પ્રકરણ 3

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- બે સમાન ચલ ધરાવતાં બે સુરેખ સમીકરણોને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.
- સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

  જ્યાં, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.
- સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય અથવા અનંત સંખ્યાઓનો બનેલો હોય, તો સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે એમ કહેવાય.

  જો સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ અનંત સંખ્યાઓનો બનેલો હોય, તો તેમને અવલંબી સમીકરણો કહે છે. આમ, આ વિકલ્પમાં સુરેખ સમીકરણો અવલંબી અને સુસંગત છે.
- જો સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ ન મળે, તો સમીકરણો સુસંગત નથી.
- ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ છે.

(I) જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, તો

(i) સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) તેમનો આલેખ અનન્ય બિંદુમાં છેદતું રેખાયુગ્મ થશે, છેદબિંદુ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.

(II) જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અથવા $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, તો

(i) સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

(ii) તેમનો આલેખ સમાંતર રેખાઓની જોડ થશે અને તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

(III) જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, તો

(i) સુરેખ સમીકરણયુગ્મ અવલંબી અને સુસંગત છે.

(ii) તેમના આલેખની રેખાઓ સંપાતી હોય. આલેખ પરનાં તમામ બિંદુઓ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે અને તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.

- નીચે દર્શાવેલી રીતમાંથી કોઈ પણ રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો બૈજિક ઉકેલ મેળવી શકાય :

  (i) આદેશની રીત

  (ii) લોપની રીત

  (iii) ચોકડી ગુણાકારની રીત

- ભૌમિતિક/આલેખની રીતે પણ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણયુગ્મ $5x - 15y = 8$ અને $3x - 9y = \frac{24}{5}$ ને .... મળે.

(A) એક ઉકેલ (B) બે ઉકેલ (C) અનંત સંખ્યાનો બનેલો ઉકેલ (D) ઉકેલ ન મળે

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{3},\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3},\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{\cancel{8} \times 5}{\cancel{24}_{\,3}} = \frac{5}{3}$$

તેથી $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. આથી અનંત સંખ્યાનો બનેલો ઉકેલ મળે.

ઉકેલ : ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 2 : બે અંકની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. જો તેમાં 27 ઉમેરવામાં આવે, તો અંકોનાં સ્થાનની અદલાબદલી થાય છે. આ સંખ્યા ....

(A) 25 (B) 72 (C) 63 (D) 36

ધારો કે એકમનો અંક x અને દશકનો અંક y છે.

આપેલ શરત પ્રમાણે $x + y = 9$ **(i)**

અને $10y + x + 27 = 10x + y$

$\therefore\ x - y = 3$ **(ii)**

સમીકરણ (i) અને (ii)ને ઉકેલતાં,

$x = 6$ અને $y = 3$

તેથી તે સંખ્યા $10y + x = 30 + 6 = 36$

ઉકેલ : ઉત્તર (D)

સ્વાધ્યાય 3.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 13 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. આલેખની રીતે સમીકરણયુગ્મ

$6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી બે રેખાઓ ....

(A) બરાબર એક બિંદુમાં છેદે છે. (B) બરાબર બે બિંદુમાં છેદે છે.

(C) સંપાતી છે. (D) સમાંતર છે.

2. સમીકરણયુગ્મ $x + 2y + 5 = 0$ અને $-3x - 6y + 1 = 0$ ને ....

(A) અનન્ય ઉકેલ છે. (B) બરાબર બે ઉકેલ છે.

(C) અનંત ઉકેલ છે. (D) ઉકેલ ન મળે.

3. જો સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત હોય, તો રેખાઓ .... છે.

(A) સમાંતર (B) સંપાતી

(C) છેદક અથવા સંપાતી (D) છેદક

4. સમીકરણયુગ્મ $y = 0$ અને $y = -7$ ને ....

(A) એક ઉકેલ મળે. (B) બે ઉકેલ મળે.

(C) અનંત ઉકેલ મળે. (D) ઉકેલ ન મળે.

5. સમીકરણયુગ્મ $x = a$ અને $y = b$ આલેખીય રીતે .... રેખાઓ દર્શાવે છે.

(A) સમાંતર (B) બિંદુ (b, a) માં છેદતી

(C) સંપાતી (D) બિંદુ (a, b)માં છેદતી

6. k ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણો $3x - y + 8 = 0$ અને $6x - ky = -16$ સંપાતી રેખાઓ દર્શાવે ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) –2

7. જો $3x + 2ky = 2$ અને $2x + 5y + 1 = 0$ થી મળતી રેખાઓ સમાંતર હોય, તો k નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

8. જો સમીકરણયુગ્મ $cx - y = 2$ અને $6x - 2y = 4$ ને અનંત ઉકેલ મળે, તો c નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 3 (B) – 3 (C) –12 (D) ન મળે.

9. જો અવલંબી સમીકરણયુગ્મનું એક સમીકરણ $-5x + 7y = 2$ હોય, તો બીજું શક્ય સમીકરણ .... હશે.

(A) $10x + 14y + 4 = 0$ (B) $-10x - 14y + 4 = 0$

(C) $-10x + 14y + 4 = 0$ (D) $10x - 14y = -4$

10. અનન્ય ઉકેલ $x = 2, y = -3$ હોય તેવું, સુરેખ સમીકરણયુગ્મ .... છે.

(A) $x + y = -1$
$2x - 3y = -5$

(B) $2x + 5y = -11$
$4x + 10y = -22$

(C) $2x - y = 1$
$3x + 2y = 0$

(D) $x - 4y - 14 = 0$
$5x - y - 13 = 0$

11. જો સમીકરણો $x - y = 2$ અને $x + y = 4$ નો ઉકેલ $x = a, y = b$ હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય અનુક્રમે ......

(A) 3 અને 5 (B) 5 અને 3 (C) 3 અને 1 (D) –1 અને –3

12. અરુણા પાસે ફક્ત ₹ 1 અને ₹ 2 ના કેટલાક સિક્કા છે. જો તેની પાસેના સિક્કાઓની કુલ સંખ્યા 50 અને તેનું મૂલ્ય ₹ 75 હોય, તો ₹ 1 ના અને ₹ 2 ના સિક્કાની સંખ્યા અનુક્રમે .... છે.

(A) 35 અને 15 (B) 35 અને 20 (C) 15 અને 35 (D) 25 અને 25

13. પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંમરથી છ ગણી છે. ચાર વર્ષ પછી, પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંમર કરતાં ચાર ગણી થશે. પુત્ર અને પિતાની હાલની ઉંમર અનુક્રમે .... છે.

(A) 4 અને 24 (B) 5 અને 30 (C) 6 અને 36 (D) 3 અને 24

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણયુગ્મ $-x + 2y + 2 = 0$ અને $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - 1 = 0$ ને અનન્ય ઉકેલ મળે, તે કહેવું સત્ય છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : હા.

અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ હોવાથી, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણો $4x + 3y - 1 = 5$ અને $12x + 9y = 15$ એ સંપાતી રેખાઓ દર્શાવે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : ના.

આપણે સમીકરણોને

$4x + 3y = 6$

$12x + 9y = 15$ પ્રમાણે પુનઃ લખી શકીએ.

અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}$ અને $\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{5}$ તેથી $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ પરંતુ $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ હોવાથી, આપેલાં સમીકરણો સંપાતી રેખા-યુગ્મ દર્શાવશે નહિ.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણયુગ્મ $x + 2y - 3 = 0$ અને $6y + 3x - 9 = 0$ સુસંગત છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : હા.

સમીકરણોનાં પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં,

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$3x + 6y - 9 = 0$$

અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ હોવાથી, સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેનાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $2x + 4y = 3$, $12y + 6x = 6$

(ii) $x = 2y$, $y = 2x$

(iii) $3x + y - 3 = 0$, $2x + \frac{2}{3}y = 2$

2. નીચેનાં સમીકરણો સંપાતી રેખાઓની જોડ દર્શાવે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $3x + \frac{1}{7}y = 3,\ 7x + 3y = 7$

(ii) $-2x - 3y = 1,\ 6y + 4x = -2$

(iii) $\frac{x}{2} + y + \frac{2}{5} = 0,\ 4x + 8y + \frac{5}{16} = 0$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $-3x - 4y = 12,\ 4y + 3x = 12$

(ii) $\frac{3}{5}x - y = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{6}$

(iii) $2ax + by = a,\ 4ax + 2by - 2a = 0;\ a, b \neq 0$

(iv) $x + 3y = 11,\ 2\,(2x + 6y) = 22$

4. જો સમીકરણયુગ્મ

$\lambda x + 3y = 7,\ 2x + 6y = 14$

ને અનંત ઉકેલ હોય, તો λ નું મૂલ્ય 1 હોય. આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ આપો.

5. સમીકરણયુગ્મ

$x - 2y = 8,\ 5x - 10y = c$ ને

c ની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે અનન્ય ઉકેલ છે. વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે ચકાસો.

6. $x = 7$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખા એ x–અક્ષને સમાંતર છે. વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે ચકાસો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : p અને q ના કયા મૂલ્ય માટે નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ મળે ?

$4x + 5y = 2$

$(2p + 7q)\,x + (p + 8q)\,y = 2q - p + 1$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2p+7q}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{p+8q}$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{2q - p + 1}$$

સુરેખ સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલ માટે,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

આથી, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q} = \frac{2}{2q-p+1}$

આથી, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q}$ અને $\frac{4}{2p+7q} = \frac{2}{2q-p+1}$

$\therefore$ $4p + 32q = 10p + 35q$ અને $8q - 4p + 4 = 4p + 14q$

$\therefore$ $6p + 3q = 0$ અને $8p + 6q = 4$

$\therefore$ $q = -2p$ **(1)**

અને $4p + 3q = 2$ **(2)**

સમીકરણ (1) માંથી મેળવેલું q નું મૂલ્ય સમીકરણ (2) માં મૂકતાં,

$4p - 6p = 2$

અથવા $p = -1$

સમીકરણ (1) માં p નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$q = 2$

આથી, જો $p = -1$, $q = 2$ હોય, તો આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો અનંત ઉકેલ મળે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$21x + 47y = 110$, $47x + 21y = 162$

ઉકેલ : $21x + 47y = 110$ **(1)**

$47x + 21y = 162$ **(2)**

સમીકરણ (1) ને 47 અને સમીકરણ (2) ને 21 વડે ગુણતાં,

$987x + 2209y = 5170$ **(3)**

$987x + 441y = 3402$ **(4)**

સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$1768y = 1768$

અથવા $y = 1$

સમીકરણ (1) માં y નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$21x + 47 = 110$

અથવા $21x = 63$

અથવા $x = 3$

આથી, $x = 3$, $y = 1$

વૈકલ્પિક ઉકેલ : $21x + 47y = 110$ **(1)**

$47x + 21y = 162$ **(2)**

સમીકરણ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$68x + 68y = 272$

અથવા $x + y = 4$ (5)

સમીકરણ (2) માંથી સમીકરણ (1) બાદ કરતાં,

$26x - 26y = 52$

અથવા $x - y = 2$ (6)

સમીકરણ (5) અને (6) નો સરવાળો અને તફાવત કરતાં,

$x = 3, \; y = 1$

ઉદાહરણ 3 : સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x - y + 2 = 0$ અને $4x - y - 4 = 0$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x-અક્ષથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

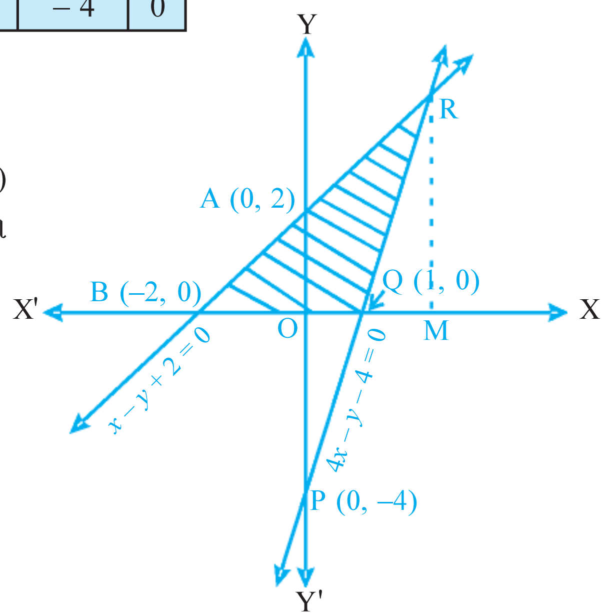
ઉકેલ : આપેલાં સમીકરણોનો આલેખ દોરવા માટે, પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધીશું. તે કોષ્ટક 3.1 માં આપ્યા પ્રમાણે છે.

કોષ્ટક 3.1

x	0	–2
$y = x + 2$	2	0

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0

આલેખપત્ર પર બિંદુઓ A (0, 2), B (–2, 0), P (0, –4) અને Q (1, 0) આલેખો અને આકૃતિ 3.1 માં બતાવ્યા પ્રમાણે, રેખા AB અને PQ બને તે રીતે તેમને જોડો.



આકૃતિ 3.1

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે રેખાઓ AB અને PQ નું છેદબિંદુ R (2, 4) છે. આ રેખાઓ અને x-અક્ષથી ત્રિકોણ BQR બને છે.

આ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ B (–2, 0), Q (1, 0) અને R (2, 4) છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ આધાર $\times$ વેધ

અહીં, આધાર = BQ = BO + OQ = 2 + 1 = 3 એકમ.

વેધ = RM = Rનો ભુજ = 4 એકમ.

આથી, Δ BQRનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ ચોરસ એકમ.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

$\lambda x + y = \lambda^2$ અને $x + \lambda y = 1$ ને λ ના કયાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) માટે

(i) ઉકેલ નથી ?

(ii) અનંત ઉકેલ મળે ?

(iii) અનન્ય ઉકેલ મળે ?

2. k નાં કયાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) માટે, સમીકરણયુગ્મ

$kx + 3y = k - 3$ અને $12x + ky = k$ ને ઉકેલ ન મળે ?

3. a અને b, નાં કયાં મૂલ્યો માટે, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલ હોય ?

$x + 2y = 1$ અને $(a - b)x + (a + b)y = a + b - 2$

4. નીચે આપેલાં સમીકરણયુગ્મ માટે (i) થી (iv) માં p ના અને (v) માં p તથા q નાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) શોધો :

(i) સમીકરણયુગ્મ $3x - y - 5 = 0$ અને $6x - 2y - p = 0$ થી રજૂ થતી રેખાઓ સમાંતર છે.

(ii) સમીકરણયુગ્મ $-x + py = 1$ અને $px - y = 1$ ને ઉકેલ ન મળે.

(iii) સમીકરણયુગ્મ $-3x + 5y = 7$ અને $2px - 3y = 1$ સમીકરણથી રજૂ થતી રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે.

(iv) સમીકરણયુગ્મ $2x + 3y - 5 = 0$ અને $px - 6y - 8 = 0$ ને અનન્ય ઉકેલ છે.

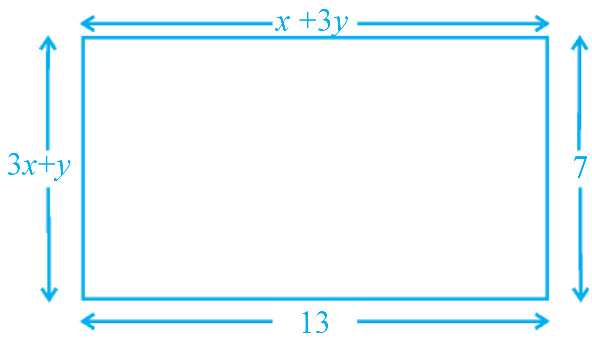
(v) સમીકરણયુગ્મ $2x + 3y = 7$ અને $2px + py = 28 - qy$, ને અનંત ઉકેલ છે.

5. સમીકરણો $x - 3y = 2$ અને $-2x + 6y = 5$ દ્વારા બે સીધા રસ્તા દર્શાવાય છે. ચકાસો કે રસ્તાઓ એકબીજાને કાપશે કે નહિ.

6. અનન્ય ઉકેલ $x = -1, y = 3$ હોય તેવું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ લખો. આવાં કેટલાં યુગ્મ લખી શકાય ?

7. જો $2x + y = 23$ અને $4x - y = 19$ હોય, તો $5y - 2x$ અને $\frac{y}{x} - 2$ નું મૂલ્ય શોધો.

8. નીચેના લંબચોરસમાં x અને y નાં મૂલ્ય શોધો. [જુઓ આકૃતિ 3.2].



આકૃતિ 3.2

9. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

(i) $x + y = 3.3$

$\frac{0.6}{3x-2y} = -1, \; 3x - 2y \neq 0$

(ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$

$\frac{5x}{6} - \frac{y}{8} = 4$

(iii) $4x + \frac{6}{y} = 15$

$6x - \frac{8}{y} = 14, y \neq 0$

(iv) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8, \quad x, y \neq 0$

(v) $43x + 67y = -24$

$67x + 43y = 24$

(vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2, \quad a, b \neq 0$

(vii) $\frac{2xy}{x+y} = \frac{3}{2}$

$\frac{xy}{2x-y} = \frac{-3}{10}, \quad x + y \neq 0, 2x - y \neq 0$

10. સમીકરણયુગ્મ $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} - 1 = 0$ અને $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15$ નો ઉકેલ શોધો.

તે પરથી, જો $y = \lambda x + 5$ હોય, તો λ શોધો.

11. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે નહિ, તે આલેખની મદદથી શોધો. જો સુસંગત હોય, તો તેમનો ઉકેલ મેળવો.

(i) $3x + y + 4 = 0$, $6x - 2y + 4 = 0$

(ii) $x - 2y = 6$, $3x - 6y = 0$

(iii) $x + y = 3$, $3x + 3y = 9$

12. સમીકરણયુગ્મ $2x + y = 4$ અને $2x - y = 4$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને y-અક્ષથી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ લખો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

13. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x+y = 2$ અને $2x-y = 1$ નો ઉકેલ દર્શાવતા બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ લખો. આવી કેટલી રેખાઓ શોધી શકાય ?

14. જો $2x^3 + ax^2 + 2bx + 1$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તથા $2a-3b = 4$ આપ્યું હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય શોધો.

15. ત્રિકોણના ખૂણાઓ x, y અને $40°$ છે. બે ખૂણાઓ x અને y નો તફાવત $30°$ છે. x અને y શોધો.

16. બે વર્ષ પહેલાં, સલીમ તેની એક માત્ર પુત્રી કરતાં ત્રણ ગણો મોટો હતો અને છ વર્ષ પછી, તે તેની પુત્રીના બમણા કરતાં ચાર વર્ષ મોટો હશે. અત્યારે તેમની ઉંમર કેટલી હશે ?

17. પિતાની ઉંમર તેનાં બે બાળકોની ઉંમરના સરવાળાના બમણા જેટલી છે. 20 વર્ષ પછી તેની ઉંમર તેનાં બાળકોની ઉંમરના સરવાળા બરાબર થશે. પિતાની ઉંમર શોધો.

18. બે સંખ્યાઓ 5 : 6 ના ગુણોત્તરમાં છે. પ્રત્યેક સંખ્યામાંથી 8 બાદ કરવામાં આવે, તો તેમનો તે જ ક્રમમાં ગુણોત્તર 4 : 5 થાય છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

19. બે પરીક્ષાખંડ A અને B માં કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ હાજર છે. પ્રત્યેક ખંડમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સમાન કરવા માટે, 10 વિદ્યાર્થીઓને A માંથી B માં મોકલવા પડે છે. પરંતુ જો B માંથી A માં 20 વિદ્યાર્થીઓ મોકલવામાં આવે, તો A માં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા B માં સ્થિત વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કરતાં બમણી થાય છે. બંને ખંડમાં સ્થિત વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

20. એક દુકાનદાર વાંચવા માટે પુસ્તકો ભાડે આપે છે. પ્રથમ બે દિવસ માટે તે એક નિયત રકમ લે છે અને ત્યાર પછીના પ્રત્યેક દિવસ માટે તે અતિરિક્ત રકમ લે છે. એક પુસ્તક છ દિવસ રાખવા માટે લતિકા ₹ 22 ચૂકવે છે,

જ્યારે આનંદ પુસ્તક ચાર દિવસ રાખવા માટે ₹ 16 ચૂકવે છે. નક્કી કિંમત અને વધારાના દિવસ માટેની કિંમત શોધો.

21. એક સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં, પ્રત્યેક સાચા ઉત્તર માટે એક ગુણ આપવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક અસત્ય ઉત્તર માટે $\frac{1}{2}$ ગુણ કાપવામાં આવે છે. જયંતિ 120 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપીને 90 ગુણ મેળવે છે. તેણે કેટલા પ્રશ્નોના સાચા ઉત્તર આપ્યા હશે ?

22. ચક્રીય ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ આપ્યા છે.

$\angle A = (6x + 10)°, \angle B = (5x)°$

$\angle C = (x + y)°, \quad \angle D = (3y - 10)°$

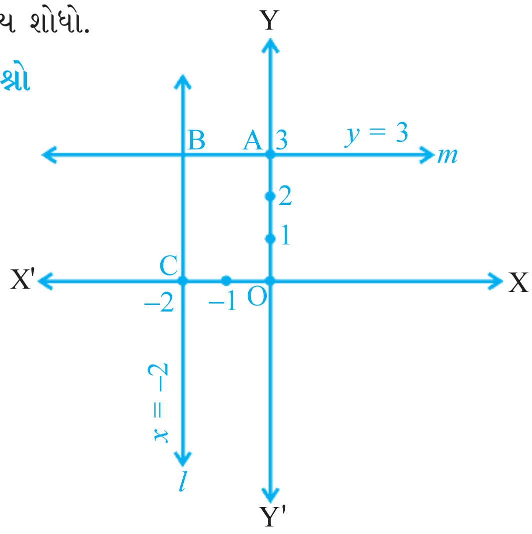
x અને y નાં મૂલ્ય શોધો અને તે પરથી ચારેય ખૂણાઓનાં મૂલ્ય શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : રેખાઓ $x = -2$ અને $y = 3$ નો આલેખ દોરો. આ રેખાઓ આ x-અક્ષ અને y-અક્ષથી બનતી આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ લખો. આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, રેખા $x = -2$ એ y-અક્ષને સમાંતર અને તેની ડાબી બાજુએ 2 એકમ અંતરે છે.

આથી, $x = -2$ નો આલેખ રેખા l છે. [જુઓ આકૃતિ 3.3].



આકૃતિ 3.3

$y = 3$ નો આલેખ x-અક્ષને સમાંતર અને તેના ઉપરના ભાગમાં 3 એકમ દૂર આવેલી રેખા છે.

આથી, $y = 3$ નો આલેખ રેખા m છે.

રેખાઓ $x = -2$, $y = 3$, x-અક્ષ અને y-અક્ષથી ઘેરાયેલી આકૃતિ OABC છે. તે લંબચોરસ છે. (શા માટે ?)

y-અક્ષ પર, x-અક્ષથી 3 એકમ દૂર ઉપરના ભાગમાં બિંદુ A છે. આથી A ના યામ (0, 3) છે.

x-અક્ષ પર અને y-અક્ષની ડાબી બાજુએ 2 એકમ દૂર બિંદુ C છે. આથી, C ના યામ (–2, 0) છે.

સમીકરણયુગ્મ $x = -2$ અને $y = 3$ નો ઉકેલ B છે. આથી B ના યામ (–2, 3) છે.

આથી, લંબચોરસ OABC નાં શિરોબિંદુઓ O (0, 0), A (0, 3), B (–2, 3) અને C (–2, 0) છે.

આ લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 2 એકમ અને 3 એકમ છે.

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ,

લંબચોરસ OABCનું ક્ષેત્રફળ = 2 × 3 = 6 ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 2 : રેખાઓ $5x - y = 5$, $x + 2y = 1$ અને $6x + y = 17$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ બૈજિક રીતે મેળવો.

ઉકેલ : ત્રિકોણની બે બાજુઓ જે બે સમીકરણથી બને છે તે સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે.

આથી, આપેલાં સમીકરણોનો જોડમાં ઉકેલ મેળવીને ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ મળશે. આપેલાં સમીકરણો પરથી, આપણને સમીકરણોની ત્રણ જોડી મળશે,

$5x - y = 5$ અને $x + 2y = 1$

$x + 2y = 1$ અને $6x + y = 17$

$5x - y = 5$ અને $6x + y = 17$

$5x - y = 5$

$x + 2y = 1$ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલતાં,

આપણને, $x = 1, y = 0$ મળશે.

આથી, ત્રિકોણનું એક શિરોબિંદુ (1, 0) છે.

બીજી જોડીનાં સમીકરણો

$x + 2y = 1$ અને $6x + y = 17$ ને ઉકેલતાં,

$x = 3, y = -1$ મળે.

આથી, ત્રિકોણનું બીજું શિરોબિંદુ (3, –1) છે.

ત્રીજા જોડનાં સમીકરણો

$5x - y = 5$ અને $6x + y = 17$ પરથી

$x = 2, y = 5$ મળે.

આથી ત્રિકોણનું ત્રીજું શિરોબિંદુ (2, 5) છે.

આમ, ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ (1, 0), (3, –1) અને (2, 5) છે.

ઉદાહરણ 3 : ટેબલ પર 10 % અને ખુરશી પર 25 % નફો મેળવવા માટે, જમિલાએ ટેબલ અને ખુરશી ₹ 1050 માં વેચ્યાં. જો તેને ટેબલ પર 25 % અને ખુરશી પર 10 % નફો લીધો હોત, તો તેને ₹ 1065 મળ્યા હોત. પ્રત્યેકની મૂળકિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ટેબલની મૂળકિંમત ₹ x અને ખુરશીની મૂળકિંમત ₹ y છે.

જ્યારે ટેબલને 10 % નફાથી વેચ્યું હોય ત્યારે ટેબલની વેચાણકિંમત

$$= ₹ \left(x + \frac{10}{100}x\right) = ₹ \frac{110}{100}x$$

જ્યારે ખુરશીને 25 % નફાથી વેચી હોય, ત્યારે ખુરશીની વેચાણકિંમત

$$= ₹ \left(y + \frac{25}{100}y\right) = ₹ \frac{125}{100}y$$

આથી, $\frac{110}{100}x + \frac{125}{100}y = 1050$ **(1)**

જ્યારે 25 % નફાથી ટેબલ વેચે, ત્યારે તેની વેચાણકિંમત = ₹$\left(x+\frac{25}{100}x\right)$ = ₹$\frac{125}{100}x$ અને જ્યારે 10 % નફાથી ખુરશી વેચે, ત્યારે તેની વેચાણકિંમત = ₹$\left(y+\frac{10}{100}y\right)$ = ₹ $\frac{110}{100}y$

આથી, $\frac{125}{100}x+\frac{110}{100}y=1065$ **(2)**

સમીકરણો (1) અને (2) પરથી,

$110x + 125y = 105000$ અને $125x + 110y = 106500$

આ સમીકરણોનો સરવાળો અને તેમની બાદબાકી કરતાં,

$235x + 235y = 211500$ અને $15x – 15y = 1500$

અર્થાત્, $x + y = 900$ **(3)**

અને $x – y = 100$ **(4)**

સમીકરણો (3) અને (4)ને ઉકેલતાં,

$x = 500, y = 400$

આથી, ટેબલની મૂળકિંમત ₹ 500 અને ખુરશીની મૂળકિંમત ₹ 400.

ઉદાહરણ 4 : બે પાઈપોના ઉપયોગથી એક સ્નાનાગાર ભરાતાં 12 કલાક થાય છે. જો મોટા વ્યાસવાળી પાઈપનો ઉપયોગ 4 કલાક માટે અને નાના વ્યાસવાળી પાઈપનો ઉપયોગ 9 કલાક કરવામાં આવે, તો સ્નાનાગાર માત્ર અડધો ભરાય છે. જો પ્રત્યેક પાઈપનો અલગ-અલગ ઉપયોગ કરવામાં આવે, તો તેમનાથી સ્નાનાગાર કેટલા સમયમાં ભરાય ?

ઉકેલ : ધારો કે એકલા મોટા વ્યાસવાળી પાઈપથી સ્નાનાગાર ભરવા માટે x કલાક અને એકલા નાના વ્યાસવાળી પાઈપથી સ્નાનાગાર ભરવા માટે y કલાક લાગે છે.

એકલો મોટા વ્યાસવાળી પાઈપ x કલાકમાં સ્નાનાગાર ભરે છે.

આથી, 1 કલાકમાં આ પાઈપ સ્નાનાગારનો $\frac{1}{x}$ ભાગ ભરશે. તેથી 4 કલાકમાં તે $\frac{4}{x}$ ભાગ ભરશે.

તે જ પ્રમાણે, એકલો ઓછા વ્યાસવાળી પાઈપ 9 કલાકમાં, $\frac{9}{y}$ ભાગ ભરશે.

આપેલી માહિતી પ્રમાણે,

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{2}$$ **(1)**

વળી, બંને પાઈપ ઉપયોગથી સ્નાનાગાર 12 કલાકમાં ભરાય છે.

આથી, $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ **(2)**

ધારો કે, $\frac{1}{x} = u$ અને $\frac{1}{y} = v$. આથી સમીકરણો (1) અને (2) પરથી,

$$4u + 9v = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$12\ u + 12\ v = 1 \text{ થશે.} \quad (4)$$

સમીકરણ (3) ને 3 વડે ગુણી, તેમાંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$15\ v = \frac{1}{2} \text{ અથવા } v = \frac{1}{30} \text{ મળે.}$$

સમીકરણ (4) માં v નું મૂલ્ય મૂકતાં, $u = \frac{1}{20}$

આથી, $u = \frac{1}{20}$, $v = \frac{1}{30}$

તેથી, $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}, \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$

અથવા, $x = 20, y = 30$.

આથી, મોટા વ્યાસવાળો પાઈપ એકલો 20 કલાકમાં અને ઓછા વ્યાસવાળો પાઈપ એકલો 30 કલાકમાં સ્નાનાગાર ભરશે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેનું સમીકરણયુગ્મ આલેખની રીતે ઉકેલો :

$2x + y = 6$

$2x - y + 2 = 0$

આ બે રેખાઓએ x-અક્ષ સાથે બનાવેલ ત્રિકોણ અને y-અક્ષ સાથે બનાવેલ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

2. રેખાઓ $y = x$, $3y = x$, $x + y = 8$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ, આલેખની મદદથી શોધો.

3. સમીકરણો $x = 3$, $x = 5$ અને $2x - y - 4 = 0$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x–અક્ષથી બનતા ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

4. 4 પેન અને 4 પેન્સિલ સમાવતા બૉક્સની કિંમત ₹ 100 છે. પેનની કિંમતના ત્રણ ગણા એ પેન્સિલ બૉક્સની કિંમત કરતાં ₹ 15 વધારે છે. ઉપરની માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો. પેન અને પેન્સિલ બૉક્સની કિંમત શોધો.

5. રેખાઓ $3x - y = 3$, $2x - 3y = 2$ અને $x + 2y = 8$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ બૈજિક રીતે મેળવો.

6. અંકિતા પોતાના ઘરે જવા માટે 14 કિમી અંતરનો કેટલોક ભાગ રિક્ષાથી અને કેટલોક ભાગ બસથી મુસાફરી કરે છે. તેણે 2 કિમી રિક્ષા મારફતે અને બાકીનું અંતર બસ મારફતે કાપ્યું હોત તો તેને અડધો કલાક લાગત. બીજી રીતે, જો તેને 4 કિમી મુસાફરી રિક્ષા મારફતે અને બાકીનું અંતર બસ મારફતે કાપ્યું હોત, તો તેને 9 મિનિટ વધારે લાગી હોત રિક્ષા અને બસની ઝડપ શોધો.

7. શાંત પાણીમાં એક વ્યક્તિ 5 કિમી/કલાકના દરે હલેસાં મારે છે. પાણીના પ્રવાહની દિશામાં 40 કિમી અંતર કાપતાં જે સમય લાગે છે તેના કરતાં ત્રણ ગણો સમય પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 40 કિમી અંતર કાપતાં લાગે છે. પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

8. એક યાંત્રિક હોડીને 30 કિમી પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં અને 28 કિમી પ્રવાહની દિશામાં મુસાફરી કરતાં 7 કલાક લાગે છે. તેને 21 કિમી પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં અને તેટલું જ અંતર પાછા ફરવામાં 5 કલાક લાગે છે. શાંત પાણીમાં યાંત્રિક હોડીની ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો. (શાંત પાણીમાં હોડીની ઝડપ પ્રવાહની ઝડપ કરતાં વધુ છે.)

9. બે અંકની સંખ્યા, અંકોના સરવાળાને 8 વડે ગુણીને તેમાંથી 5 બાદ કરતાં મળે છે અથવા અંકોના તફાવતને 16 વડે ગુણીને 3 ઉમેરતાં મળે છે, તે સંખ્યા શોધો.

10. રેલવેની અડધી ટિકિટ પૂરા ભાડાની અડધી રકમ ખર્ચતાં મળે છે, પરંતુ અડધી ટિકિટ માટે આરક્ષણ શુલ્ક પૂરી ટિકિટના જેટલું જ છે. પ્રથમ વર્ગની સ્ટેશન A થી B માટેની એક ટિકિટ આરક્ષિત કરાવતાં ₹ 2530 ખર્ચ થાય છે. વળી, પ્રથમ વર્ગની એક ટિકિટ અને પ્રથમ વર્ગની અડધી ટિકિટનું આરક્ષણ કરાવતાં ₹ 3810 ખર્ચ થાય છે. પ્રથમ વર્ગનું સ્ટેશન A થી B નું પૂરું ભાડું અને એક ટિકિટનું આરક્ષણ મૂલ્ય શોધો.

11. એક દુકાનદાર સાડી 8 % નફાથી અને સ્વેટર 10 % વટાવથી વેચે છે, આમ કરવાથી તેને ₹ 1008 મળે છે. જો તે સાડી 10 % નફાથી અને સ્વેટર 8 % વટાવથી વેચે, તો તેને ₹ 1028 મળત. સાડીની મૂળ કિંમત અને વટાવ કાપ્યા પહેલાંની સ્વેટરની વેચાણકિંમત શોધો.

12. સુઝન બે રોકાણપદ્ધતિ A અને B માં ચોક્કસ રૂપિયાનું રોકાણ કરે છે. આ પદ્ધતિઓ અનુક્રમે વાર્ષિક 8 % અને 9 % વ્યાજ આપવાની દરખાસ્ત કરે છે. તેને વાર્ષિક ₹ 1860 વ્યાજ મળે છે. જો તેને આ બે પદ્ધતિમાં રોકાણ અદલ-બદલ કર્યું હોત, તો તેને વાર્ષિક વ્યાજ પેટે ₹ 20 વધારે મળ્યા હોત. દરેક પદ્ધતિમાં તેણે કેટલું રોકાણ કર્યું હશે ?

13. વિજય પાસે કેટલાંક કેળાં છે. તે તેમને બે સમૂહ A અને B માં વિભાજિત કરે છે. તેણે પ્રથમ સમૂહને 3 કેળાંના ₹ 2 ના ભાવથી અને બીજા સમૂહને પ્રતિ કેળાના ₹ 1 ના ભાવથી વેચે છે. આમ કરતાં તેમને ₹ 400 મળે છે. જો તેને પ્રથમ સમૂહને પ્રતિ કેળાના ₹ 1ના ભાવથી અને બીજા સમૂહને 5 કેળાના ₹ 4 ના ભાવથી વેચ્યાં હોત તો ₹ 460 મળત. તેની પાસેનાં કેળાની કુલ સંખ્યા શોધો.

■