શ્રેણિક

- **શ્રેણિક :** વાસ્તવિક સંખ્યાઓની કોઈપણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. આ સંખ્યાઓને [ ] અથવા ( ) પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ એ $m \times n$ શ્રેણિક છે.

અહીં a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક છે.

- **સમાન શ્રેણિકો :** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ તથા $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ માટે $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i = 1, 2, 3... m$ તથા $j = 1, 2, 3... n$
- **શ્રેણિકનો પ્રકાર :**

(1) હાર શ્રેણિક : $1 \times n$ શ્રેણિક $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...\ a_{1n}]$ ને 'હાર શ્રેણિક' કહે છે.

(2) સ્તંભ શ્રેણિક : $m \times 1$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ ને 'સ્તંભ શ્રેણિક' કહે છે.

(3) ચોરસ શ્રેણિક : $n \times n$ પ્રકારના શ્રેણિકને ''ચોરસ શ્રેણિક'' કહે છે.

(4) વિકર્ણ શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માં $a_{ij} = 0,\ i \neq j$ હોય તો A ને વિકર્ણ શ્રેણિક કહે છે.

એટલે કે વિકર્ણ શ્રેણિકમાં અગ્રવિકર્ણ સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય છે. સંકેતમાં તેને $diag\ [a_{11}\ a_{22\ ....}\ a_{nn}]$ તરીકે લખાય છે.

(5) શૂન્ય શ્રેણિક : જે શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક કહે છે.

શૂન્ય શ્રેણિકને $O_{m\times n}$ અથવા O વડે પણ દર્શાવાય છે.

[O ને સરવાળાનો તટસ્થ શ્રેણિક પણ કહેવાય. $A + O = O + A = A$]

- જો A અને B બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય તો તેઓ સરવાળા માટે સુસંગત છે.
- **વિરોધી શ્રેણિક :** $-A = [-a_{ij}]$ ને $A = [a_{ij}]$ નો વિરોધી શ્રેણિક કહે છે.
- **શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર :** $A = [\ a_{ij}]_{m\times n}$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો શ્રેણિક $[ka_{ij}]$ ને શ્રેણિક A નો અદિશ k વડે ગુણાકાર કહે છે.

આમ, $A = [\ a_{ij}]_{m\times n}$ માટે $kA = [\ ka_{ij}]_{m\times n}$

(1) $A + B = B + A$. (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + O = O + A = A$. (4) $A + (-A) = (-A) + A = O$

(5) $k(A+B) = kA + kB$ (6) $(k + l) A = kA + lA$

(7) $lA = A$ (8) $(-1) A = -A$

- **પરિવર્ત શ્રેણિક :** જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક મળે તેને શ્રેણિક Aનો પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય. તેને સંકેતમાં A^T અથવા A' વડે દર્શાવાય.

  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

- **સંમિત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$ થાય, તો A ને ''સંમિત શ્રેણિક'' કહેવાય.

- **વિસંમિત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$ થાય; તો A ને ''વિસંમિત શ્રેણિક'' કહેવાય.

  શ્રેણિક $A^T = [a_{ij}]_{n \times n}$ માટે પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ji}$ થાય.

  હવે $i = j$ તો $2a_{ii} = 0$ એટલે કે $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, ... n$. i.e. $a_{ii} = 0$

  આમ વિસંમિત શ્રેણિકમાં અગ્ર વિકર્ણના બધા જ ઘટકો શૂન્ય થાય છે.

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (2) $(A^T)^T = A$ (3) $(kA)^T = kA^T$

- **શ્રેણિકોનો ગુણાકાર :** ધારો કે $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ બે શ્રેણિકો છે. તેમનો ગુણાકાર $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

આમ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ હોય તો તેમનો ગુણાકાર $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kj}\right]_{m \times p}$ થાય.

- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ હોય; તો A અને B ગુણાકાર માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

શ્રેણિકોના ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો

(1) વિભાજનના નિયમો :

(i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે, $A (B + C) = AB + BC$

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે, $(A + B) C = AC + BC$

(2) જૂથનો નિયમ : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ માટે

$A (BC) = (AB)C$

- **એકમ શ્રેણિક :** જે ચોરસ શ્રેણિકમાં પ્રત્યેક અગ્ર વિકર્ણ ઘટક 1 હોય તથા બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તેવા શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે. એકમ શ્રેણિકને I વડે દર્શાવાય છે.

$$I_n = I_{n \times n} = I = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ જ્યાં } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ જો } i = j \\ 0, \text{ જો } i \neq j \end{cases}$$

- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને I_n એકમ શ્રેણિક હોય તો $A I_n = I_n A = A$

- **અદિશ શ્રેણિક :** જો $k \in R$ હોય તો $k I_n$ ને અદિશ શ્રેણિક કહે છે.

- **ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક :** જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી તેનો નિશ્ચાયક મેળવવામાં આવે, તો તે નિશ્ચાયકને આપેલ ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક કહે છે. જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો A ના નિશ્ચાયકને $|A|$ અથવા det A વડે દર્શાવાય છે.

- ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A| |B|$

- **સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint of Matrix) :**

  ચોરસ શ્રેણિક A ના દરેક ઘટકના સ્થાને A ના સંગત ઘટકનો સહઅવયવ લખીને બનતા શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં મળતા શ્રેણિકને Aનો 'સહઅવયવજ' શ્રેણિક કહે છે. તેને *adj* A વડે દર્શાવાય.

  A_{ij} એ |A| માં ઘટક a_{ij} નો સહઅવયવ છે.

  $$\text{જો } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ તો } adj\, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- **વ્યસ્ત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત બીજો ચોરસ શ્રેણિક B એવો મળે કે જેથી AB = I = BA થાય, (I એકમ શ્રેણિક છે.) તો B ને A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.
- જો A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો તે અનન્ય છે.
- ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A \cdot adj\, A = adj\, A \cdot A = |A|\, I$
- **સામાન્ય શ્રેણિક :** ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય; તો તે ચોરસ શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.
- **અસામાન્ય શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક સામાન્ય ન હોય, તો તેને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.
- ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય હોય, તો અને તો જ $|A| \neq 0$

  A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A$ (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો)

અગત્યનાં પરિણામો :

- સામાન્ય શ્રેણિક A ના વ્યસ્તના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય અને A ના નિશ્ચાયકની વ્યસ્ત સંખ્યા સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે એટલે કે $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
- જો A અને B સામાન્ય શ્રેણિકો હોય તો AB સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $m \times n$ શ્રેણિક A અને B માટે $(AB)^T = B^TA^T$
- A સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો અને તો જ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે. માટે $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
- $adj\, A^T = (adj\, A)^T$
- વ્યસ્ત શ્રેણિકનો ઉપયોગ કરી સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ.

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ એ x, y, z માં ત્રણ સુરેખ સમીકરણની સંહતિ છે.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \text{ લેતાં,}$$

સમીકરણ સંહતિને AX = D પ્રમાણે લખી શકાય.

જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$$X = A^{-1}D = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \text{ તેથી } x = p_1, y = p_2, z = p_3$$

આપેલ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ છે.

નોંધ : આ પદ્ધતિ બે ચલના બે સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ માટે પણ સત્ય છે.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ અને $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ તો ......

(A) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = a^2 - b^2$ (B) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$ (C) $\alpha = 2ab, \beta = a^2 + b^2$ (D) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = ab$

ઉકેલ : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$ **જવાબ :** (B)

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ તો નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ? (AIEEE : 2004)

(A) A શૂન્ય શ્રેણિક છે (B) A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી (C) $A = (-1)\, I$ (D) $A^2 = I$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ **જવાબ :** (D)

(3) ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $10\,B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, જો B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય તો α = ...

(AIEEE : 2005)

(A) –2 (B) 5 (C) 2 (D) –1

ઉકેલ : અહીં $B = A^{-1}$ આપેલ છે.

$\therefore AB = I$

$10\,(AB) = 10\,I$

$\therefore A\,(10\,B) = 10\,I$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4+5+1 & 2+0-2 & 2-\alpha+3 \\ 8-5-3 & 4+0+6 & 4+\alpha-9 \\ 4-5+1 & 2+0-2 & 2+\alpha+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \text{ આથી } \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5-\alpha \\ 0 & 10 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & \alpha+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore \alpha + 5 = 10$

$\therefore \alpha = 5$ ($\alpha = 5$ તો $5 - \alpha = \alpha - 5 = 0$) **જવાબ :** (B)

(4) જો $A^2 - A + I = O$ તો A નો વ્યસ્ત .... છે.

(A) $A + I$ (B) A (C) $A - I$ (D) $I - A$ (AIEEE : 2005)

ઉકેલ : $I = A - A^2$

$IA^{-1} = (A - A \cdot A) A^{-1}$

$\therefore A^{-1} = AA^{-1} - (A \cdot A)A^{-1}$

$= I - A(AA)^{-1}$

$= I - A$ **જવાબ :** (D)

(5) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ? ($n \geq 1$)

(AIEEE : 2005)

(A) $A^n = nA - (n-1)I$ (B) $A^n = 2^{n-1} A - (n-1) I$

(C) $A^n = nA + (n-1) I$ (D) $A^n = 2^{n-1} A + (n-1)I$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ધારો કે $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{n-1}. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

હવે $nA - (n-1)I = \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = A^n$ **જવાબ :** (A)

(6) જો A અને B એ $n \times n$ એવા ચોરસ શ્રેણિકો હોય, કે જેથી $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, તો નીચેના પૈકી કયું હંમેશાં સત્ય છે ? (AIEEE : 2006)

(A) $A = B$ (B) $AB = BA$ (C) A અથવા B એકમ શ્રેણિક છે. (D) A અથવા B શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$\therefore A^2 - B^2 = AA + AB - BA - BB$

$\therefore A^2 - B^2 = A^2 + AB - BA - B^2$

$\therefore O = AB - BA$

$BA = AB$

જવાબ : (B)

(7) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in N$ તો (AIEEE : 2006)

(A) $AB = BA$ થાય, તેવો B મળે નહિ (B) અસિમિત સંખ્યામાં B મળે કે જેથી $AB = BA$

(C) એક B મળે કે જેથી $AB = BA$ (D) એક કરતાં વધુ પરંતુ સિમિત સંખ્યામાં B મળે કે જેથી $AB = BA$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{bmatrix}$ અને $BA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{bmatrix}$

$\therefore$ જો $a = b$ તો $AB = BA$

હવે $a, b \in N$ હોવાથી આવા અસિમિત શ્રેણિક B મળે કે જેથી $AB = BA$ થાય. **જવાબ :** (B)

(8) જો $A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{bmatrix}$ અને $|A^{10}| = 1024$ હોય તો $\alpha = ...$ (AIEEE : 2007)

(A) -3 (B) 3 (C) 2 (D) -2

ઉકેલ : $|A^{10}| = 1024$

$\therefore |A|^{10} = 2^{10}$

$\therefore |A| = 2$

$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{bmatrix}$ આથી $|A| = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 5 \\ 5 & -\alpha \end{vmatrix}$

$\therefore -\alpha^3 - 25 = +2$

$\therefore -\alpha^3 = 27.$ આથી $\alpha = -3$

જવાબ : (A)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાનો હોય છે. તેમના માટે નીચેના વિકલ્પો હોય છે.

(A) વિધાન I સત્ય છે; વિધાન II એ સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી આપે છે.

(B) વિધાન I સત્ય છે તથા વિધાન II સત્ય છે. વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી.

(C) વિધાન I સત્ય છે તથા વિધાન II અસત્ય છે.

(D) વિધાન I અસત્ય છે તથા વિધાન II સત્ય છે.

(9) ધારો કે A એ 2×2 શ્રેણિક છે, I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે. શ્રેણિકના વિકર્ણના ઘટકોના સરવાળાને tr (A) વડે દર્શાવીએ તથા $A^2 = I$

વિધાન : I જો $A \neq I$ અને $A \neq -I$ તો $|A| = -1$

વિધાન : II જો $A \neq I$ અને $A \neq -I$ તો $tr(A) \neq 0$ (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

હવે $A^2 = I$

$\therefore a^2 + bc = 1;$ $\quad b(a + d) = 0$

$\therefore bc + d^2 = 1$ $\quad c\,(a + d) = 0$

$a^2 + bc = bc + d^2 \Rightarrow a = -d$ અથવા $a = d$

જો $a + d \neq 0$ તો $b = c = 0$

$\therefore a^2 = 1 = d^2$. આથી $a = d = 1$ કારણ કે $a + d \neq 0$

પરંતુ $A \neq I$. આથી $a + d = 0$

$\therefore a = -d = 1$ તથા $a^2 = d^2$

$\therefore a = 1, d = -1$ અથવા $a = -1, d = 1$

$|A| = ad - bc = -a^2 - bc = -1$

∴ વિધાન I સત્ય છે.

∴ વિધાન II સત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(10) ધારો કે A એ 2×2 શ્રેણિક છે.

વિધાન : I $adj\,(adj\,A) = A$

વિધાન : II $|adj\,A| = |A|$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|adj\,A| = |A|^{n-1}$

અહીં $n = 2$ લેતાં $|adj\,A| = |A|$

વિધાન II સત્ય છે.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ લેતાં $adj\,A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\therefore adj\,(adj\,A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

∴ વિધાન I સત્ય છે.

∴ પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી. **જવાબ :** (B)

(11) ધારો કે A એ શૂન્યેતર ઘટકોવાળો 2×2 શ્રેણિક છે. અને $A^2 = I$; I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે.

ધારો કે $tr\,(A)$ = A ના વિકર્ણના ઘટકોનો સરવાળો અને $|A| = \det A$

વિધાન : I $tr\,(A) = 0$

વિધાન : II $|A| = -1$ (AIEEE : 2010)

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a, b, c, d \neq 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

પરંતુ $A^2 = I$ હોવાથી.

$a^2 + bc = 1$ $\qquad$ $b(a+d) = 0$

$bc + d^2 = 1$ $\qquad$ $c(a+d) = 0$

$b \neq 0, c \neq 0$ હોવાથી. $a + d = 0$

$tr\,(A) = a + d = 0.$ આથી વિધાન II સત્ય છે.

$a = -d$ (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -a^2 - bc$$

$$|A| = -1$$

વિધાન I સત્ય છે.

વિધાન I સત્ય છે અને વિધાન II સત્ય છે અને વિધાન II થી વિધાન I ની સમજૂતિ મળે છે. **જવાબ :** (A)

(12) ધારો કે A અને B એ 3×3 સંમિત શ્રેણિકો છે.

વિધાન : I A (BA) અને (AB)A સંમિત શ્રેણિકો છે.

વિધાન : II જો A નો B સાથે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે તો AB સંમિત છે. (AIEEE : 2011)

ઉકેલ : A અને B સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, $A^T = A, B^T = B$

$$\begin{aligned}[A(BA)]^T &= (BA)^T \cdot A^T \\ &= (A^T B^T)\,A^T \\ &= (AB)\,A = A\,(BA)\end{aligned}$$

તે જ રીતે $[(AB)\,A]^T = (AB)\,A$

$\therefore$ A (BA) અને (AB) A સંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ વિધાન I સત્ય છે.

જો $AB = BA$ તો $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ આથી AB સંમિત શ્રેણિક છે.

વિધાન II સત્ય છે.

પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી. **જવાબ :** (B)

(13) **વિધાન : I** 3×3 વિસંમિત શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક શૂન્ય છે.

વિધાન : II કોઈપણ શ્રેણિક A માટે $|A| = |A^T|$ અને $|-A| = -|A|$

ઉકેલ :

વિધાન I સત્ય છે.

$\det A = \det(A^T)$ સત્ય છે.

$\det(-A) = -\det(A)$ એ 3×3 શ્રેણિક માટે સત્ય છે.

પરંતુ કોઈપણ શ્રેણિક માટે સત્ય નથી.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

$$det\,A = ad - bc \qquad \det(-A) = \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$det\,(-A) = ad - bc \neq -det\,A$

વિધાન II અસત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(14) 3×3 વાસ્તવિક ચોરસ શ્રેણિકના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R નીચે મુજબ લો;

R : $\{(A, B) \mid A = P^{-1}BP$ જ્યાં P કોઈક સામાન્ય શ્રેણિક છે.$\}$

વિધાન : I R સામ્ય સંબંધ છે.

વિધાન : II કોઈ પણ બે 3×3 શ્રેણિકો M, N માટે જેનાં વ્યસ્ત વિધેયો મળે, $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

ઉકેલ : (1) $A = P^{-1}BP$ સ્વવાચક છે કારણ કે $A = IA = A^{-1}AA$

(2) જો $A = P^{-1}BP$ તો $B = PAP^{-1}$

$B = (P^{-1})^{-1}A(P^{-1})$ (સંમિતતા)

(3) $A = P^{-1}BP, B = A^{-1}CA$

$A = (P^{-1}BP) = P^{-1}(A^{-1}CA)P = (AP)^{-1}C(AP)$ (પરંપરિતતા)

વિધાન I સત્ય છે. વિધાન II સત્ય જ છે.

પરંતુ વિધાન II એ વિધાન I ની સાચી સમજૂતી નથી. **જવાબ :** (B)

(15) જો $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ એ 3×3 શ્રેણિક Aનો સહઅવયવ શ્રેણિક હોય અને $|A| = 4$ તો $\alpha = ...$

(JEE Main : 2013)

(A) 0 (B) 5 (C) 4 (D) 11

ઉકેલ : $P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ આથી $|P| = -\alpha\,(4-6) + 3\,(4-6) = \alpha \times -6$

$adj\ A = P$

$\therefore |adj\ A| = |P|$

$\therefore |A|^2 = 2\alpha - 6$

$\therefore 16 = 2\alpha - 6$ આથી $\alpha = 11$ **જવાબ :** (D)

(16) જો $A = \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ તો $A^{-1} = ...$

(A) $\begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -sin\theta & cos\theta \\ cos\theta & -sin\theta \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & -sin\theta \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{vmatrix} = sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \neq 0$

$adj\ A = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (B)

(17) જો $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{3}$ તો $A = [a_{ij}]_{2\times2} = ...$

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $a_{11} = \frac{(1-2)^2}{3} = \frac{1}{3}$, $a_{21} = \frac{(2-2)^2}{3} = 0$

$a_{12} = \frac{(1-4)^2}{3} = 3$, $a_{22} = \frac{(2-4)^2}{3} = \frac{4}{3}$

આથી $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(18) સમીકરણો $x - 2y - 4 = 0$ અને $3x - 5y + 7 = 0$ નો ઉકેલ $x =$ ...... અને $y =$ ......

(A) 34, 19 (B) –34, 19 (C) 34, –19 (D) –34, –19

ઉકેલ : $x - 2y = 4$ અને $3x - 5y = -7$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ એટલે કે AX = D

$|A| = -5 + 6 = 1 \neq 0$ આથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે. તેથી સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\, A$, $adj\, A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore X = A^{-1}D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -19 \end{bmatrix}$

$\therefore x = -34, y = -19$ **જવાબ :** (D)

(19) x ના કયા મૂલ્ય માટે $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix}$ એકમ શ્રેણિક થાય ?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} -2x+0+7x & 28x+0-28x & 14x+0-14x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x+0+x & 14x-2-4x & 7x+0-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10x-2 & 5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore 5x = 1$ તથા $10x - 2 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{5}$ **જવાબ :** (A)

(20) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $A^{-1} = mA + nI$ તો m = ... અને n = ...

(A) $\frac{-1}{11}, \frac{2}{11}$ (B) $\frac{2}{11}, \frac{-1}{11}$ (C) $-\frac{2}{11}\ \frac{-1}{11}$ (D) $\frac{2}{11}, \frac{1}{11}$

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11 \neq 0$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n & 2m \\ -5m & m+n \end{bmatrix}$

$\therefore m + n = \frac{1}{11},\qquad 2m = \frac{-2}{11},\quad -5m = \frac{5}{11}$

$m = -\frac{1}{11}\qquad n = \frac{2}{11}$ **જવાબ :** (A)

(21) જો w એ 1નાં અવાસ્તવિક ઘનમૂળ હોય અને $A = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ તો A^{37} = ...

(A) 0 (B) –A (C) A (D) A^2

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \Rightarrow A^{37} = \begin{bmatrix} w^{37} & 0 \\ 0 & w^{37} \end{bmatrix}$

હવે $w^{37} = (w^3)^{12} \cdot w = (1)^{12}\, w = w$

$\therefore\ A^{37} = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = A$ **જવાબ :** (C)

(22) જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ તથા $|A^2| = 25$ હોય, તો $|\alpha|$ = ... (AIEEE 2007)

(A) 5^2 (B) 1 (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

ઉકેલ : $|A^2| = 25$

$\therefore |A|^2 = 25,$ આથી $|A| = \pm 5$

$\therefore \begin{vmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \pm 5$

$\therefore 25\,\alpha = \pm 5$

$\therefore \alpha = \pm \frac{1}{5}$ આથી $|\alpha| = \frac{1}{5}$ **જવાબ :** (C)

(23) જો $\begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & cot\theta \\ -cot\theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ તો $a =$ ...... અને $b =$ ......; $\theta \in R-\{k\pi \mid k \in Z\}$

(A) 1, 1 (B) $-cos\ 2\theta, sin\ 2\theta$ (C) $-cos\ 2\theta, -sin\ 2\theta$ (D) $cos\ 2\theta, -sin\ 2\theta$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & cot\theta \\ -cot\theta & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 + cot^2\theta = cosec^2\theta$

$$A^{-1} = \frac{1}{cosec^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & cot\theta \\ -cot\theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{cosec^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{cosec^2\theta} \begin{bmatrix} 1-cot^2\theta & -2cot\theta \\ 2cot\theta & 1-cot^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} sin^2\theta - cos^2\theta & -2\,sin\theta\,cos\theta \\ 2cos\theta\,sin\theta & sin^2\theta - cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$\therefore a = -\ cos\ 2\theta,\ b = sin\ 2\theta$ જવાબ : (B)

(24) જો 3 × 3 શ્રેણિક A માટે $|A| = 3$ તો $|adj\ A| =$ ......

(A) 27 (B) 9 (C) –3 (D) 3

ઉકેલ : $|A\ adj\ A| = |A|^n$

અહીં A એ 3 × 3 શ્રેણિક છે. $n = 3$ લેતાં $|A\ adj\ A| = |A|^3$

$|A|\ |adj\ A| = 3^3$

$|adj\ A| = 3^2 = 9$

અથવા $|adj\ A| = |A|^2 = 9$ (3 × 3 શ્રેણિક માટે) જવાબ : (B)

(25) $P = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ તો $P^{-1} =$ ......

(A) P^T (B) P (C) $-P^T$ (D) –P

ઉકેલ : $|P| = \begin{vmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{vmatrix} = sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ તથા $P^T = \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1} = P^T$ જવાબ : (A)

(26) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}$ એ $AA^T = 9I$ નું સમાધાન કરે છે, તો ક્રમયુક્ત (a, b) = ...

(JEE Main : 2015)

(A) (2, –1) (B) (–2, 1) (C) (2, 1) (D) (–2, –1)

ઉકેલ : $AA^T = 9\,I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 9 & 0 & a+4+2b \\ 0 & 9 & 2a+2-2b \\ a+4+2b & 2a+2-2b & a^2+4+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ a + 4 + 2b = 0 \ \Rightarrow\ a + 2b = -4$ (1)

$2a + 2 - 2b = 0 \ \Rightarrow\ 2a - 2b = -2$ (2)

આથી $3a = -6$. ($a^2 + 4 + b^2 = 9$ છે જ.) આથી $a = -2$ અને $b = -1$

$(a, b) = (-2, -1)$ **જવાબ :** (D)

(27) 3×3 શ્રેણિકો M અને N માટે નીચેનાંમાંથી કયાં વિધાન સત્ય નથી ? (JEE adva : 2013)

(A) M અને N એ સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિકો હોય, તો અનુક્રમે N^TMN એ સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(B) MN – NM એ વિસંમિત શ્રેણિક છે, જ્યાં M અને N સંમિત શ્રેણિક છે.

(C) જો M અને N એ સંમિત શ્રેણિકો હોય, તો MN એ સંમિત શ્રેણિક છે.

(D) (*adj*M) (*adj*N) = *adj* (MN) જ્યાં M અને N સામાન્ય શ્રેણિકો છે.

ઉકેલ : (A) જો M સંમિત શ્રેણિક હોય, તો $M^T = M$

$(N^TMN)^T = N^TM^T(N^T)^T = N^TMN$

$\therefore$ N^TMN સંમિત શ્રેણિક છે.

જો M વિસંમિત શ્રેણિક હોય તો $M = -M^T$

$$\begin{aligned}(N^TMN)^T &= N^TM^T(N^T)^T \\ &= N^T(-M)N \qquad (M^T = -M) \\ &= -N^TMN\end{aligned}$$

$\therefore$ N^TMN વિસંમિત શ્રેણિક છે. આથી વિધાન (A) સત્ય છે.

(B) અહીં M અને N સંમિત શ્રેણિક છે. આથી $M = M^T$ અને $N = N^T$

$(MN - NM)^T = N^TM^T - M^TN^T = NM - MN = -(MN - NM)$

$\therefore$ MN – NM વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ વિધાન B સત્ય છે.

(C) M અને N સંમિત શ્રેણિક છે.

$(MN)^T = N^TM^T = NM \neq MN$ આથી (C) અસત્ય છે.

(D) $(adj\ M)\ (adj\ N) = adj\ (NM) \neq adj\ (MN)$ થાય.

જેથી (D) અસત્ય છે. **જવાબ :** (C), (D)

(28) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ તથા સ્તંભ શ્રેણિકો u_1 અને u_2 માટે $Au_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ અને $Au_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ તો $u_1 + u_2 =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Au_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ($u_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ લેતાં,)

$$Au_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore a = 1,\ 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2$ તથા $3a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = 1$ આથી $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

તે જ રીતે $Au_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($u_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ લેતાં,)

$$\begin{bmatrix} p \\ 2p+q \\ 3p+2q+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore p = 0,\ 2p + q = 1,\ 3p + 2q + r = 0.$ આથી $p = 0,\ q = 1, r = -2$

$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ આથી $u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(29) $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ થાય તેવો 2×2 શ્રેણિક $X =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : ધારો કે $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5a-7c & 5b-7d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$5a - 7c = -16$ $\quad$ $5b - 7d = -6$

$-2a + 3c = 7$ $\quad$ $-2b + 3d = 2$

ઉકેલતાં $a = 1$, $c = 3$ તથા $b = -4$ અને $d = -2$

$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

→**બીજી રીત :** $X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(30) જો $[1 \ x \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$ તો $x = ...$

(A) 2, 14 $\quad$ (B) –2, 14 $\quad$ (C) –2, –14 $\quad$ (D) 2, 14

ઉકેલ : $[1 \ x \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [1 + 2x + 15 \quad 3 + 5x + 3 \quad 2 + x + 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [16 + 2x \quad 6 + 5x \quad 4 + x]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [16 + 2x + 12 + 10x + 4x + x^2] = 0$

$\therefore \quad x^2 + 16x + 28 = 0$

$\therefore \quad x = -2$ અથવા $x = -14$ **જવાબ :** (C)

(31) ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને U_1, U_2, U_3 એ એવા સ્તંભ શ્રેણિકો છે કે જેથી $AU_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $AU_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$AU_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ જો U એ 3×3 શ્રેણિક હોય કે જેના સ્તંભ અનુક્રમે U_1, U_2, U_3 છે તો $|U| = ...$

(A) 2 $\quad$ (B) $\frac{3}{2}$ $\quad$ (C) –3 $\quad$ (D) 3

ઉકેલ : ધારો કે $U_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ આથી $AU_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = 0,\ 3a + 2b + c = 0$

$\therefore\ a = 1,\quad b = -2,\quad c = 1$

$\therefore\ U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ધારો કે $U_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ આથી $AU_2 = \begin{bmatrix} x \\ 2x+y \\ 3x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore\ x = 2,\ 2x + y = 3,\ 3x + 2y + z = 0$

$\therefore\ x = 2,\quad y = -1,\quad z = -4$

$\therefore\ U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

ધારો કે $U_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ $AU_3 = \begin{bmatrix} p \\ 2p+q \\ 3p+2q+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ p = 2,\ 2p + q = 3,\ 3p + 2q + r = 1$

$\therefore\ p = 2,\quad q = -1,\quad r = -3$

$\therefore\ U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ U = [U_1\ U_2\ ,U_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ |U| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1\ [3-4] - 2\ [6+1] + 2[8+1] = -1 - 14 + 18 = 3$ **જવાબ :** (D)

બીજી રીત : $AU = B$ જ્યાં $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ U = A^{-1}B.$ આથી $|U| = |A|^{-1}|B| = 1.3 = 3$

(32) જો શ્રેણિક $A_r = \begin{bmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{bmatrix}$, $r = 1, 2, 3....$ તો $|A_1| + |A_2| + ... + |A_{101}| = ...$

(A) 101 (B) $(101)^2$ (C) 100 (D) $(100)^2$

ઉકેલ : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_1| = 1, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_2| = 3, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_3| = 5...$

$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{101}| = 1 + 3 + 5 + ... + 201 = (101)^2$ **જવાબ :** (B)

(33) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ તો $A^3 = ...$

(A) 27 A (B) 81 A (C) 243 A (D) 729 A

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$= 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 27 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = 27 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$= 81 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 81 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 81\ A$ **જવાબ :** (B)

(34) જો $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$ તો $A^{10} = ...$

(A) 512 I (B) 256 I (C) 1024 I (D) 128 A

ઉકેલ : $A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I$

$A^2 = (2I)(2I) = 4I^2 = 4I$

$A^3 = (2I)(2I)(2I) = 8I^3 = 8I$

$A^{10} = 2^{10} I = 1024\ I$ **જવાબ :** (C)

(35) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તો $B^{-1}AB = ...$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

વળી $|B| = 4 + 1 = 5$

આથી $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \, adj \, B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

હવે $B^{-1}AB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(36) જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $A^2 - mA + nI = 0$ તો,

(A) $m = -9, n = -14$ (B) $m = -9, n = 14$ (C) $m = 9, n = 14$ (D) $m = 9, n = -14$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}$

$A^2 - mA + nI = 0$. આથી $A^2 = mA - nI$

$\therefore \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4m - n & 3m \\ 2m & 5m - n \end{bmatrix}$

$\therefore 4m - n = 22$ અને $3m = 27$ પરથી $m = 9$, $n = 14$, તે $2m = 18$, $5m - n = 31$ નું સમાધાન પણ કરે છે.

જવાબ : (C)

નોંધ : ખરેખર તો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તો $A^2 - (a + d) A + |A| I = 0$

$\therefore m = a + d = 9 \quad n = |A| = 14$

(37) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^n = ...$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & m^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} n & mn \\ 0 & n \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

તે જ રીતે $A^n = \begin{bmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (B)

(38) જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ તો $(B^{-1}A^{-1})^{-1} = ...$

(A) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $(B^{-1}A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1} = AB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (C)

(39) $A = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$ તો $AA^T = ...$

(A) I (B) A (C) A^T (D) એક પણ નહિ

ઉકેલ : $AA^T = \begin{bmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} sin^2\theta + cos^2\theta & -sin\theta cos\theta + sin\theta cos\theta \\ -cos\theta sin\theta + sin\theta cos\theta & cos^2\theta + sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

($AA^T = I$ અથવા $A^T = A^{-1}$ તો A ને લંબશ્રેણિક કહે છે.) **જવાબ :** (A)

(40) સુરેખ સમીકરણ સંહતિ $x + 3y + 4z = 8$, $2x + y + 2z = 5$, $5x + y + z = 7$, નો અનન્ય ઉકેલ ......

(A) $x = 1, y = 1, z = 1$ (B) $x = 1, y = 2, z = 1$ (C) $x = -1, y = 1, z = 1$ (D) $x = 1, y = 1, z = -1$

ઉકેલ : $x + 3y + 4z = 8$

$2x + y + 2z = 5$

$5x + y + z = 7$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = D$

જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1-2) - 3(2-10) + 4\,(2-5) = -1 + 24 - 12 = 11 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$A_{11} = -1, A_{12} = 8, A_{13} = -3, A_{21} = 1, A_{22} = -19, A_{23} = 14, A_{31} = 2, A_{32} = 6, A_{33} = -5$

$$\therefore adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{11}\ adj\ A$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8 & +5 & +14 \\ 64 & -95 & +42 \\ -24 & +70 & -35 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 1, y = 1, z = 1$ **જવાબ :** (A)

નોંધ : દેખીતું જ (1, 1, 1) ઉકેલ છે. તે પ્રત્યક્ષ ચકાસણીથી મળે.

(41) જો $A = \begin{bmatrix} sin\alpha & -cos\alpha \\ cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix}$ તથા $A + A' = I$ હોય, તો α = ... $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} sin\alpha & -cos\alpha \\ cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix}$

હવે $A + A' = I$

$$\begin{bmatrix} sin\alpha & -cos\alpha \\ cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\quad \text{આથી} \begin{bmatrix} 2sin\alpha & 0 \\ 0 & 2sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 2\ sin\ \alpha = 1$

$\therefore\ sin\ \alpha = \frac{1}{2}$. આથી $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ **જવાબ :** (B)

(42) જો ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે AB = A અને BA = B તો B^2 = ...

(A) B (B) 0 (C) I (D) A

ઉકેલ : $B^2 = B \cdot B$

$= (BA)\ B$ (B = BA)

$= B\ (AB)$ (જૂથનો નિયમ)

$= BA$ (AB = A)

$\therefore B^2 = B$ (BA = B)

જવાબ : (A)

(43) જો $2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ તો X = ...

(A) $2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $2X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

જવાબ : (D)

(44) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & cot\theta \\ -cot\theta & 1 \end{bmatrix}$ માટે $(A^{-1})^2 = f(\theta) \begin{bmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{bmatrix}$ તો $f(\theta)$ = ...

(A) $sin^2\theta$ (B) $cos^2\theta$ (C) $cos\,\theta$ (D) $sin\,\theta$

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & cot\theta \\ -cot\theta & 1 \end{vmatrix} = 1 + cot^2\theta = cosec^2\theta$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\, A$

$A^{-1} = \frac{1}{cosec^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix}$

$(A^{-1})^2 = sin^4\theta \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -cot\theta \\ cot\theta & 1 \end{bmatrix}$

$= sin^4\theta \begin{bmatrix} 1-cot^2\theta & -2cot\theta \\ 2cot\theta & -cot^2\theta+1 \end{bmatrix}$

$= sin^2\theta \begin{bmatrix} sin^2\theta-cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & sin^2\theta-cos^2\theta \end{bmatrix}$

$= sin^2\theta \begin{bmatrix} -cos2\theta & -sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{bmatrix}$

$\therefore \quad f(\theta) = sin^2\theta$

જવાબ : (A)

(45) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $A^2 - 5A = kI$ તો k = ...

(A) 8 (B) 7 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$

$A^2 - 5A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 5I$

$\therefore k = 5$ **જવાબ :** (C)

નોંધ : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$, આથી $A^2 - 5A - 5I = 0$

(46) જો $A = [2 - 3 \ \ 4]$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = [0 \ \ 2 \ \ 3]$ અને $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ તો AB + XY = ...

(A) [20] (B) [–20] (C) 20 (D) –20

ઉકેલ : $AB + XY = [2 - 3, 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + [0 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= [6 - 6 + 4] + [0 + 4 + 12] = [4] + [16] = [20]$ **જવાબ :** (A)

(47) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, B = ... જેથી AB = BA. જ્યાં $B \neq I$

(A) $\begin{bmatrix} x & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & y \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} x & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$

ઉકેલ : ધારો કે $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix}$

અહીં AB = BA

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x+p & y+q \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ p & p+q \end{bmatrix}$

$x + p = x$ $\quad y + q = x + y$ $\quad q = p + q$

$\therefore p = 0$ $\quad q = x$

$\therefore B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (B)

(48) જો $A = diag\ [3\ 2\ 1]$, તો A^{-1} ના ઘટકોનો સરવાળો ...... છે.

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{11}{6}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6

ઉકેલ : $A = diag\ [3\ 2\ 1]$

$A^{-1} = diag\left[\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1\right]$

$\therefore$ A^{-1}ના ઘટકોનો સરવાળો $= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 = \frac{3+2+6}{6} = \frac{11}{6}$ **જવાબ :** (B)

(49) જો સમીકરણ $\lambda x + 2y - 2z = 1$, $4x + 2\lambda y - z = 2$ અને $6x + 6y + \lambda z = 3$, નો અનન્ય ઉકેલ મળે તો,

(A) $\lambda \neq -2$ (B) $\lambda \neq 3$ (C) $\lambda \neq 2$ (D) $\lambda \neq 1$

ઉકેલ : $\lambda x + 2y - 2z = 1$

$4x + 2\lambda y - z = 2$

$6x + 6y + \lambda z = 3$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 4 & 2\lambda & -1 \\ 6 & 6 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 4 & 2\lambda & -1 \\ 6 & 6 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$ હોય, તો A^{-1} મળે તથા અનન્ય ઉકેલ મળે.

$\lambda (2\lambda^2 + 6) - 2 (4\lambda + 6) - 2 (24 - 12\lambda) \neq 0$

$\therefore 2\lambda^3 + 22\lambda - 60 \neq 0$

$\therefore \lambda^3 + 11 \lambda - 30 \neq 0$

$\therefore (\lambda - 2) (\lambda^2 + 2\lambda + 15) \neq 0$

વાસ્તવિક બીજ માટે $\lambda \neq 2$ **જવાબ :** (C)

(50) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$ એ સ્વયંઘાતી શ્રેણિક હોય, તો $x =$ ......

(A) –1 (B) –5 (C) –4 (D) –3

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16-4x \\ -1 & 3 & 16+4x \\ 4+x & -8-2x & -12+x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} = A$$

$4 + x = 1 \quad 16 + 4x = 4, \quad -12 + x^2 = x$

$\therefore x = -3$ માટે તમામ સમીકરણો સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(51) જો $A = \begin{bmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{bmatrix}$; $a, b, c \in R$, $abc = 1$, $AA^T = 64\ I$ અને $|A| > 0$ તો $(a^3 + b^3 + c^3)^3 = ...$

(A) 343 (B) 729 (C) 256 (D) 512

ઉકેલ : અહીં $A^T = A$ થાય.

$A^2 = 64\ I$

$|A|^2 = 64 \Rightarrow |A| = 8$ $(\ |A| < 0)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a & b & c \\ b & 3c & a \\ c & a & 3b \end{vmatrix}$$

$= 3a\,[9bc - a^2] - b\,[3b^2 - ca] + c\,[ab - 3c^2]$

$\therefore |A| = 8 \Rightarrow 29abc - 3\,(a^3 + b^3 + c^3) = 8$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 7$ ($abc = 1$ મૂકતાં,)

$\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^3 = 343$ **જવાબ :** (A)

(52) જો $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ તો $adj\ A = ...$

(A) A (B) A^T (C) 3A (D) $3A^T$

ઉકેલ : $adj\ A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3A^T$ **જવાબ :** (D)

(53) જો a, b, c શૂન્યેતર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો x, y, z ની સમીકરણ સંહતિ

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ ને ......

(A) અનન્ય ઉકેલ છે. (B) ઉકેલ નથી. (C) એકથી વધુ સાન્ત ઉકેલો છે. (D) અનંત ઉકેલો છે.

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1\ (a^2), C_2\ (b^2), C_3\ (c^2)$$

$$= -\frac{4}{a^2b^2c^2} \neq 0$$

$\therefore$ સમીકરણનો અનન્ય ઉકેલ મળે. **જવાબ :** (A)

(54) 3×3 શ્રેણિક A એ સમીકરણ $A^2 - 5A + 7I = 0$ નું સમાધાન કરે છે. જો $A^5 = aA + bI$ તો $2a - 3b$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) 3135 (B) 1453 (C) 1435 (D) 4135

ઉકેલ : $A^3 = A A^2 = A[5A - 7I] = 5A^2 - 7A = 5[5A - 7I] - 7A = 18A - 35I \quad (A^2 = 5A - 7I)$

$A^4 = A \cdot A^3 = A[18A - 35I] = 18A^2 - 35A$

$A^4 = 18\,[5A - 7\,I] - 35A = 55A - 126\,I$

$A^5 = A \cdot A^4 = A[55A - 126\,I] = 55A^2 - 126\,A = 55\,[5A - 7I] - 126\,A$

$\therefore A^5 = 149A - 385\,I = aA + b\,I$

$\therefore a = 149, b = -385$

$2a - 3b = 2(149) - 3\,(-385) = 298 + 1155 = 1453$ **જવાબ :** (B)

(55) જો $[x]$ એ x નું મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય દર્શાવે તો નીચેના શ્રેણિકના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ...... છે.

$$\begin{bmatrix} [e] & [\pi] & [\pi^2-6] \\ [\pi] & [\pi^2-6] & [e] \\ [\pi^2-6] & [e] & [\pi] \end{bmatrix}$$

(A) 8 (B) 0 (C) 1 (D) -8

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$2 < e < 3 \Rightarrow [e] = 2$

$3 < \pi < 4 \Rightarrow [\pi] = 3$

$3 < \pi^2 - 6 < 4 \Rightarrow [\pi^2 - 6\,] = 3$

$\therefore$ માંગેલ નિશ્ચાયક $= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8$ **જવાબ :** (D)

(56) શ્રેણિકોના ગુણાકારને સાપેક્ષ સમૂહ $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}, x \in R, x \neq 0 \right\}$ નો એકમ ઘટક ...... છે.

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : ધારો કે $\begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix}$ એકમ ઘટક છે.

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \quad \forall x \quad \text{આથી} \begin{bmatrix} 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \\ 3kx & 3kx & 3kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$\therefore 3kx = x$

$\therefore k = \frac{1}{3}$ $(x \neq 0)$

$\therefore$ એકમ ઘટક $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ છે. **જવાબ :** (A)

(57) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ નો લંબ શ્રેણિક ...... થાય.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|}\ adj\ (I - A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\varnothing (A) = (I + A)(I - A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (B)

(58) જો સમીકરણો $x + 3y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $kx + 2y + 3z = 0$ નો શૂન્યેતર ઉકેલ મળે તો $k =$ .....
$(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$

(A) $\frac{13}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{15}{2}$ (D) $-\frac{13}{2}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = D$ જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{bmatrix}$

શૂન્યેતર ઉકેલ માટે $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$1\,[-3 + 2] - 3\,[6 + k] + 1\,[4 + k] = 0$
$-1 - 18 - 3k + 4 + k = 0$
$-15 - 2k = 0$

$\therefore\ k = -\frac{15}{2}$ **જવાબ :** (C)

(59) જો સમીકરણો $y + z = -ax,\ z + x = -by,\ x + y = -cz$ નો શૂન્યેતર ઉકેલ શક્ય હોય, તો

$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = ...\ (x + y + z \neq 0)$

(A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

ઉકેલ : $y + z = -ax, \quad z + x = -by, \quad x + y = -cz$

$\therefore -a = \frac{y+z}{x} \qquad -b = \frac{z+x}{y} \qquad -c = \frac{x+y}{z}$

$1 - a = 1 + \frac{y+z}{x}\ ;\ 1 - b = \frac{z+x}{y} + 1;\ \ 1 - c = \frac{x+y}{z} + 1$

$1 - a = \frac{x+y+z}{x}\ ;\ 1 - b = \frac{x+y+z}{y};\ \ 1 - c = \frac{x+y+z}{z}$

$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$ **જવાબ :** (A)

(60) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^{100} = ...$

(A) 2^{99} A (B) 2^{101} A (C) 2^{100} A (D) I

ઉકેલ : $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

તે જ રીતે $A^{100} = 2^{99} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^{99}$ A **જવાબ :** (A)

(61) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & tanx \\ -tanx & 1 \end{bmatrix}$ તો $A^T A^{-1} = ...$

(A) $\begin{bmatrix} -cos\,2x & sin\,2x \\ -sin2x & cos\,2x \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} cos\,2x & -sin\,2x \\ sin2x & cos\,2x \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} sin\,2x & cos\,2x \\ cos2x & sin\,2x \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} tanx & 1 \\ -1 & tanx \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $|A| = 1 + tan^2x = sec^2x \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A = cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -tanx \\ tanx & 1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -tanx \\ tanx & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A^{-1} = cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -tanx \\ tanx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -tanx \\ tanx & 1 \end{bmatrix} = cos^2 x \begin{bmatrix} 1-tan^2x & -2tanx \\ 2tanx & 1-tan^2x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos^2x-sin^2x & -2sinxcosx \\ 2sinxcosx & cos^2x-sin^2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2x & -sin2x \\ sin2x & cos2x \end{bmatrix}$$

જવાબ : (B)

(62) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$ તો $I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \ldots \infty = \ldots\ldots$

(A) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-9 & 3-3 \\ -27+27 & -9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots$

$$\therefore I + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -18 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \ldots \infty = I + 2A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (C)

(63) જો સંમિત શ્રેણિક X તથા વિસંમિત શ્રેણિક Y માટે $X + Y = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, તો X = ...

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 13 \\ 10 & 13 & 8 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{13}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & 8 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A = X + Y \Rightarrow A^T = X^T + Y^T = X - Y$

$$\therefore X = \frac{1}{2} [A + A^T]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{13}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

જવાબ : (D)

(64) જો $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ અને $B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ તો $(AB)^{-1} =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & \frac{-67}{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{61}{2} & -\frac{47}{2} \\ -\frac{87}{2} & \frac{67}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & \frac{67}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \frac{61}{2} & -\frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $|A| = 54 - 56 = -2 \neq 0$. હવે $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\, A$ આથી $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -47 \\ -87 & 67 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

જવાબ : (A)

(65) જો $[x - 5 - 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$, તો $x =$ ......

(A) $\pm 2\sqrt{3}$ (B) $\pm\sqrt{3}$ (C) $\pm 4\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : $[x \;\; -5 \;\; -1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$

$$[(x-2) \;\; -10 \;\; (2x - 5 - 3)]\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore [x - 2 \;\; -10 \;\; 2x - 8]\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$x^2 - 2x - 40 + 2x - 8 = 0$

$x^2 = 48$. આથી $x \pm \sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$

જવાબ : (C)

(66) જો $A^2 - 3A = I$ તો $A^{-1} =$ ......

(A) $I - 3A$ (B) $3A - I$ (C) $A - 3I$ (D) $3I - A$

ઉકેલ : $A^2 - 3A = I$

$A^{-1}(A^2 - 3A) = A^{-1}I$

$(A^{-1}A)A - 3(A^{-1}A) = A^{-1}I$

$IA - 3I = A^{-1}$

$\therefore A^{-1} = A - 3I$ **જવાબ :** (C)

(67) જો $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2x-3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $AB = I$ તો $x =$ ......

(A) 2 (B) –1 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $|AB| = |I|$

$|A|\,|B| = 1$

$\therefore \frac{1}{2}[2x - 3](-2) = 1$ આથી $2x - 3 = -1$

$\therefore x = 1$ **જવાબ :** (C)

(68) જો $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $A^2 = B$ તો $a =$ ......

(A) – 1 (B) 1 (C) 4 (D) a ન મળે

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+1 & 1 \end{bmatrix}$. $A^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore a^2 = 1, \quad a + 1 = 5$

$a = 4$ આ સમીકરણો સુસંગત નથી. **જવાબ :** (D)

(69) વિસંમિત શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો લંબ શ્રેણિક ...... થાય.

(A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) I (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|}\, adj\,(I - A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

લંબ શ્રેણિક $= (I + A)(I - A)^{-1}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(70) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$ નો લંબ શ્રેણિક ...... થાય.

(A) $\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$

ઉકેલ : I એ 2 × 2 એકમ શ્રેણિક છે.

$I + A = \begin{bmatrix} 1 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ તથા $I - A = \begin{bmatrix} 1 & tan\frac{\theta}{2} \\ -tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$(I - A)^{-1} = cos^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} 1 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$

લંબ શ્રેણિક $(I + A)(I - A)^{-1} = cos^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} 1 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$= cos^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} 1-tan^2\frac{\theta}{2} & -2tan\frac{\theta}{2} \\ 2tan\frac{\theta}{2} & -tan^2\frac{\theta}{2}+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2} & -2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} \\ 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} & cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (B)

(71) જો A એ 3 × 3 સામાન્ય શ્રેણિક હોય અને $AA^T = A^TA$ અને $B = A^{-1}A^T$ તો BB^T = ...

(A) I + B (B) I (C) B^{-1} (D) $(B^{-1})^T$

ઉકેલ : $BB^T = (A^{-1}A^T)(A^{-1}A^T)^T = (A^{-1}A^T)(A(A^{-1})^T) = [A^{-1}(A^TA)](A^{-1})^T$

$BB^T = [(A^{-1}(AA^T)](A^{-1})^T = [(A^{-1}A)(A^T)(A^{-1})^T = A^T(A^T)^{-1} = I$ **જવાબ :** (B)

(72) જો $[1 \ \ x \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$ તો x = ...

(A) $\frac{-9\pm\sqrt{35}}{2}$ (B) $\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}$ (C) $\frac{-9\pm\sqrt{53}}{2}$ (D) $\frac{-7\pm\sqrt{35}}{2}$

ઉકેલ : $[1 \quad 3 + 5x + 3 \quad 2 + x + 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$

$(A^T)^{-1}$

$\therefore [1 \quad 6 + 5x \quad 4 + x] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = [0]$

$\therefore 1 + 6 + 5x + 4x + x^2 = 0$

$\therefore x^2 + 9x + 7 = 0$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-4(7)}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$ **જવાબ :** (C)

(73) સંવૃત્ત અંતરાલ $[-4, -1]$ માં x ની કેટલી કિંમતો માટે શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & -1+x & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ અસામાન્ય શ્રેણિક છે ?

(A) -4 (B) 3 (C) 0 (D) 2

ઉકેલ : શ્રેણિક અસામાન્ય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & x-1 & 2 \\ 3 & -1 & x+2 \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ -x & 0 & x \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad R_{21}(-1), R_{32}(-1)$$

$$\therefore x^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore x^2 \{-1(-2 - x - 3) - 1(1)\} = 0$

$\therefore x^2 (x + 4) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = -4$

$\therefore 0 \notin [-4, -1]$ તથા $-4 \in [-4, -2]$ **જવાબ :** (A)

(74) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $Q = PAP^T$ તો $P^T Q^{205} P =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 205 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 205 \end{bmatrix}$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $PP^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore P^T = P^{-1}$, વળી $P^TP = PP^T$ $(PP^{-1} = P^{-1}P = I)$

હવે $P^TQ^{205}P = P^T$ [Q × Q × .... × Q 205 વખત] P

= P^T [(PAP^T) (PAP^T) × .... × 205 વખત] P

= $(P^TP)A\ (P^TP)A\ (P^TP)A$... 205 વખત = A × A × ... 205 વખત = A^{205}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

તે જ રીતે $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ આથી $A^{205} = \begin{bmatrix} 1 & 205 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(75) $A = \begin{bmatrix} cos\frac{7\pi}{6} & sin\frac{11\pi}{6} \\ sin\frac{11\pi}{6} & -cos\frac{7\pi}{6} \end{bmatrix}$ તો $A^2 =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) & sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) \\ sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) & -cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ **જવાબ :** (A)

(76) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 20 & 25 & 16 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -12 & -15 & 4 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ -24 & -40 & 48 \end{bmatrix}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : માંગેલ ગુણાકાર $\begin{bmatrix} -1-4 & -2-12 \\ -2-6 & -4-16 \\ -3-8 & -6-20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ -8 & -20 \\ -11 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 16 \\ 32 & 40 & 28 \\ 44 & 55 & 40 \end{bmatrix}$$ **જવાબ :** (A)

(77) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ તો B = ...

(A) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -8 & 1 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $2A + 4B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 2 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ (1)

$2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (2)

(1) માંથી (2) ની બાદબાકી કરતાં

$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 2 & 12 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (A)

(78) જો $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ તો $A^{12} =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^{12} = (A^4)^3 = I^3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **જવાબ :** (C)

(79) જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ અને $A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો $\alpha =$ ...... $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ તથા $A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore 2 \cos \alpha = 1.$ આથી $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ :** (C)

(80) જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ તો $A^8 =$ ......

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^8 = A^4 \cdot A^4 = I$ **જવાબ :** (C)

(81) જો $A = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ અને $A + A^T = \sqrt{3}\,I$ તો $\theta =$ ...... $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{6}$ (D) $-\frac{\pi}{3}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

હવે $A + A^T = \sqrt{3}\,I$

$\therefore \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2cos\theta & 0 \\ 0 & 2cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\therefore cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ હોવાથી, $P(\theta)$ પ્રથમ અથવા ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ અથવા $\frac{-\pi}{6}$ **જવાબ :** (A), (C)

(82) હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

હવે $A = I_2A$

$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ આથી $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_2 \to R_2 - 3R_1)$ આથી $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A$ $(R_2 \to 4R_2)$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A$ $\qquad R_{21}(-5)$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(83) હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

હવે $A = I_3A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \qquad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} A \qquad R_2 \to R_2 + 3R_1, \quad R_3 \to R_3 - 2R_1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} A \qquad R_2 \to \tfrac{1}{10} R_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-11}{10} \end{bmatrix} A \qquad R_3 \to R_3 + 3R_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \qquad R_3 \rightarrow \frac{5}{2} R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-15}{2} & \frac{-9}{4} & \frac{37}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \qquad R_2 \rightarrow R_2 - \frac{4}{5} R_3,\ R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{17}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \rightarrow R_1 - 2 R_2)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{17}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \end{bmatrix}$$

(84) હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે અમુક પગથિયા પૂર્ણ કરતાં નીચે પ્રમાણે શ્રેણિકો મળે તો α અને β નું મૂલ્ય મેળવો.

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$

(A) $\alpha = \frac{7}{26}, \beta = \frac{-1}{26}$ (B) $\alpha = \frac{-1}{26}, \beta = \frac{7}{26}$ (C) $\alpha = \frac{1}{26}, \beta = \frac{-7}{26}$ (D) $\alpha = \frac{1}{26}, \beta = \frac{7}{26}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 7 & 9 & 79 \\ 5 & 3 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \qquad (C_1 \leftrightarrow C_3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & -26 & -208 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A \qquad R_2 \rightarrow R_2 - 7 R_1,\ R_3 \rightarrow R_3 - 5 R_1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_2 \rightarrow -\frac{1}{26} R_2\right)$$

$\therefore \alpha = \frac{-1}{26}, \beta = \frac{7}{26}$ **જવાબ :** (B)

(85) હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક

$A = \begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવતા

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y & -\frac{9}{26} \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ A શ્રેણિક મળ્યા તો x અને y નાં મૂલ્યો અનુક્રમે .... અને ....

(A) 1 અને $\frac{5}{26}$ (B) $\frac{5}{26}$ અને 1 (C) 1 અને $-\frac{5}{26}$ (D) -1 અને $-\frac{5}{26}$

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 41 & 5 & 1 \\ 79 & 9 & 7 \\ 29 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 7 & 9 & 79 \\ 5 & 3 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $(C_1 \leftrightarrow C_3)$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & -26 & -208 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$ $R_2 \to R_2 - 7R_1,\ R_3 \to R_3 - 5R_1$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$ $\left(R_2 \to \frac{1}{26} R_2\right)$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{26} & \frac{-9}{26} \\ 0 & -\frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$ $R_1 \to R_1 - 5R_2$

$\therefore$ $x = 1$ અને $y = \frac{5}{26}$ **જવાબ :** (A)

•