयान्तराल t हो तथा पृथ्वी का अपनी अक्ष के सापेक्ष घूर्णन काल T = 24 घण्टे हो, तो

$$\text{कोणीय वेग} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2\pi t}{T}$$

$$\therefore \qquad \text{आधारक } b = R\alpha = R\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\therefore \qquad \text{दूरी } s = \frac{b}{\theta} = \frac{R}{\theta}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

अतः ग्रह की दूरी s ज्ञात की जा सकती है।

s के निर्धारण के पश्चात् इसी विधि द्वारा ग्रह का आकार अथवा कोणीय व्यास भी निर्धारित किया जा सकता है :–

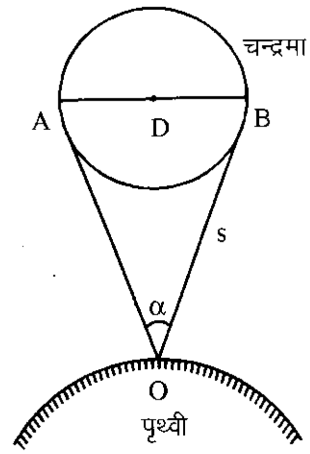
2. आकाशीय पिण्ड का आकार : चन्द्रमा का व्यास (Size of astronomical object : Diameter of Moon): लम्बन विधि द्वारा किसी ग्रह का आकार अथवा कोणीय व्यास निर्धारित कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए चन्द्रमा के व्यास का निर्धारण किया जा सकता है। पृथ्वी तल पर O प्रेक्षण बिन्दु है। यदि चन्द्रमा को दूरदर्शी द्वारा देखा जाए तब इसका प्रतिबिम्ब एक वृत्तीय चकती की भांति बनता है। व्यास के विपरीत सिरों A व B द्वारा अन्तरित कोण α को मापा जाता है अर्थात् $\angle AOB = \alpha$ जो चन्द्रमा का कोणीय व्यास कहलाता है।

यदि पृथ्वी से चन्द्रमा की माध्य दूरी s हो तो $AB = s\,\alpha$

यदि α रेडियन तथा s मीटर तो चन्द्रमा का व्यास $D = AB = s\,\alpha$

अतः s तथा α ज्ञात होने पर चन्द्रमा का व्यास (D) की गणना की जा सकती है।



चित्र 1.5

3. वृहद् दूरियों के मापन की प्रतिध्वनि विधि अथवा परावर्तन विधि–

दूर स्थित पहाड़ी से सीधी ध्वनि के परावर्तन को प्रतिध्वनि कहते है। इस विधि द्वारा पहाड़ी की दूरी ज्ञात की जा सकती है। इसके लिए बन्दूक से एक गोली दूर स्थित पहाड़ी की ओर छोड़ते हैं तथा गोली छोड़ने तथा प्रतिध्वनि के सुनने के बीच के क्षणों का अन्तराल नोट कर लेते हैं। यदि यह समय अन्तराल t हो, ध्वनि की चाल v हो तो पहाड़ी की दूरी s के लिए

$$2s = vt$$

$$\Rightarrow \qquad s = \frac{vt}{2} \qquad \text{.....(1)}$$

उदा.8 (a) 1° (डिग्री) (b) 1′ (1 आर्क मिनट) एवं (c) 1″ (1 आर्क सेकण्ड) के कोणों के मान रेडियन में परिकलित कीजिए ($360° = 2\pi$ rad, $1° = 60′$ एवं $1′ = 60″$ लीजिए)।

हल–(a) $\because$ 360 डिग्री = 2π रेडियन

$\therefore$ 1 डिग्री = $\frac{2\pi}{360}$ रेडियन

1 डिग्री = $\frac{\pi}{180}$ रेडियन

1 डिग्री = 1.745×10^{-2} रेडियन

(b) 1 डिग्री = 60 आर्क मिनट = 1.745×10^{-2} रेडियन

$\therefore$ 1 आर्क मिनट = $\frac{1.745 \times 10^{-2}}{60}$ रेडियन

1 आर्क मिनट = 2.908×10^{-4} रेडियन

1 आर्क मिनट ≈ 2.91×10^{-4} रेडियन

(C) 1 आर्क मिनट = 60 आर्क सेकण्ड

1 आर्क मिनट = 2.908×10^{-4} रेडियन

$\therefore$ 1 आर्क सेकण्ड = $\frac{2.908 \times 10^{-4}}{60}$ रेडियन

1 आर्क सेकण्ड = 4.847×10^{-6} रेडियन

1 आर्क सेकण्ड ≈ 4.85×10^{-6} रेडियन

1.12 वर्नियर कैलीपर्स तथा स्क्रूगेज मापन यंत्रों का अल्पतमांक (Least count of measurement Instruments-Vernier Callipers and Screw gauge)

लम्बाई या दूरी एक मूल भौतिक राशि है। इस दृष्टि से लम्बाई या दूरी का यथार्थ मापन अत्यन्त महत्त्वपूर्ण हो जाता है। सामान्यत: इसके मापन के लिए जो पैमाना हम प्रयुक्त करते हैं उसके द्वारा न्यूनतम 1 मिमी (0.1 सेमी) दूरी का यथार्थ मापन कर सकते हैं। इससे कम दूरियों का यथार्थ मापन इसके द्वारा संभव नहीं है।

किसी यंत्र द्वारा मापा जा सकने वाला न्यूनतम संभव मान उस यंत्र का अल्पतमांक कहलाता है।

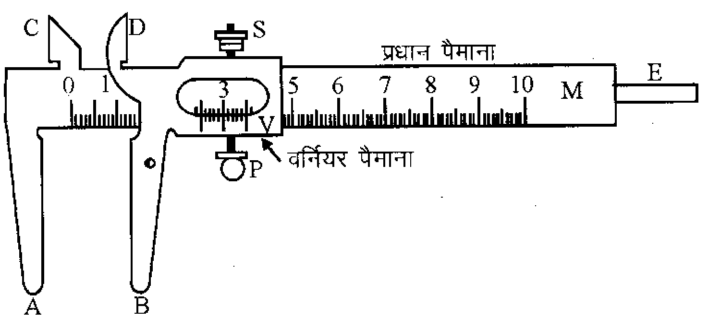
(A) वर्नियर कैलीपर्स (Vernier Callipers)

फ्रेन्च गणितज्ञ पियरे वर्नियर ने सर्वप्रथम एक ऐसा उपकरण बनाया जिसकी सहायता से 0.1 मिमी. या 0.01 सेमी तक की दूरियों का यथार्थ मापन संभव हुआ। इस उपकरण को इनके नाम पर वर्नियर कैलीपर्स कहा जाता है।

उपकरण का वर्णन

वर्नियर पैमाने के मुख्य भाग निम्नानुसार होते हैं–

1. मुख्य पैमाना M–प्रधान पैमाना M अच्छे स्टील का बना होता है तथा इस पर एक–एक ओर सेन्टीमीटर पैमाना तथा दूसरी ओर इन्च पैमाना बना होता है। सेन्टीमीटर पैमाना 1 मिमी. के भागों में अंशांकित होता है जबकि इन्च पैमाना 0.1 इन्च के भागों में अंशांकित होता है।



चित्र 1.6 : वर्नियर कैलीपर्स

2. वर्नियर पैमाना V–यह प्रधान पैमाने पर खिसक सकने वाला पैमाना होता है जिसे किसी भी स्थिति पर पेच S को कसकर स्थिर किया जा सकता है। वर्नियर पैमाने पर सामान्यतः दोनों ओर 10 भाग बने होते हैं। सेन्टीमीटर पैमाने पर, वर्नियर पैमाने के 10 भाग, प्रधान पैमाने के 9 भागों (9 मिमी. या 0.9 सेमी) के तुल्य होते हैं तथा इन्च पैमाने पर ये प्रधान पैमाने के 9 भागों (0.9 इन्च) के तुल्य होते हैं।

3. जबड़े–वर्नियर कैलीपर्स में चार जबड़े होते हैं A, B, C, व D। प्रत्येक जबड़ा प्रधान पैमाने के ठीक लम्बवत् होता है। इनमें से A एवं B निचले जबड़े तथा C एवं D ऊपरी जबड़े कहलाते हैं। A एवं C स्थिर जबड़े होते हैं जबकि B एवं D गतिशील जबड़े हाते हैं जो कि वर्नियर पैमाने के साथ–साथ खिसकते हैं। पिण्ड जिसकी लम्बाई, चौड़ाई का मापन करना है उसे जबड़ों के मध्य सटाकर रखा जाता है। पिण्ड की बाह्य विमाओं के मापन के लिए, उसे निचले जबड़ों के मध्य तथा आन्तरिक विमाओं के मापन के लिए ऊपरी जबड़ों के मध्य कसा जाता है।

4. पत्ती E–वर्नियर पैमाने के साथ एक पतली धातु की पत्ती E संयुक्त होती है जो कि प्रधान पैमाने के पीछे की ओर लगी होती है। यह पत्ती वर्नियर पैमाने के खिसकाने पर प्रधान पैमाने के अन्दर की ओर या बाहर की ओर गति करती है। जब जबड़ों को पूर्णतः सटाकर रखा जाता है तो पत्ती का स्वतंन्त्र किनारा, प्रधान पैमाने के स्वतंत्र किनारे के संपातित होता है। किसी वस्तु की गहराई का मापन, इस पत्ती की सहायता से किया जा सकता है।

वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक

वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक, उसके प्रधान पैमाने के एक भाग एवं वर्नियर पैमाने के एक भाग के अन्तर के समान होता है।

सामान्यतः वर्नियर पैमाने पर बने भाग n, प्रधान पैमाने के एक कम भागों अर्थात् $n-1$ भागों के तुल्य होते हैं। यदि प्रधान पैमाने का एक भाग s तथा वर्नियर पैमाने का एक भाग v है तो

$$nv = (n-1)s$$

$$\Rightarrow \quad nv = ns - s \text{ या } n(s-v) = s$$

या
$$s - v = \frac{s}{n}$$

या

$$\text{वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक} = \frac{\text{प्रधान पैमाने का एक भाग}}{\text{वर्नियर पैमाने के कुल भागों की संख्या}}$$

उदाहरण–यदि वर्नियर पैमाने के 10 भाग, प्रधान पैमाने के 9 भागों के तुल्य हैं तथा प्रधान पैमाने का एक भाग 0.1 सेमी. है तो

$$\text{वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक} = \frac{0.1}{10} = 0.01$$

(B) स्क्रूगेज अथवा पेंचमापी (Screw Gauge)

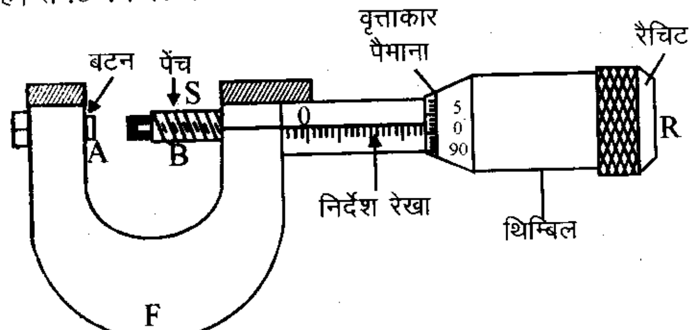
पेचमापी (स्क्रूगेज) पेंच के सिद्धांत पर कार्य करता है तथा यह 0.001 सेमी तक की लघु दूरियों का यथार्थ मापन करता है।

पेंच (स्क्रू) का सिद्धांत– इस सिद्धांत के अनुसार, पेंच पर समान अन्तराल में चूड़ियाँ बनी होती हैं फलतः पेंच को एक पूरा चक्र वर्तुल घुमाने पर इसका शीर्ष आगे या पीछे नियत रेखीय दूरी तय करता है। पेंच के सिद्धांत पर कार्य करने वाले उपकरण हैं–(1) पेंचमापी (स्क्रूगेज) (2) गोलाईमापी।

पेंच की पिच (Pitch) या चूड़ी अन्तराल–पेंच की किन्हीं भी दो क्रमागत चूड़ियों के मध्य रेखीय दूरी का अन्तराल पेंच की पिच या चूड़ी अन्तराल कहलाता है। पेंच को एक पूरा चक्र वर्तुल घुमाने पर इसके शीर्ष द्वारा तय की गई रेखीय दूरी मापकर पेंच की पिच (चूड़ी अन्तराल) को मापा जा सकता है। पेंच का चूड़ी अन्तराल सामान्यतः 1mm या 0.5 mm होता है।

उपकरण का वर्णन– पेंचमापी का नामांकित आरेख चित्र प्रदर्शित है। इसमें U के आकार का एक धातु का फ्रेम F होता है। F के एक सिरे पर सपाट पृष्ठ वाला धातु का एक छोटा टुकड़ा A लगा रहता है; इसे इसका बटन (Stud) कहते हैं। फ्रेम के दूसरे सिरे पर अन्दर से चूड़ी कटा एक बेलनाकार नट लगा रहता है; इस नट में पेंच लगा रहता है। यह बेलनाकार नट फ्रेम F के सिरे से कुछ सेन्टीमीटर तक विस्तारित रहता है तथा मिलीमीटर अथवा अर्द्ध मिलीमीटर में अशांकित रहता है; इसे मुख्य स्केल कहते हैं। इस पर नट के अक्ष के अनुदिश एक आधार रेखा (base line)

होती है, जो निर्देश रेखा (reference line) कहलाती है। पेंच S के दाहिने सिरे पर एक बेलनाकार टोपी (cap) लगी रहती है, इसे थिम्बिल (Thimble) कहते हैं। बेलनाकार टोपी को घुमाकर पेंच को नट के भीतर चलाया जा सकता है। थिम्बिल को 100 बराबर–बराबर भागों में बाँटा जाता है; इसे वृत्तीय स्केल कहते हैं। थिम्बिल के दाहिने सिरे पर एक रैचिट (retchet) R सम्बद्ध रहता है। रैचिट पेंच पर अनावश्यक कसने से रोकता है।



चित्र 1.7 पेंचमापी (स्क्रूगेज)

वह वस्तु जिसकी मोटाई नापनी है, रैचिट की सहायता से A व B के बीच कस दी जाती है, जब वस्तु A व B के बीच ठीक कस जाती है, तो रैचिट R पेंच को बिना चलाए स्वतंत्रता पूर्वक घूमता है।

पेंचमापी का अल्पतमांक– पेंचमापी द्वारा मापी जा सकने वाली न्यूनतम संभव दूरी पेंचमापी का अल्पतमांक कहलाता है। पेंचमापी का वृत्तीय पैमाना पेंच की पिच (चूड़ी अन्तराल) को विभक्त करता है अतः

$$\text{पेंचमापी का अल्पतमांक} = \frac{\text{चूडी अन्तराल (या पिच)}}{\text{वृत्तीय पैमाने पर कुल भागों की संख्या}}$$

पेंचमापी का चूड़ी अन्तराल ज्ञात करने के लिए वृत्ताकार पैमाने को 5 या 10 पूरे चक्कर एक दिशा में घुमाकर, पेंच द्वारा (या वृत्ताकार पैमाने द्वारा) तय की गई रेखीय दूरी माप ली जाती है तथा इस दूरी में दिए गए चक्रों की संख्या का भाग देते हैं। अर्थात्

$$\text{चूडी अन्तराल} = \frac{\text{मुख्य पैमाने पर वृत्ताकार पैमाने द्वारा तय की गई रेखीय दूरी}}{\text{वृत्ताकार पैमाने के चक्रों की संख्या}}$$

[नोट–वर्नियर कैलीपर्स तथा स्क्रूगेज का विस्तृत अध्ययन प्रायोगिक भौतिक विज्ञान XI के अन्तर्गत किया जायेगा]

महत्वपूर्ण तथ्य

10 की घातों के पूर्वलग्न (Metric Prefixes for Powers of 10)

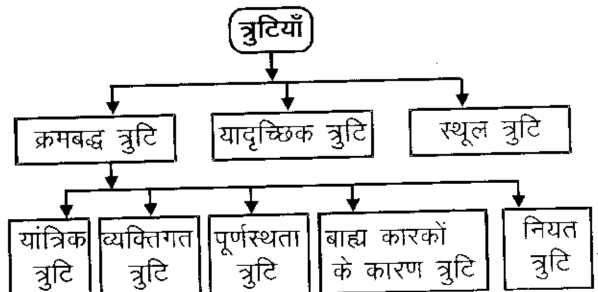
मात्रकों को घटाने तथा बढाने के लिए अग्र पूर्वलग्नों (prefixes) का उपयोग किया जाता है–

घात	पूर्वलग्न	संकेत
10^1	डेका(deca)	da
10^2	हेक्टो (hecto)	h
10^3	किलो (kilo)	k
10^6	मेगा (mega)	M
10^9	गीगा (giga)	G
10^{12}	टेरा (tera)	T
10^{15}	पीटा (peta)	P
10^{18}	एक्सा (exa)	E
10^{21}	जेट्टा (zetta)	Z
10^{24}	योट्टा (yotta)	Y
10^{-1}	डेसी (deci)	d
10^{-2}	सेन्टी (centi)	c
10^{-3}	मिली (milli)	m
10^{-6}	माइक्रो (micro)	μ
10^{-9}	नेनो (nano)	n
10^{-12}	पिको (pico)	p
10^{-15}	फेम्टो (femto)	f
10^{-18}	एट्टो (atto)	a
10^{-21}	जेप्टो (zepto)	z
10^{-24}	योक्टो (yocto)	y

1.13 मापन में शुद्धता तथा त्रुटियाँ (Accuracy and Errors in Measurement)

हम सभी जानते हैं कि मापन की प्रकिया एक तुलना है। किसी भी भौतिक राशि का मापन करने के लिए उसकी तुलना मानक मात्रक से करते हैं। साधारणतया कोई भी मापन शुद्ध नहीं होता है। प्रत्येक मापन में त्रुटि पाई जाती है एवं किसी भी त्रुटि को पूर्णतया नहीं हटाया जा सकता है।

''अतः किसी भी राशि के वास्तविक या सही मान (true value) एवं मापे गये मान का अन्तर ही त्रुटि कहलाती है।



(i) क्रमबद्ध त्रुटि (Systematic errors)

इस प्रकार की त्रुटियों का कारण ज्ञात रहता है एवं इन त्रुटियों में कमी लाई जा सकती है।

(a) यंत्रों के कारण–ये त्रुटि यंत्र की संरचना के बनावट एवं निर्माण में त्रुटि के कारण उत्पन्न होती है। एक ही यंत्र में विभिन्न पैमानों के शून्यांकों का मिलान न होने कारण यंत्र में शून्यांक त्रुटि उत्पन्न होती है। सुग्राही एवं उच्च गुणवत्ता के यंत्रों का उपयोग करके इस प्रकार की त्रुटि को कम किया जा सकता है।

(b) व्यक्तिगत त्रुटि–इस प्रकार की त्रुटि किसी भी व्यक्ति की अनुभव की कमी के कारण उत्पन्न होती है। जैसे– किसी भी उपकरण का ठीक प्रकार से समायोजन नहीं करना, उपकरण को असावधानी से रख कर पाठ्यांक लेना आदि से इस प्रकार की त्रुटि उत्पन्न होती है।

(c) पूर्णस्थता की कमी से त्रुटि–वे त्रुटियाँ जिनका कारण ज्ञात होते हुये भी उन्हें दूर नहीं किया जा सकता है पूर्णस्थता की कमी या अपूर्णता त्रुटि कहलाती है। जैसे–विकिरण हानि होने के उपरान्त ऊष्मा का मापन आदि।

(d) बाह्य कारकों के कारण त्रुटि–प्रयोग के समय ताप, दाब, वायु वेग, आर्द्रता आदि बाह्य कारकों में परिवर्तन हो जाने से भी त्रुटि उत्पन्न होती है। इस प्रकार की त्रुटि को कम करने के लिए बाह्य कारकों के प्रभाव को कम करना होगा।

(e) नियत त्रुटि–यदि सभी प्रेक्षणों में समान त्रुटि की पुनरावृत्ति होती है तब यह त्रुटि नियत त्रुटि कहलाती है।

(ii) यादृच्छिक त्रुटि (Random Errors)

इस प्रकार की त्रुटियाँ अत्यधिक भिन्नता के कारण होती है। कभी–कभी इस प्रकार की त्रुटियाँ अवसरीय त्रुटि कहलाती है। यदि कोई व्यक्ति अपने पाठ्यांकों की पुनरावृत्ति करे तो व्यक्ति प्रत्येक प्रेक्षण में त्रुटि करता है एवं इस प्रकार की त्रुटि को अंकगणितीय माध्य के द्वारा कम करके शुद्धतम मान प्राप्त किया जा सकता है।

माना किसी राशि के लिए लिये गये n पाठ्यांकों का मान क्रमशः $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ तो शुद्ध मान

$$\bar{a} = a_{\text{माध्य}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n}$$

$$a_{\text{माध्य}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

यदि प्रेक्षणों की संख्या n गुना बढ़ा दें तो त्रुटि $\frac{1}{n}$ गुना कम हो जाती है।

(iii) स्थूल त्रुटियां (Gross Errors)

व्यक्ति की असावधानी के कारण मापन में जो त्रुटि प्रवेश कर जाती है। वह स्थूल या सम्पूर्ण त्रुटि कहलाती है। ये निम्न कारणों से उत्पन्न होती है–

- यंत्रों को बिना समायोजन के पाठ्यांक लेना।
- गलत तरीकों से पाठ्यांक लेना।
- पाठ्यांक लिखते समय गलती कर देना।
- गणना के समय पाठ्यांक गलत रख देना।

1.13.1 (a)परम त्रुटि, आपेक्षिक त्रुटि एवं प्रतिशत त्रुटि (Absolute Error, Relative Error and Percentage Error)

(i) परम त्रुटि या निरपेक्ष त्रुटि–किसी भौतिक राशि के वास्तविक मान तथा प्रेक्षित मान के अन्तर को परम त्रुटि कहते हैं। इसे Δa से प्रदर्शित किया जाता है। यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$ किसी व्यक्ति के द्वारा मापे गये मान है तो इनका माध्य ही शुद्ध मान होगा।

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n}{n}$$

अतः किसी राशि के मापे गये परम त्रुटि की परिभाषा से

$$\Delta a_1 = a_m - a_1$$
$$\Delta a_2 = a_m - a_2$$
$$\Delta a_3 = a_m - a_3$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots$$
$$\Delta a_n = a_m - a_n$$

परम त्रुटि का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

परन्तु परम त्रुटि का परिमाण $|\Delta a|$ सदैव ही धनात्मक होगा।

(ii) माध्य परम त्रुटि–किसी राशि के सभी मापन से प्राप्त परम त्रुटियों के परिमाण का अंकगणितीय माध्य, परम त्रुटि कहलाता है। इसे $\overline{\Delta a}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\overline{\Delta a} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + \ldots\ldots + |\Delta a_n|}{n}$$

$$\overline{\Delta a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i$$

(iii) आपेक्षिक त्रुटि या सापेक्ष या भिन्नात्मक त्रुटि

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि} = \frac{\text{माध्य परम त्रुटि}}{\text{माध्यमान}}$$

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि} = \frac{\overline{\Delta a}}{a_m}$$

(iv) प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\text{माध्य परम त्रुटि}}{\text{माध्यमान}} \times 100$

$$= \frac{\overline{\Delta a}}{a_m} \times 100\%$$

उदा. 9. कॉंच का अपवर्तनांक 1.52, 1.48, 1.50, 1.54 तथा 1.46 माना गया। निम्न की गणना कीजिए-

(i) औसत मान **(ii) परम त्रुटि**

(iii) आपेक्षिक त्रुटि **(iv) प्रतिशत त्रुटि।**

(पुस्तक का उदाहरण 1.4)

हल– प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम अपवर्तनांकों का माध्य ज्ञात करना होगा–

$$\bar{\mu} = \frac{1.52 + 1.48 + 1.50 + 1.54 + 1.46}{5}$$

$$\bar{\mu} = \frac{7.50}{5} = 1.50$$

परम त्रुटि–

$$\Delta\mu_1 = 1.50 - 1.52 = -0.02$$
$$\Delta\mu_2 = 1.50 - 1.48 = +0.02$$
$$\Delta\mu_3 = 1.50 - 1.50 = 0.00$$
$$\Delta\mu_4 = 1.50 - 1.54 = -0.04$$
$$\Delta\mu_5 = 1.50 - 1.46 = +0.04$$

माध्य निरपेक्ष त्रुटि $\overline{\Delta\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta\mu_i|}{n}$

$$\Rightarrow \quad \overline{\Delta\mu} = \frac{0.02 + 0.02 + 0.00 + 0.04 + 0.04}{5} = \frac{0.12}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\Delta\mu} = 0.024 = 0.02$$

आपेक्षिक त्रुटि $= \pm\frac{\Delta\bar{\mu}}{\bar{\mu}} = \pm\frac{0.02}{1.50} = \pm 0.013 = \pm 0.01$

प्रतिशत त्रुटि $= \pm 0.013 \times 100 = \pm 1.3\%$

उदा.10. राष्ट्रीय प्रयोगशाला में स्थित एक मानक घड़ी से तुलना करके दो घड़ियों की जांच की जा रही है। मानक घड़ी जब दोपहर के 12 : 00 : 00 का समय दर्शाती है, तो इन दो घड़ियों के पाठ्यांक इस प्रकार हैं-

	घड़ी 1	घड़ी 2
सोमवार	12 : 00 : 05	10 : 15 : 06
मंगलवार	12 : 01 : 15	10 : 14 : 59
बुधवार	11 : 59 : 08	10 : 15 : 18
बृहस्पतिवार	12 : 01 : 50	10 : 15 : 07
शुक्रवार	11 : 59 : 15	10 : 14 : 53
शनिवार	12 : 01 : 30	10 : 15 : 24
रविवार	12 : 01 : 19	10 : 15 : 11

यदि आप कोई ऐसा प्रयोग कर रहे हों जिसके लिए आपको परिशुद्ध समय अंतराल मापन की आवश्यकता है, तो इनमें से आप किस घड़ी को वरीयता देंगे? क्यों?

हल–दिए गए प्रेक्षणों से यह स्पष्ट होता हैं कि सात दिनों में घड़ी 1 के प्रेक्षणों में अंतर का परिसर 162 सेकण्ड है जबकि घड़ी 2 के प्रेक्षणों में अंतर का परिसर 31सेकण्ड है। जिससे घड़ी 1 के पाठ्यांक, घड़ी 2 के पाठ्यांक की तुलना में मानक समय के अधिक निकट है। यहाँ महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि शून्यांक त्रुटि की तुलना में समय में होने वाला परिवर्तन अधिक महत्व रखता है क्योंकि शून्यांकी त्रुटि को तो कभी भी सरलता से दूर किया जा सकता है। इस प्रकार घड़ी 1 की तुलना में घड़ी 2 को वरीयता दी जाएगी।

1.13.2 त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors)

जब किसी राशि का योग, व्यकलन, गुणन, विभाजन, गणितीय प्रक्रिया द्वारा किया जाता है तो भौतिक राशियों के मापन में त्रुटियाँ जुड़ जाती है।

(i) राशियों के योग में त्रुटि (Error in sum of the quantities)

माना $x = a + b$ ......(1)

माना Δa = राशि a की परम त्रुटि

Δb = राशि b की परम त्रुटि

Δx राशियों के योग के लिए परम त्रुटि

समीकरण (1) से

$$(x \pm \Delta x) = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$$
$$= (a + b) \pm \Delta a \pm \Delta b$$
$$x \pm \Delta x = x \pm \Delta a \pm \Delta b$$
$$\pm \Delta x = \pm \Delta a \pm \Delta b.$$

अतः Δx के चार सम्भावित मान हो सकते हैं।

$(+\Delta a + \Delta b), (+\Delta a - \Delta b), (-\Delta a + \Delta b), (-\Delta a - \Delta b)$

अतः x के लिए अधिकतम परम त्रुटि

$$\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$$

(ii) राशियों के व्यकलन में त्रुटि (Error in difference of the quantities)

$$x = a - b$$

माना Δa = a राशि के लिए परम त्रुटि

Δa = a राशि के लिए परम त्रुटि

Δx = x के लिए परम त्रुटि

$$(x \pm \Delta x) = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$
$$= a \pm \Delta a - b \mp \Delta b$$
$$(x \pm \Delta x) = (a - b) \pm \Delta a \mp \Delta b$$
$$\pm \Delta x = \pm \Delta a \mp \Delta b$$

Δx के चार सम्भावित मान होंगे–

$(+\Delta a - \Delta b), (-\Delta a + \Delta b), (-\Delta a - \Delta b), (+\Delta a + \Delta b)$

इसी प्रकार व्यवकलन में भी अधिकतम परम त्रुटि

$$\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$$

अतः किन्हीं दो राशियों के योग या व्यवकलन में अधिकतम परम त्रुटि उन अलग–अलग राशियों की परम त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

(iii) राशियों के गुणनफल में त्रुटि (Error in Product of quantities)

माना

$$x = a \times b$$

Δa = राशि a के लिए परम त्रुटि

Δb = राशि b के लिए परम त्रुटि

Δx = a, b के गुणनफल के लिए परम त्रुटि

$$(x \pm \Delta x) = (a \pm \Delta a) \times (b \pm \Delta b)$$
$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right) b\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)$$
$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = ab\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}\right)$$
$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = x\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}\right)$$
$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$$

$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)\left(\frac{\Delta b}{b}\right)$ दोनों के मान बहुत छोटे होते हैं एवं गुणनफल और भी कम होगा। अतः नगण्य मानने पर–

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}$$

$\frac{\Delta x}{x}$ चार सम्भावित मान–

$$\left(+\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right); \left(+\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right); \left(-\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right); \left(-\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right)$$

अधिकतम सम्भावित मान–

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

(iv) राशियों के भाग में त्रुटि (Error in Division of quantities)

$$x = \frac{a}{b}$$
$$(x \pm \Delta x) = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b}$$
$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)}{b\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)}$$
$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = x\left(\frac{1 \pm \frac{\Delta a}{a}}{1 \pm \frac{\Delta b}{b}}\right)$$
$$\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = \left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta b}{b}\right) = 1 \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b} \mp \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$$

$\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}$ के मान बहुत छोटे होते हैं अतः इसका गुणनफल और भी कम होगा।

अतः नगण्य मानने पर–

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b}$$

$\frac{\Delta x}{x}$ के चार सम्भावित मान हो सकते हैं–

$$\left(+\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right); \left(+\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right); \left(-\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right); \left(-\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

अधिकतम मान–

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

अतः दो राशियों के गुणन या भागफल की प्रक्रिया में आपेक्षिक त्रुटियों का अधिकतम मान उन अलग–अलग राशियों के आपेक्षिक त्रुटियों

के योग के बराबर होता है।

(v) दो राशियों की घातों के कारण त्रुटि (Error in quantitiy raised to some power)

$$x=\frac{a^n}{b_m}$$

दोनों तरफ log लेने पर–

$$\log x = \log a^n - \log b^m$$
$$\log x = n\log a - m\log b$$

दोनो तरफ अवकलन करने पर–

$$\frac{dx}{x} = n\frac{da}{a} - m\frac{db}{b}$$

आपेक्षिक त्रुटि के रूप में $\pm\frac{\Delta x}{x} = \pm\, n\frac{\Delta a}{a} \mp m\frac{\Delta b}{b}$

अधिकतम मान $\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(n\frac{\Delta a}{a} + m\frac{\Delta b}{b}\right)$

उदा. 11. एक प्रयोग में दो संधारित्रों की धारिताएँ (1.5 ± 0.2) μF एवं (2.6 ± 0.1) μF मापी गई। जब दोनों संधारित्रों को समान्तर क्रम में जोड़ा गया हो तो कुल धारिता ज्ञात कीजिए एवं साथ ही प्रतिशत त्रुटि भी ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 1.5)

हल–यहाँ C_1, C_2 संधारित्र की धारिताएँ हैं तो

$C_1 = (1.5 \pm 0.2)\,\mu F$
$C_2 = (2.6 \pm 0.1)\,\mu F$

संधारित्रों के समान्तर क्रम संयोजन में–

$C_p = C_1 + C_2$
$C_p = 1.5 + 2.6 = 4.1\,\mu F$
$\Delta C_p = \pm(\Delta C_1 + \Delta C_2)$
$= \pm(0.2 + 0.1) = \pm 0.3\,\mu F$

प्रतिशत त्रुटि $= \pm\frac{\Delta C_p}{C_p}\times 100 = \pm\frac{0.3}{4.1}\times 100 = \pm 7.3\%$

कुल धारिता $C_p = (4.1 \pm 0.3)\,\mu F$

या कुल धारिता $C_p = (4.1\,\mu F \pm 7.3\%)$

उदा.12. दो सिलेण्डरों की लम्बाई $l_1 = (5.62 \pm 0.01)$ cm तथा $l_2 = (4.34 \pm 0.02)$ cm लम्बाई का अन्तर एवं प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करो।

हल–यहाँ $l_1 = (5.62 \pm 0.01)$ cm

$l_2 = (4.34 \pm 0.02)$ cm
$l' = l_1 - l_2 = (5.62 - 4.34) = 1.28$ cm
$\Delta l' = \pm(\Delta l_1 + \Delta l_2) = \pm(0.01 \pm 0.02)$
$= \pm 0.03$

प्रतिशत त्रुटि $= \pm\frac{0.03}{1.28}\times 100 = \pm 2.34\%$

लम्बाई में अन्तर $= (1.28 \pm 0.03)$ cm
$= 1.28\text{ cm} \pm 2.34\,\%$

उदा. 13. किसी तापमापी द्वारा मापे गये दो पिण्डों के ताप क्रमशः $t_1 = 10°C \pm 0.5°C$ एवं $t_2 = 20°C \pm 0.5\,°C$ हैं। इन पिण्डों का तापान्तर और उसमें उत्पन्न त्रुटि परिकलित कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 1.6)

हल–यहाँ $t_1 = (10 \pm 0.5)°C$
$t_2 = (20 \pm 0.5)°C$

∴ तापान्तर $\Delta t = t_2 - t_1$
$\Delta t = (20 \pm 0.5) - (10 \pm 0.5)$
$= (20 - 10) \pm (0.5 \pm 0.5)$
$= (10 \pm 1)°C$

उदा. 14. किसी पटल की लम्बाई एवं चौड़ाई (3.2 ± 0.2) cm एवं (1.2 ± 0.1) cm नापी गई है तो इसका क्षेत्रफल एवं त्रुटियाँ ज्ञात कीजिए। (पाठ्यपुस्तक उदाहरण 1.7)

हल–यहाँ $l = (3.2 + 0.2)$ cm $\Delta l = 0.2$ cm
$b = (1.2 \pm 0.1)$ cm $\Delta b = 0.1$ cm

क्षेत्रफल $A = l \times b = 3.2 \times 1.2 = 3.84\,cm^2$

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}\right) = \pm\left(\frac{0.2}{3.2} + \frac{0.1}{1.2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{A} = \pm\left(\frac{0.56}{3.84}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta A = \pm\frac{0.56}{3.84}\times 3.84 = \pm 0.56$$

∴ क्षेत्रफल $A = (3.84 \pm 0.56)\,cm^2$

उदा.15. प्रतिरोध R = V/I, जहाँ V = (100 ± 5)V वोल्ट एवं I = (10 ± 0.2) एम्पियर है। R में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 1.8)

हल– चूंकि $V = (100 \pm 5)$ वोल्ट

अतः $\Delta V = 5$ वोल्ट, $I = (10 \pm 0.2)$ एम्पियर
$\Delta I = 0.2$ एम्पियर

∵ $R = \frac{V}{I}$

∴ R में कुल प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta R}{R}\times 100 = \frac{\Delta V}{V}\times 100 + \frac{\Delta I}{I}\times 100$$

$$\frac{\Delta R}{R}\times 100 = \frac{5}{100}\times 100 + \frac{0.2}{10}\times 100$$

$= 5\% + 2\% = 7\%$

उदा.16. यदि $Z = \frac{A^4B^{1/3}}{CD^{3/2}}$ हो तो Z की आपेक्षिक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल– ∵ $Z = \frac{A^4B^{1/3}}{CD^{3/2}}$

∴ Z में आपेक्षिक त्रुटि

$$\frac{\Delta Z}{Z} = 4\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + \left(\frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta D}{D}\right)$$

1.14 सार्थक अंक (Significant figures)

किसी भौतिक राशि को शुद्ध रूप में व्यक्त करने वाले अंकों को सार्थक अंक कहा जाता है एवं दूसरे शब्दों में किसी निश्चित भौतिक राशि के माप की व्याख्या करने के लिए आवश्यक अंकों की संख्या को सार्थक अंक कहते हैं।

सार्थक अंक ज्ञात करने के लिए नियम प्रमुख हैं–

(i) सभी अशून्य अंक सार्थक अंक होते हैं।

उदाहरण के लिए $a = 0.3964$ में चार सार्थक अंक हैं जबकि $a = 0.294$ में तीन सार्थक अंक हैं। $a = 432$ में तीन सार्थक अंक हैं।

(ii) दो अशून्य अंकों के मध्य आने वाले सभी शून्य सार्थक होते हैं। जैसे $x = 2.00042$ में सार्थक अंक 6 हैं तथा 1.0608 में 5 हैं। $x = 1002$ में सार्थक अंक चार हैं।

(iii) यदि संख्या एक से कम हो तो दशमलव बिन्दु के दाहिने तथा अशून्य अंक के बायीं ओर उपस्थित सभी शून्य सार्थक अंक नहीं होंगें। जैसे $x = 0.0036$ में सार्थक अंक 2 है।

(iv) ऐसी संख्या जिसमें दशमलव बिन्दु हो, दशमलव बिन्दु के अन्तिम अशून्य अंक के पश्चात् दाहिनी ओर आने वाले सभी शून्य सार्थक अंक होते

हैं।

जैसे 0.0600 में 6, 0, 0 तीन सार्थक अंक हैं। परन्तु 6 से पहले वाला अंक सार्थक अंक नहीं होगा। 3.500 से चार सार्थक अंक हैं। 201.0 में चार सार्थक अंक हैं।

(v) ऐसी संख्या जिसमें दशमलव नहीं हो, अशून्य अंक के दाहिनी ओर स्थित सभी शून्य सार्थक नहीं होते हैं। जैसे 2000 में केवल 1 ही सार्थक अंक है। जबकि 23600 में तीन सार्थक अंक हैं।

(vi) अन्तिम अशून्य राशि के दायीं ओर आने वाले सभी शून्य सार्थक होते हैं यदि इनको मापन द्वारा प्राप्त किया गया है। जैसे कि एक वस्तु का वेग 2010 m/s है तो सार्थक अंक 4 होंगे यदि 2.010 m/s है तो भी सार्थक अंक 4 ही होंगे। यदि 2.010×10^5 m/s हैं तो भी सार्थक अंक 4 ही होंगे।

(vii) इसमें 10 की घातों को सार्थक अंकों में नहीं गिना जाता है। जैसे 1.6×10^{-19} में केवल दो ही सार्थक अंक होते हैं।

(viii) दशमलव की स्थिति बदलने से सार्थक अंकों की संख्याएँ नहीं बदलती हैं। जैसे 28.4 और 2.84 में समान 3 सार्थक अंक होंगे।

उदा.17. निम्नलिखित के लिए सार्थक अंक लिखो–

(i) 5238 N (ii) 4200 kg. (iii) 34.000 m. (iv) 0.02340 N/m,

हल– (i) 5238N के लिए सार्थक अंक 4 होंगे।

(ii) 4200 kg के लिए 4 सार्थक होंगे।

(iii) 34.000 m में 5 सार्थक अंक होंगे।

(iv) 0.02340 N/m में 4 सार्थक होंगे।

महत्वपूर्ण तथ्य

सार्थक अंकों की अंकगणितीय संक्रियाएँ
(Arithmatical operations with significant figures)

योग एवं व्यवकलन–संख्याओं के योग अथवा व्यवकलन से प्राप्त परिणाम में दशमलव के बाद उतने ही सार्थक अंक रहने देने चाहिये जितने कि योग या व्यवकलित की जाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम सार्थक अंक हैं।

उदाहरण (1) माना 3.7 *m*, 13.07 *m*, 0.33 *m* के मापन के योग पर 17.10 *m* प्राप्त होता है परन्तु इसे पूर्णांकित करते समय दी गई संख्याओं में सबसे कम परिशुद्ध (3.7*m*) माप दशमलव के स्थान तक ही यथार्थ है। अतः योग को 17.1*m* तक पूर्णांकित करते हैं।

उदाहरण (2) जब 4.587 मीटर में से 4.5 मी. को घटाते हैं तो 0.087 मी. प्राप्त होता है। इसे पूर्णांकित करते समय दी गई संख्याओं में सबसे कम परिशुद्ध (4.5) माप दशमलव के एक स्थान तक ही यथार्थ है। अतः व्यवकलन को 0.1 मी. तक पूर्णांकित करते हैं।

गुणन एवं भाग–गुणन एवं भाग की प्रक्रिया के पश्चात् गुणनफल एवं योगफल में सार्थक अंकों की संख्या प्रेक्षण में आने वाली राशियों से न्यूनतम सार्थक अंक के समान होती है।

उदाहरण के लिए–

$$\text{घनत्व} = \frac{4.237}{2.51} g/cm^3 = 1.6880\, g/cm^3$$

$$= 1.69\, g/cm^3$$

यहां घनत्व को तीन सार्थक अंकों तक लिखा जाना है।

1.15 अंकों का पूर्णांकन करना (Rounding off Digits)

किसी संख्या को निश्चित सार्थक अंकों वाली संख्या में परिवर्तन करने के लिए समीपता के सिद्धान्त का उपयोग किया जाता है। इस प्रक्रिया को पूर्णांकित कहते हैं। इसके लिए निम्न नियम हैं–

(i) जिस अंक को पूर्णांकित करना है यदि उससे अगला अंक 5 से कम है तब पूर्णांकित किये जाने वाले अंक को अपरिवर्तित रहने देते हैं।

उदाहरण के लिए 7.82 को 7.8 एवं 1.43 को 1.4 में पूर्णांकित करते हैं।

(ii) यदि अंक 5 से अधिक है तो पूर्णांकित किये जाने वाले अंक में एक जोड़ देते हैं। जैसे 7.87 को 7.9 तथा 1.47 को 1.5 लिखा जायेगा।

(iii) जिस अंक को पूर्णांकित करना है उसके बाद आने वाला अंक 5 है एवं 5 के पश्चात् शून्य के अलावा दूसरा अंक आता है तो पूर्णांकित करने वाले अंक में 1 जोड़ दिया जाता है।

जैसे 12.651 को 12.7 तथा 7.358 को 7.4 लिखा जायेगा।

(iv) जिस अंक को पूर्णांकित करना है उसके बाद वाला अंक 5 है एवं 5 के पश्चात् शून्य आता है परन्तु यदि 5 से पूर्व का अंक सम हो तो पूर्णांकित किये जाने वाले अंक को अपरिवर्तित रहने देते हैं।

उदाहरण के लिए 3.250 को 3.2 में एवं 9.650 को 9.6 में लिखा जाता है अथवा 3.25 को 3.2 में व 9.65 को 9.6 में।

(v) जिस अंक को पूर्णांकित करना है उसके बाद वाला अंक 5 है एवं 5 के पश्चात् शून्य है परन्तु यदि 5 से पूर्व का अंक विषम हो तो तब उसमें 1 जोड़ देते हैं।

उदाहरण के लिए 1.750 को 1.8 एवं 3.150 को 3.2 द्वारा पूर्णांकित करते हैं अथवा 1.75 को 1.8 व 3.15 को 3.2 में।

उदा.18. किसी घन की प्रत्येक भुजा की माप 5.302 m है। उचित सार्थक अंकों तक घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 1.9)

हल– यहां दी गई घन की भुजा की माप 5.302 मी. में सार्थक अंकों की संख्या 4 है अतः पृष्ठ क्षेत्रफल व आयतन में भी सार्थक अंकों की संख्या 4 होनी चाहिए।

$$\because \quad \text{घन का पृष्ठ क्षेत्रफल} = 6(\text{भुजा})^2$$
$$= 6(5.302)^2 \text{ मी.}^2$$
$$= 6 \times 28.111204 \text{ मी.}^2$$
$$= 168.667224 \text{ मी.}^2 = 168.7 \text{ मी.}^2$$

$$\text{घन का आयतन} = (\text{भुजा})^3$$
$$= (5.302)^3 \text{ मी.}^3$$
$$= 149.045604 \text{ मी.}^3$$
$$= 149.0 \text{ मी.}^3$$

उदा.19. किसी पदार्थ के 5.74 g का आयतन 1.2 cm^3 है। सार्थक अंकों को ध्यान में रखते हुए इसका घनत्व व्यक्त कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 1.10)

हल– प्रश्नानुसार द्रव्यमान = 5.74 ग्राम में सार्थक अंक 3 हैं जबकि आयतन = 1.2 सेमी.^{3} में सार्थक अंक 2 है। अतः घनत्व को 2 सार्थक अंकों तक लिखा जाना है।

$$\because \quad \text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{5.74}{1.2} \frac{\text{ग्राम}}{\text{सेमी.}^3}$$

$$= 4.7833 \frac{\text{ग्राम}}{\text{सेमी.}^3}$$

$$= 4.8 \frac{\text{ग्राम}}{\text{सेमी.}^3}$$

उदा.20. निम्न को सही सार्थक अंकों तक हल कीजिए–

(i) $(4.0 \times 10^{-4}) - (2.5 \times 10^{-6})$

(ii) $\dfrac{2.51 \times 10^{-4} \times 1.81 \times 10^{7}}{0.4463}$

(iii) 6.2 ग्राम + 4.33 ग्राम + 17.456 ग्राम

(iv) 943 × 0.00345

हल- (i) माना कि $a = 4.0 \times 10^{-4} = 0.00040$ (सार्थक अंकों की संख्या 2)

$b = 2.5 \times 10^{-6} = 0.0000025$ (सार्थक अंकों की संख्या 2)

$\therefore\ a-b = 0.00040 - 0.0000025$

$= 0.0003975 = 3.975 \times 10^{-4}$

$= 4.0 \times 10^{-4}$ (2 सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर)

(ii) $\dfrac{2.51\times10^{-4}\times1.81\times10^{7}}{0.4463} = 10.1795\times10^{3}$

$= 10.2 \times 10^{3}$ (3 सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर)

(iii) 6.2 ग्राम + 4.33 ग्राम + 17.456 ग्राम = 27.986 ग्राम

= 28.0 ग्राम (दशमलव के एक स्थान तक पूर्णांकित करने पर)

(iv) $943 \times 0.00345 = 3.25335 = 3.25$

(3 सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर)

महत्त्वपूर्ण तथ्य

• अंकगणितीय गणनाओं के परिणामों में अनिश्चितता निर्धारण के नियम (Rules for determining the uncertainty in the results of arithmatic calculations)

1. यदि किसी पतली आयताकार शीट की लम्बाई तथा चौड़ाई, किसी मीटर पैमाने से मापने पर क्रमशः 16.2 सेमी. तथा 10.1 सेमी. है तो यहां प्रत्येक माप में तीन सार्थक अंक हैं इसका तात्पर्य यह है कि लम्बाई को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है–

$l = (16.2 \pm 0.1)$ सेमी.

$= (16.2$ सेमी.$\pm 0.6\%)$

इसी प्रकार चौड़ाई $b = (10.1 \pm 0.1)$ सेमी.

आयताकार शीट का क्षेत्रफल

$A = lb$

$= 16.2 \times 10.1$ सेमी.^{2}

$A = 163.62$ सेमी.^{2}

क्षेत्रफल में त्रुटि $\dfrac{\Delta A}{A} = \pm\left[\dfrac{\Delta l}{l} + \dfrac{\Delta b}{b}\right]$

$= \pm\left[\dfrac{0.1}{16.2} + \dfrac{0.1}{10.1}\right]$

$= \pm[0.016]$

$\Delta A = \pm[0.016] \times A$

$= \pm[0.016] \times 18.62$

$\Delta A = \pm 2.61792$ सेमी.^{2}

अतः $A \pm \Delta A = (163.62 \pm 2.61792)$ सेमी.^{2}

$= (164 \pm 3)$ सेमी.^{2}

यहाँ 3 सेमी.^{2} आयताकार शीट के क्षेत्रफल की गणना में त्रुटि अथवा अनिश्चितता है।

2. यदि प्रयोग द्वारा प्राप्त संख्याओं के समुच्चय में n सार्थक अंक हो तब संख्याओं के संयोजन से प्राप्त परिणाम भी n सार्थक अंकों तक वैध (Valid) होगा।

उदाहरण–13.9 ग्राम–6.06 ग्राम = 7.84 ग्राम यहां 7.84 ग्राम के स्थान पर 7.8 ग्राम उपयुक्त होगा क्योंकि दशमलव के बाद कम से कम अंकों की संख्या को आधार माना जाता है। इसमें कम से कम सार्थक अंकों की संख्या को आधार नहीं लिया जाता है।

3. किसी संख्या के मान में आपेक्षिक त्रुटि, जो अभीष्ट सार्थक अंकों तक दी गयी हो, n के साथ–साथ दी गयी संख्या पर भी निर्भर करती है।

उदाहरण–द्रव्यमान 1.02 ग्राम के मापन में यथार्थता ±0.01 ग्राम है जबकि 9.88 ग्राम भी ±0.01 ग्राम तक ही यथार्थ है।

1.02 में आपेक्षिक त्रुटि $= \pm\dfrac{0.01}{1.02}\times100\% = \pm1\%$

इसी प्रकार, 9.88 में आपेक्षिक त्रुटि $= \pm\dfrac{0.01}{9.88}\times100\%$

$= \pm0.1\%$

इस प्रकार बहुपदीय गणनाओं में मध्यवर्ती परिणाम को ज्ञात करने में प्रत्येक माप को अल्पतम यथार्थ माप से एक सार्थक अंक अधिक रखना चाहिए।

• परिमाण की कोटि–विज्ञान में संख्याओं को $M \times 10^x$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। जहाँ M, 1 व 10 के बीच संख्या है तथा x पूर्णांक है। राशि के परिमाण की कोटि 10 की घात के रूप में होगी। यह घात ज्ञात करने के लिए राशि के मान को संक्षिप्त करना पड़ेगा। संक्षिप्तकरण (Rounding off) करते समय हम अंतिम अंक जो 5 से कम हैं को छोड़ देते हैं। यदि अंतिम अंक 5 या 5 से अधिक हो तो उसके पूर्व अंक को 1 से बढ़ा देते हैं। उदाहरण के लिए–

(i) निर्वात् में प्रकाश का वेग $= 3 \times 10^8$ m/s $\approx 10^8$ m/s $(\because 3 < 5)$

(ii) इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31}$ kg $\approx 10^{-30}$ kg $(\because 9.1 > 5)$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. X-दिशा में गतिमान किसी कण की स्थिति समय t पर निम्न प्रकार निर्भर करती है– $x = at^2 - bt^3$

नियतांकों a व b के मात्रक तथा विमीय सूत्र लिखिये।

प्र.2. किसी कण का विस्थापन $x = a + bt + ct^3$ से दिया जाता है, जिसमें t समय सेकण्ड में तथा x मीटर में है। नियतांकों a, b व c के मात्रक तथा विमायें ज्ञात कीजिए।

प्र.3. किसी कण का वेग, समीकरण $v = at + \dfrac{b}{t+c}$ के अनुसार समय t पर निर्भर करता है। a, b तथा c की विमायें लिखिये।

प्र.4. किसी कण का वेग v, समीकरण $v = a + bt + \dfrac{c}{d+t}$ के अनुसार समय t पर निर्भर करता है। a, b, c व d की विमायें लिखिये।

प्र.5. किसी कण का वेग $v = at^2 + bt + c$ के अनुसार समय t पर निर्भर करता है, जहाँ v मीटर/से. तथा t से. में है। नियतांकों a, b व c के मात्रक ज्ञात कीजिए।

प्र.6. ω कोणीय वेग से घूर्णन करती वस्तु की गतिज ऊर्जा $K = \dfrac{1}{2}I\omega^2$ द्वारा व्यक्त की जाती है। विमीय विधि से जड़त्व आघूर्ण I की विमा ज्ञात कीजिए।

प्र.7. प्लांक नियतांक h की विमायें लिखिये।

प्र.8. कोणीय संवेग का मात्रक तथा विमायें लिखिये।

प्र.9. निम्न राशियों में ऐसे जोड़े छांटिये जिनकी विमा एक ही हो : संवेग, कोणीय वेग, बल–आघूर्ण, दाब, आवेग, पृष्ठ तनाव, प्रतिबल, कार्य, आवृत्ति तथा बल–नियतांक।

प्र.10. दो ऐसे नियतांकों के नाम लिखिये जो विमाहीन न हों।

प्र.11. किसी तार में अनुप्रस्थ तरंग की चाल $v = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$ है, जहाँ T तनाव बल है, यदि m तार की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान किग्रा/मीटर में हो तथा वेग v मीटर/सेकण्ड में हो, तो तनाव बल T के मात्रक ज्ञात कीजिए।

प्र.12. भौतिक राशि X की गणना सूत्र $X = \frac{ab^2}{c^4}$ द्वारा की जाती है; a, b व c में से कौनसी राशि अधिक यथार्थता से नापनी चाहिए।

प्र.13. एक भौतिक राशि a के मापन में त्रुटि Δa हो तो a^n में प्रतिशत त्रुटि कितनी होगी?

उत्तरमाला

1. मात्रक मीटर/से.^{2}, मी./से.^{3}, विमीय सूत्र $[LT^{-2}]$, $[LT^{-3}]$
2. मीटर, मीटर/सेकण्ड, मीटर/सेकण्ड^3; विमायें $[L]$, $[LT^{-1}]$, $[LT^{-3}]$
3. $[LT^{-2}, L, T]$
4. LT^{-1}, LT^{-2}, L, T
5. मीटर/से.^{3}, मीटर/से.^{2}, मी./से.
6. ML^2
7. ML^2T^{-1}
8. जूल × सेकण्ड या किग्रा.मी^{2} से$^{-1}$, $[ML^2T^{-1}]$
9. (i) संवेग तथा आवेग (ii) बल नियतांक तथा पृष्ठ तनाव (iii) दाब तथा प्रतिबल (iv) बल–आघूर्ण तथा कार्य (v) आवृत्ति व कोणीय वेग
10. गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक G तथा प्लांक नियतांक h
11. किग्रा–मीटर/से.^{2} अथवा न्यूटन
12. c क्योंकि c की घात अधिकतम है, त्रुटि ज्ञात करने में घातों की गुणा की जाती है
13. $n\frac{\Delta a}{a} \times 100\%$

विविध उदाहरण

उदा.21. एक न्यूटन को डाइन में परिवर्तित करो।

हल– बल का मात्रक M. K. S. में न्यूटन तथा C. G. S. में डाइन होता है। अतः मात्रक को M.K. S.से C.G. S.में परिवर्तित करना है।

बल (F) का विमीय सूत्र

$$F = [M^1L^1T^{-2}]$$

$a = 1, b = 1, c = -2$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

M. K. S.	C.G.S.
$n_1 = 1$	$n_2 = ?$
$M_1 = 1\,kg$	$M_2 = 1\,g$
$L_1 = 1\,m$	$L_2 = 1\,cm$
$T_1 = 1s$	$T_2 = 1s$

$$n_2 = \left[\frac{1kg}{1g}\right]^1\left[\frac{1m}{1cm}\right]^1\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$= \left[\frac{1000g}{g}\right]\left[\frac{100cm}{cm}\right]$$

$$n_2 = 10^5 \text{ डाइन}$$

$\therefore$ 1 न्यूटन = 10^5 डाइन

उदा.22. एक अश्व शक्ति में वॉट मात्रकों की संख्या ज्ञात करो। (1 अश्व शक्ति = 550 × 32 फुट पाउण्डल/से.)

हल– फुट पाउण्डल/से. तथा वॉट क्रमशः F.P.S. तथा M. K. S. पद्धति में शक्ति के मात्रक हैं। शक्ति का विमीय सूत्र $[M^1L^2T^{-3}]$ होता है। अतः $a = 1, b = 2$ तथा $c = -3$ होगा।

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$n_2 = 550 \times 32 \times \left[\frac{1\text{ पाउण्ड}}{1\text{ किग्रा}}\right]^1\left[\frac{1\text{ फुट}}{1\text{ मी}}\right]^2\left[\frac{1\text{से.}}{1\text{ से.}}\right]^{-3}$$

$$n_2 = 550 \times 32 \times \left[\frac{453.6g}{1000g}\right]^1\left[\frac{30.48cm}{100cm}\right]^2[1]$$

$$n_2 = 550 \times 32 \times \frac{453.6}{1000} \times \frac{30.48 \times 30.48}{100 \times 100}$$

$$n_2 = 746 \text{ वॉट}$$

1 अश्व शक्ति = 746 वॉट

उदा.23. गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान 9.8 मीटर/सेकण्ड^2 होता है यदि लम्बाई को किलोमीटर में तथा समय को मिनट में नापें तो g का नया मान क्या होगा ?

हल– गुरुत्वीय त्वरण की विमा = $[M^0L^1T^{-2}]$

अतः $a = 0, b = 1, c = -2$

$$n_1 = 9.8$$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{1m}{1km}\right]^1\left[\frac{1s}{1\min}\right]^{-2}$$

$$= 9.8\left[\frac{1m}{1000m}\right]\left[\frac{s}{60\,s}\right]^{-2} = 9.8 \times \left[\frac{1}{1000}\right]\left[\frac{60}{1}\right]^2$$

$$= 9.8\left[\frac{60 \times 60}{1000}\right] \Rightarrow n_2 = 35.3 \text{ किलोमीटर/मिनट}^2$$

उदा.24. ऊर्जा का SI मात्रक $J = kg\,m^2s^{-2}$; है, चाल v का $m\,s^{-1}$ और त्वरण a का $m\,s^{-2}$ है। गतिज ऊर्जा (K) के लिए निम्नलिखित सूत्रों में आप किस-किस को विमीय दृष्टि से गलत बताएँगे? (m पिण्ड का द्रव्यमान है)।

(a) $K = m^2v^3$ **(b)** $K = (1/2)mv^2$
(c) $K = ma$ **(d)** $K = (3/16)mv^2$
(e) $K = (1/2)mv^2 + ma$

हल– (a) $K = m^2v^3$

K की विमा = $[M^1L^2T^{-2}]$

m^2v^3 की विमा = $[M^1]^2[L^1T^{-1}]^3 = [M^2L^3T^{-3}]$

अतः उपरोक्त सूत्र विमीय रूप से संगत नहीं है।

(b) $K = \frac{1}{2}mv^2$

K की विमा= $[M^1L^2T^{-2}]$

$\frac{1}{2}mv^2$ की विमा = $[M^1][L^1T^{-1}]^2 = [M^1L^2T^{-2}]$

अतः उपरोक्त सूत्र विमीय रूप से संगत है।

(c) $K = ma$

K की विमा = $[M^1L^2T^{-2}]$

ma की विमा = $[M^1][L^1T^{-2}] = [M^1L^1T^{-2}]$

अतः उपरोक्त सूत्र विमीय रूप से संगत नहीं है।

(d) $$K = \frac{3}{16}mv^2$$

K की विमा = $[M^1L^2T^{-2}]$

$\frac{3}{16}mv^2$ की विमा = $[M^1][L^1T^{-1}]^2$

= $[M^1L^2T^{-2}]$

अतः उपरोक्त सूत्र विमीय रूप से संगत है।

(e) $$K = \frac{1}{2}mv^2 + ma$$

K की विमा = $[M^1L^2T^{-2}]$

$\frac{1}{2}mv^2 + ma$ की अलग–अलग विमाएँ

$\frac{1}{2}mv^2 = [M^1L^2T^{-2}]$

$ma = [M^1L^1T^{-2}]$

$\because$ K, $\frac{1}{2}mv^2$ तथा ma की अलग–अलग विमाएँ समान नहीं है अतः उपरोक्त सूत्र विमीय रूप से संगत नहीं है।

उदा.25. गति के समीकरण $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ के सूत्र की सत्यता की जांच करो।

हल– बांया पक्ष = दांया पक्ष $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$[M^0L^1T^0] = [M^0L^1T^{-1}][T^1] + \frac{1}{2}[M^0L^1T^{-2}][T^2]$

$[M^0L^1T^0] = [M^0L^1T^0] + \frac{1}{2}[M^0L^1T^0]$

इस प्रकार $S = ut + ½ at^2$ के अलग–अलग पदों की विमाएँ समान होने से दिया गया समीकरण विमीय रुप से संगत है।

उदा.26. यदि कोई m द्रव्यमान कण किसी वृत्ताकार पथ में v वेग से घूम रहा है। यदि वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r हो तो अभिकेन्द्र बल $F = \frac{mv^2}{r}$ होगा। इस सूत्र की सत्यता की जांच करो।

हल–बांया पक्ष = दांया पक्ष

$F = \frac{mv^2}{r}$ $\quad m = M^1L^0T^0$

$v = M^0L^1T^{-1}$

$r = M^0L^1T^0$

$$[M^1L^1T^{-2}] = \frac{[M^1L^0T^0][M^0L^1T^{-1}]^2}{[M^0L^1T^0]}$$

$[M^1L^1T^{-2}] = [M^1L^1T^{-2}]$

उदा.27. एक तार की कम्पनों की आवृत्ति (n), तार की लम्बाई (l), तनाव (T) तथा प्रति एकांक लम्बाई के द्रव्यमान (m) पर निर्भर करती है। विमीय विधि से सूत्र की स्थापना करो।

हल– माना $n \propto l^a T^b m^c$

$n = K\, l^a T^b m^c$ ....(1)

राशियों की विमा $n = [M^0L^0T^{-1}]$

$l = [M^0L^1T^0]$

$T = [M^1L^1T^{-2}]$

$$m = \frac{M}{L} = M^1L^{-1}T^0$$

सभी विमाओं को समी. (1) में रखने पर

$M^0L^0T^{-1} = K[M^0L^1T^0]^a[M^1L^1T^{-2}]^b[M^1L^{-1}]^c$

$M^0L^0T^{-1} = K[M]^{b-c}[L]^{a+b-c}[T]^{-2b}$

तुलना करने पर–

$b + c = 0$

$a + b - c = 0$

$-2b = -1$

$b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$

$a = -1$

a, b, c के मान समी. (1) में रखने पर

$n = Kl^{-1}T^{1/2}m^{-1/2}$

$= \frac{K}{l}\frac{T^{1/2}}{m^{1/2}}$

$$n = \frac{K}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

उदा.28. किसी छोटी द्रव बूँद के पृष्ठ तनाव के कारण दोलन का समय T, बूँद के घनत्व d, त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव S पर निर्भर करता है। विमीय विधि से सूत्र की स्थापना करो।

हल– माना $T \propto d^a r^b S^c$

$\Rightarrow T = Kd^a r^b S^c$ ....(i)

राशियों की विमा $T = [M^0L^0T^1]$

$d = [M^1L^{-3}T^0]$

$r = [M^0L^1T^0]$

$S = [M^1L^0T^{-2}]$

सभी विमाओं को समी. (i) में रखने पर–

$[M^0L^0T^1] = K[M^1L^{-3}T^0]^a[M^0L^1T^0]^b[M^1L^0T^{-2}]^c$

$\Rightarrow [M^0L^0T^1] = K[M]^{a+c}[L]^{-3a+b}[T]^{-2c}$

तुलना करने पर–

$a + c = 0$

$-3a + b = 0$

$-2c = 1$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a - \frac{1}{2} = 0$

$a = \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2} + b = 0$

$b = \frac{3}{2}$

a, b, c के मान समी. (i) में रखने पर

$T = Kd^{1/2}r^{3/2}S^{-1/2}$

$= K\frac{d^{1/2}r^{3\times½}}{S^{1/2}}$

$$T = K\sqrt{\frac{dr^3}{S}}$$

उदा.29. सूत्र $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ को विमीय विधि के द्वारा स्थापित करो।

जहाँ S = दूरी, u = प्रांरभिक वेग, a = त्वरण, t = समय

हल–किसी वस्तु के द्वारा तय की गयी दूरी निम्न बातों पर निर्भर करती है–

(i) प्रांरभिक वेग,u (ii) त्वरण, a (iii) समय, t

अतः दिये गये सूत्र को दो पदों में लिखा जा सकता है–

(a) जब त्वरण a = 0 हो

$$S \propto u^a t^b$$

$$S = K_1 u^a t^b \quad ....(1)$$

बांये ओर तथा दांयी ओर की विमा लिखने पर

$$M^0L^1T^0 = [LT^{-1}]^a [T]^b = L^a T^{-a+b}$$

तुलना करने पर $a = 1,\ 0 = -a + b$

$b = 1$

a,b के मानों को समी. (1) में रखने पर

$$S = K_1 ut$$

(b) जब प्रारम्भिक वेग $u = 0$

$$S \propto a^c t^d$$

$$S = K_2 a^c t^d \quad ....(2)$$

विमा का मान रखने पर

$$[M^0L^1T^0] = K_2 [M^0 L^1T^{-2}]^c [T]^d$$

$$M^0L^1T^0 = K_2 [L]^c [T]^{-2c+d}$$

तुलना करने पर $c = 1, d = 2$

c, d के मान समी. (2) में रखने पर

$$S = K_2 at^2, \qquad K_2 = \frac{1}{2}$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

उदा.30. सरल आवर्त गति करते किसी पिण्ड की ऊर्जा E, पिण्ड के द्रव्यमान m, आवृत्ति n तथा आयाम A पर निर्भर करती है। विमीय विधि से सूत्र की स्थापना करो।

हल– माना $E \propto m^a n^b A^c$

$\Rightarrow E = Km^a n^b A^c \quad ....(i)$

राशियों की विमा $E = [M^1L^2T^{-2}]$

$m = [M^1L^0T^0]$

$n = [M^0L^0T^{-1}]$

$A = [M^0L^1T^0]$

सभी विमाओं को समी. (i) में रखने पर

$[M^1L^2T^{-2}] = K[M^1L^0T^0]^a [M^0L^0T^{-1}]^b [M^0L^1T^0]^c$

$[M^1L^2T^{-2}] = K[M]^a [L]^c [T]^{-b}$

तुलना करने पर-

$a = 1 \qquad c = 2 \qquad -b = -2$

$\Rightarrow b = 2$

a, b, c के मान समी. (i) में रखने पर

$$E = Km^1n^2A^2 \Rightarrow E = Kmn^2A^2$$

उदा.31. दिये गये सम्बन्ध में *a*, b की विमाएँ ज्ञात करो–

$$P = \frac{b - x^2}{at}$$

जहां P शक्ति, x-दूरी तथा t समय।

हल– दिये गये समीकरण में $P = \dfrac{b - x^2}{at}$

b में से x^2 को घटाया जा सकता है अतः b की विमाएँ

$b = x^2$

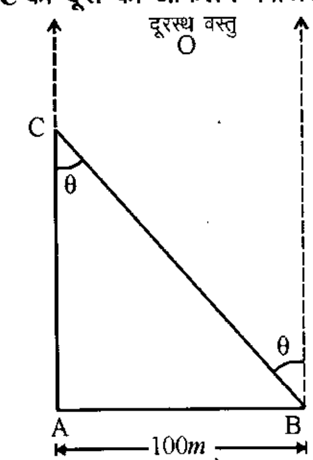
$b = [L^2]$

$$P = \frac{L^2}{at}$$

$$a = \frac{L^2}{Pt} = \frac{L^2}{[M^1L^2T^{-3}][T]}$$

$$a = [M^{-1}L^0T^2]$$

उदा.32 एक व्यक्ति अपने पास की किसी मीनार की अपने से दूरी का आंकलन करना चाहता है। वह मीनार C के सामने किसी बिन्दु A पर खड़ा होता है और AC की सीध में बहुत दूर स्थित किसी बिन्दु O को देखता है। फिर वह AC के लम्बवत् 100*m* दूर स्थित बिन्दु B तक चलता है ओर वहां से O एवं C को फिर देखता है। क्योंकि O बहुत अधिक दूरी पर है, BO एवं AO की दिशाएं व्यावहारिक रूप में एक ही हैं, लेकिन वह पाता है कि C की दृष्टि रेखा मूल दृष्टि रेखा के सापेक्ष θ = 40° पर घूम गई है (θ को लम्बन कहा जाता है)। उसकी मूल स्थिति A से मीनार C की दूरी का आंकलन कीजिए।



चित्र 1.8

हल– ∵ प्रश्नानुसार लम्बन कोण θ = 40°

चित्र की ज्यामिती से

$$AB = AC \tan\theta$$

$$\therefore \quad AC = \frac{AB}{\tan\theta} = \frac{100}{\tan 40°} = \frac{100}{0.8391}$$

= 119 मीटर

उदा.33. पृथ्वी के दो व्यासतः विपरीत बिन्दुओं A एवं B से चन्द्रमा का प्रेक्षण किया गया। प्रेक्षण की दो दिशाओं के बीच, चन्द्रमा पर अंतरित कोण θ की माप 1°54′ है। पृथ्वी का व्यास लगभग 1.276×10^7 m. है। पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी का अभिकलन कीजिए।

हल– ∵ प्रश्नानुसार θ = 1°54' = 60' + 54' = 114' (आर्क मिनट)

= (114 × 60)" (आर्क सैकण्ड)

∵ 1(आर्क सैकण्ड) = 4.85×10^{-6} रेडियन

∴ $\theta = (114 \times 60) \times (4.85 \times 10^{-6})$

$= 3.32 \times 10^{-2}$ रेडियन

$b = AB = 1.276 \times 10^7$ मीटर

∴पृथ्वी तथा चन्द्रमा के बीच की दूरी

$$s = \frac{b}{\theta} = \frac{1.276 \times 10^7}{3.32 \times 10^{-2}}$$

$= 3.84 \times 10^8$ मी.

उदा.34. सूर्य के कोणीय व्यास की माप 1920″ है। पृथ्वी से सूर्य की दूरी 1.496×10^{11} m है। सूर्य का व्यास परिकलित कीजिए।

हल– ∵ प्रश्नानुसार सूर्य का कोणीय व्यास α = 1920" (आर्क सैकण्ड)

$= 1920 \times 4.85 \times 10^{-6}$ रेडियन

$= 9.31 \times 10^{-3}$ रेडियन

$\therefore$ सूर्य का व्यास $D = s\alpha$

$D = (1.496 \times 10^{11}) \times (9.31 \times 10^{-3})$

$= 1.39 \times 10^{9}$ मी.

उदा.35. हम एक सरल लोलक का दोलन-काल ज्ञात करते हैं। प्रयोग के क्रमिक मापनों में लिए गए पाठ्यांक हैं-2.63 s, 2.56s, 2.42s, 2.71s एवं 2.80 s। निरपेक्ष त्रुटि, सापेक्ष त्रुटि एवं प्रतिशत त्रुटि परिकलित कीजिए।

हल– प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम पाठ्यांकों का माध्य निकालना होगा–

$$T_m = \frac{2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80}{5} \text{ सेकण्ड}$$

$$= \frac{13.12}{5} \text{ सेकण्ड} = 2.624 \text{ सेकण्ड} = 2.62 \text{ सेकण्ड}$$

निरपेक्ष त्रुटि

$$\Delta T_1 = 2.62 - 2.63 = -0.01 \text{ s}$$
$$\Delta T_2 = 2.62 - 2.56 = 0.06 \text{ s}$$
$$\Delta T_3 = 2.62 - 2.42 = 0.20 \text{ s}$$
$$\Delta T_4 = 2.62 - 2.71 = 0.09 \text{ s}$$
$$\Delta T_5 = 2.62 - 2.80 = -0.18 \text{ s}$$

माध्य निरपेक्ष त्रुटि $\overline{\Delta T} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{|\Delta T|_i}{n}$

$$\Rightarrow \overline{\Delta T} = \frac{0.01 + 0.06 + 0.20 + 0.09 + 0.18}{5}$$

$$= \frac{0.54}{5} = 0.108 \text{ सेकण्ड} = 0.11 \text{ सेकण्ड}$$

आपेक्षिक त्रुटि या सापेक्ष त्रुटि $= \pm \frac{\overline{\Delta T}}{T_m}$

$$= \pm \frac{0.11}{2.62} = \pm 0.04198 = \pm 0.04$$

$$\text{प्रतिशत त्रुटि} = \pm \frac{\overline{\Delta T}}{T_m} \times 100$$

$$= \pm 0.04 \times 100 = \pm 4\%$$

अत: निरपेक्ष त्रुटि के पदों में $T = (2.62 \pm 0.11)$ s

तथा प्रतिशत त्रुटि के पदों में $T = (2.62 \pm 4\%)$s

उदा.36. किसी सरल लोलक का दोलनकाल $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ होता है। यदि L का मापित मान 20.0 cm है जिसमें 1mm तक की यथार्थता है और समय को 1s विभेदन वाली कलाई घड़ी से मापने पर यह पाया जाता है कि लोलक के 100 दोलनों का समय 90s है तो यहाँ g के निर्धारित मान की यथार्थता क्या है?

हल– $\because \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

g के मापन में प्रतिशत त्रुटि

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{\Delta L}{L} \times 100 + 2\frac{\Delta T}{T} \times 100$$

$\because$ L = 20.0 सेमी., ΔL = 1 मिमी. = 0.1 सेमी.

100 दोलनों का आवर्तकाल T = 90s

ΔT = 1s

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{0.1}{20.0} \times 100 + 2 \times \frac{1}{90} \times 100$$

$$= 0.5\% + 2.22\%$$

$$= 2.72\% \approx 3\%$$

उदा.37. $R_1 = 100 \pm 3$ ओम व $R_2 = 200 \pm 4$ ओम के दो प्रतिरोधकों को (a) श्रेणी क्रम में, (b) पार्श्व क्रम में संयोजित किया गया है। (a) श्रेणी क्रम संयोजन तथा (b) पार्श्व क्रम संयोजन में तुल्य प्रतिरोध ज्ञात कीजिए। (a) के लिए संबंध $R = R_1 + R_2$ एवं (b) के लिए $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ तथा $\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$ का उपयोग कीजिए।

हल– (a) श्रेणीक्रम संयोजन का तुल्य प्रतिरोध

$R = R_1 + R_2 = [(100 \pm 3) + (200 \pm 4)]$ ओम

$= [(100 + 200) \pm (3 + 4)]$ ओम

$= (300 \pm 7)$ ओम

(b) समान्तरक्रम संयोजन के तुल्य प्रतिरोध की गणना–

$$\because \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 200}{100 + 200} = \frac{200}{3}$$

$= 66.7$ ओम

समीकरण $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ से

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$\Rightarrow \Delta R' = (R'^2)\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + (R'^2)\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$= \left(\frac{R'}{R_1}\right)^2 \Delta R_1 + \left(\frac{R'}{R_2}\right)^2 \Delta R_2$$

$$= \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4$$

$$= 1.8$$

$\therefore$ $R' = (66.7 \pm 1.8)$ ओम

उदा.38. एक वस्तु (4.0 ± 0.3) से. में (13.8 ± 0.2) मी. की दूरी तय करती है त्रुटि के साथ वेग की गणना करो।

हल–

$S = (13.8 \pm 0.2)$ मी.

$t = (4.0 \pm 0.3)$ से.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{13.8}{4.0}$$

$= 3.45$ मी./से.

$v = 3.5$ मी./से.

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm\left(\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta t}{t}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{0.2}{13.8} + \frac{0.3}{4.0}\right) = \pm\left(\frac{0.8 + 4.14}{13.8 \times 4.0}\right)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm\frac{4.94}{13.8\times4.0}$$
$$\Delta v = \pm0.0895\times3.45$$
$$\Delta v = \pm0.3087$$
$$\Delta v = \pm0.31$$
$$v = (3.5\pm0.31) \text{ मी./से.}$$

$$\text{प्रतिशत त्रुटि} = \pm\frac{\Delta v}{v}\times100 = \pm0.0895\times100 = \pm8.95\% \approx \pm9\%$$

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

प्र.1. S.I. पद्धति में प्रदीपन तीव्रता का मात्रक क्या होता है?

उत्तर–केण्डेला (cd)

प्र.2. पदार्थ की मात्रा का मूल मात्रक क्या है?

उत्तर–मोल (mol)

प्र.3. एक जूल ऊर्जा कितने अर्ग के बराबर होती है?

उत्तर– 1 जूल = 10^7 अर्ग

प्र.4. प्लांक नियतांक का मात्रक क्या होता है?

उत्तर–जूल × सेकण्ड

प्र.5. संख्या 0.005 में सार्थक अंक कितने हैं?

उत्तर–एक

प्र.6. अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में कितने मूल व कितने पूरक मात्रक है?

उत्तर–सात मूल मात्रक, दो पूरक मात्रक

प्र.7. बोल्ट्जमान नियतांक का विमीय सूत्र लिखिए।

उत्तर–$[M^1L^2T^{-2}K^{-1}]$

प्र.8. त्रुटियाँ कितने प्रकार की मानी जाती है?

उत्तर–त्रुटियाँ मुख्यत: तीन प्रकार की मानी जाती है।

प्र.9. पृष्ठ तनाव की विमा क्या होती है?

उत्तर–$[M^1L^0T^{-2}]$

प्र.10. एक मीटर में Kr^{86} की कितनी तरंगदैर्ध्य होती है?

उत्तर– 16, 50, 763.73

प्र.11. आवेग की विमा किसकी विमा के समान होती है?

उत्तर–संवेग

प्र.12. दो विमाहीन राशियों के नाम लिखिए।

उत्तर–कोण, विकृति।

प्र.13. नियतांक K में प्रतिशत त्रुटि कितनी होती है?

उत्तर–शून्य।

प्र.14. एक भौतिक राशि x के मापन में त्रुटि 4x हो तो x^m में प्रतिशत त्रुटि कितनी होगी?

उत्तर– $m\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\times100\%$

प्र.15. यदि बल तथा लम्बाई के मात्रकों में से प्रत्येक को दुगुना कर दिया जाये, तो ऊर्जा के मात्रक का मान कितने गुना हो जायेगा?

उत्तर– ऊर्जा (= कार्य) = बल × विस्थापन

ऊर्जा की विमा (= कार्य की विमा) = बल की विमा × लम्बाई की विमा

अत: बल तथा लम्बाई के मात्रकों को दुगुना कर देने पर ऊर्जा का मात्रक 4 गुना हो जायेगा।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. विज्ञान किसे कहते हैं?

उत्तर–भौतिक जगत में जो भी घटित होता है उसका क्रमबद्ध अध्ययन विज्ञान कहलाता है।

प्र.2. मात्रक किसे कहते हैं? मात्रकों की कितनी पद्धतियाँ हैं?

उत्तर–भौतिक राशि के मापन के लिए नियत किये गये मान को मात्रक कहते हैं। मात्रकों की चार पद्धतियाँ होती है।

प्र.3. एक रेडियन की परिभाषा लिखिए।

उत्तर–एक रेडियन वह तलीय कोण है जो कि वृत्त की त्रिज्या के बराबर चाप वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित करता है।

प्र.4. S.I. पद्धति की विशेषताएँ लिखिए।

उत्तर–अनुच्छेद 1.7.4 पर देखें।

प्र.5. विमीय विश्लेषण विधि के उपयोग बताइये।

उत्तर–अनुच्छेद 1.9 का बिन्दु (i), (ii) व (iii) देखें।

प्र.6. क्या विमाहीन एवं मात्रकहीन भौतिक राशि का अस्तित्व संभव है?

उत्तर–हाँ, जैसे–आपेक्षिक घनत्व, विकृति।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. अन्तर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति का वर्णन करते हुए विभिन्न मूल मात्रकों की परिभाषाएँ लिखिए।

उत्तर– अनुच्छेद 1.7.1 व 1.7.2 पर देखें।

प्र.2. मूल मात्रक और व्युत्पन्न मात्रकों में अन्तर उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिये। मात्रकों के लिए कौन-कौनसी पद्धतियाँ प्रचलित है?

उत्तर– अनुच्छेद 1.7.1 व 1.7 पर देखें।

प्र.3. विमीय विधि द्वारा किसी भौतिक राशि के परिमाण को एक मात्रक पद्धति से दूसरी मात्रक पद्धति में बदलने का सूत्र स्थापित कीजिये।

उत्तर– अनुच्छेद 1.9 का (i) भाग देखें।

प्र.4. विमीय समीकरण के उपयोग पर विस्तृत टिप्पणी लिखिये।

उत्तर– अनुच्छेद 1.9 देखें।

प्र.5. मापन में त्रुटियों से क्या अभिप्राय है? त्रुटियों के संयोजन से त्रुटियाँ किस प्रकार परिवर्तित हो जाती हैं? समझाइये।

उत्तर– अनुच्छेद 1.13 तथा 1.13.2 पर देखें।

प्र.6. सार्थक अंकों को ज्ञात करने के क्या-क्या नियम हैं? प्रत्येक नियम को उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 1.14 देखें।

प्र.7. किसी अंक को पूर्णांकित करने के क्या नियम हैं? प्रत्येक नियम को उदाहरण देते हुए समझाइये।

उत्तर– अनुच्छेद 1.15 देखें।

प्र.8. विमीय विश्लेषण विधि के द्वारा किसी सूत्र की सत्यता की जाँच कैसे की जाती है? उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 1.9 के (ii) भाग व संलग्न उदाहरण देखें।

प्र.9. भौतिक विज्ञान के महत्व पर निबन्ध लिखिये।

उत्तर–अनुच्छेद 1.3 पर देखें।

प्र.10. वृहत् दूरियों के मापन की लम्बन विधि को समझाइये। इसकी सहायता से आकाशीय पिण्ड का आकार ज्ञात करने की विधि को विस्तार पूर्वक समझाइये।

उत्तर– अनुच्छेद 1.11 के (B) पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. किसी कण का वेग V = A + Bt है तो A व B की विमाएँ क्या

होगी?

हल– यहाँ पर A और Bt की विमा वही होगी जोकि वेग V की होती है।

$\therefore$ A की विमाएँ = V की विमाएँ = $[M^0L^1T^{-1}]$

B की विमाएँ = $\frac{V}{t}$ की विमाएँ = $[M^0L^1T^{-2}]$

प्र.2. सम्बन्ध F = a + bx जहाँ F बल व x दूरी है, में a व b की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल–यहाँ पर a और bx की विमा वही होगी जोकि बल F की होती है।

$\therefore$ a की विमाएँ = F की विमाएँ = $[M^1L^1T^{-2}]$

b की विमाएँ = $\frac{F}{x}$ की विमाएँ = $[M^1L^0T^{-2}]$

प्र.3. वास्तविक गैस की अवस्था के वाण्डरवाल्स गैस समीकरण $\left(P-\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$ है। यहाँ P दाब, V आयतन, R गैस नियतांक एवं T ताप है। इस समीकरण में नियतांक a एवं b की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– दी गयी समीकरण में

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

दाब में केवल दाब को जोड़ा जा सकता है अतः

$$\frac{a}{V^2}=P$$
$$a=PV^2$$
$$a=(M^1L^{-1}T^{-2})(L^3)^2$$
$$a=[M^1L^5T^{-2}]$$

आयतन में से केवल आयतन घटाया जा सकता है।

$$b=V=L^3$$
$$b=[M^0L^3T^0]$$

प्र.4. गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियतांक G का मान का MKS प्रणाली में $6.67\times10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$ है तो विमीय विधि से CGS प्रणाली में इसका मान ज्ञात कीजिए।

हल–हम जानते हैं कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियतांक G की विमा $=[M^{-1}L^3T^{-2}]$

$a=-1,\quad b=3,\quad c=-2$

$n_1=6.67\times10^{-11}$

$$\therefore\quad n_2=n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$n_2=6.67\times10^{-11}\left[\frac{1Kg}{1g}\right]^{-1}\left[\frac{1m}{1cm}\right]^3\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$n_2=6.67\times10^{-11}\left[\frac{1000g}{1g}\right]^{1}\left[\frac{100cm}{1cm}\right]^3\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$n_2=6.67\times10^{-11}\times\frac{1}{1000}\times100\times100\times100$$

$$n_2=6.67\times10^{-8}\ \frac{\text{डाइन}\times\text{सेमी}^2}{\text{ग्राम}^2}$$

प्र.5. पारे का घनत्व 13.6 g/cm^3 है। विमीय विधि से MKS पद्धति में इसका मान ज्ञात करो।

हल– हम जानते हैं कि घनत्व की विमा $=[M^1L^{-3}]$

$a=1,\ b=-3,\ c=0$

$$n_1=13.6$$

$$n_2=n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$n_2=13.6\left[\frac{1g}{1kg}\right]\left[\frac{1cm}{1m}\right]^{-3}$$

$$=13.6\left[\frac{1g}{1000g}\right]\left[\frac{1cm}{100cm}\right]^{-3}$$

$$=13.6\left[\frac{1}{1000}\right]\left[\frac{100}{1}\right]^3=\frac{13.6\times(100)^3}{1000}$$

$$n_2=13.6\times10^3\ kg/m^3$$

प्र.6. विमीय विधि से सूत्र $Y=\frac{MgL}{\pi r^2 l}$ की यथार्थता की जाँच कीजिए।

हल–दिये गये समीकरण के बांये पक्ष की विमा

यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y=[M^1L^{-1}T^{-2}]$ ...(1)

दांये पक्ष की विमा $=\frac{MgL}{\pi r^2 l}=\frac{[M^1][L^1T^{-2}][L^1]}{[L^2][L^1]}=[M^1L^{-1}T^{-2}]$ ...(2)

अत: समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि समीकरण के दोनों पक्षों की विमाएँ समान है, अत: यह समीकरण विमीय दृष्टि से यथार्थ है।

प्र.7. विमीय विधि से सूत्र $\frac{1}{2}mv=mgh$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल–दिये गये समीकरण के बांये पक्ष की विमा

$\frac{1}{2}mv=[M^1][L^1T^{-1}]=[M^1L^1T^{-1}]$ ...(1)

दांये पक्ष की विमा

$mgh=[M^1][L^1T^{-2}][L^1]=[M^1L^2T^{-2}]$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि समीकरण के दोनों पक्षों की विमाएँ समान नहीं है, अत: यह समीकरण विमीय दृष्टि से सत्य नहीं है।

प्र.8. एक केशनली में T पृष्ठ तनाव का द्रव भरा है। द्रव का पृष्ठ तनाव केशनली की त्रिज्या (r), केशनली में द्रव स्तम्भ की ऊँचाई (h), केशनली में भरे द्रव के घनत्व (d) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। विमीय विधि से पृष्ठ तनाव का सूत्र स्थापित कीजिए।

हल–द्रव का पृष्ठ तनाव = T

केशनली की त्रिज्या = r

द्रव स्तम्भ की ऊँचाई = h

द्रव का घनत्व = d

गुरुत्वीय त्वरण = g

प्रश्नानुसार $\quad T\propto r^x h^y d^z g^v$

या $T = K, r^x, h^y, d^z, g^v$ ...(1)

समी. (1) में विभिन्न भौतिक राशियों की विमाएँ रखने पर

$$M^1 L^0 T^{-2} = (L^1)^x (L^1)^y (M^1 L^{-3})^z (L^1 T^{-2})^v$$

या $M^1 L^0 T^{-2} = M^z L^{x+y-3z+v} T^{-2v}$ ...(2)

समी. (2) में सजातीय मात्रकों की विमाओं की तुलना करने पर,

$z = 1$ ...(i)

$-2v = -2$ ...(ii)

$x + y - 3z + v = 0$ ...(iii)

(ii) से $v = 1$

$\therefore \quad x + y - 3 \times 1 + 1 = 0$

$\therefore \quad x + y - 2 = 0$

$x + y = 2$ ...(iv)

किन्तु केशनली में द्रव के चढ़ने के लिए, अन्य भौतिक राशि नियत रहने पर, द्रव स्तम्भ की ऊँचाई पृष्ठ तनाव के अनुक्रमानुपाती होती हैं

$\therefore \quad T \propto h$

$\therefore$ समी. (1) में $h^y = h$

$\therefore \quad y = 1$

$\therefore$ समी. (iv) से $x + 1 = 2$

$x = 1$

x, y, z, v के मान समी. (1) में रखने पर

$$T = kr^1 h^1 d^1 g^1 = khrdg$$

प्रयोग द्वारा $K = \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad T = \frac{hrdg}{2}$$