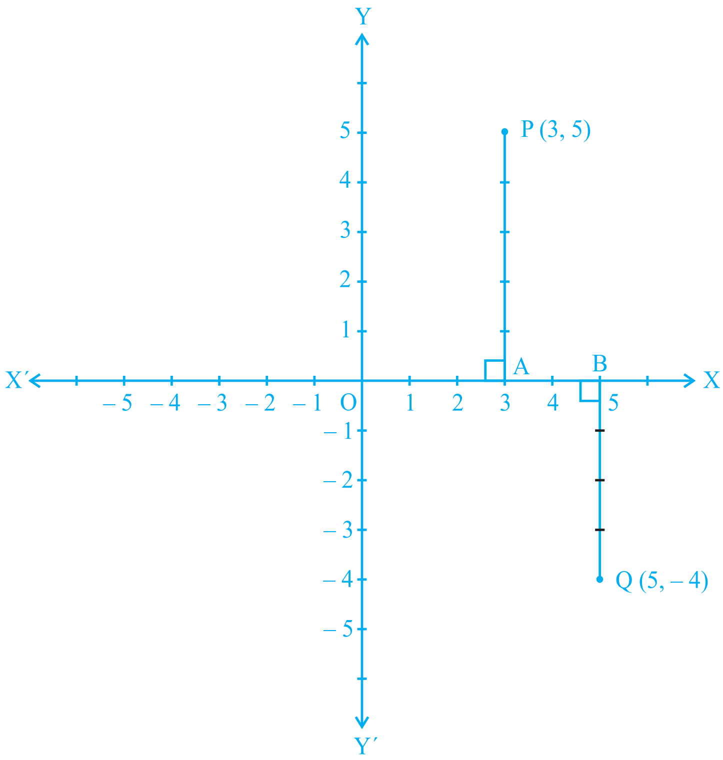
3.3 જે બિંદુના યામ આપેલા હોય તે બિંદુનું નિરૂપણ

અત્યાર સુધી અમે તમારા માટે બિંદુઓ મૂક્યાં છે અને તમને તેમના યામ આપવાનું કહેવામાં આવ્યું છે. હવે જો આપણે બિંદુના યામ જાણતા હોઈએ તો એ બિંદુ સમતલમાં ક્યાં મુકાય તે દર્શાવીશું. આ કાર્ય પદ્ધતિને બિંદુનું ‘નિરૂપણ’ કહે છે.

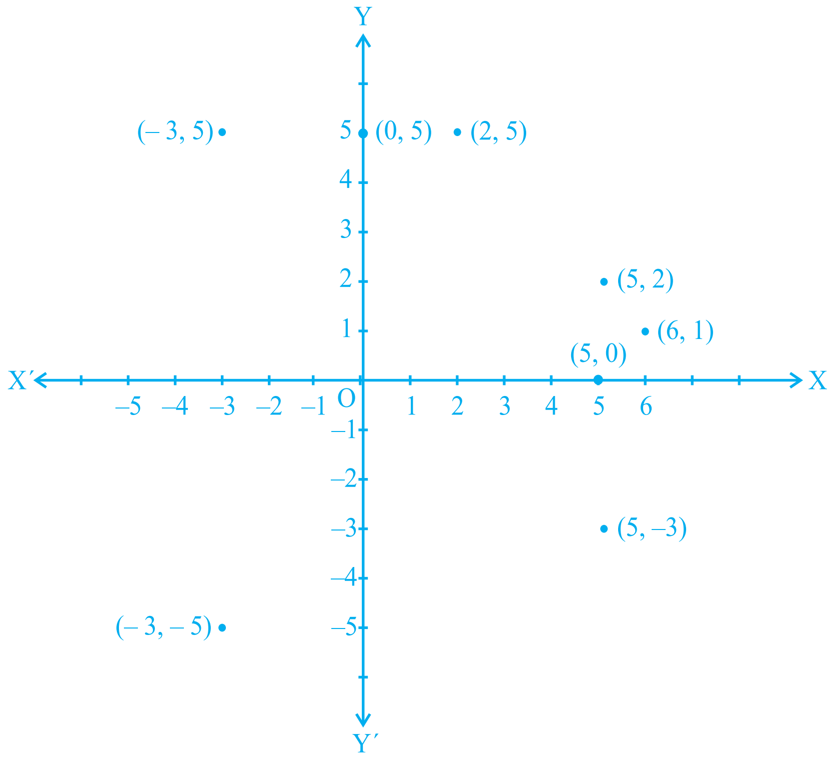
ધારો કે બિંદુના યામ (3, 5) છે. આપણે યામ-સમતલમાં આ બિંદુનું નિરૂપણ કરવું છે. આપણે યામાક્ષો દોરી અને બંને યામાક્ષો પર એક સેન્ટિમીટરના એક એકમ પસંદ કરી તેમને એકમ તરીકે દર્શાવીશું. બિંદુના યામ (3, 5) છે. તે આપણને જણાવે છે કે બિંદુનું ધન x-અક્ષ ઉપર y-અક્ષથી અંતર 3 છે તથા ધન y-અક્ષ ઉપર x-અક્ષથી અંતર 5 છે. ઊગમબિંદુ O થી શરૂ કરી ધન x-અક્ષ ઉપર 3 અંતર કાપો અને સંગત બિંદુ A દર્શાવો. A થી આપણે y-અક્ષની ધન દિશામાં 5 એકમ જાવ અને તેને સંગત બિંદુ P દર્શાવો. (જુઓ આકૃતિ 3.15.) તમે જોશો કે P નું y-અક્ષથી અંતર 3 એકમ અને x-અક્ષથી અંતર 5 એકમ છે. હવે P બિંદુનું સ્થાન નક્કી થયું. આપણે નોંધીએ કે P પ્રથમ ચરણમાં છે, P ના બંને યામ ધન છે. તેવી જ રીતે તમે બિંદુ Q(5, – 4)ને યામ-સમતલમાં દર્શાવી શકો છો. Q નું x-અક્ષથી ઋણ y-અક્ષની દિશામાં અંતર 4 એકમ છે. તેથી y-યામ – 4 છે. (જુઓ આકૃતિ 3.15.)બિંદુ Q ચોથા ચરણમાં છે (કેમ?)



આકૃતિ 3.15

ઉદાહરણ 3 : યામ-સમતલમાં બિંદુઓ (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (– 3, 5), (– 3, – 5), (5, – 3) અને (6, 1) ને દર્શાવો.

ઉકેલ : 1 સેમી = 1 એકમ લઈને આપણે x-અક્ષ અને y-અક્ષ દોરીશું. આકૃતિ 3.16 માં બિંદુઓનાં સ્થાન ટપકાં મૂકીને દર્શાવેલ છે.



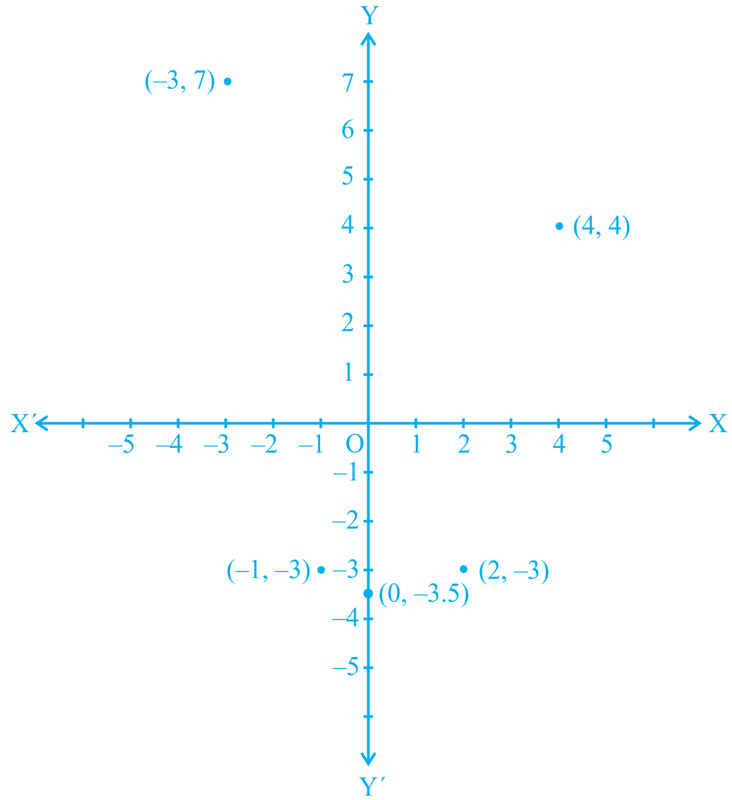
આકૃતિ 3.16

નોંધ: ઉપરનાં ઉદાહરણમાં તમે જોશો (5, 0) અને (0, 5) સમાન સ્થાને નથી. તેવી જ રીતે (5, 2) અને (2, 5) પણ ભિન્ન સ્થાને છે. વળી, (– 3, 5) અને (5, – 3) બિંદુઓ પણ ભિન્ન સ્થાને છે. બીજાં કેટલાંક ઉદાહરણથી તમે શોધી શકશો કે, *જો* $x \neq y$ *, તો* (x, y) *નું સ્થાન યામ સમતલમાં* (y, x) *ના સ્થાનથી ભિન્ન છે.* તેથી જો આપણે x અને y ના યામની ફેરબદલ કરીએ તો (y, x)નું સ્થાન (x, y)ના સ્થાનથી ભિન્ન બનશે. આથી કહી શકાય કે, x અને y નો ક્રમ (x, y) અગત્યનો છે. તેથી (x, y) ને ક્રમયુક્ત જોડ કહેવાય છે. જો $x \neq y$ તો ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \neq$ ક્રમયુકત જોડ (y, x), પરંતુ જો $x = y$ તો સ્પષ્ટ છે કે $(x, y) = (y, x)$.

ઉદાહરણ 4 : યામ-સમતલમાં નીચેની ક્રમયુક્ત જોડો (x, y) દર્શાવો. સ્કેલમાપ 1 સેમી = 1 એકમનો ઉપયોગ અક્ષો પર કરો :

x	– 3	0	– 1	4	2
y	7	–3.5	– 3	4	– 3

ઉકેલ : ક્રમયુક્ત જોડ કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યાં તે બિંદુઓ (– 3, 7), (0, – 3.5), (– 1, – 3),(4, 4), (2, – 3) તરીકે દર્શાવી શકાય. આકૃતિ 3.17 માં બિંદુઓને ટપકાંની નિશાનીથી દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.17

પ્રવૃત્તિ 2 : બે વ્યક્તિઓની રમત (આવશ્યક સામગ્રી બે કાઉન્ટર અથવા સિક્કા, આલેખપત્ર, બે જુદા જુદા રંગનાં પાસા જેમકે લાલ અને લીલો.)

દરેક કાઉન્ટર (0, 0) પર મૂકો. દરેક ખેલાડી વારાફરતી બે પાસાંને ફેંકે. જ્યારે પ્રથમ ખેલાડી પાસા ફેંકે છે ત્યારે ધારો કે લાલ પાસામાં 3 દર્શાવે અને લીલા પાસામાં 1 દર્શાવે છે. તેથી તે કાઉન્ટર (3, 1) પર મૂકશે. તેવી જ રીતે જો બીજો ખેલાડી પાસા ફેંકે તો લાલ પાસા પર 2 અને લીલા પર 4 દર્શાવે છે. તેથી તે કાઉન્ટર (2, 4) પર મૂકશે. બીજીવાર ફેંકતાં જો પ્રથમ ખેલાડીને લાલ પાસા પર 1 અને લીલા પાસા પર 4 મળે છે. તેથી તે (3, 1) સ્થાન પરથી (3+1, 1+4) પર ચાલશે. એટલે કે x-યામમાં 1 ઉમેરતાં અને y-યામમાં 4 ઉમેરતાં મળશે.

આ રમતનો ઉદ્દેશ્ય કૂદકા માર્યા વગર (10, 10) પર પ્રથમ પહોંચવાનો છે. એટલે કે x-યામ અને y-યામની કિંમત 10 થી વધુ ન હોવી જોઈએ. બે ખેલાડીના કાઉન્ટર એક સ્થાન પર ભેગા થઈ જવા ન જોઈએ. પ્રથમ ખેલાડીનું કાઉન્ટર બીજા ખેલાડીના કાઉન્ટરના સ્થાનવાળા બિંદુ પર આવે, તો બીજા ખેલાડીનું કાઉન્ટર (0, 0) પર જતું રહે. જો કાઉન્ટર ભેગા થયા વગર ચાલવું શક્ય ન હોય, તો ખેલાડીનો વારો જાય. તમે વધુ મિત્ર સાથે રમવા માટે આ રમતનું વિસ્તરણ કરી શકો છો.

અવલોકન : તમે આગળના ધોરણમાં સમય-અંતર આલેખ, બાજુ-પરિમિતિ આલેખ જેવી ભિન્ન પરિસ્થિતિઓના આલેખ દોર્યા છે. તેની સાથે બિંદુના આલેખની પ્રક્રિયા સરખાવી શકાય. આવી સ્થિતિમાં આપણે x-અક્ષ તથા y-અક્ષની જગાએ અક્ષોને, t-અક્ષ, d-અક્ષ, s-અક્ષ, અથવા p-અક્ષ, વગેરે કહી શકીએ.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. કયા ચરણમાં અથવા કયા અક્ષ ઉપર $(-2, 4)$,$(3, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ અને $(-3, -5)$ બિંદુઓ છે? તમારા જવાબની ચકાસણી બિંદુઓને યામ-સમતલમાં દર્શાવી કરો.

2. નીચેના કોષ્ટકમાંથી સમતલમાં અનુકૂળ સ્કેલમાપના એકમોનું અંતર અક્ષો પર પસંદ કરીને (x, y) બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો :

x	-2	-1	0	1	3
y	8	7	-1.25	3	-1

3.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો :

1. સમતલમાં વસ્તુનું સ્થાન અથવા બિંદુનું નિરૂપણ કરવામાં આપણને બે પરસ્પર લંબરેખાની જરૂર પડે. એક સમક્ષિતિજ અને બીજી શિરોલંબ.
2. સમતલને કાર્તેઝિય સમતલ અથવા યામ-સમતલ અથવા કાર્તેઝિય યામ સમતલ પણ કહે છે અને રેખાઓને યામાક્ષો કહે છે.
3. સમક્ષિતિજ રેખાને x-અક્ષ અને શિરોલંબ રેખાને y-અક્ષ કહે છે.
4. યામાક્ષો સમતલને ચાર ભાગોમાં વિભાજિત કરે છે. તેમને ચરણ કહે છે.
5. બે અક્ષોના છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ કહેવાય છે.
6. બિંદુથી y-અક્ષ સુધીના યોગ્ય દિશામાં અંતરને x-યામ અથવા કોટિ અને બિંદુથી x-અક્ષ સુધીના યોગ્ય દિશામાં અંતરને y-યામ અથવા ભુજ કહેવાય છે.
7. જો x- યામ x અને y-યામ y હોય, તો (x, y) ને બિંદુના યામ કહેવાય છે.
8. x-અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનું સ્વરૂપ $(x, 0)$ અને y-અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, y)$ છે.
9. ઊગમબિંદુના યામ $(0, 0)$ છે.
10. પ્રથમ ચરણમાં બિંદુના યામ $(+, +)$, બીજા ચરણમાં $(-, +)$, ત્રીજા ચરણમાં $(-, -)$ અને ચોથા ચરણમાં $(+, -)$ સ્વરૂપના હોય છે. $+$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા અને $-$ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે.
11. જો $x \neq y$ તો $(x, y) \neq (y, x)$ અને જો $x = y$ તો $(x, y) = (y, x)$

પ્રકરણ 4

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—***Edmund Halley***

4.1 પ્રાસ્તાવિક

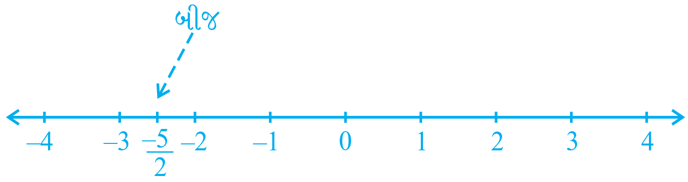
અગાઉના ધોરણોમાં તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો વિશે જાણ્યું છે. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ લખી શકો ? તમે કહી શકો કે $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ અને $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ એક ચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે. તમે એ પણ જાણો છો કે આ પ્રકારનાં સમીકરણોને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે આવા ઉકેલ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. આ પ્રકરણમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનને ફરી યાદ કરીશું તથા તેને બે ચલ સુધી વિસ્તૃત કરીશું. તમે આવા પ્રશ્નોં વિચારી શકોઃ શું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને ઉકેલ હોય ? જો હા, તો તે અનન્ય હોય? કાર્તેઝિય યામ સમતલમાં આ ઉકેલ કેવી રીતે દર્શાવી શકાય ? આવા પ્રશ્નોના જવાબ માટે તમે પ્રકરણ-3 માં જે સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે તેનો પણ ઉપયોગ કરી શકશો.

4.2 સુરેખ સમીકરણો

ચાલો, આપણે અગાઉ શું શીખી ગયા છીએ તે યાદ કરીએ. તો નીચે આપેલ સમીકરણ વિચારીએ.

$$2x + 5 = 0$$

તેનો ઉકેલ, એટલે કે આ સમીકરણનું બીજ $-\frac{5}{2}$ છે. આ બીજને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે દર્શાવી શકાયઃ



આકૃતિ 4.1

સમીકરણને ઉકેલતી વખતે તમારે હંમેશાં નીચે દર્શાવેલ મુદ્દાઓ ધ્યાન પર લેવા જોઈએ.

(i) સમીકરણની બંને બાજુમાં સમાન સંખ્યા ઉમેરો(અથવા તેમાંથી બાદ કરો)

(ii) સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરો ત્યારે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ બદલાતો નથી.

હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારીએ:

નાગપુર ખાતે ભારત અને શ્રીલંકા વચ્ચે રમાયેલ એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય ક્રિકેટ મેચમાં બે ભારતીય બેટ્સમેને સાથે મળી 176 રન બનાવ્યા. આ માહિતીને સમીકરણના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

અહીં, તમે જોઈ શકો છો કે બેમાંથી એકેય ખેલાડીના રન તમે જાણતા નથી અર્થાત્ અહીં બે અજ્ઞાત સંખ્યાઓ છે. આપણે તેમને દર્શાવવા માટે સંજ્ઞા x અને y નો ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો એક બેટ્સમેને કરેલ રન x અને બીજા બેટ્સમેને કરેલ રન y હોય તો,

$$x + y = 176.$$

માંગેલ સમીકરણ છે.

આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ છે. સામાન્ય રીતે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં ચલને x અને y વડે દર્શાવવાની પ્રથા છે, પરંતુ બીજા મૂળાક્ષરો પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે.

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ અને } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y.$$

જુઓ કે, આ સમીકરણોને તમે અનુક્રમે $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ અને $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકો.

આથી, જે સમીકરણને જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી તેવા સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ માં દર્શાવી શકાય તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

આનો અર્થ એ થાય કે તમે આવાં અનેક સમીકરણો લખી શકો.

ઉદાહરણ 1 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવો અને દરેકમાં a, b અને c ની કિંમતો દર્શાવો :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ઉકેલ : (i) $2x + 3y = 4.37$ સમીકરણને $2x + 3y - 4.37 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = 3$ અને $c = -4.37$.

(ii) સમીકરણ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ને $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ અને $c = -4$.

(iii) સમીકરણ $4 = 5x - 3y$ ને $5x - 3y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 5$, $b = -3$ અને $c = -4$.

તમે આ સમીકરણને $-5x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય તે બાબતમાં સંમત છો?આ કિસ્સામાં $a = -5$, $b = 3$ અને $c = 4$.

(iv) સમીકરણ $2x = y$ ને $2x - y + 0 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = -1$ અને $c = 0$.

$ax + b = 0$ પ્રકારનાં સમીકરણો પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે તેમને $ax + 0 \cdot y + b = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $4 - 3x = 0$ ને $-3x + 0 \cdot y + 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ઉકેલ : (i) $x = -5$ ને $1 \cdot x + 0 \cdot y = -5$ અથવા $1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(ii) $y = 2$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iii) $2x = 3$ ને $2x + 0 \cdot y - 3 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iv) $5y = 2$ ને $0 \cdot x + 5y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. ''નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી(બે ગણી) છે'' આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો).

2. નીચે દર્શાવેલા દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને $ax + by + c = 0$ તરીકે દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં a, b અને c ની કિંમત શોધો :

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

તમે જોયું કે દરેક એકચલ સુરેખ સમીકરણને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ અંગે તમે શું કહી શકો? સમીકરણમાં બે ચલ હોવાથી ઉકેલમાં કિંમતોની જોડ મળે અને તેમાં x માટે એક કિંમત અને y માટે એક કિંમત મળે. આ કિંમતો આપેલા સમીકરણનું સમાધાન કરે. આપણે એક સમીકરણ $2x + 3y = 12$ નો વિચાર કરીએ અહીં, $x = 3$ અને $y = 2$ તેનો એક ઉકેલ છે કારણ કે $x = 3$ અને $y = 2$ ની કિંમત ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં તમને,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12 \text{ મળશે.}$$

આ ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ (3, 2) સ્વરૂપે લખી શકાય. તેમાં પ્રથમ x ની કિંમત અને તે પછી y ની કિંમત લખાય છે.

આ જ પ્રમાણે (0, 4) પણ ઉપરોક્ત સમીકરણનો ઉકેલ છે.

બીજી રીતે જોતાં (1, 4) એ $2x + 3y = 12$ નો ઉકેલ નથી કારણ કે $x = 1$ અને $y = 4$ મૂકતાં આપણને $2x + 3y = 14$ મળે અને 12 ન મળે (જમણી બાજુની કિંમત ન મળે). નોંધો કે (0, 4) એક ઉકેલ છે, પરંતુ (4, 0) ઉકેલ નથી.

$2x + 3y = 12$ માટે તમે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલ (3, 2) અને (0, 4) જોયા. તમે બીજા કોઇ ઉકેલ મેળવી શકો? શું તમે સંમત છો કે (6, 0) પણ એક અન્ય ઉકેલ છે? આ જ પ્રમાણે ચકાસો. હકીકતે આ પ્રમાણે આપણે ઘણા બધા ઉકેલો મેળવી શકીએ. $2x + 3y = 12$ માં તમારી પસંદગીની x ની કોઇ પણ કિંમત લો (જેમ કે $x = 2$) આથી સમીકરણ $4 + 3y = 12$ માં રૂપાંતરિત થશે. તે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં તમને $y = \frac{8}{3}$ મળશે. આથી $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો અન્ય ઉકેલ છે. આ જ પ્રમાણે $x = -5$ પસંદ કરતાં સમીકરણ $-10 + 3y = 12$ મળશે. તે કિંમત $y = \frac{22}{3}$ આપશે. આથી $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો એક અન્ય ઉકેલ છે. આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના વિવિધ ઉકેલનો કોઇ અંત નથી. આમ, *એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.*

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ચાર ભિન્ન ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2, y = 2$ ચકાસતાં તે ઉકેલ છે, કારણ કે $x = 2, y = 2$ માટે

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

હવે $x = 0$ પસંદ કરીએ. x ની આ કિંમત મૂકવાથી આપેલ સમીકરણનું રૂપાંતર $2y = 6$ માં થઇ જશે. તેને અનન્ય ઉકેલ $y = 3$ હોય. આથી $x = 0, y = 3$ પણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી, આપેલ સમીકરણ $x = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. આથી $x = 6, y = 0$ પણ સમીકરણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. અંતે,આપણે $y = 1$ લઇએ તો આપેલ સમીકરણ $x + 2 = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. તેનો ઉકેલ $x = 4$. થાય. આથી (4, 1) પણ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. આથી આપેલા સમીકરણના અનંત ઉકેલો પૈકીના ચાર ઉકેલ (2, 2), (0, 3), (6, 0) અને (4, 1) છે.

ટિપ્પણી : અહીં આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ મૂકવાથી તેને સંગત y ની કિંમત મળશે. તેથી સમીકરણનો એક ઉકેલ મળશે. આ જ પ્રમાણે આપણે $y = 0$ મૂકીશું તો તેને અનુરૂપ x ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધો :

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ઉકેલ : (i) $x = 0$ લેતાં, આપણને $3y = 12$ મળે. તેથી $y = 4$ આમ, (0, 4) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી આપણને $x = 3$ મળે. તેથી (3, 0) પણ ઉકેલ થાય.

(ii) $x = 0$ લેવાથી આપણને $5y = 0$ મળે જેથી $y = 0$ થાય. આમ (0, 0) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. હવે જો તમે $y = 0$ લેશો તો ફરીથી તમને (0, 0) ઉકેલ તરીકે મળશે. તે અગાઉનો ઉકેલ જ છે. બીજો ઉકેલ મેળવવા $x = 1$ લો. આથી તમે y ની અનુરૂપ કિંમત $-\frac{2}{5}$ ચકાસી શકશો. આથી $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ એ $2x + 5y = 0$ નો બીજો ઉકેલ છે.

(iii) સમીકરણ $3y + 4 = 0$ ને $0 \cdot x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે લખી શકાય. x ની કોઈપણ કિંમત માટે તમને $y = -\frac{4}{3}$ મળશે. આથી, બે ઉકેલો $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ અને $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ મળે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ ખરો છે અને શા માટે ?

$y = 3x + 5$ ને

(i) અનન્ય ઉકેલ હોય. (ii) માત્ર બે ઉકેલ હોય. (iii) અનંત ઉકેલ હોય.

2. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલ લખો :

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. નીચેનામાંથી કયા બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ ના ઉકેલ છે. અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી તે ચકાસો :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. જો $x = 2, y = 1$ એ સમીકરણ $2x + 3y = k$ નો એક ઉકેલ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

4.4 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ

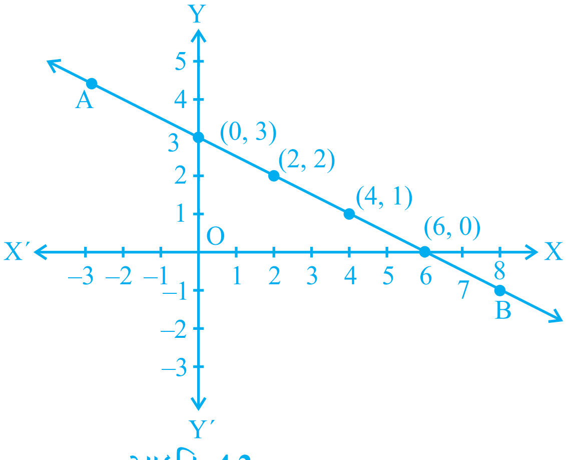
અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ બીજગણિતની રીતે મેળવ્યા હવે આપણે તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ જોઈએ. તમે જાણો છો કે આવા પ્રત્યેક સમીકરણના અનંત ઉકેલ હોય છે. આપણે તેમને યામ સમતલમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકીએ ? તમને એવો અંદાજ આવી ગયો હશે કે આપણે ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 3 ના સુરેખ સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ઉકેલોને x ની કિંમતોને અનુરૂપ નીચે y ની કિંમતો દર્શાવી નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક સ્વરૂપમાં રજુ કરી શકાય. (1)

કોષ્ટક 1

x	0	2	4	6	. . .
y	3	2	1	0	. . .

અગાઉના પ્રકરણમાં તમે બિંદુઓનું આલેખપત્ર પર કેવી રીતે નિરૂપણ કરી શકાય તે શીખ્યા છો. ચાલો આપણે બિંદુઓ $(0, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ અને $(6, 0)$ નું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરીએ. હવે આમાંના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડી રેખા મેળવો. ચાલો આપણે તેને રેખા AB કહીએ (જુઓ આકૃતિ 4.2).



આકૃતિ. 4.2

તમે જોયું કે બીજાં બે બિંદુઓ પણ રેખા AB પર આવેલા છે ? હવે આ રેખા પરનું બીજુ બિંદુ લો જેમ કે $(8, -1)$. શું તે એક ઉકેલ છે? હકીકતમાં $8 + 2(-1) = 6$. આથી $(8, -1)$ એક ઉકેલ છે. રેખા AB

પરનું અન્ય કોઇ બિંદુ મેળવો અને ચકાસો કે તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે કે નહીં. હવે રેખા AB પર ન હોય તેવું બિંદુ લો જેમ કે (2, 0). શું તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે? ચકાસો અને જુઓ કે તે બિંદુના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરતા નથી.

ચાલો આપણા અવલોકનોની એક યાદી બનાવીએ :

1. જેના યામ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરે છે તેવું પ્રત્યેક બિંદુ રેખા AB પર આવેલ છે.

2. રેખા AB પર આવેલ દરેક બિંદુ (a, b) એ સમીકરણ(1)નો ઉકેલ $x = a, y = b$ આપે છે .

3. રેખા AB પર આવેલ ન હોય તેવું કોઇપણ બિંદુ સમીકરણ (1)નો ઉકેલ નથી.

આથી તમે એવા નિષ્કર્ષ પર આવી શકો કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે અને સમીકરણના દરેક ઉકેલનું બિંદુ રેખા પર આવેલ હોય. હકીકતમાં કોઈ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરતાં બનતી રેખા એ સમીકરણના ઉકેલોનો સમૂહ છે. તેને સુરેખ સમીકરણનો *આલેખ* કહે છે. આથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ મેળવવા માટે તેના બે ઉકેલોને અનુરૂપ બે બિંદુઓને આલેખ પર દર્શાવો અને તેને જોડી રેખા બનાવો તે પૂરતું છે. જો કે બે કરતાં વધુ બિંદુઓનું નિરૂપણ કરવું સલાહભર્યું છે જેથી તમે તાત્કાલિક આલેખની ચોકસાઇ ચકાસી શકો.

નોંધ : એક ઘાત બહુપદીય સમીકરણ $ax + by + c = 0$ એ સુરેખ સમીકરણ છે અને તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ રેખા છે.

ઉદાહરણ 5 : જે રેખા પર બિંદુ (1, 2) આવેલ હોય તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો. આવાં કેટલાં સમીકરણ હોય ?

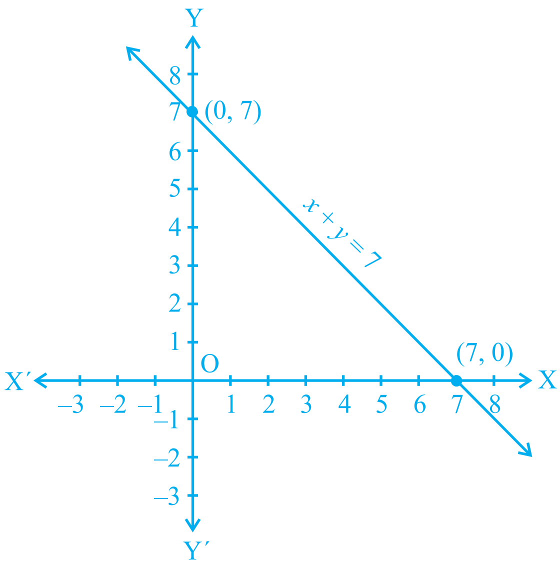
ઉકેલ : અહીં (1, 2) એ તમે જે સુરેખ સમીકરણ શોધવા માંગો છો તેનો ઉકેલ છે. આથી તમારે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતી રેખા શોધવી પડે. આવા સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ $x + y = 3$ થાય બીજાં ઉદાહરણો $y - x = 1$, $y = 2x$ થાય. કારણ કે આ બધા નું સમાધાન (1, 2)ના યામ દ્વારા થાય છે. હકીકતે તો એવાં જે બિંદુ (1, 2) ના યામોનું સમાધાન કરે તેવા અનંત સુરેખ સમીકરણો મળે. તમે આ સત્ય આકૃતિ દ્વારા જોઈ શકશો ?

ઉદાહરણ 6 : $x + y = 7$ નો આલેખ દોરો :

ઉકેલ : આલેખ દોરવા માટે આપણને આ સમીકરણના ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર પડશે. તમે ચકાસી જુઓ કે $x = 0, y = 7$, અને $x = 7, y = 0$ એ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ છે. આથી, આલેખ દોરવા માટે તમે નીચેના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી શકો.

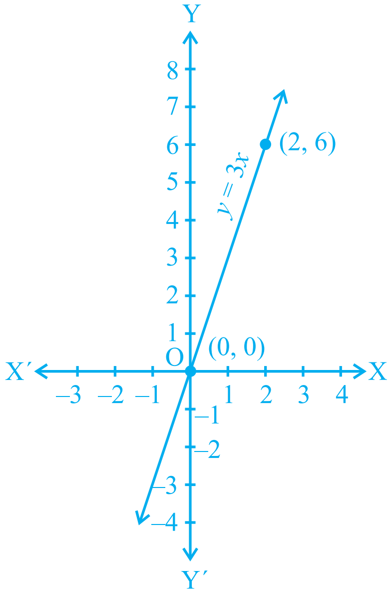
કોષ્ટક 2

x	0	7
y	7	0



આકૃતિ. 4.3

કોષ્ટક 2 માંથી બે બિંદુઓ લઇ આલેખ પર દર્શાવો અને ત્યારબાદ આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા બનાવો (જૂઓ આકૃતિ 4.3).



આકૃતિ. 4.4

ઉદાહરણ 7 : તમે જાણો છો કે વસ્તુ પર લાગતું બળ એ વસ્તુ પર ઉદ્ભવતા પ્રવેગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતું સમીકરણ લખો અને આલેખ પર તે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં સંકળાયેલા ચલ એ બળ અને પ્રવેગ છે, ધારો કે લાગુ પડતું બળ y એકમ અને ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ x એકમ છે. ગુણોત્તર પ્રમાણ અનુસાર તમે આ હકીકતને $y = kx$, સ્વરૂપે દર્શાવી શકો, જ્યાં k અચળ છે. (તમારા વિજ્ઞાનના અભ્યાસ પરથી તમે જાણો છો કે હકીકતમાં k એ વસ્તુનું દળ છે)

હવે, આપણે k ની કિંમત જાણતા નથી. આથી આપણે $y = kx$ નો ચોક્કસ આલેખ ન દોરી શકીએ. હકીકતે જો આપણને k ની ચોક્કસ કિંમત આપવામાં આવે તો આપણે તેનો આલેખ દોરી શકીએ. ધારો કે $k = 3$. આથી આપણે $y = 3x$ દર્શાવતી રેખા દોરી શકીએ. આ માટે આપણે તેના ઉકેલ પૈકી બે ઉકેલ શોધીએ જેમ કે (0, 0) અને (2, 6) (જુઓ આકૃતિ 4.4).

આલેખ પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે જ્યારે 3 એકમ બળ લાગુ થાય ત્યારે 1 એકમ પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય. વળી એ પણ જુઓ કે (0, 0) આલેખ પર આવેલું છે એનો અર્થ એ થાય કે જ્યારે લાગુ પડતું બળ 0 એકમ હોય તો ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ પણ 0 એકમ થાય.

નોંધ : $y = kx$ સ્વરૂપના સમીકરણનો આલેખ રેખા હોય અને તે હંમેશાં ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 4.5 માં દર્શાવેલા દરેક આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી કયા સમીકરણનો આલેખ છે તે પસંદ કરો :

(a) આકૃતિ 4.5 (i) માટે

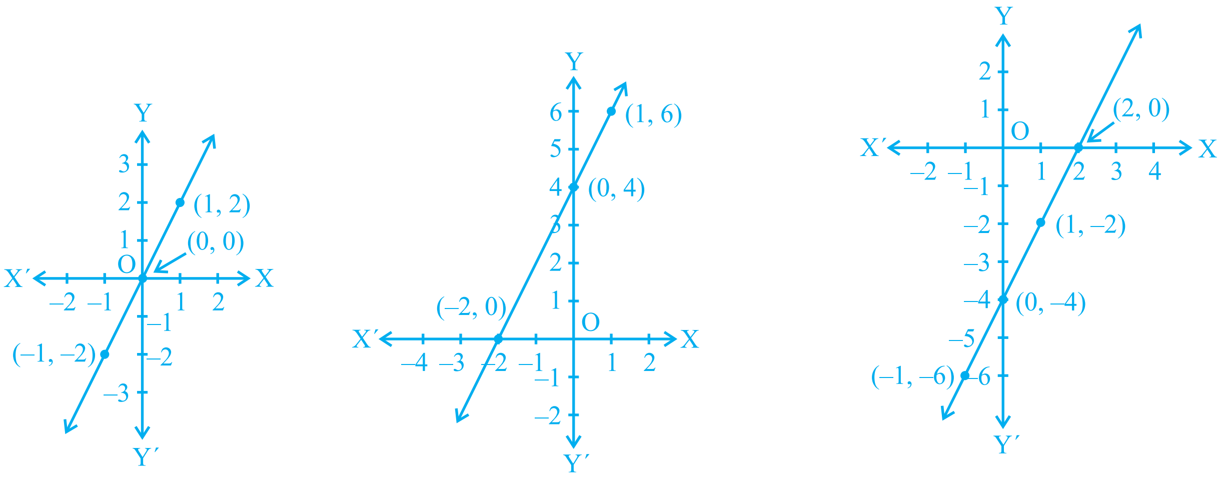
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 4.5

ઉકેલ : (a) આકૃતિ 4.5 (i) માં રેખા પર બિંદુઓ (–1, –2), (0, 0), (1, 2) આવેલા છે. ચકાસતાં જાણવા મળે કે $y = 2x$ સમીકરણ આ આલેખ સાથે સંગત છે. તમે જોઇ શકો છો કે દરેક કિસ્સામાં y-યામની કિંમત x-યામની કિંમત કરતાં બમણી થાય છે.

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માં રેખા પરના બિંદુઓ (–2, 0), (0, 4), (1, 6) છે. તમે જાણો છો કે આલેખ(રેખા) પરના બિંદુઓના યામ સમીકરણ $y = 2x + 4$ નું સમાધાન કરે છે. આથી $y = 2x + 4$ એ આકૃતિ 4.5 (ii) ના આલેખને અનુરૂપ સમીકરણ છે.

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માં રેખા પરના બિંદુઓ (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0) છે. જે ચકાસતાં તમે જોઇ શકો છો કે સમીકરણ $y = 2x – 4$ આપેલા આલેખ(રેખા)ને અનુરૂપ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે દર્શાવેલા પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ માટે આલેખ દોરો :

(i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2. બિંદુ (2, 14) માંથી પસાર થતી બે રેખાઓનાં સમીકરણો આપો. આવી બીજી કેટલી રેખાઓ મેળવી શકાય અને શા માટે?

3. જો બિંદુ (3, 4) સમીકરણ $3y = ax + 7$ ના આલેખ પરનું એક બિંદુ હોય તો a ની કિંમત શોધો.

4. એક શહેરમાં ટેક્સી ભાડુ આ પ્રમાણે છે : પ્રથમ કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 8 અને ત્યારબાદના દરેક કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 5 પ્રતિ કિલોમીટર છે. કાપેલ અંતર x કિલોમીટર અને કુલ ભાડુ ₹ y લઈ આ માહિતી માટે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો અને તેનો આલેખ દોરો.

5. આકૃતિ 4.6 અને આકૃતિ 4.7 માં આપેલા આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય સમીકરણ પસંદ કરો.

આકૃતિ 4. 6 માટે

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

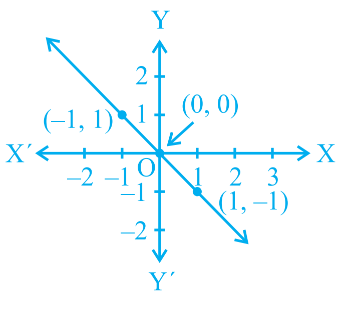
આકૃતિ 4.7 માટે

(i) $y = x + 2$

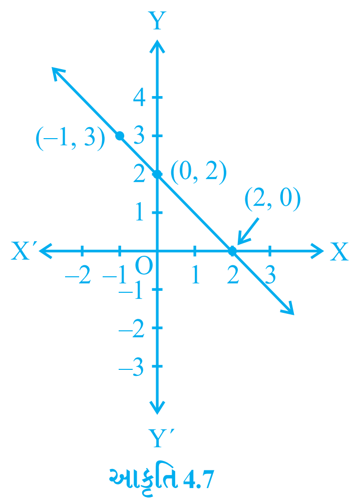
(ii) $y = x – 2$

(iii) $y = –x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$



આકૃતિ 4.6



આકૃતિ 4.7

6. જો અચળ બળ લગાડવાથી એક પદાર્થ પર થતું કાર્ય તે પદાર્થ દ્વારા કપાયેલા અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય તો, આ બાબત ને બે ચલ વાળા સમીકરણના સ્વરૂપમાં રજૂ કરો અને 5 એકમ અચળ બળ લઇ તેનો આલેખ દોરો અને આલેખ પરથી પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર (i) 2 એકમ (ii) 0 એકમ હોય ત્યારે થતું કાર્ય શોધો.

7. ધોરણ-9 ની બે વિદ્યાર્થિનીઓ યામિની અને ફાતિમાએ ભૂકંપગ્રસ્ત લોકો માટે પ્રધાનમંત્રી રાહતફંડમાં સંયુક્ત રીતે ₹ 100 ફાળો આપ્યો. આ માહિતી આધારિત દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો. (તમે તેમના ફાળાની રકમને ₹ x અને ₹ y લઇ શકો) આ સમીકરણ આધારિત આલેખ દોરો.

8. યુ. એસ. એ અને કેનેડા જેવા દેશમાં તાપમાન ફેરનહીટમાં મપાય છે. ભારત જેવા દેશમાં તાપમાન સેલ્સિયસમાં મપાય છે. અહીં ફેરનહીટનું સેલ્સિયસમાં રૂપાંતર કરતું સુરેખ સમીકરણ આપેલ છે.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) ઉપર દર્શાવેલ સુરેખ સમીકરણમાં x-અક્ષ પર સેલ્સિયસ અને y-અક્ષ પર ફેરનહીટ લઇ આલેખ દોરો.

(ii) જો તાપમાન 30°C હોય,તો ફેરનહીટ માં શું તાપમાન થાય?

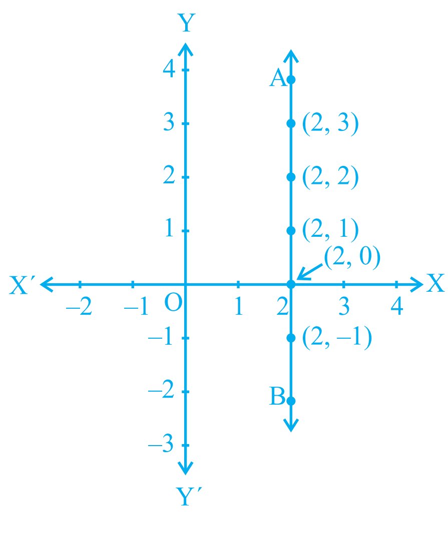
(iii) જો તાપમાન 95°F હોય,તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

(iv) જો તાપમાન 0°C હોય, તો ફેરનહીટમાં તાપમાન કેટલું હોય અને જો તાપમાન 0°F હોય તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

(v) ફેરનહીટ અને સેલ્સિયસમાં સંખ્યાત્મક રીતે સમાન હોય તેવું તાપમાન હોય ? જો હા, તો તે શોધો.

4.5 x-અક્ષ અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો

કાર્તેઝિય સમતલમાં આપેલાં બિંદુના યામો કેવી રીતે લખવા તે તમે શીખી ગયા છો. બિંદુઓ (2, 0), (–3, 0), (4, 0) અને કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા n માટે $(n, 0)$ કાર્તેઝિય સમતલમાં કયાં આવેલા હોય તે તમે જાણો છો? હા, બધા જ બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલા છે. પરંતુ શા માટે તે તમે જાણો છો? કારણ કે x-અક્ષ પરના દરેક બિંદુનો y-યામ 0 હોય. હકીકતમાં x-અક્ષ પરનું દરેક બિંદુ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે તમે x-અક્ષ ના સમીકરણનું અનુમાન કરી શકો? તે $y = 0$ દ્વારા અપાય છે. આપણે નોંધીએ કે $y = 0$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 0$ દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય. આ જ પ્રમાણે $x = 0$ દ્વારા y - અક્ષનું સમીકરણ દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 4.8

હવે સમીકરણ $x - 2 = 0$ નો વિચાર કરો. જો આ સમીકરણને એક ચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે તો $x = 2$ તેનો અનન્ય ઉકેલ થાય. તે સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ છે. જો કે જયારે તેને દ્વિચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે ત્યારે તેને $x + 0 \cdot y - 2 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.તેને અનંત ઉકેલો હોય. હકીકતમાં આ બધા જ ઉકેલો $(2, r)$

સ્વરૂપે હોય જયાં r એ કોઇ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય. વળી તમે ચકાસી પણ શકો કે $(2, r)$ સ્વરૂપનું દરેક બિંદુ આ સમીકરણનો ઉકેલ હોય. આથી $x - 2 = 0$ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને રેખા AB તરીકે આકૃતિ 4.8. ના આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

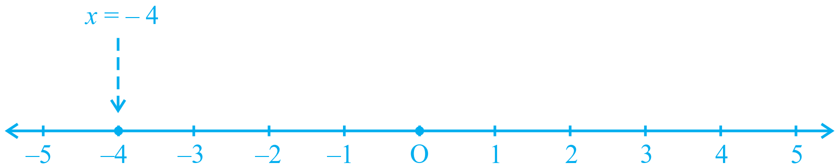
ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $2x + 1 = x - 3$ ને ઉકેલો અને તેના ઉકેલને (i) સંખ્યારેખા પર (ii) કાર્તેઝિય સમતલમાં દર્શાવો.

ઉકેલ: $2x + 1 = x - 3$ ઉકેલવા

$$2x - x = -3 - 1$$

આથી, $x = -4$

(i) આ ઉકેલને આકૃતિ 4.9 માં સંખ્યારેખા પર દર્શાવેલ છે. અત્રે $x = -4$ ને એક ચલ સમીકરણ તરીકે લીધેલ છે.

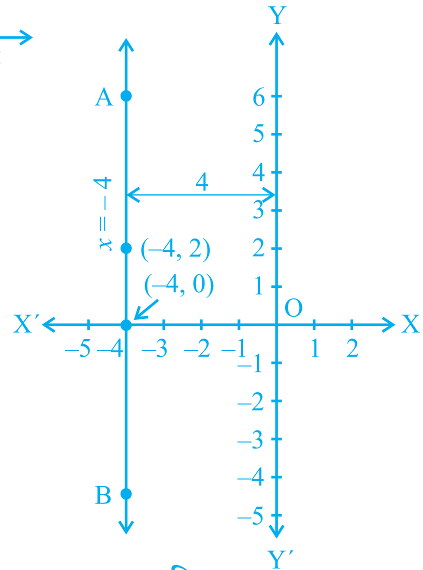


આકૃતિ 4.9

(ii) આપણે જાણીએ છીએ કે $x = -4$ ને $x + 0 \cdot y = -4$ તરીકે લખી શકાય. તે ચલ x અને y માટેનું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ થાય. હવે y ની બધી જ કિંમતો સ્વીકાર્ય છે. કારણ કે $0 \cdot y$ હંમેશા 0 થશે. $x = -4$ સમીકરણનો ઉકેલ થશે જ. આમ આપેલા સમીકરણના બે ઉકેલ $x = -4, y = 0$ અને $x = -4, y = 2$ થાય.

અહીં નોંધીએ કે રેખા AB નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર છે અને તેની ડાબી બાજુએ 4 એકમ અંતરે છે (જુઓ આકૃતિ 4.10).

આ જ પ્રમાણે $y = 3$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y = 3$ પ્રકારના સમીકરણ પરથી મેળવેલ રેખા x-અક્ષને સમાંતર હોય.



આકૃતિ 4.10

સ્વાધ્યાય 4.4

1. $y = 3$ સમીકરણનું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

2. સમીકરણ $2x + 9 = 0$ નું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો.

1. સમીકરણ $ax + by + c = 0$ (જયાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b એક સાથે શૂન્ય નથી.) ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.

3. પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ રેખા છે.

4. $x = 0$ એ y-અક્ષનું સમીકરણ છે અને $y = 0$ એ x-અક્ષનું સમીકરણ છે.

5. $x = a$ નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

6. $y = a$ નો આલેખ x-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

7. $y = mx$ દ્વારા મળતા સમીકરણની રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

8. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખમાં રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ એ તે સમીકરણનો ઉકેલ છે. ઉપરાંત પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખ પરનું બિંદુ છે.

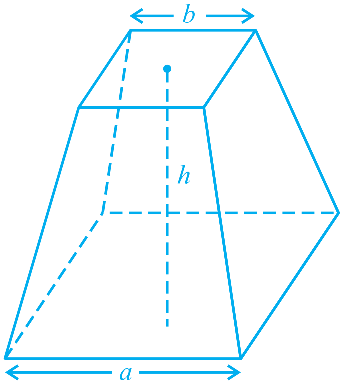
પ્રકરણ 5

યુકિલડની ભૂમિતિનો પરિચય

5.1 પ્રાસ્તાવિક

ભૂમિતિ માટેનો અંગ્રેજી શબ્દ ‘*Geometry*’ છે. *Geometry* શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દના સંયોજનથી બનેલો છે. ‘*geo*’ અને ‘*metrein*’, *Geo*નો અર્થ પૃથ્વી અને ‘*metrein*’નો અર્થ માપવું થાય. જમીનના માપનની જરૂરિયાતમાંથી ભૂમિતિનો ઉદ્‌ભવ થયો છે. પ્રાચીન સંસ્કૃતિમાં ગણિતની આ શાખાનો અભ્યાસ વિવિધ સ્વરૂપે થયો હતો. ઈજિપ્ત, બેબીલોનિયા, ચીન, ભારત, ગ્રીસ, ઇંકાઝ જેવી તે સમયની સંસ્કૃતિના લોકોને પડતી કેટલીક વ્યાવહારિક સમસ્યાઓનો સામનો કરવા માટે ભૂમિતિના વિકાસની જરૂરિયાત ઊભી થઇ.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે નાઈલ નદી છલકાતી હતી ત્યારે આસપાસનાં ક્ષેત્રના જમીનમાલિકોની ખેતરની સાથે જોડાયેલ સરહદોનો નાશ થઈ જતો હતો. આવી પૂર હોનારત પછી સરહદોની પુન:સ્થાપના કરવામાં આવતી હતી. આ હેતુ માટે ઈજિપ્તના નાગરિકોએ ક્ષેત્રફળના ગણતરી માટેના સરળ નિયમો તેમજ સરળ રચના કરવા માટે ભૌમિતિક તક્‌નીક વિકસાવી. તે ધાન્ય-ભંડારના ઘનફળની ગણતરી તથા પિરામિડના આડછેદ માટે તેમજ નહેર અને પિરામિડના બાંધકામ માટે પણ ભૂમિતિના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતા હતા. તે કપાયેલ પિરામિડ (આડછેદ)ના ઘનફળની ગણતરી શોધવા માટે ઉચિત સૂત્રો પણ જાણતા હતા. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) તમે જાણો છો કે પિરામિડ ઘન આકૃતિ છે. તેનો પાયો ત્રિકોણ, ચોરસ કે અન્ય બહુકોણ હોય છે અને તેની બાજુની સપાટીઓ ઉપરના એક બિંદુ પર ત્રિકોણો બનાવે છે.



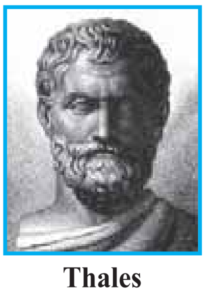
આકૃતિ 5.1
પિરામિડનો આડછેદ

ભારતીય ઉપખંડમાં હડપ્પા અને મોહેંજો-દરો વગેરેનાં ખોદકામ વખતે એ જાણવા મળ્યું કે સિંધુખીણની સંસ્કૃતિ (અંદાજે ઈ.પૂ. 3000)માં ભૂમિતિનો વ્યાપક ઉપયોગ જોવા મળ્યો હતો. તે ઉચ્ચ પ્રકારનો સંગઠિત સમાજ હતો. શહેરો યોજનાબદ્ધ અને સુવ્યવસ્થિત હતા. શહેરો ઉત્તમ રીતે વિકસિત હતા અને ખૂબ સારી રીતે નિર્માણ પામ્યા હતા. ઉદાહરણ તરીકે રસ્તાઓ એકબીજાને સમાંતર અને ગટર-વ્યવસ્થા ભૂગર્ભમાં હતી. મકાનના ઓરડાઓ જુદા જુદા આકારના હતા તે બતાવે છે કે નગરજનો માપન અને વ્યાવહારિક અંકગણિતમાં કુશળ હતા. બાંધકામમાં ઉપયોગમાં લેવાતી ઈંટો ભઠ્ઠામાં પકવવામાં આવતી હતી અને તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈનો ગુણોત્તર 4:2:1 હતો.

પ્રાચીન ભારતમાં ***સૂલ્બાસૂત્ર*** (ઈ. પૂર્વે 800-500) એ ભૌમિતિક રચનાઓ માટે મહત્ત્વપૂર્ણ ગ્રંથ હતો. વૈદિકકાળમાં ભૂમિતિનો ઉદ્‌ભવ પૂજા માટેની જરૂરી વિવિધ પ્રકારની વેદીઓ અને અગ્નિકુંડોના નિર્માણ કાર્યથી થયો હતો. પવિત્ર અગ્નિને વધુ પ્રભાવશાળી બનાવવા માટે તેના સ્થાન, આકાર અને ક્ષેત્રફળની બાબતમાં સ્પષ્ટ રીતે નક્કી થયેલ આદેશોનું પાલન થતું હતું. ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ચોરસ અને વર્તુળાકાર વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો. જાહેર પૂજા સ્થળો માટે લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબના સંયોજનથી બનતા આકારના પ્રયોગ જરૂરી હતા. શ્રીયંત્ર (*અથર્વવેદ*માં આપેલ) એ અંદરોઅંદર ગૂંથાયેલા નવ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનું સંયોજન છે. આ ત્રિકોણ એવી ચોક્કસ રીતે ગોઠવાયેલ છે કે તેમાંથી 43 ઉપત્રિકોણ બને છે. જો કે વેદીઓને બનાવવા માટે શુદ્ધ ભૌમિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ થયો હતો. છતાં પણ તેની પાછળના સિદ્ધાંતોની ચર્ચા કરવામાં આવેલ નથી.

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે, ભૂમિતિનો વિકાસ અને તેનો ઉપયોગ વિશ્વના દરેક સ્થાન પર થતો હતો. પરંતુ તે બહુ અવ્યવસ્થિત રીતે થઈ રહ્યું હતું. પ્રાચીન વિશ્વમાં ભૂમિતિના આ વિકાસની આ ગતિવિધિઓની એક રોચક વાત એ છે કે તેનું જ્ઞાન પેઢીઓ સુધી મૌખિક રીતે અથવા તાડના વૃક્ષના પાન પર સંદેશ લખીને અથવા કેટલીક અન્ય પદ્ધતિઓ દ્વારા આપવામાં આવતું હતું. આ ઉપરાંત આપણને એ પણ જોવા મળે છે કે બેબીલોનિયન જેવી કેટલીક સંસ્કૃતિઓમાં ભૂમિતિ ખૂબ વ્યવહારલક્ષી દૃષ્ટિકોણવાળા વિષય સુધી સીમિત રહી. તેમજ આવું જ ભારત અને રોમમાં રહ્યું. ઇજિપ્તવાસીઓ દ્વારા વિકાસ પામેલ ભૂમિતિમાં મુખ્યત્વે પરિણામોનું કથન જ સમાવિષ્ટ થતું હતું. તેમાં વિધિ(પ્રક્રિયા)ઓના કોઈ વ્યાપક નિયમ આપવામાં આવ્યા નથી. ખરેખર બેબીલોન અને ઇજિપ્તવાસીઓએ ભૂમિતિનો ઉપયોગ મોટા ભાગે વ્યાવહારિક કાર્યો માટે જ કર્યો તથા તેને એક ક્રમબદ્ધ વિજ્ઞાનના રૂપમાં વિકસિત કરવા માટે ખૂબ જ ઓછું કામ થયું. પરંતુ ગ્રીક જેવી સંસ્કૃતિઓમાં એ *તર્ક* પર ભાર આપવામાં આવતો હતો કે કેટલીક રચનાઓ કઈ રીતે થાય છે. ગ્રીસવાસીઓની રુચિ અનુમાનિત તર્કનો ઉપયોગ કરીને તેમણે સ્થાપિત કરેલાં વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવામાં હતી. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.)

એક ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી ***Thales***ને એ વાતનો શ્રેય જાય છે કે, તેઓએ સૌથી પહેલા જ્ઞાત સાબિતી આપી. આ સાબિતી એ કથનની હતી કે વર્તુળનો વ્યાસ વર્તુળને સમવિભાજિત કરે છે (બે સમાન ભાગમાં વિભાજિત). ***Thales***ના એક અતિ પ્રસિદ્ધ શિષ્ય ***Pythagoras*** (ઈ.પૂ. 572) હતા. તેમનું નામ તમે ચોક્કસ સાંભળ્યું હશે. પાયથાગોરસ અને તેના સાથીઓએ અનેક ભૌમિતિક ગુણધર્મોની શોધ કરી અને ભૂમિતિના સિદ્ધાંતનો મહદ્ અંશે વિકાસ કર્યો. આ પ્રક્રિયા



Thales
(ઈ.પૂ. 640 – 546)
આકૃતિ 5.2

ઈ.પૂ. 300 સુધી ચાલુ રહી. આ સમયે ઇજિપ્તના એલેક્ઝાન્ડ્રિયાના એક ગણિત શિક્ષક ***Euclid***એ તે સમય સુધી જાણીતા ગણિતના બધા જ જ્ઞાનને એકત્રિત કર્યું અને ***'Elements'*** નામના તેમના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથના રૂપમાં તેને વ્યવસ્થિત કર્યું. તેમણે ***Elements***ને 13 પ્રકરણોમાં વિભાજિત કર્યું. તેમાંથી પ્રત્યેકને પુસ્તક માનવામાં આવે છે. આ પુસ્તકો સમગ્ર વિશ્વના ભૂમિતિ સંબંધિત સમજણને આવનારી પેઢીઓ સુધી પ્રભાવિત કરશે.

Euclid (ઈ.પૂ. 325 – 265)

આકૃતિ 5.3

આ પ્રકરણમાં આપણે ભૂમિતિના યુક્લિડના અભિગમની ચર્ચા કરીશું અને તેને ભૂમિતિના વર્તમાન સ્વરૂપ સાથે જોડવાનો પ્રયાસ કરીશું.

5.2 યુક્લિડની વ્યાખ્યાઓ, પ્રમેયો અને પૂર્વધારણાઓ

યુક્લિડના સમયમાં ગ્રીસના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ જેમાં તે રહેતા હતા તેવા વિશ્વના એક અમૂર્ત મૉડેલ (પ્રતિમાન) તરીકે ભૂમિતિને કલ્પી. આસપાસની વસ્તુઓના અવલોકન પરથી બિંદુ, રેખા, સમતલ, સપાટી વગેરેની ધારણાઓ સ્થાપિત કરવામાં આવી. અવકાશ અને તેની આસપાસના ઘન પદાર્થની અમૂર્ત ભૂમિતિની સંકલ્પના વિકસિત કરવામાં આવી. એક ઘન પદાર્થને આકાર હોય છે, માપ અને સ્થાન હોય છે તથા તેને એક સ્થાનથી બીજા સ્થાન સુધી લઈ જઈ શકાય છે. તેની સીમાઓને પૃષ્ઠ કહે છે. તે અવકાશના એક ભાગને બીજા ભાગથી અલગ કરે છે અને તેને કોઈ જાડાઈ હોતી નથી. પૃષ્ઠની સીમા એ વક્ર અથવા સીધી રેખાઓ હોય છે. આ રેખાઓને અંત્યબિંદુઓ હોય છે.

ઘન પદાર્થથી બિંદુઓ (ઘન પદાર્થ-સમતલ-રેખાઓ-બિંદુ) સુધીનાં ત્રણ ચરણનો વિચાર કરો. પ્રત્યેક ચરણમાં આપણે એક વિસ્તરણથી વંચિત થઈએ છીએ. તેને આપણે ***પરિમાણ*** (*dimension*) પણ કહીએ છીએ. આ માટે એવું કહેવાય છે કે એક ઘન પદાર્થને ત્રણ પરિમાણ, પૃષ્ઠ(સપાટી)ને બે પરિમાણ તથા રેખાને એક પરિમાણ હોય છે અને બિંદુને કોઈ પરિમાણ હોતું નથી. યુક્લિડે આ વિધાનોને સંક્ષિપ્ત રીતે વ્યાખ્યાઓના રૂપમાં રજૂ કર્યાં. તેમણે પોતાના આ સ્પષ્ટીકરણોની શરૂઆત '*Elements*' ના પુસ્તક1 માં 23 વ્યાખ્યાઓ આપીને કરી. આમાંથી કેટલીક વ્યાખ્યાઓ નીચે આપવામાં આવી છે :

1. *બિંદુ*ને કોઈ ભાગ નથી.
2. *રેખા* એ પહોળાઈ વગરની લંબાઈ છે.
3. રેખાના *અંતમાં બિંદુ*ઓ હોય છે.
4. જે પોતાના પર બિંદુઓની સાથે *સમાન* રીતે રહેલી હોય એવી રેખા એક સીધી રેખા છે.
5. *પૃષ્ઠ*ને માત્ર લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે.
6. પૃષ્ઠની ધાર રેખાઓ હોય છે.
7. જે સપાટી પોતાના પરની સીધી રેખાઓની સાથે એકસમાન રીતે રહેલ હોય તેવી સપાટી એ *સમતલ* છે.

જો તમે ધ્યાનપૂર્વક આ વ્યાખ્યાઓને જોશો તો તમને લાગશે કે કેટલાંક પદો જેવાં કે ભાગ, પહોળાઈ, લંબાઈ, સરખે ભાગે વહેંચણી વગેરેને આગળ જતાં વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવાની જરૂર છે. ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડે આપેલી બિંદુની વ્યાખ્યાનો વિચાર કરો. આ વ્યાખ્યામાં 'એક ભાગને' વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે. માની લો કે જે 'ક્ષેત્રફળ' રોકે તેને 'એક ભાગ' કહીએ તો આપણે ફરી 'ક્ષેત્રફળ' ને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર રહેશે. એટલે કે એક વસ્તુને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે અનેક વસ્તુઓને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર પડે છે અને કોઈ અંત વગરની વ્યાખ્યાઓની લાંબી શ્રૃંખલા પ્રાપ્ત થઈ શકે છે. ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની તુલનામાં બિંદુની ભૌમિતિક કલ્પનાને સાહજિક રીતે સમજીશું. આ કારણથી ગણિતશાસ્ત્રીઓને કેટલાંક ભૌમિતિક પદોને અવ્યાખ્યાયિત (*undefined*) માની લેવામાં આવે એ સુવિધાજનક લાગ્યું. આ રીતે એક બિંદુની ભૌમિતિક સંકલ્પના વધુ સાહજિકપણે સમજીશું. આપણે બિંદુને એક નાના ટપકા સ્વરૂપે દર્શાવીએ છીએ. પરંતુ આ સૂક્ષ્મ ટપકાનું કંઈક ને કંઈક પરિમાણ ચોક્કસ હોય છે.

આ પ્રકારની સમસ્યા ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા 2 માં પણ આવે છે. તેમાં પહોળાઈ અને લંબાઈનો ઉલ્લેખ આવે છે અને તેમાંના કોઈને પણ પહેલાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યા નથી. આ કારણથી કોઈ પણ વિષયના અભ્યાસ માટે કેટલાંક પદોને અવ્યાખ્યાયિત રાખવામાં આવ્યાં છે. આ માટે ભૂમિતિમાં આપણે બિંદુ, રેખા અને સમતલ (યુક્લિડના શબ્દોમાં સમતલ સપાટી)ને અવ્યાખ્યાયિત પદના રૂપમાં માનીને આપવામાં આવે છે. માત્ર એ વાત જરૂરી છે કે આપણે તેને સાહજિક રીતે દર્શાવી શકીએ છીએ અથવા '*ભૌતિક નમૂના*' ની મદદથી સ્પષ્ટ કરી શકીએ છીએ.

યુક્લિડે તેની વ્યાખ્યાઓથી શરૂ કરતાં તેમાંના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કર્યા વગર સત્ય વિધાન માનવાની કલ્પના કરી. આ કલ્પનાઓ વાસ્તવમાં 'સ્પષ્ટપણે વૈશ્વિક સત્ય' હતી. તેમણે તેને બે ભાગમાં વિભાજિત કર્યાં. આ ભાગ હતાઃ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ. તેમણે **પૂર્વધારણા** શબ્દનો ઉપયોગ તેવી કલ્પનાઓ માટે કર્યો, કે જે વિશિષ્ટ રીતે ભૂમિતિથી સંબંધિત હોય બીજી તરફ એવી સામાન્ય સંકલ્પનાઓ હતી (જેને ઘણી વાર **સ્વયંસિદ્ધ સત્યો** કહે છે.) જેનો હંમેશાં ગણિતમાં પ્રયોગ કરાયો અને તેને માત્ર ભૂમિતિ સાથે જ વિશેષ સંબંધ ન હતો. સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓની વધુ જાણકારી માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ. *યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ* નીચે આપવામાં આવી છે. આ તેના પોતાના ક્રમમાં નથી.

(1) *એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.*

(2) *સરખામાં સરખું ઉમેરીએ તો સરવાળા સરખા રહે.*

(3) *સરખામાંથી સરખા બાદ કરીએ તો બાદબાકી (શેષફળ) સરખી રહે.*

(4) *એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સરખી રહે.*

(5) *આખું તેના ભાગ કરતા મોટું હોય છે.*

(6) *સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.*

(7) *એક જ વસ્તુઓના અડધા એકબીજાને સમાન થાય.*

આ 'સામાન્ય સંકલ્પનાઓ' કોઈ પ્રકારનાં **માપ**(*Magnitudes*)ના સંદર્ભમાં કહેવામાં આવી છે. પ્રથમ સામાન્ય સંકલ્પનાનો

સમતલીય આકૃતિઓ માટે પ્રયોગ કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો એક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એક લંબચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય અને આ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કોઈ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય.

એક જ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાય છે અને તેનો સરવાળો પણ થઈ શકે છે. પરંતુ અહીં અલગ અલગ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે એક રેખાને એક લંબચોરસમાં ઉમેરી શકાતી નથી અને તે જ રીતે ખૂણાની એક પંચકોણ સાથે તુલના કરી શકાતી નથી.

ઉપર આપવામાં આવેલી ચોથી પૂર્વધારણા એવું બતાવતી હોય તેવું પ્રતિત થાય છે કે જે બે વસ્તુઓ સમાન હોય (અથવા એક જ હોય) તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કોઈ પણ વસ્તુ પોતાને સમાન હોય છે. આ એકબીજાની ઉપર મૂકવાના સિદ્ધાંતની તર્કસંગતતા પ્રગટ કરે છે. પૂર્વધારણા 5 "*થી મોટું છે* (*greater than*)"ની વ્યાખ્યા આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો કોઈ રાશિ B કોઈ અન્ય રાશિ A નો એક ભાગ હોય, તો A ને રાશિ B અને એક અન્ય રાશિ C ના સરવાળાના રૂપમાં લઈ શકાય છે. સાંકેતિક રૂપમાં લખતાં $A>B$ નો અર્થ એવો છે કે કોઈ રાશિ C એવી છે કે જેથી $A = B + C$ થાય.

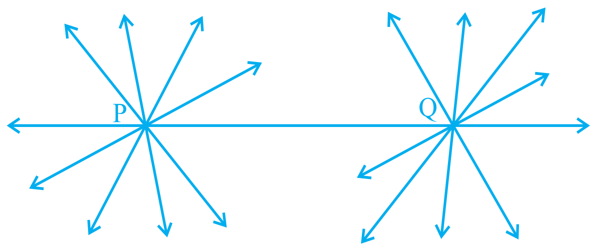
આવો હવે **યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓ**ની ચર્ચા કરીએ તે આ પ્રકારે છે.

પૂર્વધારણા 1 : *એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી થઈને પસાર થતી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.*

આ પૂર્વધારણા આપણને સૂચવે છે કે, બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી ઓછામાં ઓછી એક રેખા અવશ્ય દોરી શકાય છે. પરંતુ આ પરથી એ જાણવા મળતું નથી કે આવી એકથી વધુ સીધી રેખાઓ હોય કે નહિ. પરંતુ યુક્લિડે પોતાના તમામ કાર્યમાં કંઈ સૂચિત કર્યા વગર વારંવાર કલ્પના કરી છે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અનન્ય રેખા દોરી શકાય છે. આ પરિણામને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં નીચે આપેલ છે :

પૂર્વધારણા 5.1 : *આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય રેખા હોય છે.*

બિંદુ P માંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ હોઈ શકે જે બિંદુ Q માંથી પણ પસાર થાય ? (જુઓ આકૃતિ 5.4.) તેવી માત્ર એક રેખા PQ છે. જે બિંદુ Q માંથી પસાર થતી હોય તેવી કેટલી રેખાઓ બિંદુ P માંથી પણ પસાર થાય છે? એવી માત્ર એક જ છે, એટલે કે રેખા PQ છે. આ માટે ઉપરનું વિધાન એક સ્વયંસિદ્ધ સત્ય છે અને તે માટે આપણે તેને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં માનીએ છીએ.

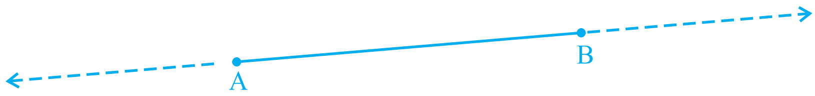


આકૃતિ 5.4

પૂર્વધારણા 2 : *સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.*

આપણે નોંધીએ કે જેને આપણે આજકાલ રેખાખંડ કહીએ છીએ તેને યુક્લિડે સાન્ત રેખા કહ્યું હતું. આથી અત્યારના

પરિપ્રેક્ષ્યમાં બીજી પૂર્વધારણા એવું કહે છે કે, એક રેખાખંડને બંને તરફ લંબાવતાં એક રેખા બનાવી શકાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.5,)



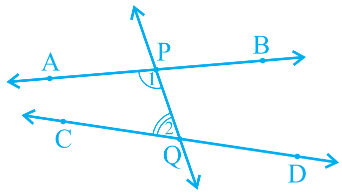
આકૃતિ 5.5

પૂર્વધારણા 3 : *કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.*

પૂર્વધારણા 4 : *બધા જ કાટખૂણા એકબીજા સાથે સરખા થાય.*

પૂર્વધારણા 5 : *જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતા તે એકબીજાને છેદે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 5.6 માં રેખા PQ, રેખાઓ AB અને CD પર એવી રીતે છેદે કે અંતઃકોણો 1 અને 2 નો સરવાળો 180° કરતા ઓછો છે. તે PQ ની ડાબી બાજુ આવેલ છે. તેથી રેખાઓ AB અને CD અંતમાં PQ ની ડાબી તરફ છેદશે.



આકૃતિ 5.6

ઉપરની પાંચ પૂર્વધારણાઓને માત્ર જોવાથી આપણને એ સ્પષ્ટ ખ્યાલ આવે છે કે, અન્ય પૂર્વધારણાઓની તુલનામાં પૂર્વધારણા 5 થોડી વધુ જટિલ છે. બીજી તરફ પૂર્વધારણા 1 થી 4 એટલી સરળ અને સ્પષ્ટ છે કે તેમને સ્વયંસિદ્ધ સત્યના રૂપમાં માની લેવામાં આવે છે. પરંતુ તેને સાબિત કરવી શક્ય નથી. આ માટે આ વિધાનો સાબિતી વગર સ્વીકારી લેવામાં આવે છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આ જટિલતાને કારણે પાંચમી પૂર્વધારણા પર આગળના વિભાગમાં વિશેષ ધ્યાન દેવામાં આવશે.

આજકાલ ‘પૂર્વધારણા’ અને ‘સ્વયંસિદ્ધ સત્ય’ બંને પદોનો એકબીજા માટે એક જ અર્થમાં પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. ખરેખર પૂર્વધારણા એ ક્રિયા (verb) છે જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે ‘ચાલો પૂર્વધારણા કરીએ’ તો તેનો અર્થ છે કે ચાલો વિશ્વમાં નોંધાતી (જોવા મળતી) ઘટનાઓના આધારે કંઈક વિધાન કહીએ. તેની સત્યાર્થતાની ચકાસણી પછીથી કરવામાં આવે છે. જો તે સત્ય હોય તો તેને પૂર્વધારણાના રૂપમાં સ્વીકારી લેવામાં આવે છે.

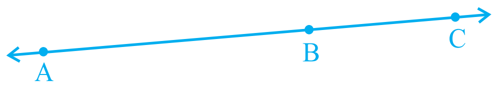
જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો પરથી એવું કોઈ વિધાન રચવું અસંભવ હોય જે કોઈ અન્ય સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અથવા પહેલાં સાબિત કરેલ કોઈ વિધાનથી વિરોધાભાસી હોય તો સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખુ સુસંગત કહેવાય છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આથી જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યનું કોઈ માળખું આપેલ હોય, તો તે સુનિશ્ચિત કરવુ જરૂરી છે કે આ માળખું સુસંગત હોય.

યુક્લિડે પોતાની પૂર્વધારણા અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપ્યા પછી તેનો ઉપયોગ અન્ય પરિણામોને સાબિત કરવામાં કર્યો પછી આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને તેણે અનુમાનિક તર્ક દ્વારા કેટલાંક પરિણામો સાબિત કર્યાં. જે વિધાનોને સાબિત કર્યાં, તે પ્રમેય કહેવાય છે. યુક્લિડે તેમનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો, પૂર્વધારણાઓ વ્યાખ્યાઓ અને પહેલાં સાબિત કરેલાં

પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને એક તર્કસંગત શ્રૃંખલામાં 465 સાધ્ય અનુમાનિત કર્યા. ભૂમિતિનાં કેટલાંક આગળનાં પ્રકરણોમાં તમે આ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાક પ્રમેયો સાબિત કરશો.

ચાલો આગળ આવનારાં ઉદાહરણોમાં જોઈએ કે યુક્લિડે કેટલાંક પરિણામો સાબિત કરવા માટે પોતાનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓનો ઉપયોગ કેવી રીતે કર્યો.

ઉદાહરણ 1 : જો A, B અને C એક રેખા પર આવેલાં ત્રણ બિંદુઓ હોય અને B બિંદુ એ A અને C ની વચ્ચે આવેલ હોય, (જુઓ આકૃતિ 5.7.) તો સાબિત કરો કે AB + BC = AC.

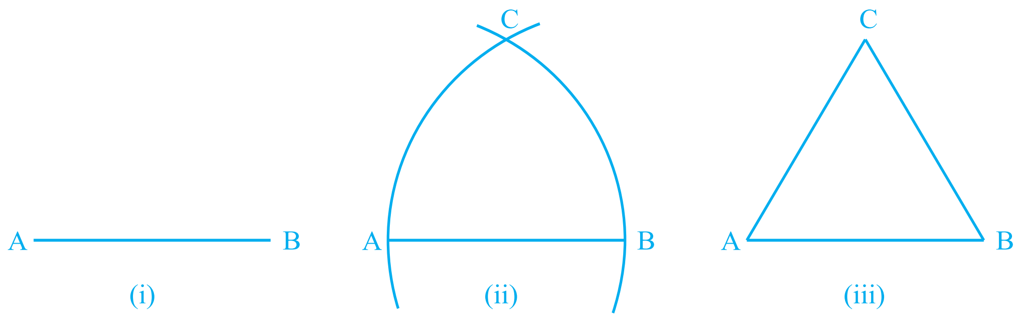


આકૃતિ 5.7

ઉકેલ : ઉપરની આકૃતિમાં AB + BC ની સાથે AC સંપાતિ છે. વળી યુક્લિડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (4) કહે છે કે વસ્તુઓ જો પરસ્પર બંધબેસતી હોય તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. આથી તે સાબિત થાય છે કે AB + BC = AC છે. એ વાત ધ્યાનમાં રહે કે, આ ઉકેલમાં તે સ્વીકારી લેવામાં આવ્યું છે કે બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે આપેલા રેખાખંડ પર એક સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી શકાય છે.

ઉકેલ : ઉપરના વિધાનમાં આપેલ લંબાઈનો રેખાખંડ AB છે. [જુઓ આકૃતિ 5.8(i).]



આકૃતિ 5.8

અહીંયાં તમારે કંઈક રચના કરવાની આવશ્યકતા છે. યુક્લિડની પૂર્વધારણા 3 નો ઉપયોગ કરીને તમે બિંદુ A ને કેન્દ્ર અને AB ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ રચી શકો છો. [જુઓ આકૃતિ 5.8(ii).] તે જ રીતે B ને કેન્દ્ર માનીને અને BA ત્રિજ્યા લઈને એક અન્ય વર્તુળને રચી શકાય છે. માની લો કે આ બંને વર્તુળ બિંદુ C માં છેદે છે. હવે રેખાખંડો AC અને BC દોરીને Δ ABC બનાવો. [જુઓ આકૃતિ 5.8 (iii).]

આ માટે તમારે એ સાબિત કરવાનું છે કે આ ત્રિકોણ એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે એટલે કે AB = AC = BC.

હવે, AB = AC છે. (એક વર્તુળની ત્રિજ્યા) (1)

તે જ રીતે AB = BC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા) (2)

ઉપરની બંને હકીકત અને યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા કે જે એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય તે પરથી તારવી શકાય કે AB = BC = AC છે.

આથી, Δ ABC એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

એ નોંધીએ કે અહીં યુક્લિડે ક્યાંય બતાવ્યા વગર એ માની લીધું છે કે કેન્દ્રો A અને B ને લઈને બનાવેલા વર્તુળ પરસ્પર એક બિંદુમાં છેદે.

હવે આપણે એક પ્રમેય સાબિત કરીશું જે વિવિધ પરિણામોમાં અનેક વખત ઉપયોગમાં લેવાય છે.

પ્રમેય 5.1 : *બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.*

સાબિતી : અહીં આપણને બે રેખાઓ *l* અને *m* આપેલ છે. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે, *l* અને *m* માં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય નથી.

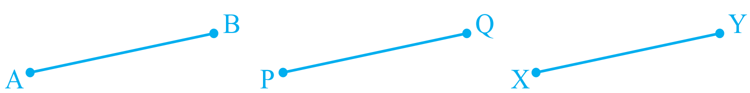
થોડી વાર માટે એવું ધારી લઈએ કે આ બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માં એકબીજાને છેદે છે.

આ રીતે બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માંથી પસાર થતી બે રેખાઓ *l* અને *m* મળે છે. પરંતુ આ ધારણા પૂર્વધારણા 'આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે' ની વિરુદ્ધ છે. આથી આપણે જે ધારણાથી ચાલ્યા હતા કે 'બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે' તે ખોટી છે.

આનાથી આપણે શું નિષ્કર્ષ તારવી શકીએ? આપણે એ નિષ્કર્ષ તારવવા માટે પ્રેરાઈએ છીએ કે બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય ન હોય.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં વિધાનો સત્ય છે અને કયાં વિધાનો અસત્ય છે? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો :
   (i) એક બિંદુમાંથી પસાર થતી માત્ર એક રેખા દોરી શકાય છે.
   (ii) બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અસંખ્ય રેખાઓ હોય છે.
   (iii) એક સાન્ત રેખાને બંને તરફ અનિશ્ચિત રીતે લંબાવી શકાય છે.
   (iv) જો બે વર્તુળ સમાન છે તો તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય છે
   (v) આકૃતિ 5.9 માં જો AB = PQ અને PQ = XY છે, તો AB = XY થાય.



આકૃતિ 5.9

2. નીચે આપેલાં પદોની વ્યાખ્યા આપો. શું તેના માટે કોઈ એવાં પદ છે જેને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે ? એ કયા છે? અને તમે તેને કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરશો?

   (i) સમાંતર રેખાઓ (ii) લંબરેખાઓ (iii)રેખાખંડ (iv) વર્તુળની ત્રિજ્યા (v) ચોરસ

3. નીચે આપેલ બે પૂર્વધારણાઓનો વિચાર કરો :

(i) જો બે ભિન્ન બિંદુ A અને B આપ્યાં હોય, તો તેમની વચ્ચે હોય તેવું એક બિંદુ C મળે.

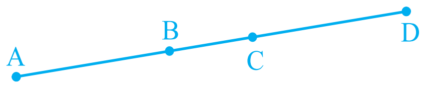
(ii) એક રેખા પર ન આવેલાં હોય તેવાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ બિંદુઓ મળે.

શું આ પૂર્વધારણાઓમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ સુસંગત છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ યુક્લિડની પૂર્વધારણામાંથી મળે છે? સ્પષ્ટ કરો.

4. જો AC = BC થાય તેવું બિંદુ A અને B ની વચ્ચે હોય, તો સાબિત કરો કે $AC = \frac{1}{2}AB$ છે. આકૃતિ દોરીને તેને સ્પષ્ટ કરો.

5. પ્રશ્ન 4 માં, બિંદુ C રેખાખંડ AB નું એક મધ્યબિંદુ કહેવાય છે. સાબિત કરો કે દરેક રેખાખંડને એક અને માત્ર એક જ મધ્યબિંદુ હોય.

6. આકૃતિ 5.10 માં જો AC = BD હોય, તો સાબિત કરો કે AB = CD છે.



આકૃતિ 5.10

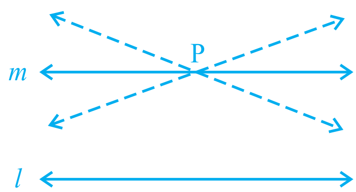
7. યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની યાદીમાં આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 5 એક સનાતન સત્ય કેમ માનવામાં આવે છે? (યાદ રાખો કે આ પ્રશ્ન પાંચમી પૂર્વધારણા સાથે સંબંધિત નથી.)

5.3 યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો

ગણિતના ઇતિહાસમાં યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા ખૂબ નોંધપાત્ર છે. વિભાગ 5.2 પરથી તેને ફરી યાદ કરો. આ પૂર્વધારણાના પરિણામ સ્વરૂપ જો બે રેખાઓને છેદતી રેખાની એક તરફના બંને અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° થાય, તો બંને રેખાઓ ક્યારેય છેદી ન શકે. આ પૂર્વધારણાને સમકક્ષ અનેક વિધાનો છે. તેમાંથી એક **પ્લેફેરની પૂર્વધારણા** (*Playfair's Axiom*) છે. (તે સ્કૉટલૅન્ડના એક ગણિતશાસ્ત્રી *John Playfair* એ 1729 માં આપી હતી.) તે આ પ્રકારે છે.

દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P માટે એક અનન્ય રેખા m એવી હોય છે, જે P માંથી પસાર થાય છે અને l ને સમાંતર છે.

આકૃતિ 5.11 માં તમે જોઈ શકો છો કે P માંથી પસાર થતી બધી રેખાઓમાંથી માત્ર રેખા m જ l ને સમાંતર છે.

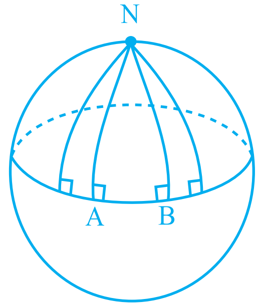


આકૃતિ 5.11

આ પરિણામને નીચે પ્રમાણેના સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે :

બે છેદતી ભિન્ન રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર ન હોઈ શકે.

યુક્લિડને તેમનાં પ્રથમ 28 પ્રમેયો સાબિત કરવામાં પાંચમી પૂર્વધારણાની કોઈ જરૂર ન પડી. અનેક ગણિતશાસ્ત્રી અને યુક્લિડને પોતાને હવે વિશ્વાસ હતો કે પાંચમી પૂર્વધારણા હકીકતમાં એક પ્રમેય છે. તેને પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાઓ અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની સહાયતાથી સાબિત કરી શકાય છે. પરંતુ પાંચમી પૂર્વધારણાને પ્રમેયના રૂપમાં સાબિત કરવામાં અસફળ રહ્યા. પરંતુ આ પ્રયત્નોને કારણે એક મહત્ત્વપૂર્ણ ઉપલબ્ધિ થઈ. આ ઉપલબ્ધિ સ્વરૂપે અનેક અન્ય ભૂમિતિઓની રચના થઈ. આ ભૂમિતિઓ યુક્લિડીય ભૂમિતિથી બહુ જ અલગ છે. તેને ***અયુક્લિડીય ભૂમિતિ*** *(Non-Euclidean geometry)* કહેવામાં આવે છે. આ ભૂમિતિઓની રચનાને સંકલ્પનાઓના ઇતિહાસમાં એક સીમાચિહ્ન માનવામાં આવે છે. કારણ કે ત્યાં સુધી દરેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ રાખતી હતી કે યુક્લિડની ભૂમિતિ જ એક માત્ર ભૂમિતિ હતી અને સંપૂર્ણ વિશ્વ યુક્લિડમય ગોલીય છે. જે વિશ્વમાં આપણે રહીએ છીએ તેની ભૂમિતિ અયુક્લિડિય છે. વાસ્તવમાં આ **ગોલીય ભૂમિતિ** *(spherical geometry)* કહેવાય છે. ગોલીય ભૂમિતિમાં રેખાઓ સીધી હોતી નથી. આ રેખાઓ **દીર્ઘ વર્તુળો**ના *(great circles)* ભાગ હોય છે. (તે એક ગોલક અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થઈને જતા સમતલોના છેદથી પ્રાપ્ત વર્તુળ હોય છે). આકૃતિ 5.12 માં વિષયવૃત્તીય રેખાઓ AN અને BN (જે એક ગોળાના દીર્ઘ વર્તુળના ભાગ છે) એક જ રેખા AB પર લંબ છે. પરંતુ તે એકબીજાને મળે છે છતાં રેખા AB ના એક જ તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટકોણથી ઓછો નથી. (વાસ્તવમાં આ $90° + 90° = 180°$) છે. સાથે જ નોંધીએ કે ત્રિકોણ NAB ના ખૂણાનો સરવાળો 180° થી વધુ છે, કારણ કે $\angle A + \angle B = 180°$ છે. આ પ્રકારે યુક્લિડીય ભૂમિતિ માત્ર એક જ સમતલમાં બનતી આકૃતિઓ માટે જ માન્ય છે. વક્ર સપાટીમાં તે નિષ્ફળ જાય છે.



આકૃતિ 5.12

હવે, એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 3 : આપેલ વિધાન પર વિચાર કરો : એવી સીધી રેખાઓની જોડનું અસ્તિત્વ છે, જે એકબીજાથી પ્રત્યેક જગ્યાએથી સમાન અંતરે આવેલી હોય. શું આ યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાનું એક પ્રત્યક્ષ પરિણામ છે? સ્પષ્ટ કરો.

ઉકેલ : એક રેખા l લો અને રેખા પર ન હોય તેવું એક બિંદુ P લો. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ પ્લેફેરની પૂર્વધારણા પરથી. આપણે જાણીએ છીએ કે P માંથી પસાર થતી (l ને સમાંતર હોય તેવી) એક અનન્ય રેખા m છે .

હવે બિંદુનું એક રેખાથી અંતર તે બિંદુથી રેખા પર દોરેલાં લંબની લંબાઈ હોય છે. m પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા l સુધીનું અંતર અને l પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા m નું અંતર હંમેશાં સમાન થશે. આથી આ બંને રેખાઓ l અને m દરેક સ્થાન પર એકબીજાથી સમાન અંતરે છે.

નોંધ : આગળનાં કેટલાંક પ્રકરણોમાં તમે જે અભ્યાસ કરશો તે યુક્લિડની ભૂમિતિ હશે. પરંતુ તેમાં આપણા દ્વારા ઉપયોગ કરેલ પૂર્વધારણા અને પ્રમેય યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પ્રમેયથી અલગ હોઈ શકે છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. તમે યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સરળતાથી સમજી શકાય તેમ કેવી રીતે લખી શકશો?

2. શું યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા પરથી સમાંતર રેખાઓનું અસ્તિત્વ નક્કી થાય છે? સ્પષ્ટ કરો.

5.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. યુક્લિડે બિંદુ, રેખા અને સમતલને વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે, પરંતુ ગણિતશાસ્ત્રીઓએ વ્યાખ્યાઓનો સ્વીકાર કર્યો નથી. આ માટે ભૂમિતિમાં તેને હવે અવ્યાખ્યાયિત પદોના રૂપમાં લેવામાં આવે છે.

2. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ એવી કલ્પનાઓ છે જે સ્પષ્ટ રીતે સનાતન સત્ય છે અને તેને સાબિત કરી ન શકાય.

3. પ્રમેયોની પ્રતિજ્ઞાઓને વ્યાખ્યાઓ, સ્વયંસિદ્ધ સત્યો, પહેલાં સાબિત કરેલાં પ્રમેયો અને આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કર્યાં.

4. યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ

(1) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.

(2) સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો સરવાળા સમાન રહે.

(3) સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ તો બાદબાકી સમાન રહે.

(4) એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન રહે.

(5) આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું હોય છે.

(6) સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

(7) એક જ વસ્તુઓના અડધાં એકબીજાને સમાન થાય.

5. યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ :

પૂર્વધારણા 1 : એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.

પૂર્વધારણા 2 : સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.

પૂર્વધારણા 3 : કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈપણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.

પૂર્વધારણા 4 : બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન હોય.

પૂર્વધારણા 5 : જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતાં તેઓ એકબીજીને છેદે છે.

6. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો.

(i) દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P ને સંગત P માંથી પસાર થતી અને l ને સમાંતર હોય તેવી એક અનન્ય રેખા m મળે.

(ii) બે ભિન્ન અને એકબીજીને છેદતી રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

7. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સાબિત કરવા માટે પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ નિષ્ફળ ગયો પરંતુ તેને લીધે બીજી અનેક ભૂમિતિઓની શોધ થઈ તેમને અયુક્લિડિય ભૂમિતિ કહેવામાં આવે છે.

પ્રકરણ 6

રેખાઓ અને ખૂણાઓ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે આગળના પ્રકરણ 5માં શીખી ગયાં કે એક રેખા દોરવા માટે ઓછામાં ઓછાં બે ભિન્ન બિંદુઓ જોઈએ. તમે અગાઉ કેટલીક પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયાં અને તેની મદદથી કેટલાંક વિધાનો સાબિત કર્યાં. આ પ્રકરણમાં તમે બે રેખાઓ પરસ્પર એકબીજીને છેદે તેથી બનતા ખૂણાઓ અને કોઈ રેખા બે કે વધારે સમાંતર રેખાઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે તેથી બનતા ખૂણાઓના ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કરશો. તદ્ઉપરાંત આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક વિધાનોને આનુમાનિક તર્ક દ્વારા સાબિત કરશો. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રવૃત્તિ દ્વારા આ વિધાનોની ચકાસણી કરી ગયા છો.

તમારા રોજિંદા જીવનમાં સમતલ સપાટીની ધાર વચ્ચે જુદા જુદા પ્રકારના ખૂણાઓ બનતા જુઓ છો. સમતલ સપાટીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રકારના નમૂના બનાવવા માટે તમને ખૂણાઓનું સંપૂર્ણ જ્ઞાન હોવું જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે માનો કે તમે શાળાના કોઈ પ્રદર્શનમાં વાંસની લાકડીઓનો ઉપયોગ કરીને ઝૂંપડીનો નમૂનો બનાવવા માંગો છો. વિચારો કે તમે તે કેવી રીતે બનાવશો ? તેના માટે તમે કેટલીક લાકડીઓ એકબીજીને સમાંતર અને કેટલીક લાકડીઓ ત્રાંસી ગોઠવશો. જ્યારે શિલ્પીએ એક બહુમાળી મકાનનો નકશો દોરવો હોય તો તેણે ભિન્ન ખૂણાઓ પર પરસ્પર છેદતી રેખાઓ અને સમાંતર રેખાઓ દોરવી પડશે. શું તમે માનો છો કે આ રેખાઓ અને ખૂણાઓના ગુણધર્મોના જ્ઞાન વગર તે ઈમારતનો નકશો બનાવી શકશે ?

વિજ્ઞાનમાં તમે કિરણોની રેખાકૃતિ દોરીને પ્રકાશના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરો છો. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે પ્રકાશ એક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં જાય ત્યારે થતાં કાશના વિભાજનનો અભ્યાસ કરવા તમે પરસ્પર છેદતી અને સમાંતર

રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરો છો. જ્યારે બે કે તેથી વધુ બળ એક જ પદાર્થ પર લાગે ત્યારે તમે જે આકૃતિ દોરો છો, તેમાં પદાર્થ પર બળોની પરિણામી અસરના અભ્યાસ માટે બળોને દિશાયુક્ત રેખાખંડો દ્વારા દર્શાવો છો. તે સમયે તમારે કિરણો (અથવા રેખાખંડો) એકબીજાને સમાંતર હોય કે પરસ્પર એકબીજાને છેદે ત્યારે બનતા ખૂણાઓ વચ્ચે શો સંબંધ છે તે જાણવું જરૂરી છે. ટાવરની ઊંચાઈ કે દીવાદાંડીથી વહાણનું અંતર શોધવા માટે સમક્ષિતિજ કિરણ અને દૃષ્ટિકિરણ વચ્ચે બનતા ખૂણા વિશે જાણવું જરૂરી છે. જેમાં રેખાઓ અને ખૂણાઓનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય. હવે પછીના ભૂમિતિનાં પ્રકરણોમાં વધુમાં વધુ ઉપયોગી નવા ગુણધર્મો તારવવા તમે રેખાઓ અને ખૂણાઓના આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરશો.

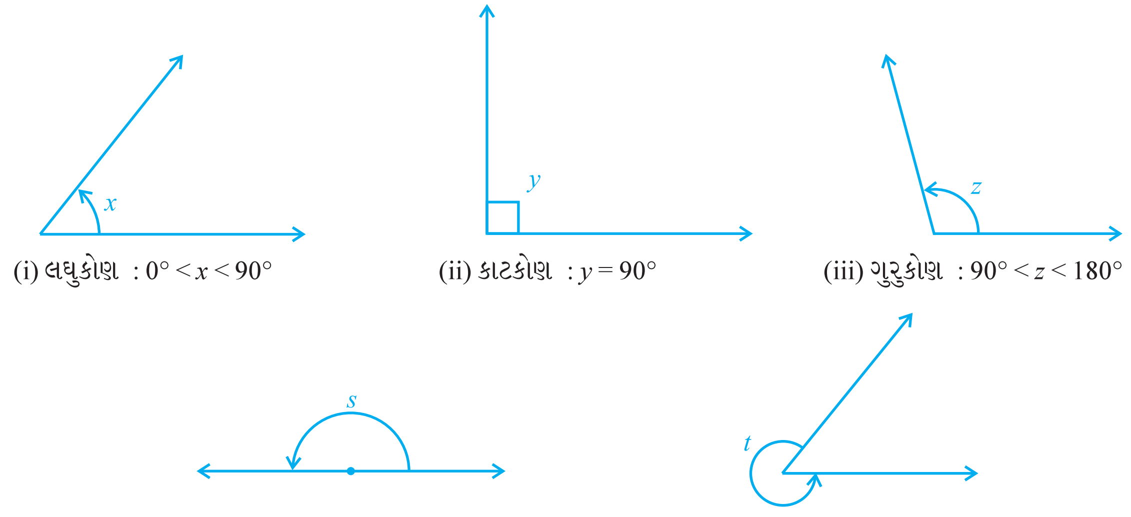
તો ચાલો તમે પહેલાં જેનો અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરી ગયાં છો તે રેખાઓ અને ખૂણા સંબંધિત કેટલાંક પદો તથા વ્યાખ્યાઓનું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

6.2 મૂળભૂત પદો તથા વ્યાખ્યાઓ

યાદ રાખો કે બે અંત્યબિંદુઓવાળા રેખાના ભાગને *રેખાખંડ* કહેવાય. એક જ અંત્યબિંદુ ધરાવતા રેખાના ભાગને કિરણ કહેવાય છે. યાદ રાખો કે રેખાખંડ AB ને $\overline{AB}$ અને તેની લંબાઈને AB વડે દર્શાવાય છે. કિરણ AB ને $\overrightarrow{AB}$ તથા રેખાને $\overleftrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે. છતાં પણ આપણે આ સંકેતોનો ઉપયોગ કરીશું નહિ અને રેખાખંડ AB, કિરણ AB, રેખાખંડ AB ની લંબાઈ અને રેખા AB ને એકના એક જ સંકેત વડે દર્શાવીશું. તમને તેનો અર્થ સંદર્ભથી સ્પષ્ટ થઈ જશે. ક્યારેક ક્યારેક રેખાઓને દર્શાવવા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો l, m, n વગેરેનો ઉપયોગ કરીશું.

જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલા હોય, તો તે બિંદુઓને સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે. અન્યથા તે અસમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે.

યાદ રાખો કે જ્યારે બે કિરણો એક સામાન્ય અંત્યબિંદુમાંથી ઉદ્‌ભવે ત્યારે *ખૂણો* બને છે. અહીં ખૂણો બનાવતાં કિરણોને ખૂણાની ***બાજુઓ*** કહેવામાં આવે છે અને સામાન્ય અંત્યબિંદુને ખૂણાનું ***શિરોબિંદુ*** કહે છે. તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રકારના ખૂણાઓ જેમકે **લઘુકોણ** (*acute angle*), **ગુરુકોણ** (*obtuse angle*), **કાટકોણ** (*right angle*), **સરળકોણ** (*straight angle*) અને **વિપરીત કોણ** (*reflex angle*) વિશે શીખી ગયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 6.1.)

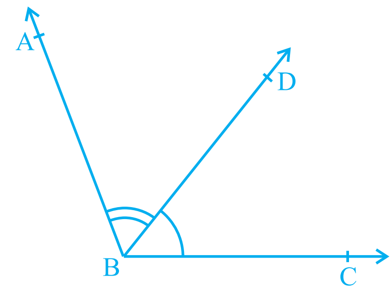


(i) લઘુકોણ : $0° < x < 90°$ (ii) કાટકોણ : $y = 90°$ (iii) ગુરુકોણ : $90° < z < 180°$

(iv) સરળકોણ : $s = 180°$ (v) વિપરીત કોણ : $180° < t < 360°$

આકૃતિ 6.1 ખૂણાના પ્રકારો

લઘુકોણનું માપ 0° થી 90° ની વચ્ચે હોય છે. **કાટકોણનું** માપ બરાબર 90° હોય. 90° કરતાં વધારે અને 180° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને **ગુરુકોણ** કહે છે. યાદ રાખો કે ***સરળકોણ*** 180° ના માપનો હોય છે અને 180° કરતાં વધારે અને 360° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને ***વિપરીત કોણ*** કહે છે. વળી, જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 90° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***કોટિકોણ*** *(complementary angles)* કહે છે અને જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***પૂરક કોણ*** *(supplementary angles)* કહે છે.



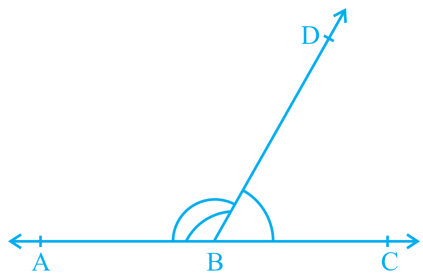
આકૃતિ 6.2 આસન્ન કોણ

અગાઉના ધોરણમાં તમે ***આસન્નકોણ*** *(adjacent angles)* વિશે શીખી ગયા છો. (જુઓ આકૃતિ 6.2.) જો બે ખૂણાઓનું શિરોબિંદુ એક જ હોય, એક ભુજ સામાન્ય હોય અને સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ એ સામાન્ય ભુજની જુદી જુદી બાજુએ હોય તેવા બે ખૂણાઓને આસન્નકોણ કહેવાય.

આકૃતિ 6.2 માં ∠ ABD અને ∠ DBC આસન્ન કોણ છે. કિરણ BD તેમનો સામાન્ય ભુજ છે. બિંદુ B એ સામાન્ય શિરોબિંદુ છે અને કિરણ BA અને કિરણ BC સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ છે. વળી જ્યારે બે ખૂણાઓ આસન્ન ખૂણાઓ હોય, ત્યારે તેમના માપનો સરવાળો હંમેશાં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજથી બનતા ખૂણાના માપ જેટલો હોય છે. તેથી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

તમે એ પણ નોંધ લો કે ∠ ABC અને ∠ ABD આસન્ન ખૂણાઓ નથી. શા માટે ? કારણ કે તેમના સામાન્ય ન હોય તે ભુજ કિરણ BD અને કિરણ BC એ સામાન્ય ભુજ BA ની એક જ બાજુએ આવેલા છે.

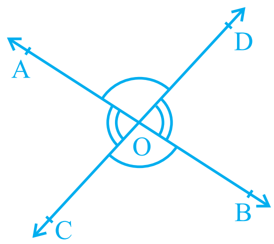


આકૃતિ 6.3 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

જો આકૃતિ 6.2 માં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ BA અને BC એક રેખા બનાવે તો તેમની આકૃતિ 6.3 જેવી દેખાશે. ત્યારે ∠ ABD અને ∠ DBC એ ***ખૂણાઓની રૈખિક જોડ*** *(pair of linear angles)* કહેવાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે બે રેખાઓ AB અને CD એ એકબીજાને પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે તો ***અભિકોણો*** *(vertically oppositeangles)* ની બે જોડ બને છે (આકૃતિ 6.4). તેમાંથી એક જોડ ∠ AOD અને ∠ BOC છે.

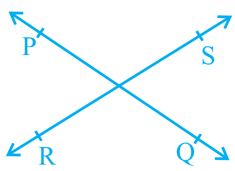
શું તમે બીજી જોડ શોધી શકશો ?



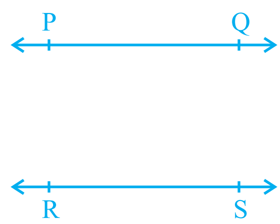
આકૃતિ 6.4 અભિકોણની જોડ

6.3 પરસ્પર છેદતી અને પરસ્પર ન છેદતી રેખાઓ

એક કાગળ પર બે ભિન્ન રેખાઓ PQ અને RS દોરો. તમે જોશો કે આ રેખાઓને બે પ્રકારે દોરી શકાય છે. તે આકૃતિ 6.5(i) અને આકૃતિ 6.5(ii) માં દર્શાવેલ છે.



(i) છેદતી રેખાઓ



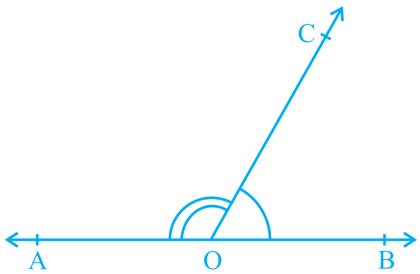
(ii) છેદતી ન હોય તેવી (સમાંતર) રેખાઓ

આકૃતિ 6.5 બે રેખાઓને દોરવાના ભિન્ન પ્રકાર

રેખાની એ કલ્પનાને પણ યાદ કરો કે તે બંને છેડેથી અનંત સુધી વિસ્તરેલ હોય છે. રેખાઓ PQ અને RS આકૃતિ 6.5(i)માં છેદતી રેખાઓ છે અને આકૃતિ 6.5(ii)માં બંને રેખાઓ સમાંતર છે. ધ્યાન રાખો કે આ બંને સમાંતર રેખાઓનાં ભિન્ન બિંદુઓ પર તેના સામાન્ય લંબની લંબાઈઓ સમાન રહેશે. આ સમાન લંબાઈ બંને સમાંતર ***રેખાઓની વચ્ચેનું અંતર*** *(distance between parallel lines)* કહેવાય છે.

6.4 ખૂણાઓની જોડ

વિભાગ 6.2 માં તમે ખૂણાઓની કેટલીક જોડ જેમકે કોટિકોણ, પૂરકકોણ, આસન્નકોણ, ખૂણાની રૈખિક જોડ વગેરેની વ્યાખ્યાઓ વિશે શીખી ગયાં છો. શું તમે આ ખૂણાઓ વચ્ચેના કોઈ સંબંધ વિશે વિચારી શકો છો ? હવે, કોઈ કિરણ કોઈ રેખાને છેદે તો બનતા ખૂણાઓના સંબંધ પર વિચાર કરીએ. આ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવેલ છે. રેખાને AB અને કિરણને OC કહો. બિંદુ O પર બનતા ખૂણા કયા છે ? એ ∠AOC, ∠BOC અને ∠AOB છે.



આકૃતિ 6.6 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

શું આપણે ∠AOC + ∠BOC = ∠AOB લખી શકીએ છીએ? હા! (શા માટે? વિભાગ 6.2 માં આપેલ આસન્ન ખૂણાઓ જુઓ.) (1)

∠AOB નું માપ શું છે ? તે 180° છે. (શા માટે?) (2)

શું (1) અને (2) પરથી તમે કહી શકો કે, ∠AOC + ∠BOC = 180° છે? હા! (શા માટે?)

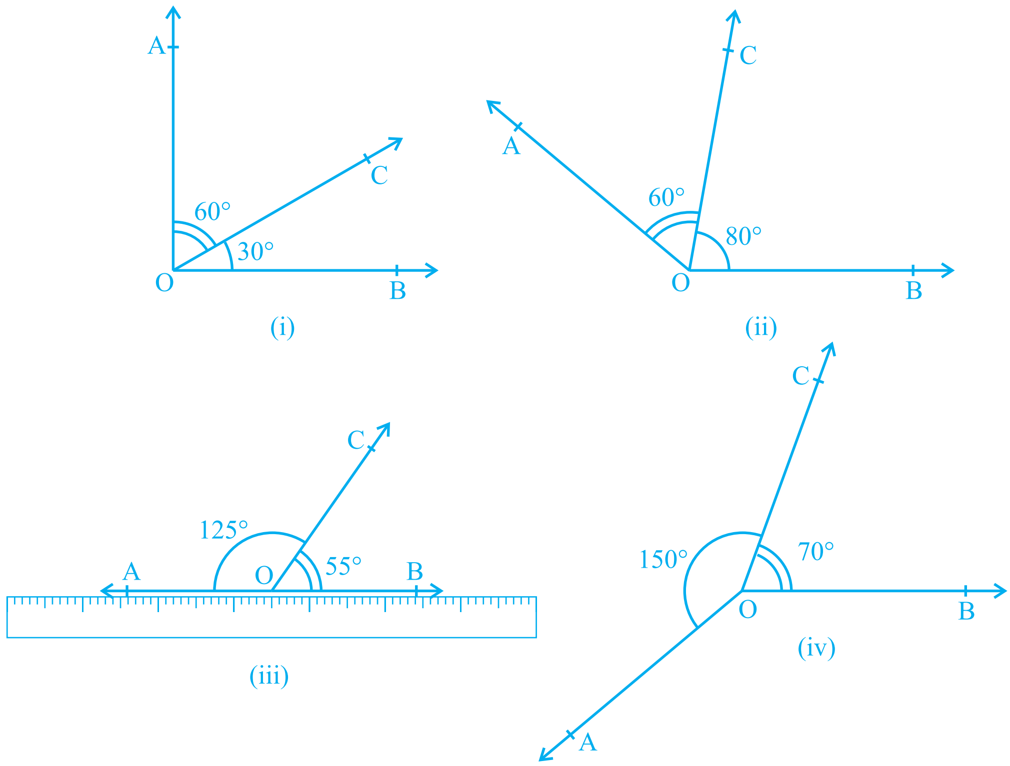
ઉપરની ચર્ચાના આધારે આપણે નીચેની પૂર્વધારણા લખી શકીએ છીએ :

પૂર્વધારણા 6.1 : *જે કિરણનું ઉદ્‌ભવબિંદુ રેખા પર હોય તેવા કિરણ અને રેખાથી બનતાં બંને ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.*

યાદ કરીએ કે જ્યારે બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° થાય ત્યારે તે *ખૂણાઓની એક રૈખિક જોડ* બનાવે છે. પૂર્વધારણા 6.1 માં એ આપેલ છે કે એક કિરણ એક રેખાને છેદે છે. આ પરથી આપણે તારણ કાઢ્યું કે આ પ્રકારે બનેલા બંને આસન્ન ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. શું આપણે પૂર્વધારણા 6.1નું પ્રતીપ લખી શકીએ ? એટલે કે પૂર્વધારણા 6.1ના 'તારણ'ને પક્ષ છે તેમ માનીએ અને જે પક્ષ 'આપેલ છે' તેને તારણ માનીએ. આથી, તે નીચે પ્રમાણે બને છે :

(A) જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો સામાન્ય કિરણ એક રેખા પર આવેલ છે.(અર્થાત્ અસામાન્ય બાજુઓ એક જ રેખામાં છે.)

હવે આપણે જોઈએ કે પૂર્વધારણા 6.1 અને વિધાન (A) એકબીજાથી વિરુધ્ધ છે. આપણે તેમાંના પ્રત્યેકને બીજાનું ***પ્રતીપ****(converse)* કહીશું. આપણે એ નથી જાણતા કે વિધાન (A) સત્ય છે કે નહિ. ચાલો તેની તપાસ કરીએ. આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણ દોરો. દરેક વિકલ્પમાં અસામાન્ય બાજુઓ પૈકી કોઈપણ એક તરફ સીધી પટ્ટી રાખો. શું બીજી અસામાન્ય બાજુ માપપટ્ટીની તરફ રહેશે?



આકૃતિ 6.7 જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણો

તમે જોશો કે માત્ર આકૃતિ 6.7 (iii) માં જ બંને સામાન્ય બાજુઓ સીધી પટ્ટીની સામે છે, એટલે કે A, O અને B એક જ રેખા પર આવેલાં છે અને કિરણ OC આ રેખા પર આવેલ છે. સાથે એ પણ જુઓ કે $\angle$ AOC + $\angle$ COB = 125° + 55° = 180° છે. આ પરથી તમે તારણ કાઢી શકો કે વિધાન (A) સત્ય છે. આથી, તમે તેને પૂર્વધારણા રૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકો છો :

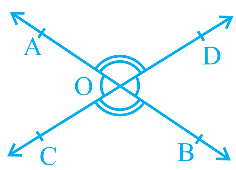
પૂર્વધારણા 6.2 : *જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે.*

સ્પષ્ટ કારણોસર, ઉપરની બંને પૂર્વધારણાઓ એકત્રિત કરતાં તેમને સંયુક્ત રૂપે *રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા* કહે છે.

આવો હવે જ્યારે બે રેખાઓ છેદતી હોય એવી પરિસ્થિતિ ચકાસીએ.

અગાઉના ધોરણમાંથી તમને યાદ હશે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદતી હોય તો અભિકોણ સમાન હોય છે. ચાલો તે પરિણામને સાબિત કરીએ. સાબિતીમાં રહેલ સોપાન માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ અને નીચે આપેલ સાબિતીને સમજતી વખતે તેમને ધ્યાનમાં રાખો :

પ્રમેય 6.1 : *પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.*



આકૃતિ 6.8 અભિકોણ

સાબિતી : ઉપરના વિધાનમાં એ આપેલ છે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે છે. આથી માનો કે બે રેખાઓ AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે છે તે આકૃતિ 6.8 માં દર્શાવેલ છે. આનાથી આપણને અભિકોણની નીચેની બે જોડીઓ મળે છે :

(i) $\angle$ AOC અને $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD અને $\angle$ BOC.

આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle$ AOC = $\angle$ BOD અને $\angle$ AOD = $\angle$ BOC છે.

હવે, કિરણ OA રેખા CD પર આવેલ છે.

આથી, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)

શું આપણે $\angle AOD + \angle BOD = 180°$ સાબિત કરી શકીશું ? હા ! (કેમ ?) (2)

(1) અને (2) પરથી આપણે લખી શકીએ કે,

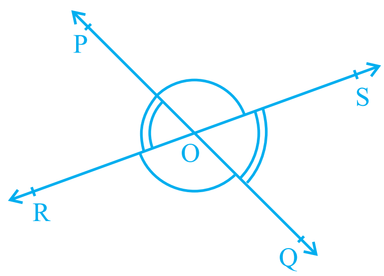
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

આના પરથી તારણ મળે છે કે $\angle AOC = \angle BOD$ (વિભાગ 5.2, પૂર્વધારણા 3 જુઓ.)

તે જ રીતે આપણે સાબિત કરી શકીએ કે $\angle AOD = \angle BOC$

આવો, હવે રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા અને પ્રમેય 6.1 પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 6.9 માં રેખા PQ અને રેખા RS એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ હોય, તો તમામ ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 6.9

ઉકેલ : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ખૂણાની રૈખિક જોડ)

પરંતુ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (પક્ષ)

તેથી $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

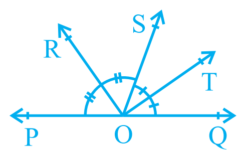
તે જ રીતે, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

હવે, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (અભિકોણ)

અને $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (અભિકોણ)

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 6.10 માં, કિરણ OS રેખા POQ પર છે. કિરણ OR અને કિરણ OT એ અનુક્રમે $\angle POS$ અને $\angle SOQ$ ના કોણદ્વિભાજક છે. જો $\angle POS = x$, તો $\angle ROT$ શોધો.

ઉકેલ : કિરણ OS રેખા POQ પર છે.



આકૃતિ 6.10

તેથી, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

પરંતુ, $\angle POS = x$

તેથી, $x + \angle SOQ = 180°$

માટે, $\angle SOQ = 180° - x$

હવે કિરણ OR એ $\angle POS$ નો દ્વિભાજક છે. તેથી,

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

તે જ રીતે $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

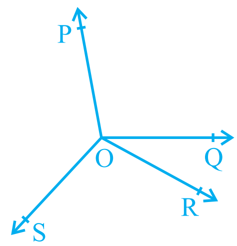
$= 90° - \frac{x}{2}$

હવે, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

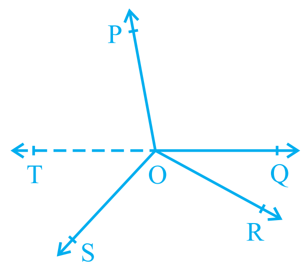
$= 90°$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.11માં OP, OQ, OR અને OS ચાર કિરણ છે. તો સાબિત કરો કે $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$.



આકૃતિ 6.11

ઉકેલ : આકૃતિ 6.11 માં તમારે કિરણ OP, OQ, OR અથવા OS ના પાછળના બિંદુ તરફ કિરણ દોરવું જરૂરી છે. ચાલો કિરણ OQ ને પાછળના બિંદુ T તરફ લંબાવીએ. તેથી TOQ રેખા છે. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)



આકૃતિ 6.12

હવે કિરણ OP રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)

તે જ રીતે કિરણ OS એ રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

પણ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

તેથી, (2) પરથી

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ બનશે. (3)

હવે (1) અને (3) નો સરવાળો કરતાં, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે.

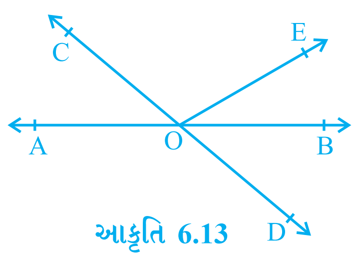
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

પરંતુ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

તેથી (4) $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ મળશે.

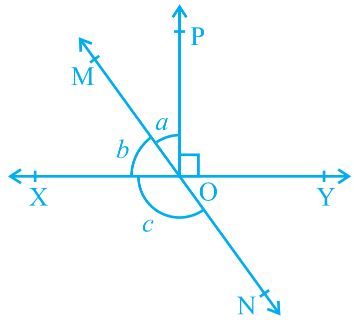
સ્વાધ્યાય 6.1

1. આકૃતિ 6.13માં રેખા AB અને CD, O માં છેદે છે. જો $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ અને $\angle BOD = 40°$, તો $\angle BOE$ અને વિપરીત $\angle COE$ મેળવો.



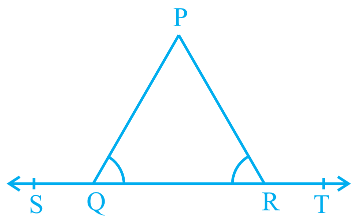
આકૃતિ 6.13

2. આકૃતિ 6.14 માં, રેખા XY અને MN, O માં છેદે છે. જો ∠ POY = 90° અને $a : b = 2 : 3$, તો c શોધો.



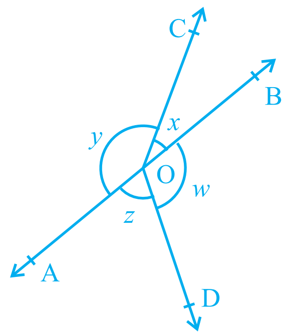
આકૃતિ 6.14

3. આકૃતિ 6.15 માં, ∠ PQR = ∠ PRQ, તો સાબિત કરો કે ∠ PQS = ∠ PRT.



આકૃતિ 6.15

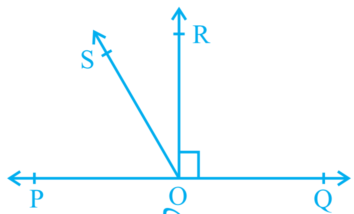
4. આકૃતિ 6.16 માં, જો $x + y = w + z$ હોય, તો સાબિત કરો કે AOB રેખા છે.



આકૃતિ 6.16

5. આકૃતિ 6.17 માં POQ રેખા છે. કિરણ OR રેખા PQ ને લંબ છે. કિરણ OP અને OR વચ્ચે અન્ય એક કિરણ OS આવેલ છે. સાબિત કરો કે,

$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2} (\angle \text{QOS} - \angle \text{POS})$.

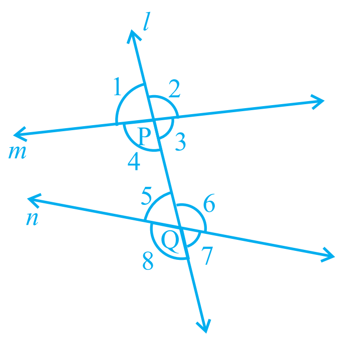


આકૃતિ 6.17

6. ∠ XYZ = 64° આપેલ છે અને XY ને બિંદુ P સુધી લંબાવેલ છે. આપેલ સૂચના પરથી આકૃતિ દોરો. જો કિરણ YQ, ∠ ZYP નો દ્વિભાજક હોય, તો ∠ XYQ અને વિપરીત ∠ QYP નું માપ શોધો.

6.5 સમાંતર રેખાઓ અને છેદિકા

યાદ કરીએ કે જો કોઈ રેખા બે અથવા બેથી વધુ રેખાઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તેને આ રેખાઓની *છેદિકા* કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.18.) રેખા l એ રેખાઓ m અને n ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે. તેથી, રેખા l એ રેખા m અને n ની છેદિકા છે. તમે જોશો કે પ્રત્યેક બિંદુ P અને Q બિંદુ આગળ ચાર ખૂણાઓનું નિર્માણ થાય છે.



આકૃતિ 6.18

ચાલો આ ખૂણાઓને ∠ 1, ∠ 2, . . ., ∠8 નામ આપીએ. (જુઓ આકૃતિ 6.18.)

∠ 1, ∠ 2, ∠ 7 અને ∠ 8 ને ***બહિષ્કોણો*** *(exterior angle)* કહે છે. જ્યારે ∠ 3, ∠ 4, ∠ 5 અને ∠ 6 ને ***અંતઃકોણો*** *(interior angle)* કહે છે.

યાદ કરો કે આગળના ધોરણમાં તમે જ્યારે છેદિકા બે રેખાઓને છેદે ત્યારે બનતી ખૂણાઓની કેટલીક જોડને નામ આપ્યા હતાં. તે નીચે પ્રમાણે છે :

(a) ***અનુકોણ*** (*corresponding angles*) **:**

(i) ∠ 1 અને ∠ 5 (ii) ∠ 2 અને ∠ 6

(iii) ∠ 4 અને ∠ 8 (iv) ∠ 3 અને ∠ 7

(b) ***અંતઃયુગ્મકોણ*** (*interior alternate angles*) **:**

(i) ∠ 4 અને ∠ 6 (ii) ∠ 3 અને ∠ 5

(c) ***બહિર્યુગ્મકોણ*** (*exterior alternate angles*) **:**

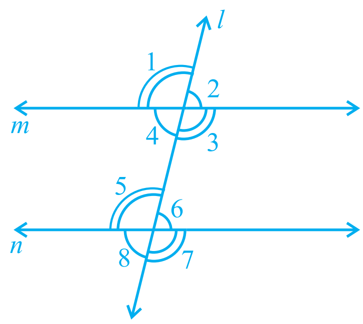
(i) ∠ 1 અને ∠ 7 (ii) ∠ 2 અને ∠ 8

(d) ***છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ*** (*interior angles on the same side of transversal*) :

(i) ∠ 4 અને ∠ 5 (ii) ∠ 3 અને ∠ 6

છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણને ***અનુક્રમિક અંતઃખૂણા*** (*consecutive interior angles*) તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. તેને ***સંબંધિત કોણ*** અથવા ***સહઆંતરિક ખૂણા*** પણ કહે છે. વધુમાં ઘણી વખત આપણે અંતઃયુગ્મકોણને માટે યુગ્મકોણ શબ્દ પણ વાપરીએ છીએ.

ચાલો, હવે રેખા *m* અને *n* સમાંતર હોય ત્યારે આપણે આ ખૂણાઓની જોડ વચ્ચેના સંબંધ શોધીએ. તમે જાણો છો કે તમારી નોટબુકમાં વપરાયેલી સીધી રેખાઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે. તેથી માપપટ્ટી અને પેન્સિલની મદદથી બે સમાંતર રેખાઓ દોરો તેમજ આકૃતિ 6.19 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને છેદતી છેદિકા દોરો.



આકૃતિ 6.19

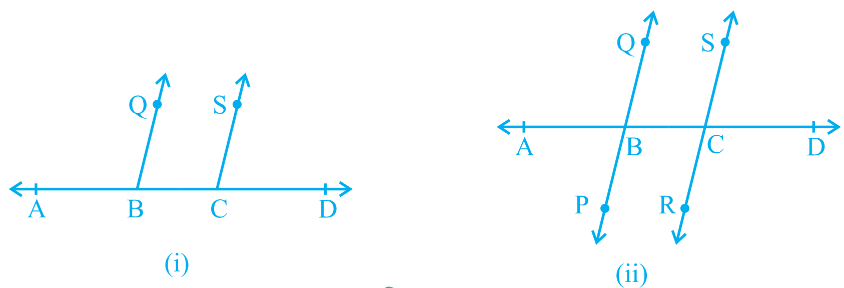
હવે અનુકોણોની કોઈ એક જોડના ખૂણાને માપો અને તેમની વચ્ચેનો સંબંધ તપાસો. તમને : ∠ 1 = ∠ 5, ∠ 2 = ∠ 6, ∠ 4 = ∠ 8 અને ∠ 3 = ∠ 7 મળશે. આ પરથી તમે નીચેની પૂર્વધારણા સ્વીકારી શકો :

પૂર્વધારણા 6.3 : *જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અનુકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.*

પૂર્વધારણા 6.3 ને ***અનુકોણ પૂર્વધારણા*** પણ કહેવામાં આવે છે. આવો, હવે આ પૂર્વધારણાના પ્રતીપની ચર્ચા કરીએ. તે નીચે પ્રમાણે થશે :

જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય છે.

શું આ વિધાન સત્ય છે ? તેની ચકાસણી નીચે પ્રમાણે કરી શકાય છે. એક રેખા AD દોરો અને તેનાં પર બે બિંદુઓ B અને C લો. B અને C, પર ક્રમશઃ સમાન ∠ ABQ અને ∠ BCS ની રચના કરો. તે આકૃતિ 6.20 (i) માં બતાવેલ છે.

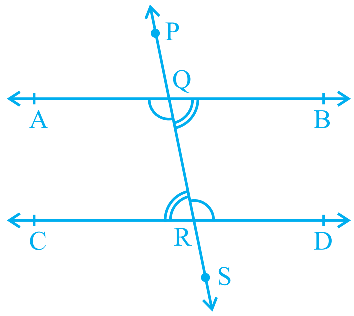


આકૃતિ 6.20

QB અને SC ને AD ની બીજી બાજુ લંબાવીને રેખાઓ PQ અને RS મેળવો. આકૃતિ 6.20 (ii) માં આ દર્શાવેલ છે. તમે જોઈ શકો છો કે આ રેખાઓ પરસ્પર છેદતી નથી. તમે બંને રેખાઓ PQ અને RS ના જુદાં જુદાં બિંદુઓ પર સામાન્ય લંબ દોરો અને તેની લંબાઈ માપીને જોઈ શકો છો કે આ લંબાઈ દરેક સ્થળે સમાન છે. આથી તમે તારણ કાઢી શકો કે આ રેખાઓ સમાંતર છે. એટલે કે અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ પણ સાચું છે. આ રીતે આપણને નીચેની પૂર્વધારણા મળે છે :

પૂર્વધારણા 6.4 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

શું આપણે એક છેદિકા દ્વારા બે સમાંતર રેખાઓને છેદવાથી બનતા અંતઃ યુગ્મકોણો વચ્ચેનો કોઈ સંબંધ જાણવા માટે અનુકોણ પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરી શકીએ ? આકૃતિ 6.21 માં છેદિકા PS સમાંતર રેખાઓ AB અને CD ને અનુક્રમે બિંદુએ Q અને R માં છેદે છે.



આકૃતિ 6.21

શું $\angle BQR = \angle QRC$ અને $\angle AQR = \angle QRD$ કહી શકાય ?

તમે જાણો છો કે $\angle PQA = \angle QRC$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા)(1)

શું $\angle PQA = \angle BQR$? હા ! (શા માટે ?) (2)

આમ, (1) અને (2) પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે,

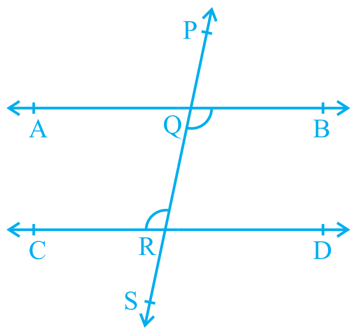
$$\angle BQR = \angle QRC.$$

આ જ રીતે $\angle AQR = \angle QRD.$

ઉપરના પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

પ્રમેય 6.2 : *જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અંતઃ યુગ્મકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.*

હવે અનુકોણ પૂર્વધારણાના પ્રતીપનો ઉપયોગ કરીને શું આપણે કહી શકીએ કે અંતઃ યુગ્મકોણોની એક જોડ સમાન હોવાને કારણે બંને રેખાઓ સમાંતર છે ? આકૃતિ 6.22 માં છેદિકા PS રેખાઓ AB અને CD ને અનુક્રમે બિંદુઓ Q અને R માં એ રીતે છેદે છે કે $\angle BQR = \angle QRC$.



આકૃતિ 6.22

શું AB || CD છે ?

$\angle BQR = \angle PQA$ (કેમ ?) (1)

પરંતુ, $\angle BQR = \angle QRC$ (આપેલ છે) (2)

આથી, (1) અને (2) પરથી તમે તારણ કાઢી શકો કે

$\angle PQA = \angle QRC$

પરંતુ આ તો અનુકોણ છે.

આથી AB || CD (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

આ વિધાનને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

પ્રમેય 6.3 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે અંતઃ યુગ્મકોણોની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

આ જ રીતે, તમે છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃ કોણોને સંબંધિત બે પ્રમેયો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકો :

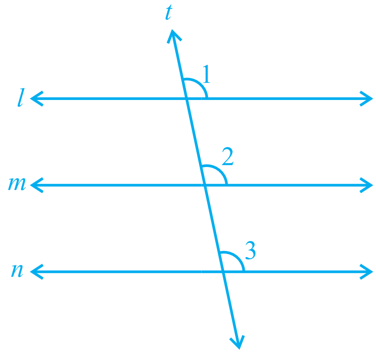
પ્રમેય 6.4 : *એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણોની પ્રત્યેક જોડ પૂરક હોય છે.*

પ્રમેય 6.5 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણોની એક જોડ પૂરક હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

તમને યાદ હશે કે આ પ્રત્યેક પૂર્વધારણા અને પ્રમેયોની ચકાસણી અગાઉના ધોરણમાં તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ દ્વારા કરી ગયાં છો. તમે આ પ્રવૃત્તિઓનું પુનરાવર્તન અહીં પણ કરી શકો છો.

6.6 એક જ રેખાને સમાંતર રેખાઓ

જો બે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તો શું એ પરસ્પર સમાંતર હશે ? ચાલો તેનું પરીક્ષણ કરીએ. આકૃતિ 6.23 જુઓ. તેમાં $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે. ચાલો રેખા l, m અને n માટે એક છેદિકા t દોરો.



આકૃતિ 6.23

એ આપેલ છે કે $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે.

આથી, $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 1 = \angle 3$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા)

આમ, $\angle 2 = \angle 3$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle 2$ અને $\angle 3$ અનુકોણ છે અને સમાન છે.

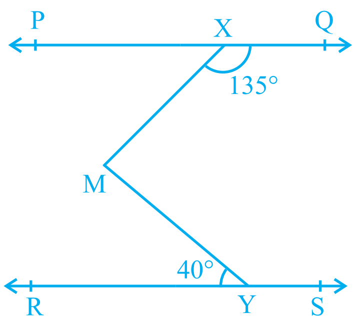
આથી તમે કહી શકો કે રેખા $m \parallel$ રેખા n (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

આ પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

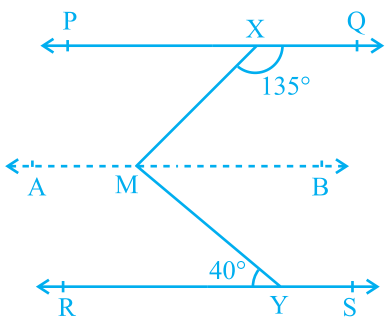
પ્રમેય 6.6 : *જે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

નોંધ : ઉપરના ગુણધર્મને બેથી વધુ રેખાઓ માટે પણ વ્યાપક બનાવી શકાય છે. ચાલો, હવે સમાંતર રેખાઓને સંબંધિત કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.24 માં જો PQ || RS, $\angle$ MXQ = 135° અને $\angle$ MYR = 40°, છે તો $\angle$ XMY મેળવો.



આકૃતિ 6.24



આકૃતિ 6.25

ઉકેલ : આકૃતિ 6.25 માં બતાવ્યા મુજબ અહીં આપણે M માંથી પસાર થતી રેખા PQ ને સમાંતર એક રેખા AB દોરીએ. હવે, AB || PQ અને PQ || RS છે.

આથી, AB || RS (કેમ ?)

હવે, $\angle$ QXM + $\angle$ XMB = 180° (AB || PQ, છેદિકા XM ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

પરંતુ $\angle$ QXM = 135°

આથી, $135° + \angle XMB = 180°$

આમ, $\angle XMB = 45°$ (1)

હવે, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, યુગ્મકોણ)

આથી $\angle BMY = 40°$ (2)

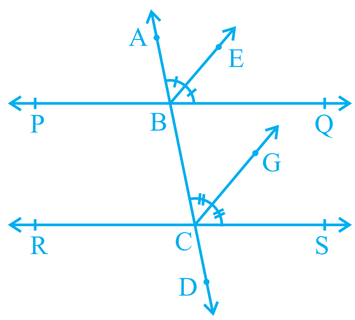
(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$ મળે.

આથી, $\angle XMY = 85°$

ઉદાહરણ 5 : જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડના દ્વિભાજક પરસ્પર સમાંતર હોય તો સાબિત કરો કે બંને રેખાઓ પણ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.26 માં એક છેદિકા AD એ રેખાઓ PQ અને RS ને અનુક્રમે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. કિરણ BE એ $\angle ABQ$નો દ્વિભાજક છે અને કિરણ CG એ $\angle BCS$ નો દ્વિભાજક છે તથા BE || CG છે.



આકૃતિ 6.26

આપણે સાબિત કરવું છે કે PQ || RS છે.

આપેલ છે કે કિરણ BE એ $\angle ABQ$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

આ જ પ્રમાણે કિરણ CG એ $\angle BCS$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

પરંતુ BE || CG છે અને AD જ તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle ABE = \angle BCG$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા) (3)

(3) માં (1) અને (2) ની કિંમત મૂકતાં

આપણને આ પરિણામ પ્રાપ્ત થશે.

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

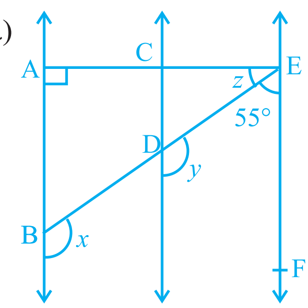
આથી, $\angle ABQ = \angle BCS$

પરંતુ આ છેદિકા AD દ્વારા રેખાઓ PQ અને RS સાથે બનતા અનુકોણ છે અને તે સમાન છે.

આથી, PQ || RS (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.27 માં AB || CD અને CD || EF અને EA ⊥ AB છે.

જો $\angle BEF = 55°$ હોય, તો x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.27

ઉકેલ : $y + 55° = 180°$ (છેદિકા ED ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

આથી, $y = 180° - 55° = 125°$

વળી $x = y$ (AB || CD, અનુકોણ પૂર્વધારણા)

માટે $x = 125°$

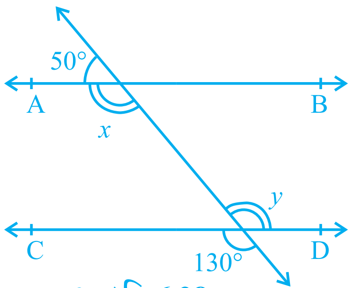
આથી હવે, AB || CD અને CD || EF છે તેથી AB || EF થાય.

આથી, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$ (છેદિકા EA ની એક જ તરફના અંત:કોણ)

$\therefore 90° + z + 55° = 180°$

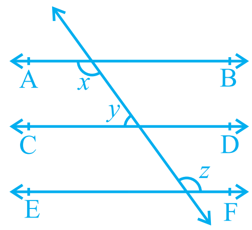
$\therefore z = 35°$

સ્વાધ્યાય 6.2



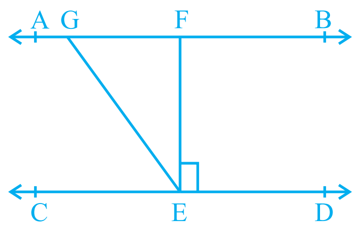
આકૃતિ 6.28

1. આકૃતિ 6.28 માં x અને y નાં મૂલ્ય શોધો અને બતાવો કે AB || CD છે.



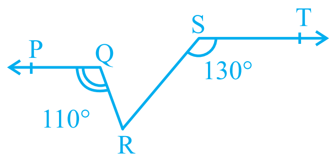
આકૃતિ 6.29

2. આકૃતિ 6.29, માં જો AB || CD, CD || EF અને $y : z = 3 : 7$, છે તો x નું મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.30

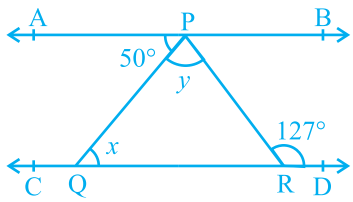
3. આકૃતિ 6.30, માં જો AB || CD, EF ⊥ CD અને $\angle GED = 126°$ છે, તો $\angle AGE$, $\angle GEF$ અને $\angle FGE$ મેળવો.



આકૃતિ 6.31

4. આકૃતિ 6.31માં જો PQ || ST, $\angle PQR = 110°$ અને $\angle RST = 130°$, તો $\angle QRS$ મેળવો.

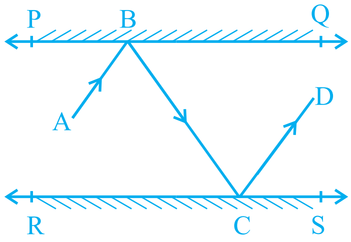
[**સૂચન :** બિંદુ R માંથી પસાર થતી ST ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]



આકૃતિ 6.32

5. આકૃતિ 6.32માં જો AB || CD, $\angle APQ = 50°$ અને $\angle PRD = 127°$ છે તો x અને y મેળવો.

6. આકૃતિ 6.33 માં PQ અને RS બે અરીસા છે. તે બંને એકબીજાને સમાંતર રાખેલા છે. એક આપાતકિરણ AB અરીસા PQ ને B પર અથડાય છે અને પરાવર્તિત કિરણ માર્ગ BC પર ચાલીને અરીસા RS ને C પર અથડાય છે તથા ફરી કિરણ CD પર પરાવર્તિત થઈ જાય છે. સાબિત કરો કે AB || CD છે.



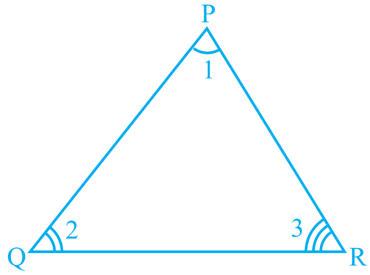
આકૃતિ 6.33

6.7 ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ

અગાઉના ધોરણમાં તમે પ્રવૃત્તિઓ દ્વારા એ શીખી ગયાં છો કે ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. આપણે આ વિધાનને રેખાઓ સંબંધિત પૂર્વધારણાઓ અને પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરી શકીએ.

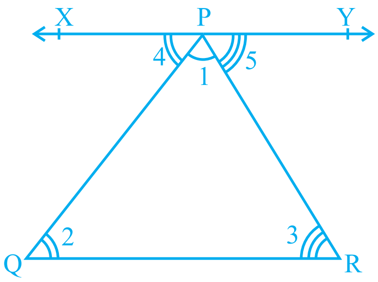
પ્રમેય 6.7 : *ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.*

સાબિતી : ચાલો જોઈએ કે આપણને ઉપરના વિધાનમાં શું આપેલ છે. અર્થાત્ આપણી પરિકલ્પના શું છે અને આપણે શું સાબિત કરવું છે. આપણને એક ત્રિકોણ PQR આપેલ છે તથા ∠ 1, ∠ 2 અને ∠ 3 આ ત્રિકોણના ખૂણા છે. (જુઓ આકૃતિ 6.34.)



આકૃતિ 6.34

આપણે ∠ 1 + ∠ 2 + ∠ 3 = 180° સાબિત કરવું છે. બાજુ QR ને સમાંતર, ત્રિકોણના શિરોબિંદુ P માંથી પસાર થતી એક રેખા XPY દોરો. તે આકૃતિ 6.35 દર્શાવેલ છે. આથી આપણે સમાંતર રેખાઓને સંબંધિત ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી શકીશું.



આકૃતિ 6.35

હવે, XPY એક રેખા છે.

આથી, ∠ 4 + ∠ 1 + ∠ 5 = 180° છે (1)

પરંતુ XPY || QR તથા PQ, PR છેદિકાઓ છે.

આથી, ∠ 4 = ∠ 2 અને ∠ 5 = ∠ 3 (યુગ્મકોણની જોડ)

∠ 4 અને ∠ 5 ની કિંમત (1)માં મૂકતાં,

∠ 2 + ∠ 1 + ∠ 3 = 180°

એટલે કે, ∠ 1 + ∠ 2 + ∠ 3 = 180° ■

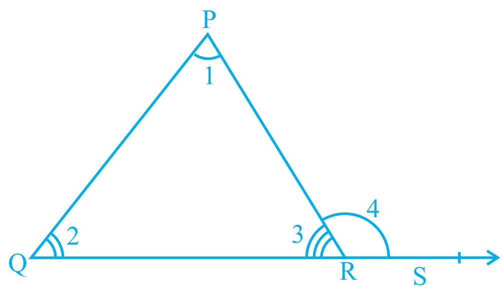
યાદ કરો કે તમે આગળના ધોરણમાં ત્રિકોણના બહિષ્કોણ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. (જુઓ આકૃતિ 6.36.) બાજુ QR ને બિંદુ S સુધી લંબાવેલ છે. ∠ PRS ત્રિકોણ ΔPQR નો એક બહિષ્કોણ છે.

શું ∠ 3 + ∠ 4 =180° છે ? (શા માટે ?) (1)

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે,

∠ 1 + ∠ 2 + ∠ 3 = 180° છે. (શા માટે ?) (2)

(1) અને (2) પરથી, તમે જોઈ શકો છો કે, ∠ 4 =∠ 1 + ∠ 2 છે.



આકૃતિ 6.36

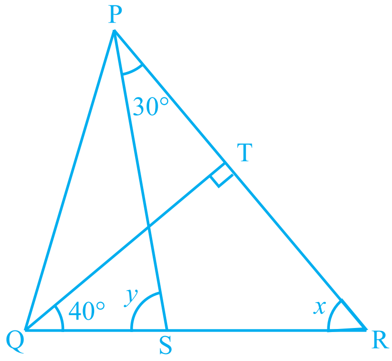
આ પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય છે :

પ્રમેય 6.8 : *જો ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રકારે બનેલ બહિષ્કોણ બંને* ***અંતઃસંમુખકોણ*** *(Interior opposite angles)ના સરવાળાને સમાન થાય છે.*

ઉપરના પ્રમેયથી આ સ્પષ્ટ છે કે કોઈપણ ત્રિકોણનો એક બહિષ્કોણ તેના બંને અંતઃસંમુખકોણ કરતાં મોટો હોય છે.

આવો આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિ 6.37માં જો $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ અને $\angle SPR = 30°$ હોય, તો x અને y મેળવો.



આકૃતિ 6.37

ઉકેલ : Δ TQR માં $90° + 40° + x = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

આથી, $x = 50°$

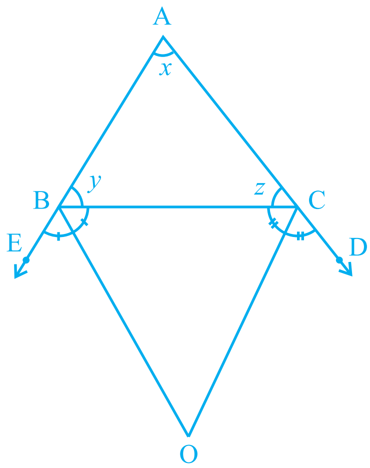
હવે, $y = \angle SPR + x$ (પ્રમેય 6.8)

આથી, $y = 30° + 50°$

$= 80°$

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.38 માં ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે E અને D સુધી લંબાવેલ છે.

જો $\angle CBE$ અને $\angle BCD$ ના દ્વિભાજક BO અને CO અનુક્રમે બિંદુ O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ છે.



આકૃતિ 6.38

ઉકેલ : કિરણ BO એ $\angle CBE$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ (1)

આ જ રીતે, કિરણ CO એ $\angle BCD$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180° - z)$

$= 90° - \frac{z}{2}$ (2)

Δ BOC માં $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ છે. (3)

(1) અને (2) ને (3) માં મૂકતાં આપણને,

$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$ મળે.

$\therefore \angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

$\therefore \angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ (4)

પરંતુ $x + y + z = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

આથી, $y + z = 180° - x$

આ પરથી (4) નું પરિવર્તન નીચે પ્રમાણે થાય.

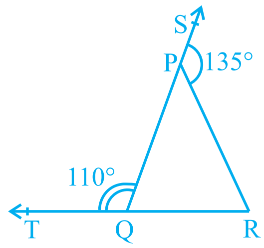
$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

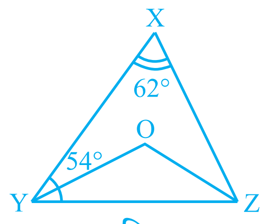
સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.39માં ΔPQR ની બાજુઓ QP અને RQ ને અનુક્રમે બિંદુઓ S અને T સુધી લંબાવેલ છે. જો $\angle SPR = 135°$ હોય અને $\angle PQT = 110°$ હોય, તો $\angle PRQ$ મેળવો.



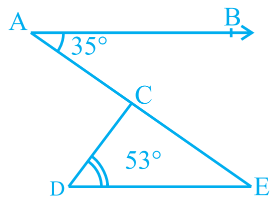
આકૃતિ 6.39

2. આકૃતિ 6.40માં $\angle X = 62°$ અને $\angle XYZ = 54°$ છે. જો ΔXYZ ના $\angle XYZ$ અને $\angle XZY$ ના દ્વિભાજક અનુક્રમે YO અને ZO હોય, તો $\angle OZY$ અને $\angle YOZ$ મેળવો.



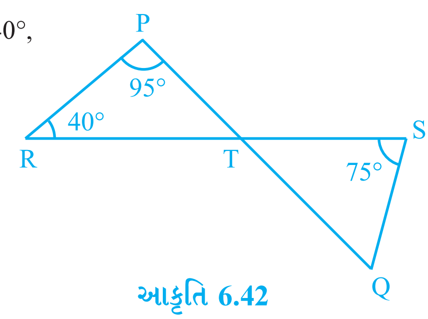
આકૃતિ 6.40

3. આકૃતિ 6.41માં જો $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35°$ અને $\angle CDE = 53°$ હોય, તો $\angle DCE$ મેળવો.



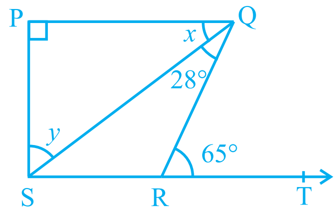
આકૃતિ 6.41

4. આકૃતિ 6.42 માં જો રેખાઓ PQ અને RS બિંદુ T પર એ પ્રકારે છેદે છે કે $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ અને $\angle TSQ = 75°$ છે, તો $\angle SQT$ મેળવો.



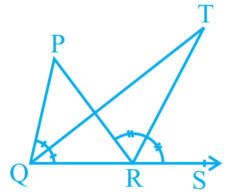
આકૃતિ 6.42

5. આકૃતિ 6.43માં જો $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28°$ અને $\angle QRT = 65°$ છે, તો x અને y શોધો.



આકૃતિ 6.43

6. આકૃતિ 6.44માં ΔPQR ની બાજુ QR ને S સુધી લંબાવેલ છે, જો $\angle PQR$ અને $\angle PRS$ ના દ્વિભાજક બિંદુ T પર મળે તો, સાબિત કરો કે $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$.



આકૃતિ 6.44

6.8 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

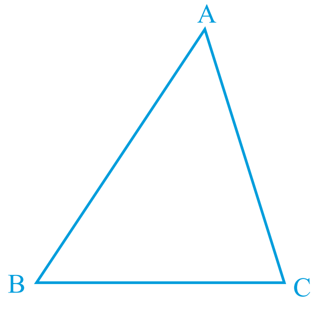
1. જો એક કિરણ એક રેખા પર આવેલ હોય તો તેમનાથી બનતા બંને આસન્નકોણનો સરવાળો 180° થાય છે અને તેનું પ્રતીપ આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે. આ ગુણધર્મને રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા કહે છે.
2. પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.
3. જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે, તો
   (i) અનુકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.
   (ii) અંતઃયુગ્મકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય.
   (iii) છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણની પ્રત્યેક જોડ પૂરક હોય છે.
4. જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે
   (i) અનુકોણની કોઈ એક જોડ સમાન હોય અથવા
   (ii) અંતઃયુગ્મકોણની કોઈ એક જોડ સમાન હોય અથવા
   (iii) છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણની કોઈ એક જોડ પૂરક હોય, તો આ બંને રેખાઓ સમાંતર હોય છે.
5. જે રેખાઓ એક રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.
6. એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય છે.
7. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રકારે બનેલ બહિષ્કોણ તેના બંને અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

પ્રકરણ 7

ત્રિકોણ

7.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉનાં ધોરણોમાં ત્રિકોણ અને તેમના વિવિધ ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. તમે જાણો છો કે ત્રણ પરસ્પર છેદતી રેખાઓથી બનતી બંધ આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે ('Tri' 'ત્રિ' એટલે ત્રણ). ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ, ત્રણ ખૂણાઓ અને ત્રણ શિરોબિંદુઓ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ત્રિકોણ ABC ને Δ ABC તરીકે દર્શાવી શકાય. (જુઓ આકૃતિ 7.1.) Δ ABC ની ત્રણ બાજુઓ AB, BC, CA છે અને તેનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A, B, C છે. તેના ત્રણ ખૂણા $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C છે. પ્રકરણ 6 માં તમે ત્રિકોણોના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો છે. આ પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણોની એકરૂપતા, એકરૂપતાની શરતો, ત્રિકોણના કેટલાક વધુ ગુણધર્મો અને ત્રિકોણમાં અસમતાઓનો વિસ્તૃત અભ્યાસ કરશો. અગાઉના ધોરણોમાં આમાંના મોટા ભાગના ગુણધર્મો તમે ચકાસી ચુક્યા છો. હવે આપણે તેમાંના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કરીશું.



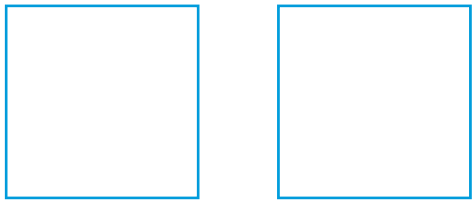
આકૃતિ 7.1

7.2 ત્રિકોણની એકરૂપતા

તમે એવું અવશ્ય જોયું હશે કે તમારા એક જ માપના બે ફોટાની નકલો સમાન છે. તે જ પ્રમાણે સમાન માપની બે બંગડીઓ, એક જ બૅન્ક દ્વારા આપવામાં આવતા ATM કાર્ડ પણ સમાન આકારના હોય છે. તમે યાદ કરી શકો કે એક જ વર્ષમાં બનેલા એક રૂપિયાના સિક્કાઓને એકબીજા પર ગોઠવતાં તે એકબીજા ઉપર બરાબર આવી જાય છે.

તમને યાદ છે કે આવી આકૃતિઓને શું કહેવાય? ખરેખર, આવી આકૃતિઓને એકરૂપ આકૃતિઓ કહેવાય.(એકરૂપ અર્થાત્ બધી રીતે સમાન અથવા જેમનાં માપ અને આકાર બંને સમાન હોય એવી આકૃતિઓ).

હવે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળ કાગળમાંથી કાપો અને એકબીજા પર ગોઠવો. તમે શું અવલોકન કર્યું? તેઓ એકબીજાની ઉપર સંપૂર્ણપણે બંધ બેસી જાય છે. આપણે તેમને એકરૂપ વર્તુળો કહીશું. સમાન બાજુઓ ધરાવતા એક ચોરસ પર બીજો ચોરસ મૂકી(જુઓ આકૃતિ 7.2.) અથવા સમાન બાજુઓવાળા બે સમબાજુ ત્રિકોણને એકબીજા પર મૂકીને તમે જોઈ શકો છો કે આ ચોરસ તથા સમબાજુ ત્રિકોણ એકબીજા સાથે એકરૂપ થશે. આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 7.2

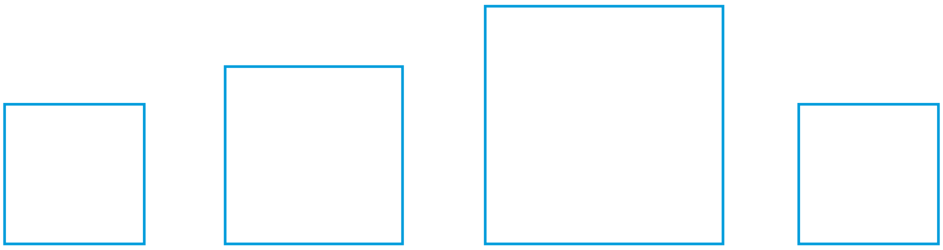
તમને થશે કે આપણે શા માટે એકરૂપતાનો અભ્યાસ કરીએ છીએ? તમે બધાએ ફ્રિજમાં રહેલ બરફની ટ્રે જોઈ હશે. તમે જોઈ શકો છો કે બરફ બનાવતાં ખાનાઓ એકરૂપ છે. આ ટ્રેમાં બરફ જમાવવા માટેનાં બીબાંઓની છાપ પણ એકરૂપ હશે.(બધા જ કદાચ લંબચોરસ, વર્તુળ કે ત્રિકોણાકાર હશે.) આથી જ્યારે પણ સમાન વસ્તુઓનું નિર્માણ કરવાનું હોય ત્યારે તેમનાં બીબાં બનાવતી વખતે એકરૂપતાની સંકલ્પના ઉપયોગમાં લેવાય છે.

ક્યારેક તમારી પેનમાં નવી રીફિલ નાંખવામાં તમને મુશ્કેલી થતી હોય છે. આવું થવાનું કારણ એ છે કે નવી રીફિલ એ મૂળ રીફિલના કદ અને આકારની ન હોય. સ્પષ્ટપણે, જો બે રીફિલ સમાન કે એકરૂપ હોય, તો તે બંધબેસતી આવે જ.

આમ તમે રોજબરોજના જીવનમાં એકરૂપ વસ્તુઓનો ઉપયોગ કરતા હોય તેવાં અનેક ઉદાહરણો છે.

તમે એકરૂપ આકૃતિઓનાં વધુ ઉદાહરણો વિચારી શકો ?

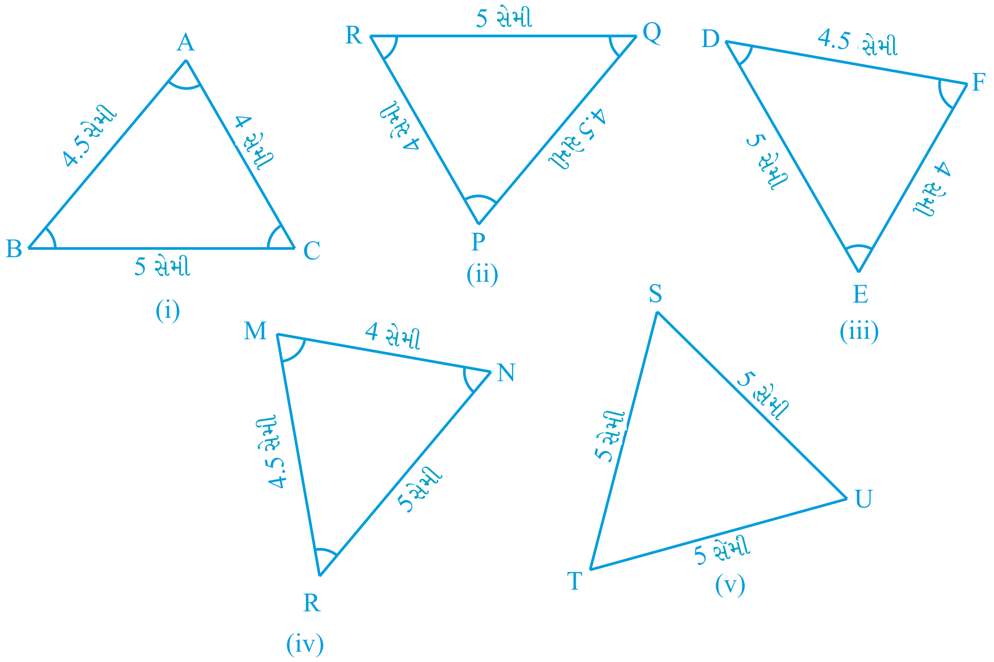
હવે નીચેનામાંથી કઈ આકૃતિઓ 7.3 (i) માં આપેલ ચોરસને એકરૂપ નથી.



આકૃતિ 7.3

આકૃતિ 7.3 (ii) અને (iii) માં દર્શાવેલ મોટા ચોરસો સ્પષ્ટપણે આકૃતિ 7.3 (i) ને એકરૂપ નથી. પરંતુ આકૃતિ 7.3 (iv) વાળો ચોરસ એ આકૃતિ 7.3 (i) વાળા ચોરસને એકરૂપ છે. ચાલો આપણે બે ત્રિકોણની એકરૂપતાની ચર્ચા કરીએ. તમે જાણો જ છો કે જો એક ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને ખૂણાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.

હવે, આકૃતિ 7.4 (i) માં આપેલ ત્રિકોણ પૈકી કયા ત્રિકોણ, ત્રિકોણ ABC ને એકરૂપ છે ?



આકૃતિ 7.4

આકૃતિ 7.4 માં(ii) થી (v) સુધીના દરેક ત્રિકોણ કાપો અને તેને પરિભ્રમણ આપી Δ ABC પર બંધબેસતા કરવા પ્રયત્ન કરો. તમે જોઈ શકશો કે આકૃતિ 7.4 ના ત્રિકોણો (ii), (iii) અને (iv) એ Δ ABC ને એકરૂપ છે, પરંતુ આકૃતિ 7.4 (v) માં રહેલ Δ TSU એ Δ ABC ને એકરૂપ નથી.

જો Δ PQR એ Δ ABC ને એકરૂપ હોય, તો આપણે Δ PQR ≅ Δ ABC લખીએ છીએ.

જ્યારે Δ PQR ≅ Δ ABC હોય ત્યારે Δ PQR ની બાજુઓ એ Δ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓને સમાન રીતે બંધ બેસે અને ખૂણાઓ માટે પણ આમ જ બને.

આ પ્રમાણે PQ એ AB પર, QR એ BC પર અને RP એ CA પર બંધ બેસી જાય. ∠ P એ ∠ A પર, ∠ Q એ ∠ B પર અને ∠ R એ ∠ C પર બંધબેસતા આવી જાય. અહીં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. આ પ્રમાણે P ને સંગત A, Q ને સંગત B, R ને સંગત C લઈ શકાય અને આ પ્રમાણે તેને P ↔ A, Q ↔ B, R ↔ C લખી શકાય.

અહીં આપણે નોંધીએ કે, આ સંગતતા અનુસાર Δ PQR ≅ Δ ABC થાય, પરંતુ ΔQRP ≅ Δ ABC સત્ય નથી.

આ જ પ્રમાણે આકૃતિ7.4 (iii) માટે,

FD ↔ AB, DE ↔ BC, EF ↔ CA

અને F ↔ A, D ↔ B, E ↔ C

માટે, Δ FDE ≅ Δ ABC, પરંતુ Δ DEF ≅ Δ ABC પ્રમાણે લખવું સત્ય નથી.

આકૃતિ 7.4 (iv) ના ત્રિકોણ અને Δ ABC વચ્ચેની સંગતતા જણાવો.

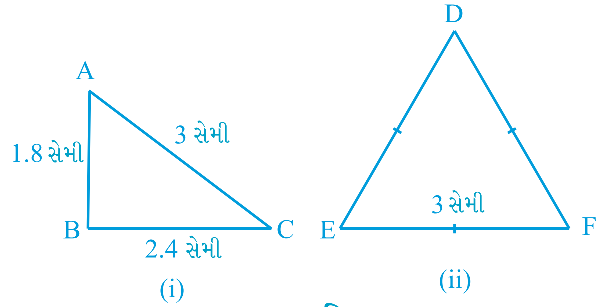
આથી, ત્રિકોણ વચ્ચેની સંગતતાને સંકેતમાં દર્શાવવા માટે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ વચ્ચેની સંગતતા યોગ્ય રીતે દર્શાવવી જરૂરી છે.

જુઓ કે એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો સમાન હોય છે. આને ટૂંકમાં '**CPCT**' (*corresponding parts of congruent triangles*) લખાય છે. અર્થાત્ એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો.

7.3 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો :

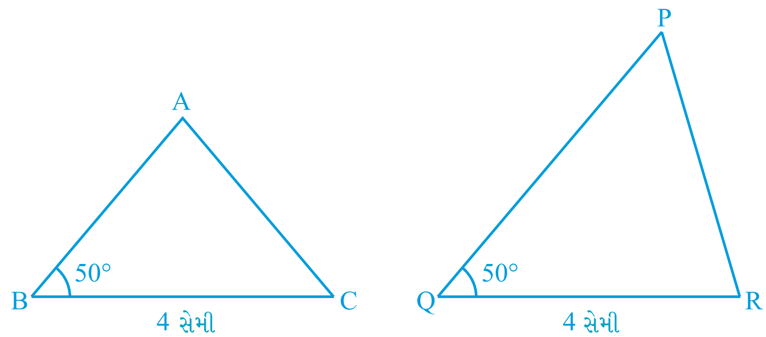
અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતાની ચાર શરતો શીખ્યા છો. ચાલો તેને પુનઃ યાદ કરીએ.

એક બાજુ 3 સેમી હોય તેવા બે ત્રિકોણ દોરો. શું આ ત્રિકોણ એકરૂપ છે ? અવલોકન કરો કે તે એકરૂપ નથી. (જુઓ આકૃતિ 7.5.)



આકૃતિ 7.5

હવે એવા બે ત્રિકોણ દોરો કે જેની એક બાજુ 4 સેમી અને એક ખૂણો 50° હોય. શું તે બંને એકરૂપ થશે ? (જુઓ આકૃતિ 7.6.)



આકૃતિ 7.6

જુઓ કે ત્રિકોણ એકરૂપ નથી.

ત્રિકોણની કેટલીક વધુ જોડીઓ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

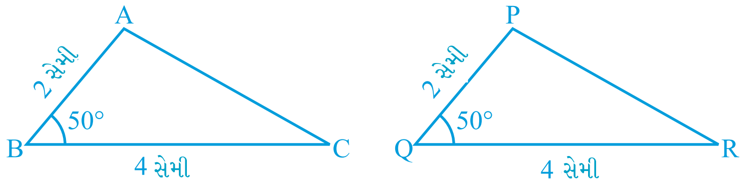
આમ, સમાન બાજુઓની એક જોડ અથવા સમાન બાજુઓની એક જોડ અને સમાન ખૂણાઓની એક જોડ એકરૂપ ત્રિકોણ બને તે માટે પર્યાપ્ત નથી.

સમાન ખૂણાની બાજુઓની બીજી જોડ લઈએ તો આ બીજી જોડ સમાન થશે ?

આકૃતિ 7.7 માં, $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ અને $AB = PQ$ પણ છે. હવે, ΔABC અને ΔPQR ની એકરૂપતા અંગે તમે શું કહેશો ?

અગાઉના વર્ગો પરથી યાદ કરો કે, આવા કિસ્સામાં બે ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. આકૃતિ 7.7 પરથી ΔABC અને ΔPQR નું પરીક્ષણ કરો.

ત્રિકોણની બીજી જોડીઓ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોયું કે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે બે બાજુઓ તથા અંતર્ગત ખૂણા સમાન હોય તે પૂરતું છે ? હા, તે પૂરતું છે.



આકૃતિ 7.7

ત્રિકોણની એકરૂપતાની આ પ્રથમ શરત છે.

પૂર્વધારણા 7.1 (*બાખૂબા એકરૂપતાનો નિયમ*) **:** *જો બે ત્રિકોણ માટે એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થાય.*

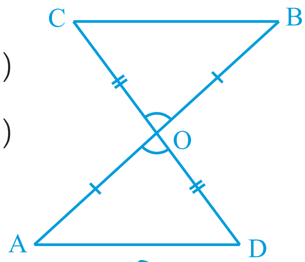
અગાઉનાં જાણીતાં પરિણામો પરથી આ પરિણામ સાબિત ન કરી શકાય અને માટે તે સત્ય છે એમ પૂર્વધારણા તરીકે સ્વીકારવામાં આવેલું છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.)

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 7.8 માં OA = OB અને OD = OC તો દર્શાવો કે,

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC અને (ii) AD || BC.

ઉકેલ : (i) Δ AOD અને Δ BOC માટે તમે જોઈ શકો છો કે,



આકૃતિ 7.8

OA = OB (પક્ષ)

OD = OC (પક્ષ)

વળી $\angle$ AOD અને $\angle$ BOC એ અભિકોણની જોડ બનાવે છે. આથી

$\angle$ AOD = $\angle$ BOC.

આમ, Δ AOD $\cong$ Δ BOC (એકરૂપતાની બાખૂબા શરત પરથી)

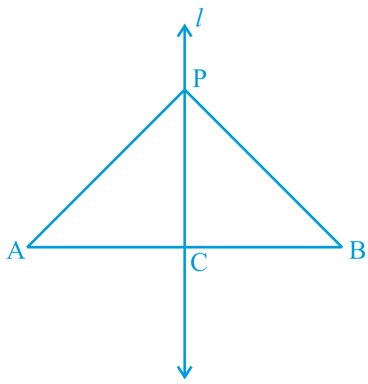
(ii) એકરૂપ ત્રિકોણો AOD અને BOC માં બીજાં અનુરૂપ અંગો પણ સમાન હોય.

આથી, $\angle$ OAD = $\angle$ OBC અને આ બંને ખૂણા રેખાખંડ AD અને BC ની છેદિકા AB ને સંગત યુગ્મકોણની જોડ રચે છે.

માટે, AD || BC.

ઉદાહરણ 2 : l એ રેખાખંડ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. જો બિંદુ P રેખા l પર હોય, તો બતાવો કે P એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલું છે.

ઉકેલ : રેખા $l \perp$ AB અને તે બિંદુ C માંથી પસાર થાય છે અને C એ AB નું મધ્યબિંદુ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.9.)



આકૃતિ 7.9

Δ PCA અને Δ PCB ના સંદર્ભમાં તમારે PA = PB બતાવવું પડે.

આપણી પાસે AC = BC છે. (C એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.)

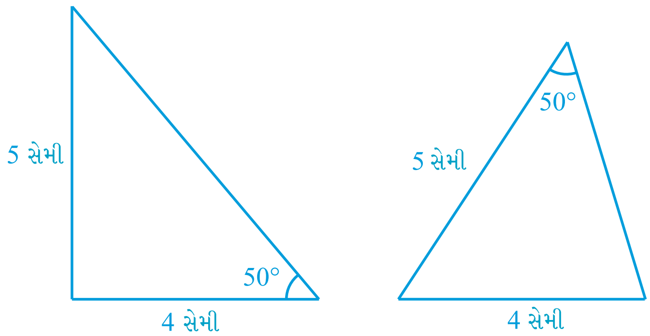
$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (પક્ષ)

$PC = PC$ (સામાન્ય બાજુ)

આથી, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (બાખૂબા શરત)

$\therefore PA = PB$; કારણ કે એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ સમાન છે.

હવે આપણે જેની બાજુઓ 4 સેમી અને 5 સેમી તથા ખૂણાઓ પૈકીનો એક ખૂણો 50° હોય એવા બે ત્રિકોણ રચીએ અને આ ખૂણો સમાન બાજુઓની વચ્ચે (અંતર્ગત ખૂણો) નથી. (જુઓ આકૃતિ 7.10.) આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થશે ?



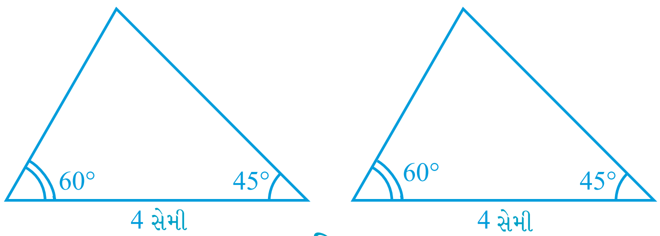
આકૃતિ 7.10

જુઓ કે આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ નથી.

ત્રિકોણની વધુ જોડ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોઈ શકશો કે ત્રિકોણના એકરૂપ થવા માટે સમાન ખૂણાઓ બે સમાન બાજુઓની જોડની અંતર્ગત હોવા ખૂબ જ જરૂરી છે.

આમ, બાખૂબા એકરૂપતાની શરત છે, પરંતુ ખૂબાબા કે બાબાખૂ નહિ.

ફરીથી, જેના ખૂણાઓ 60° અને 45° હોય તેવા બે ત્રિકોણ રચવા પ્રયત્ન કરો અને આ બંને ખૂણાની વચ્ચેની (અંતર્ગત) બાજુની લંબાઈ 4 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 7.11.)



આકૃતિ 7.11

આ બંને ત્રિકોણ કાપો અને એકબીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિહાળો છો ? જુઓ કે એક ત્રિકોણ, બીજા ત્રિકોણ પર સંપૂર્ણપણે બંધ બેસી જાય છે. આમ, આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. આવા વધુ ત્રિકોણની જોડીઓ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

તમે જોઈ શકો છો કે બે સમાન ખૂણાઓ અને અંતર્ગત બાજુ સમાન હોય એ શરત ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત છે.

આ પરિણામ એકરૂપતાની શરત **ખૂણો-બાજુ-ખૂણો** થાય અને તેને **ખૂબાખૂ** શરત તરીકે લખી શકાય. અગાઉના ધોરણમાં તમે આ ગુણધર્મ ચકાસેલ છે. પરંતુ હવે આપણે તેને દર્શાવીશું અને પરિણામ સાબિત કરીશું.

આ પરિણામ આપણે સાબિત કરી શકીશું. આથી તેને પ્રમેય કહેવાય. તે સાબિત કરવા માટે આપણે એકરૂપતાની બાખૂબા પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરીશું.

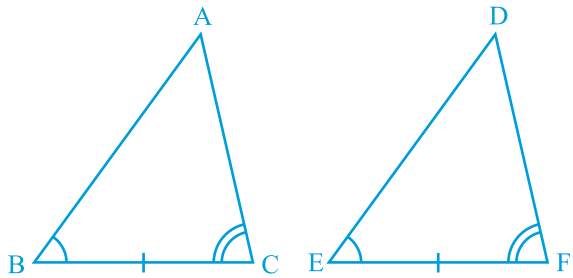
પ્રમેય 7.1 (ખૂબાખૂ) : *જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.*

સાબિતી : આપણને બે ત્રિકોણ ABC અને DEF આપેલ છે. તેમના માટે

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને BC = EF

આપણે $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ સાબિત કરવાનું છે.

આ બે ત્રિકોણની એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે ત્રણ વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે :



આકૃતિ 7.12

વિકલ્પ (i) : ધારો કે AB = DE (જુઓ આકૃતિ 7.12.)

હવે તમને શું જોવા મળે છે ? તમે કદાચ જોશો કે,

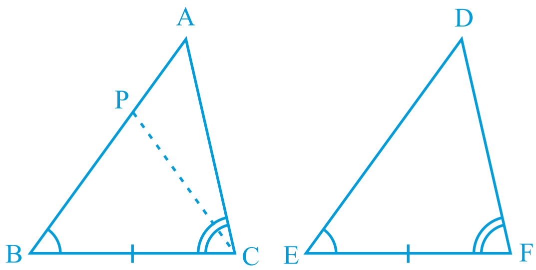
AB = DE (ધારણા કરેલ છે)

$\angle B = \angle E$ (પક્ષ)

BC = EF (પક્ષ)

માટે, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (બાખૂબા પૂર્વધારણા પરથી)

વિકલ્પ (ii) : ધારો કે AB > DE છે. આથી આપણે AB પર P બિંદુ એવું લઈએ જેથી PB = DE થાય. હવે ΔPBC તથા ΔDEF નો વિચાર કરીએ (જુઓ આકૃતિ 7.13.)



આકૃતિ 7.13

હવે ΔPBC તથા ΔDEF માટે જુઓ,

PB = DE (આપણે મેળવેલ છે)

$\angle B = \angle E$ (પક્ષ)

BC = EF (પક્ષ)

આથી આપણે એકરૂપતાની બાખૂબા પૂર્વધારણા પરથી કહી શકીએ કે, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$. ત્રિકોણ એકરૂપ હોવાથી તેના અનુરૂપ અંગો સમાન થશે.

આથી, $\angle PCB = \angle DFE$

પરંતુ, આપણને આપેલ છે કે, $\angle ACB = \angle DFE$

આથી, $\angle ACB = \angle PCB$

શું આ શક્ય છે ?

આ માત્ર ત્યારે જ શક્ય છે જ્યારે P એ A પર આવેલ હોય.

અથવા, $BA = ED$

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

વિકલ્પ (iii) : જો $AB < DE$ તો આપણે DE પર M બિંદુ એવું લઈએ કે $ME = AB$ અને વિકલ્પ (ii)માં દર્શાવેલ દલીલોનું પુનરાવર્તન કરતાં, આપણે તારણ પર આવી શકીએ કે, $AB = DE$ અને આથી, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. ■

હવે ધારો કે બે ત્રિકોણની સંગતતા માટે ખૂણાની બે જોડ અને બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય પરંતુ આ સમાન બાજુઓ એ સમાન ખૂણાઓની બે જોડની અંતર્ગત ન હોય તો શું આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય ? તમે જોઈ શકશો કે તે બંને એકરૂપ છે. તમે તેનું કારણ શોધી શકો, શા માટે ?

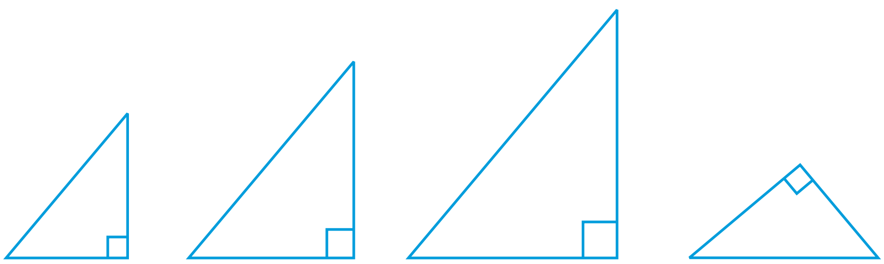
તમે જાણો છો કે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો $180°$ થાય. આથી જો ખૂણાની બે જોડ સમાન હોય, તો ત્રીજી જોડ પણ સમાન જ હોય. ($180°$– બે સમાન ખૂણાના માપનો સરવાળો).

આથી, જો ખૂણાની બે જોડ અને અનુરૂપ બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય. આને આપણે **ખૂખૂબા** એકરૂપતાની શરત કહી શકીએ.

હવે ચાલો નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિઓ કરીએ :

જેના ખૂણા $40°$, $50°$ અને $90°$ માપવાળા હોય તેવા ત્રિકોણ દોરો. આવા કેટલા ત્રિકોણ દોરી શકાય ?

હકીકતમાં તો જુદી જુદી લંબાઈની બાજુઓવાળા તમે ઘણાબધા ત્રિકોણ દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 7.14.)



આકૃતિ 7.14

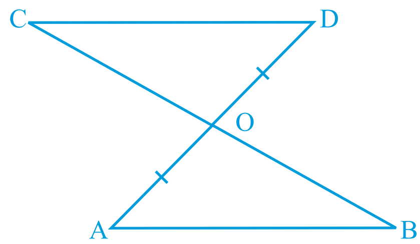
જુઓ, આ ત્રિકોણ એકબીજાને એકરૂપ હોય અથવા ન પણ હોય.

આમ, ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે માત્ર ત્રણ ખૂણાઓ સમાન હોય તે પૂરતું નથી. માટે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે ત્રણ સમાન અંગો પૈકી એક અંગ બાજુ હોવી જ જોઈએ.

ચાલો કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : રેખાખંડ AB એ બીજા રેખાખંડ CD ને સમાંતર છે. O એ AD નું મધ્યબિંદુ છે.(જુઓ આકૃતિ 7.15) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O એ BC નું પણ મધ્યબિંદુ થાય.



આકૃતિ 7.15

ઉકેલ : (i) Δ AOB અને Δ DOC માટે,

$\angle ABO = \angle DCO$

(AB || CD ની છેદિકા BC થી બનતા યુગ્મકોણો)

$\angle AOB = \angle DOC$ (અભિકોણો)

$OA = OD$ (પક્ષ)

આથી, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ખૂખૂબા શરત)

(ii) $OB = OC$ (CPCT, એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

આથી, O એ BC નું પણ મધ્યબિંદુ છે.

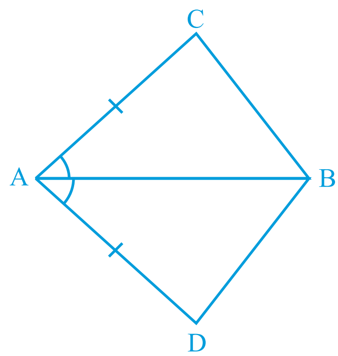
સ્વાધ્યાય 7.1

1. ચતુષ્કોણ ACBD માં,

   AC = AD અને AB એ $\angle$ A નો દ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.16.)

   સાબિત કરો કે $\Delta ABC \cong \Delta ABD$,

   BC અને BD વિશે તમે શું કહી શકો ?



આકૃતિ 7.16

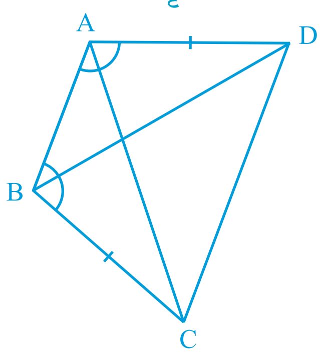
2. જેમાં AD = BC અને $\angle DAB = \angle CBA$ હોય તેવો ચતુષ્કોણ ABCD છે.

   (જુઓ આકૃતિ 7.17.) સાબિત કરો કે,

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

   (ii) BD = AC

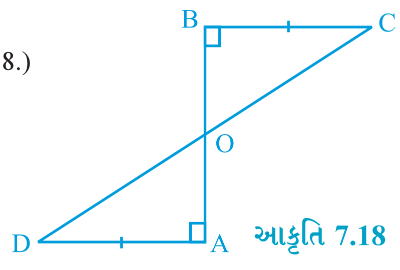
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$.



આકૃતિ 7.17

3. AD અને BC એ રેખાખંડ AB પરના સમાન લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.18.)

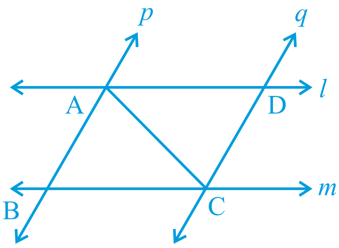
   સાબિત કરો કે CD એ AB ને દુભાગે છે.



આકૃતિ 7.18

4. l અને m બે સમાંતર રેખાઓ છે. બીજી બે સમાંતર રેખાઓની જોડ p અને q ની રેખાઓ તેમને છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.19.)

સાબિત કરો કે $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

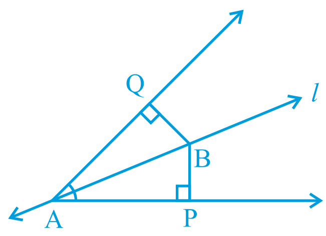


આકૃતિ 7.19

5. કિરણ l એ $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે અને B એ રેખા l પરનું કોઈ બિંદુ છે. BP અને BQ એ B માંથી $\angle A$ ની બાજુઓ પરના લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.20.) સાબિત કરો કે,

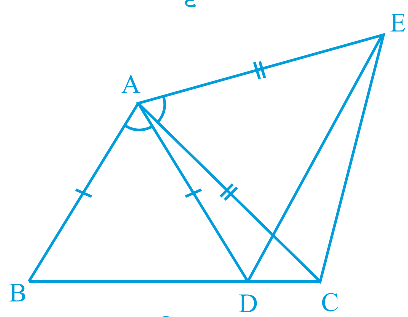
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ અથવા B એ $\angle A$ ની બાજુઓથી સમાન અંતરે આવેલ છે.



આકૃતિ 7.20

6. આકૃતિ 7.21 માં $AC = AE$, $AB = AD$ અને $\angle BAD = \angle EAC$ તો સાબિત કરો કે, $BC = DE$.



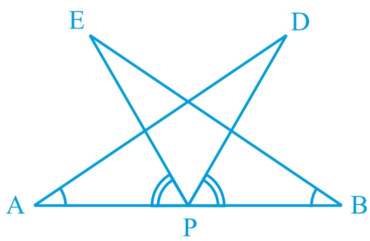
આકૃતિ 7.21

7. AB એક રેખાખંડ છે અને P તેનું મધ્યબિંદુ છે અને જેથી $\angle BAD = \angle ABE$ અને $\angle EPA = \angle DPB$ થાય તેવાં બિંદુઓ D તથા E રેખા AB ની એક બાજુએ આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.22.)

સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$



આકૃતિ 7.22

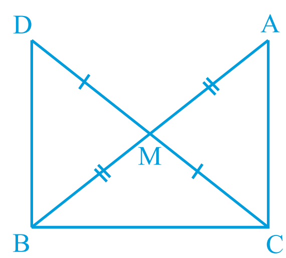
8. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. M એ કર્ણ AB નું મધ્યબિંદુ છે. $DM = CM$ થાય તે રીતે C ને M સાથે જોડી D સુધી લંબાવો. બિંદુઓ D અને B જોડો. (જુઓ આકૃતિ 7.23.) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ કાટકોણ છે.

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

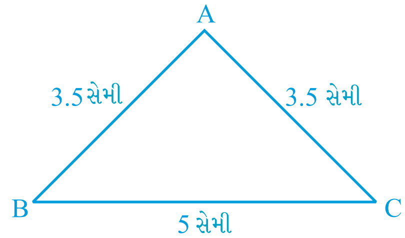
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



આકૃતિ 7.23

7.4 ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મો

ઉપરના વિભાગમાં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતાની બે શરતોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે જેની બે બાજુઓ સમાન હોય તેવા ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે આપણે આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 7.24

નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિ કરો :

જેની બે બાજુઓ સમાન હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરો. ધારો કે સમાન લંબાઈ 3.5 સેમી છે અને ત્રીજી બાજુ 5 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 7.24.) આવી રચનાઓ તમે અગાઉના ધોરણમાં કરી છે. આવા ત્રિકોણને શું કહેવાય તે તમને યાદ છે? જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ સમાન હોય તેને ***સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ*** *(Isosceles triangle)* કહે છે.

આકૃતિ 7.24 માં AB = AC છે. આથી Δ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

હવે, ∠ B અને ∠ C માપો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

જુદા જુદા માપવાળી બાજુઓ વાળા બીજા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

તમે જોશો કે, આવા દરેક ત્રિકોણમાં સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા સમાન છે.

આ ખૂબ જ અગત્યનું અને કોઈ પણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ માટે ખરેખર સત્ય હોય તેવું પરિણામ છે. તેમને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય :

પ્રમેય 7.2 : *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.*

આ પરિણામ અનેક રીતે સાબિત કરી શકાય. એમાંની એક સાબિતી અહીં આપેલ છે.

સાબિતી : આપેલ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે અને આપણે ∠ B = ∠ C સાબિત કરવાનું છે.

∠ A નો દ્વિભાજક દોરો. ધારો કે તે BCને D બિંદુમાં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.25.)

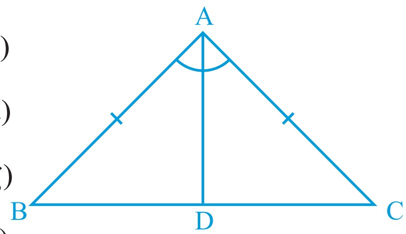
Δ BAD અને Δ CAD માં,

AB = AC (પક્ષ)

∠ BAD = ∠ CAD (રચના દ્વારા)

AD = AD (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ BAD ≅ Δ CAD (બાખૂબા શરત પ્રમાણે)



આકૃતિ 7.25

આથી, એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ હોવાથી, ∠ ABD = ∠ ACD,

∴ ∠ B = ∠ C ■

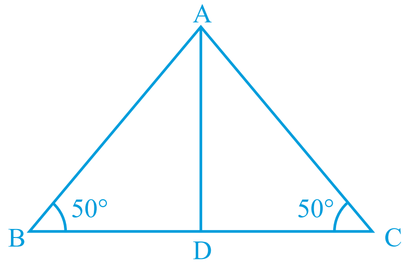
શું આનું પ્રતીપ સાચું છે ? તે આ પ્રમાણે છે.

જો કોઈ ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ સમાન હોય તો શું આપણે નિર્ણય કરી શકીએ કે તે ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ પણ સમાન છે ?

નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિ કરો :

કોઈ પણ લંબાઈની બાજુ BC ધરાવતા તથા $\angle B = \angle C = 50^\circ$ હોય તેવા Δ ABC ની રચના કરો. $\angle A$ નો BC ને D માં છેદતો દ્વિભાજક રચો. (જુઓ આકૃતિ 7.26.)

આ ત્રિકોણને કાગળના ટુકડા પરથી કાપો અને AD થી એવી રીતે વાળો કે જેથી શિરોબિંદુ C, શિરોબિંદુ B પર આવે.



આકૃતિ 7.26

તમે બાજુઓ AC અને AB માટે શું કહેશો ?

જુઓ કે AC અને AB સંપૂર્ણપણે એકબીજા પર બંધ બેસે છે.

આથી, AC = AB

વધુ કેટલાક ત્રિકોણ વડે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

દરેક વખતે તમે જોઈ શકશો કે સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન છે.

આથી, આપણે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ.

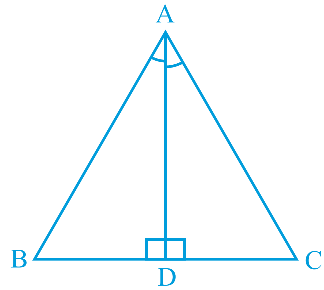
પ્રમેય 7.3 : *ત્રિકોણના સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*

આ પ્રમેય 7.2 નો પ્રતીપ છે.

આ પ્રમેયને તમે ખૂબાખૂ એકરૂપતાની શરત દ્વારા સાબિત કરી શકો.

ચાલો આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 4 : Δ ABC માં, $\angle A$ નો દ્વિભાજક AD એ BC ને લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.27.) સાબિત કરો કે AB = AC અને Δ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.27

ઉકેલ : Δ ABD અને Δ ACD માં,

$\angle BAD = \angle CAD$ (પક્ષ)

AD = AD (સામાન્ય બાજુ)

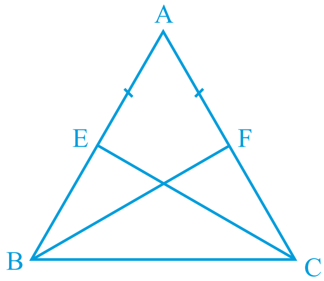
$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (પક્ષ)

આથી, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ખૂબાખૂ શરત)

આમ, AB = AC (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

Δ ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 5 : Δ ABC ની સમાન બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 7.28.) સાબિત કરો કે BF = CE.



આકૃતિ 7.28

ઉકેલ : Δ ABF અને Δ ACE માં,

AB = AC (પક્ષ)

$\angle A = \angle A$ (સામાન્ય ખૂણો)

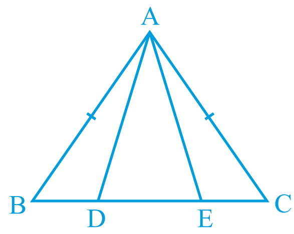
AF = AE (સમાન બાજુઓના અર્ધભાગ)

આથી, Δ ABF ≅ Δ ACE (બાખૂબા શરત)

માટે, BF = CE (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

ઉદાહરણ 6 : સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે, BE = CD થાય તેવાં બિંદુઓ D અને E એ BC પર છે. (જુઓ આકૃતિ 7.29.) તો સાબિત કરો કે AD = AE.

ઉકેલ : Δ ABD અને Δ ACE માં,



આકૃતિ 7.29

AB = AC (પક્ષ) (1)

∠ B = ∠ C (સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા) (2)

વળી, BE = CD

માટે, BE – DE = CD – DE

આથી, BD = CE (3)

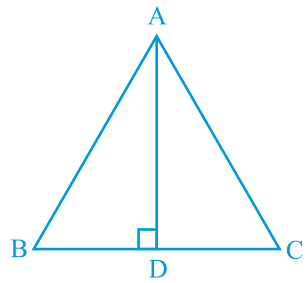
તેથી, Δ ABD ≅ Δ ACE (પરિણામ (1), (2), (3) અને બાખૂબા શરત પરથી)

આ પરથી AD = AE (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

સ્વાધ્યાય 7.2

1. જેમાં AB=AC હોય તેવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં ∠ B અને ∠ C ના દ્વિભાજકો એકબીજાને O માં છેદે છે. A અને O ને જોડો. સાબિત કરો કે,

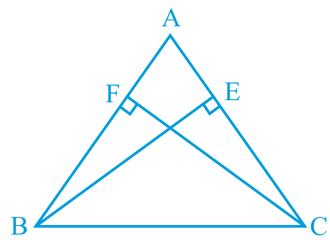
   (i) OB = OC (ii) AO એ ∠ A નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 7.30

2. Δ ABC માં AD એ BC નો લંબદ્વિભાજક છે (જુઓ આકૃતિ 7.30). સાબિત કરો કે Δ ABC કે જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

3. Δ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. BE અને CF એ અનુક્રમે સમાન બાજુઓ AC અને AB પર વેધ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.31.) સાબિત કરો કે આ વેધ સમાન છે.

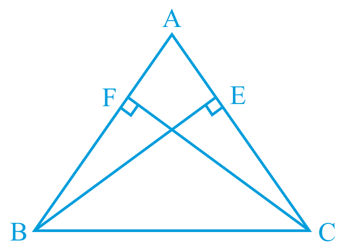


આકૃતિ 7.31

4. Δ ABC ની બાજુઓ AC અને AB પરના બે વેધ BE અને CF સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ 7.32.) સાબિત કરો કે,

   (i) Δ ABE ≅ Δ ACF

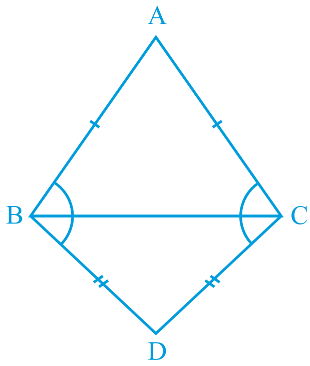
   (ii) AB = AC, અર્થાત્ ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.32

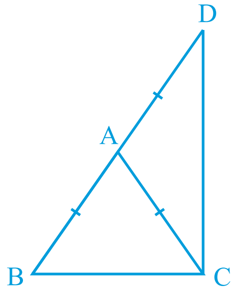
5. ABC અને DBC એ સમાન પાયા BC પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.33).

સાબિત કરો કે $\angle ABD = \angle ACD$.



આકૃતિ 7.33

6. જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ Δ ABC છે. AD=AB થાય તેવું બિંદુ D એ BA પર લો (જુઓ આકૃતિ 7.34.) સાબિત કરો કે $\angle$ BCD કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 7.34

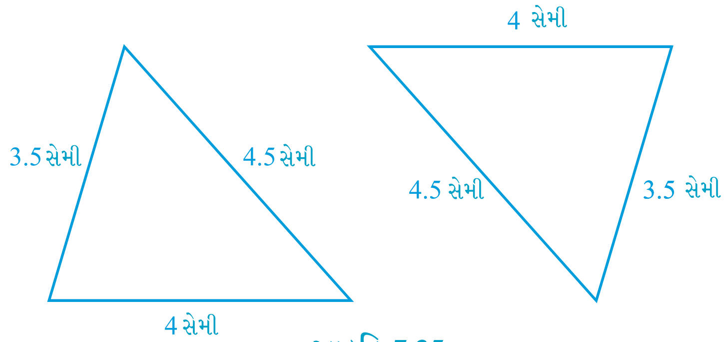
7. જેમાં $\angle A = 90°$ અને AB = AC હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC છે, તો $\angle$ B અને $\angle$ C શોધો.

8. બતાવો કે સમબાજુ ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ 60° હોય.

7.5 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની કેટલીક વધુ શરતો

આ પ્રકરણમાં અગાઉ તમે એવું જોયું કે કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાને સમાન હોય તે બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત નથી. તમને આશ્ચર્ય થશે કે તમે આગળના ધોરણમાં ચકાસ્યું છે કે આ ખરેખર સત્ય છે. કોઈ એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત છે.

તમે આગળના ધોરણોમાં ચકાસ્યું છે કે આ પરિણામ સત્ય છે.



આકૃતિ 7.35

ખાત્રી કરવા માટે 4 સેમી, 3.5 સેમી અને 4.5 સેમી બાજુઓવાળા બે ત્રિકોણની રચના કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.35.) આ ત્રિકોણને કાપી એકબીજા પર મૂકો. તમે શું અવલોકન કરો છો ? બંને ત્રિકોણ એકબીજા પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસતા આવે છે. આથી જો સમાન બાજુઓ એકબીજા પર મૂકવામાં આવે તો આ ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

બીજા વધુ ત્રિકોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. આમ આપણે એકરૂપતા માટેનો એક બીજો નિયમ મેળવી શકીએ.

પ્રમેય 7.4 (*બાબાબા એકરૂપતાની શરત*) : *જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય.*

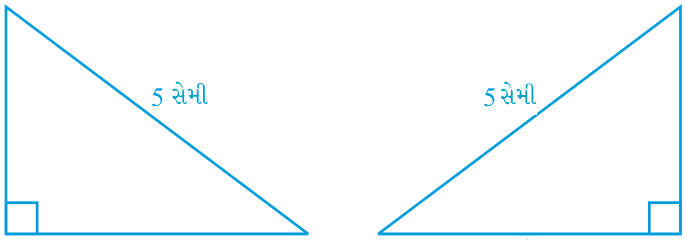
આ પ્રમેય યોગ્ય રચનાની મદદથી સાબિત કરી શકાય :

તમે એકરૂપતા માટેની બાખૂબા શરતમાં જોયું કે બે સમાન અનુરૂપ બાજુઓના અંતર્ગત ખૂણાઓ સમાન હોવા જોઈએ. જો તેમ ન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ ન પણ થાય.

આ પ્રવૃત્તિ કરો :

જેમાં કર્ણનું માપ 5 સેમી અને એકબાજુનું માપ 4 સેમી હોય એવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ રચો.

(જુઓ આકૃતિ 7.36.)



આકૃતિ 7.36

બંને ત્રિકોણને કાપી સમાન બાજુઓ એકબીજા પર રહે તેમ ગોઠવો. જરૂર પડે તો ત્રિકોણનું પરિભ્રમણ કરો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

બંને ત્રિકોણ એકબીજા પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસે છે. આથી તેઓ એકરૂપ છે. બીજા કાટકોણ ત્રિકોણની જોડો લઇ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

તમે જોઈ શકશો કે જો બાજુની એક જોડ તથા કર્ણનાં માપ સમાન હોય, તો બે કાટકોણ ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. તમે અગાઉના ધોરણમાં આ બાબત ચકાસી છે.

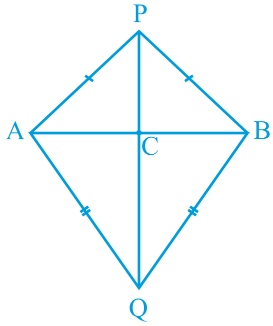
અહીં નોંધો કે આ કિસ્સામાં કાટખૂણા એ અંતર્ગત ખૂણા નથી. આથી તમે એકરૂપતાની નીચે દર્શાવેલ શરત પર આવશો.

પ્રમેય 7.5 (*કાકબા એકરૂપતાની શરત*) : *જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.*

નોંધો કે કાકબા એટલે કાટખૂણો - કર્ણ - બાજુને માટે વપરાય છે.

ચાલો, હવે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 7 : AB રેખાખંડ છે. P અને Q, AB ની એક-બીજાથી વિરૂદ્ધ બાજુએ આવેલ બિંદુઓ છે તથા બંને બિંદુઓ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 7.37.) સાબિત કરો કે રેખા PQ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 7.37

ઉકેલ : તમને PA = PB અને QA = QB આપેલ છે. (પક્ષ)

અને તમારે $PQ \perp AB$ તથા PQ એ AB ને દુભાગે છે તે સાબિત કરવાનું છે.

ધારો કે PQ એ AB ને C માં છેદે છે.

આ આકૃતિમાં તમે બે એકરૂપ ત્રિકોણનો વિચાર કરી શકો છો ?

આપણે Δ PAQ અને Δ PBQ નો વિચાર કરતાં, આ ત્રિકોણોમાં,

AP = BP (પક્ષ)

AQ = BQ (પક્ષ)

PQ = PQ (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ PAQ $\cong$ Δ PBQ (બાબાબા શરત)

માટે, $\angle$ APQ = $\angle$ BPQ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા)

હવે આપણે, Δ PAC અને Δ PBC માટે વિચારીએ.

તમારી પાસે : AP = BP (પક્ષ)

$\angle$ APC = $\angle$ BPC (ઉપર આપણે $\angle$ APQ = $\angle$ BPQ સાબિત કર્યું)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ PAC $\cong$ Δ PBC (બાખૂબા શરત)

માટે, AC = BC (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ) (1)

અને $\angle$ ACP = $\angle$ BCP (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા)

પરંતુ, $\angle$ ACP + $\angle$ BCP = 180° (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી, 2$\angle$ ACP = 180°

અથવા, $\angle$ ACP = 90° (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી સરળતાથી કહી શકાય કે PQ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે.

[અહીં નોંધો કે Δ PAQ અને Δ PBQ, એકરૂપ સાબિત કર્યા સિવાય તમે Δ PAC $\cong$ Δ PBC દર્શાવી શકશો નહીં.

AP = BP (પક્ષ)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

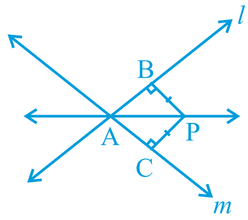
અને $\angle$ PAC = $\angle$ PBC (Δ APB ની સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ)

હોવા છતાં Δ PAC $\cong$ Δ PBC દર્શાવી શકશો નહિ. કારણ કે આ પરિણામ બાબાખૂ શરત દર્શાવે છે. જે હંમેશાં સાચું કે માન્ય નથી. વળી અહીં, સમાન બાજુઓની જોડની વચ્ચે અંતર્ગત ખૂણા સમાન નથી.]

ચાલો આપણે વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8 : પરસ્પર A બિંદુએ છેદતી બે રેખાઓ l અને m થી સમાન અંતરે બિંદુ P આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.38.) સાબિત કરો કે રેખા AP તેમની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

ઉકેલ : તમને આપેલ છે કે રેખાઓ l અને m એકબીજાને A બિંદુએ છેદે છે.



આકૃતિ 7.38

PB = PC આપેલ છે.

વળી $PB \perp l$, $PC \perp m$.

તમારે $\angle PAB = \angle PAC$ સાબિત કરવાનું છે.

ચાલો Δ PAB અને Δ PAC વિશે વિચારીએ.

આ બંને ત્રિકોણમાં, PB = PC (પક્ષ)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (પક્ષ)

PA = PA (સામાન્ય બાજુ)

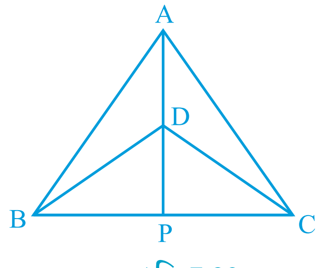
આથી, $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (કાકબા શરત)

આથી, $\angle PAB = \angle PAC$ (એકરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

આપણે નોંધીએ કે આ પરિણામ સ્વાધ્યાય 7.1 ના દાખલા નં. 5 નું પ્રતીપ છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. Δ ABC અને Δ DBC સમાન પાયા BC પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને D એ BC ની એક જ બાજુએ આવેલ છે (જુઓ આકૃતિ 7.39.) જો AD ને લંબાવતાં, તે BC ને P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

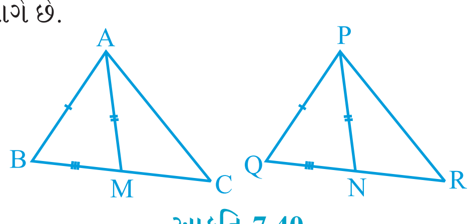
(iii) AP એ $\angle A$ તથા $\angle D$ ને દુભાગે છે.

(iv) AP એ BC નો લંબદ્વિભાજક છે.

2. જેમાં AB = AC હોય તેવા Δ ABCનો વેધ AD છે. તો સાબિત કરો કે,

(i) AD એ BC ને દુભાગે છે. (ii) AD એ $\angle A$ ને દુભાગે છે.

3. Δ ABC ની બે બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AM એ Δ PQR ની અનુરૂપ બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PN ને સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ 7.40.) તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

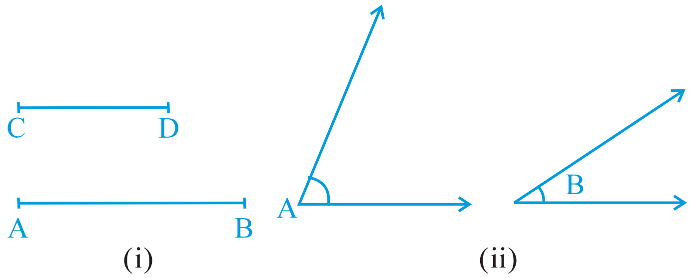
4. ત્રિકોણ ABC માં BE અને CF બે સમાન વેધ છે, તો એકરૂપતા માટેની કાકબાની શરતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC છે. AP ⊥ BC દોરી ∠ B = ∠ C દર્શાવો.

7.6 ત્રિકોણમાં અસમતાઓ

અત્યાર સુધી તમે ત્રિકોણ કે ત્રિકોણોમાં બાજુઓ અને ખૂણાઓની સમાનતાનો અભ્યાસ કર્યો. કેટલીક વખત આપણે અસમાન વસ્તુઓના સંપર્કમાં આવીએ છીએ ત્યારે તેમની તુલનાની જરૂર પડે છે.

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 7.41 (i) માં રેખાખંડ AB ની લંબાઈ રેખાખંડ CD ની લંબાઈની તુલનામાં વધારે છે અને આકૃતિ 7.41 (ii) માં ∠ A એ ∠ B કરતાં મોટો છે.



આકૃતિ 7.41

ચાલો આપણે ચકાસીએ કે ત્રિકોણમાં અસમાન બાજુઓ અને અસમાન ખૂણાઓ વચ્ચે કંઈ સંબંધ છે કે નહિ. આ માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ : ડ્રૉઈંગ બોર્ડ પર બે ટાંકણી B અને C લગાવો અને તેને ત્રિકોણની બાજુ BC દર્શાવવા માટે દોરી સાથે બાંધો.

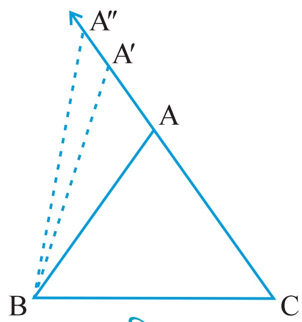
C સાથે બીજી દોરીનો એક છેડો બાંધી તેના બીજા છેડે પેન્સિલ બાંધો. પેન્સિલ વડે બિંદુ A દર્શાવી Δ ABC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 7.42) હવે, CA પર A થી આગળ પેન્સિલ ખસેડી બીજું બિંદુ A′ દર્શાવો. (A ની નવી સ્થિતિ)

આથી, A′C > AC (બાજુઓને સરખાવતા)

A′ ને B સાથે જોડો અને ત્રિકોણ A′BC પૂર્ણ કરો. તમે ∠ A′BC અને ∠ ABC માટે શું કહેશો ?

બંનેની તુલના કરો તમે શું અવલોકન કર્યું ?

સ્પષ્ટપણે, ∠ A′BC > ∠ ABC



આકૃતિ 7.42

CA (લંબાવતા) પર વધુ બિંદુઓ લેતા જાઓ અને BC બાજુ અને મેળવેલા બિંદુથી ત્રિકોણો બનાવતા જાઓ.

તમે જોઈ શકશો કે AC ની લંબાઈ વધારતા (A ની જુદી જુદી સ્થિતિ લેતાં), તેની સામેનો ∠ B પણ મોટો થતો જશે.

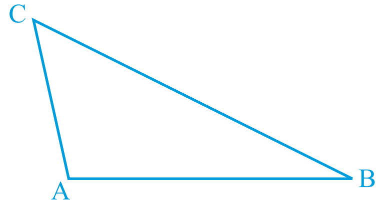
ચાલો હવે, આપણે બીજી પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ : એક વિષમબાજુ ત્રિકોણ (જેની બધી જ બાજુઓની લંબાઈ અલગ અલગ હોય એવો ત્રિકોણ) રચો. બાજુઓની લંબાઈ માપો.

હવે ખૂણાઓ પણ માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

આકૃતિ 7.43 માં દર્શાવેલ Δ ABC માં BC એ સૌથી મોટી અને AC એ સૌથી નાની બાજુ છે.

વળી, ∠ A એ સૌથી મોટો અને ∠ B એ સૌથી નાનો ખૂણો છે.



આકૃતિ 7.43

બીજા કેટલાક ત્રિકોણ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો :

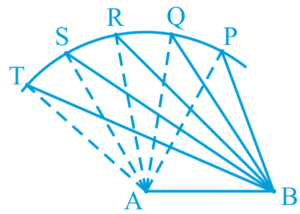
ત્રિકોણની અસમતાના એક અગત્યના પરિણામ પર આપણે આવ્યા. તેને નીચે પ્રમેયના સ્વરૂપમાં દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 7.6 : જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ અસમાન હોય તો, મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો મોટો હોય.

તમે આ પ્રમેયને આકૃતિ 7.43 માં BC પર CA = CP થાય તેવું બિંદુ P લઈ સાબિત કરી શકો.

ચાલો આપણે બીજી પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ : રેખાખંડ AB દોરો. હવે A ને કેન્દ્ર લઈ યોગ્ય ત્રિજ્યા લઈ ચાપ દોરો અને તેના પર વિવિધ બિંદુઓ P, Q, R, S, T મેળવો. આ દરેક બિંદુને A અને B સાથે જોડો (જુઓ આકૃતિ 7.44.) અવલોકન કરો કે આપણે બિંદુ P થી T તરફ જતાં ∠ A એ મોટો બનતો જાય છે. આ ખૂણાની સામેની બાજુ સાથે શું થાય છે ? અવલોકન કરો કે તે બાજુની લંબાઈ પણ વધતી જાય છે.

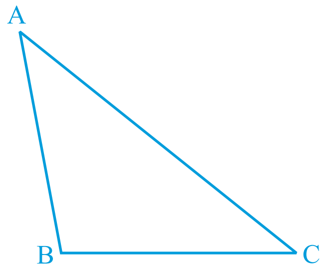


આકૃતિ 7.44

∠ TAB > ∠ SAB > ∠ RAB > ∠ QAB > ∠ PAB અને TB > SB > RB > QB > PB.

હવે જેના બધા જ ખૂણાઓ એકબીજાથી અસમાન હોય તેવો કોઈ ત્રિકોણ દોરો. આ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈઓ માપો. (જુઓ આકૃતિ 7.45.)

અવલોકન કરો કે સૌથી મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી છે. આકૃતિ 7.45 માં, ∠ B એ સૌથી મોટો ખૂણો છે અને AC સૌથી મોટી બાજુ છે.



આકૃતિ 7.45

બીજા કેટલાક ત્રિકોણો લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. આપણે જોઈ શકીએ કે પ્રમેય 7.6 નું પ્રતીપ પણ સાચું છે. આ રીતે આપણે નીચેનું પ્રમેય મેળવી શકીએ :

પ્રમેય 7.7 : કોઈ પણ ત્રિકોણમાં સૌથી મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે.

આ પ્રમેય અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરી શકાય.

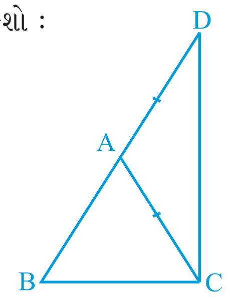
હવે ત્રિકોણ ABC લો અને તેમાં AB + BC, BC + AC અને AC + AB શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

તમે જોઈ શકશો કે AB + BC > AC,

BC + AC > AB અને AC + AB > BC.

બીજા ત્રિકોણો લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો અને તેના પરથી તમે નીચેનું પ્રમેય મેળવી શકશો :

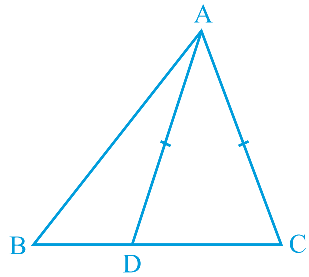
પ્રમેય 7.8 : *ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો તેની ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.*



આકૃતિ 7.46

આકૃતિ 7.46 માં તમે જોઈ શકો છો કે Δ ABC ની બાજુ BA પર AD = AC થાય તેવું બિંદુ D મેળવેલ છે. તમે ∠ BCD > ∠ BDC અને BA + AC > BC બતાવી શકશો ? શું તમે ઉપરના પ્રમેયની સાબિતી સુધી પહોંચ્યા છો ? ચાલો આ પરિણામ આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : Δ ABC ની બાજુ BC પર AD = AC થાય તેવું બિંદુ D છે (જુઓ આકૃતિ 7.47.) બતાવો કે AB > AD.



આકૃતિ 7.47

ઉકેલ : Δ DAC માં,

AD = AC (પક્ષ)

આથી, ∠ ADC = ∠ ACD (સમાન બાજુની સામેના ખૂણા)

હવે, ∠ ADC એ Δ ABD નો બહિષ્કોણ છે.

આથી ∠ ADC > ∠ ABD

∴ ∠ ACD > ∠ ABD

∴ ∠ ACB > ∠ ABC

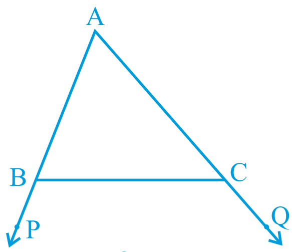
∴ AB > AC (Δ ABC માં મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ)

∴ AB > AD (AD = AC)

સ્વાધ્યાય 7.4

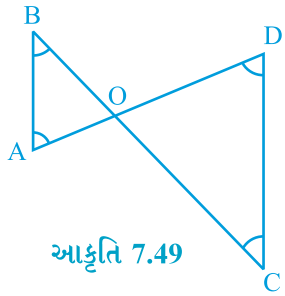
1. સાબિત કરો કે કર્ણ એ કાટકોણ ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ છે.

2. આકૃતિ 7.48 માં Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે બિંદુ P તથા Q સુધી લંબાવેલ છે. વળી, ∠ PBC < ∠ QCB. સાબિત કરો કે AC > AB.



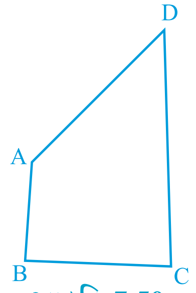
આકૃતિ 7.48

3. આકૃતિ 7.49 માં, ∠ B < ∠ A અને ∠ C < ∠ D. તો સાબિત કરો કે AD < BC.



આકૃતિ 7.49

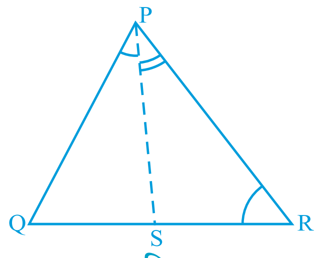
4. AB અને CD એ ચતુષ્કોણ ABCD ની અનુક્રમે સૌથી નાની અને સૌથી મોટી બાજુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.50.) સાબિત કરો કે $\angle A > \angle C$ અને $\angle B > \angle D$.



આકૃતિ 7.50

5. આકૃતિ 7.51 માં PR > PQ અને PS એ $\angle QPR$ નો દ્વિભાજક હોય, તો સાબિત કરો કે $\angle PSR > \angle PSQ$.

6. સાબિત કરો કે રેખાખંડના બહારના બિંદુમાંથી રેખાખંડ પર દોરેલ લંબ તે રેખાથી સૌથી ઓછા અંતરે હોય છે.



આકૃતિ 7.51

સ્વાધ્યાય 7.5 (વૈકલ્પિક)*

1. ABC ત્રિકોણ છે. જે Δ ABC નાં ત્રણેય શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલ હોય એવું બિંદુ Δ ABC ના અંદરના ભાગમાં મેળવો.

2. જે ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓથી સમાન અંતરે આવેલું હોય એવું બિંદુ ત્રિકોણના અંદરના ભાગમાં મેળવો.

3. એક વિશાળ બગીચામાં લોકો ત્રણ સ્થળે એકઠા થયેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.52.)

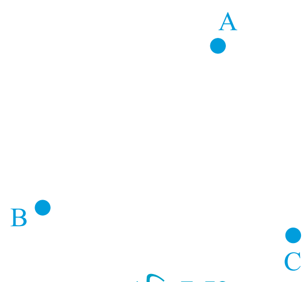
A : આ સ્થાન પર બાળકો માટેના જુદા જુદા હીંચકા અને લપસણી છે.

B : આ સ્થાનની નજીક માનવનિર્મિત તળાવ આવેલું છે.

C : આ સ્થાનની નજીક પર વિશાળ પાર્કિંગ તથા બહાર નીકળવાનો માર્ગ આવેલ છે.

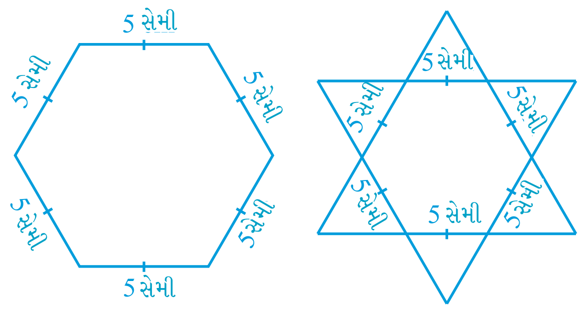
કયાં સ્થળે આઈસક્રીમ પાર્લર ઊભુ કરવું જોઈએ કે જેથી વધુમાં વધુ લોકો આવી શકે ?

(**સૂચન**: A, B અને C થી સમાન અંતરે પાર્લર આવેલું હોવું જોઈએ.)



આકૃતિ 7.52

4. આકૃતિ 7.53 (i) અને (ii) માં દર્શાવેલ ષટ્કોણીય અને તારા આકારની રંગોળીને વધુમાં વધુ 1 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણ જેટલા સમાય તેટલા ભરો. બંને કિસ્સામાં આવા ત્રિકોણોની સંખ્યા ગણો. કઈ આકૃતિમાં વધુ ત્રિકોણ હશે ?



(i) આકૃતિ 7.53 (ii)

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાલક્ષી નથી.

7.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા છો :

1. જો બે આકૃતિના આકાર અને કદ સમાન હોય, તો બે આકૃતિઓ એકરૂપ કહેવાય.
2. સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતાં બે વર્તુળ એકરૂપ કહેવાય.
3. સમાન બાજુ ધરાવતાં બે ચોરસ એકરૂપ કહેવાય.
4. જો સંગતતા $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ અને $C \leftrightarrow R$ સાથે બે ત્રિકોણો ABC અને PQR એકરૂપ હોય, તો તેને સંકેતમાં $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ વડે દર્શાવાય.
5. જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની બાખૂબા શરત)
6. જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને અંતર્ગત બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની ખૂબાખૂ શરત)
7. જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની ખૂખૂબા શરત)
8. ત્રિકોણની સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.
9. ત્રિકોણના સમાન ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ સમાન હોય.
10. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો 60° નો હોય છે.
11. જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય. (એકરૂપતાની બાબાબા શરત)
12. જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.(એકરૂપતાની કાકબા શરત)
13. ત્રિકોણમાં મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો મોટો હોય.
14. ત્રિકોણમાં મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય.
15. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનો સરવાળો તેની ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય.