આકૃતિ 4.16માં દર્શાવ્યા અનુસાર આ સાપેક્ષ વેગ શિરોલંબ દિશા સાથે θ કોણ બનાવશે. જેનું મૂલ્ય,

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_b}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343 \text{ થશે.}$$

એટલે કે, $\theta \cong 19^o$

આમ, મહિલાએ પોતાની છત્રી શિરોલંબ દિશા સાથે 19^oના ખૂણે પશ્ચિમની તરફ રાખવી જોઈએ.

તમે આ ઉદાહરણ અને ઉદાહરણ 4.1 વચ્ચેનો ભેદ પારખો. ઉદાહરણ 4.1માં બાળકને બે વેગોના પરિણામી વેગ (સદિશ સરવાળો)નો અનુભવ થાય છે. જ્યારે આ ઉદાહરણમાં મહિલાને સાઈકલના સાપેક્ષે વરસાદના વેગ (બંને વેગોની સદિશ બાદબાકી)નો અનુભવ થાય છે. ◀

4.10 પ્રક્ષિપ્ત ગતિ (PROJECTILE MOTION)

અગાઉના પરિચ્છેદમાં જે વિચારો વિકસિત થયા હતા તેમનો ઉપયોગ ઉદાહરણના રૂપમાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના અભ્યાસમાં કરીશું. જ્યારે કોઈ પદાર્થને ફેંકવામાં આવે ત્યારે તે ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન તે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહે છે. આવો પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ ફૂટબૉલ, ક્રિકેટનો બૉલ, બેઝ બૉલ કે અન્ય કોઈ પણ વસ્તુ હોઈ શકે. પ્રક્ષિપ્ત ગતિને એકીસાથે પરસ્પર લંબ દિશામાં થતી બે જુદી જુદી સ્વતંત્ર ઘટક-ગતિઓનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. આ પૈકીનો એક ઘટક કોઈ પ્રવેગ વગરનો (અચળ વેગી) સમક્ષિતિજ દિશામાં હોય છે જ્યારે બીજો ઘટક ગુરુત્વીય બળને કારણે અચળ પ્રવેગથી ઊર્ધ્વદિશામાં હોય છે. સૌપ્રથમ ગૅલિલિયોએ (1632) તેના પુસ્તક **"ડાયલૉગ ઑન ધ ગ્રેટ વર્લ્ડ સિસ્ટમ" (Dialogue on the Great World Systems)**માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના સમક્ષિતિજ તેમજ ઊર્ધ્વ ઘટકોની સ્વતંત્રતાનો ઉલ્લેખ કર્યો હતો.

સરળતા ખાતર આપણી ચર્ચામાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ પર હવાના અવરોધની અસર અવગણીશું. આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ પદાર્થને x-અક્ષ (સમક્ષિતિજ દિશા) સાથે θ_0 કોણ બનાવતી દિશામાં $\mathbf{\upsilon}_0$ જેટલા વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે.

પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કર્યા બાદ તેના પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે ઉદ્‌ભવતો પ્રવેગ શિરોલંબ અધોદિશામાં હશે.

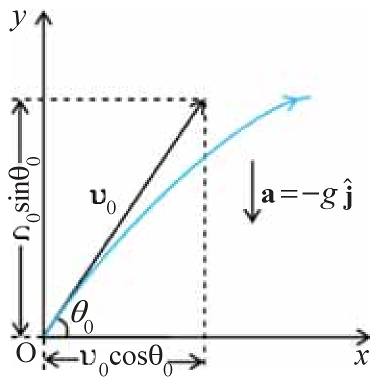
$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

અથવા $a_x = 0$ તથા $a_y = -g$ (4.36)

પ્રારંભિક વેગ $\mathbf{\upsilon}_0$નાં ઘટકો,

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta_0$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\theta_0 \quad (4.37)$$



આકૃતિ **4.17** $\mathbf{\upsilon}_0$*વેગથી* θ_0 *ખૂણે પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થની ગતિ*

આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો આપણે પદાર્થના પ્રારંભિક સ્થાનને નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુ પર લઈએ તો,

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

તેથી સમીકરણ (4.34b)ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x = \upsilon_{0x}t = (\upsilon_0\cos\theta_0)\,t$$

$$\text{અને } y = (\upsilon_0\sin\theta_0)\,t - (1/2)g\,t^2 \quad (4.38)$$

સમીકરણ (4.33b)નો ઉપયોગ કરી કોઈ સમય t માટે વેગના ઘટકોને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0\sin\theta_0 - g\,t \quad (4.39)$$

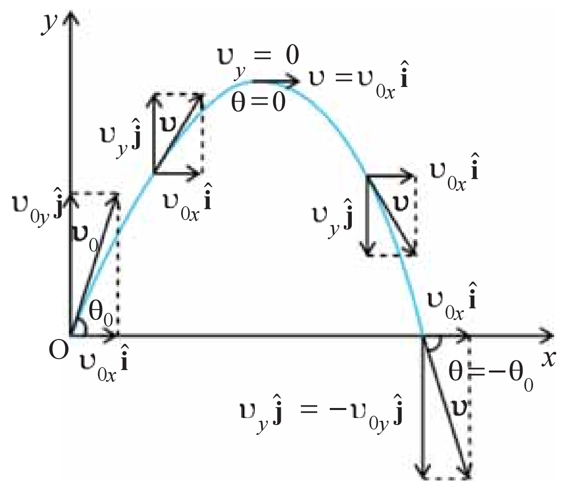
સમીકરણ (4.38) કોઈ સમય t માટે પ્રારંભિક વેગ υ_0 તથા પ્રક્ષિપ્ત કોણ θ_0ના પદમાં પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના સ્થાનનાં x અને y ઘટકો આપે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે x અને y દિશાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી પ્રક્ષિપ્ત ગતિના વિશ્લેષણમાં ઘણી સરળતા થઈ ગઈ છે. વેગનાં બે ઘટકોમાંથી એક x-ઘટક ગતિના પૂરા સમયગાળા દરમિયાન અચળ રહે છે. જ્યારે બીજો y-ઘટક શિરોલંબ દિશામાં મુક્તપતન પામતા પદાર્થની જેમ બદલાય છે. આકૃતિ 4.18માં જુદા જુદા સમયે આ હકીકતને આલેખીય રીત વડે દર્શાવેલ છે. ધ્યાન આપો કે મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ $\upsilon_y = 0$ અને તેથી $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 0$.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિપથનું સમીકરણ (Equation of Path of a Projectile)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કરતાં પદાર્થનો ગતિપથનો આકાર કેવો હશે ? તે x તથા y ઘટકોનાં સમીકરણોમાં સમયનો લોપ કરીને જોઈ શકાય (સમીકરણ 4.38), જે નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{g}{2(\upsilon_0\cos\theta_0)^2}x^2 \qquad (4.40)$$

g, θ_0 અને υ_0 અચળ હોવાથી, સમીકરણ (4.40)ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય. $y = ax + bx^2$, જ્યાં a તથા b અચળ છે. જે પરવલયનું સમીકરણ છે, એટલે કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે (આકૃતિ 4.18).



આકૃતિ 4.18 *પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે.*

મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય (Time of maximum height)

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે કેટલો સમય લેશે ? ધારો કે આ સમય t_m છે. આ બિંદુ પાસે $\upsilon_y = 0$ હોવાથી સમીકરણ (4.39) પરથી t_mનું મૂલ્ય મળી શકે છે.

$$\upsilon_y = \upsilon_0\sin\theta_0 - g\,t_m = 0$$

અથવા $t_m = \upsilon_0\sin\theta_0 / g \qquad (4.41a)$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો કુલ ઉડ્ડયન સમય (T_f) આપણે સમીકરણ (4.38)માં $y = 0$ મૂકીને મેળવી શકીએ છીએ. તેથી,

$$T_f = 2(\upsilon_0\sin\theta_0) / g \qquad (4.41b)$$

T_fને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો **ઉડ્ડયન સમય** કહે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે $T_f = 2t_m$ પરવલય ગતિપથની સંમિતિ પરથી આપણે માટે આ અપેક્ષિત જ હતું.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ (Maximum height of a projectile)

સમીકરણ (4.38)માં $t = t_m$ મૂકી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા પ્રાપ્ત થતી મહત્તમ ઊંચાઈ શોધી શકાય છે.

$$y = h_m = (\upsilon_0\sin\theta_0)\left(\frac{\upsilon_0\sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_0\sin\theta_0}{g}\right)^2$$

અથવા $h_m = \dfrac{(\upsilon_0\sin\theta_0)^2}{2g} \qquad (4.42)$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની સમક્ષિતિજ અવધિ (Horizontal range of a projectile)

પ્રારંભિક સ્થાન ($x = y = 0$)થી શરૂ કરી તેના પતન દરમિયાન ફરીથી $y = 0$ને પસાર કરે ત્યાં સુધી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને **સમક્ષિતિજ અવધિ** R કહે છે. સમક્ષિતિજ અવધિ ઉડ્ડયન-સમય T_fમાં કપાયેલ અંતર છે. તેથી અવધિ Rનું મૂલ્ય,

$$R = (\upsilon_0\cos\theta_0)\,(T_f)$$
$$= (\upsilon_0\cos\theta_0)\,(2\upsilon_0\sin\theta_0) / g$$

અથવા $R = \dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.43a)$

સમીકરણ (4.43a) પરથી દર્શાવે છે કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના વેગ υ_0 માટે, જ્યારે $\sin 2\theta_0$ મહત્તમ હોય, ત્યારે R મહત્તમ મળશે એટલે કે, $\theta_0 = 45^\circ$ હોય.

તેથી મહત્તમ સમક્ષિતિજ અવધિ,

$$R_m = \frac{\upsilon_0^2}{g} \qquad (4.43b)$$

> ▶ *ઉદાહરણ 4.7* ગૅલિલિયોએ તેના પુસ્તક "Two New Sciences"માં એવું વિધાન કર્યું છે. '45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત ધરાવતાં બે જુદા-જુદા કોણે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે, તો તેમની અવધિ સમાન હોય છે.' આ વિધાન સાબિત કરો.

ઉકેલ કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને θ_0 કોણે પ્રારંભિક વેગ $\mathbf{v}_0$થી ફેંકવામાં આવે તો તેની અવધિ,

$$R = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

હવે, ખૂણાઓ ($45^\circ + \alpha$) તથા ($45^\circ - \alpha$) માટે, $2\theta_0$નું મૂલ્ય અનુક્રમે ($90^\circ + 2\alpha$) અને ($90^\circ - 2\alpha$) થશે. $\sin(90^\circ + 2\alpha)$ અને $\sin(90^\circ - 2\alpha)$ બંનેના મૂલ્યો સમાન એટલે કે $\cos 2\alpha$ હોય છે. તેથી 45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત α ધરાવતાં વધારે કે ઓછા મૂલ્યના ખૂણાઓ માટે અવધિ Rનું મૂલ્ય સમાન હોય છે. ◀

> ▶ *ઉદાહરણ 4.8* એક પર્વતારોહક જમીનથી 490 m ઊંચે પર્વતની ધાર પર ઊભો છે. તે એક પથ્થરને સમક્ષિતિજ દિશામાં 15 m s^{-1}નાં પ્રારંભિક વેગથી ફેંકે છે. હવાના અવરોધને અવગણતાં પથ્થર કેટલા સમયમાં જમીન પર પડશે તે શોધો તથા જમીન પર અથડાતી વખતે તેનો વેગ શોધો. ($g = 9.8$ m s^{-2})

ઉકેલ આપણે, પર્વતની ધારને x અને y-અક્ષનું ઊગમબિંદુ તથા જ્યારે પથ્થરને ફેંકવામાં આવે તે ક્ષણને $t = 0\,s$ લઈશું. x-અક્ષની ધન દિશા પ્રારંભિક વેગની દિશામાં અને y-અક્ષની ધન દિશા શિરોલંબ ઉપરની તરફ પસંદ કરીશું. ગતિનાં x અને y ઘટકો એકબીજાંથી સ્વતંત્ર રીતે લઈ શકાય. ગતિનાં સમીકરણો,

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\, t$$

$$y(t) = y_0 + \upsilon_{0y}\, t + (1/2)\, a_y t^2$$

અહીં $x_0 = y_0 = 0,\ \upsilon_{0y} = 0,\ a_y = -g = -9.8\ \text{m s}^{-2}$,

જ્યારે, $\upsilon_{0x} = 15\ \text{m s}^{-1}$

પથ્થર જ્યારે જમીન પર અથડાય છે ત્યારે $y(t) = -490$ m થાય.

$$-490\ \text{m} = -(1/2)(9.8)\ t^2$$

તેથી $t = 10$ s

વેગના ઘટક $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$ તથા $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - g\ t$ થશે.

આમ, જ્યારે પથ્થર જમીન સાથે અથડાશે ત્યારે,

$$\upsilon_{0x} = 15\ \text{m s}^{-1}$$

$$\upsilon_{0y} = 0 - 9.8 \times 10 \approx -98\ \text{m s}^{-1}$$

તેથી પથ્થરનો વેગ

$$\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} \approx 99\ \text{m s}^{-1}.$$ ◀

▶ ***ઉદાહરણ 4.9*** સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના ખૂણે એક ક્રિકેટ બૉલને 28 m s^{-1}ના વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. (a) બૉલ માટે મહત્તમ ઊંચાઈ (b) તે જ સ્તરે પાછા આવવા માટે બૉલે લીધેલ સમય તથા (c) ફેંકવામાં આવેલ બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તે બિંદુના અંતરની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^\circ)^2}{2(9.8)}\ \text{m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0\ \text{m}$$ થશે.

(b) તે જ સ્તર પર પાછા આવવા માટે લાગતો સમય

$$T_f = (2\upsilon_0 \sin\theta_0)\,/\,g = (2 \times 28 \times \sin 30^\circ)\,/\,9.8$$
$$= 28\,/\,9.8\ \text{s} = 2.9\ \text{s}.$$

(c) ફેંકવામાં આવેલા બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તેનું અંતર,

$$R = \frac{(\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^\circ}{9.8} = 69\ \text{m}$$ ◀

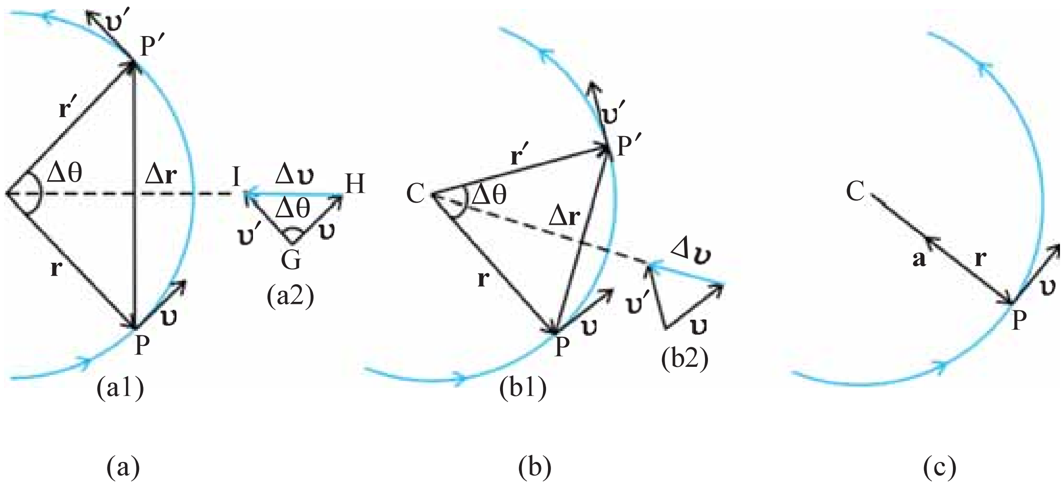
હવાના અવરોધને અવગણવો – આ પૂર્વધારણાનો વાસ્તવિક અર્થ શું છે ? (Neglecting air resistance - what does the assumption really mean ?)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરતી વખતે આપણે કહ્યું હતું તેમ, આપણે માની લઈએ છીએ કે, હવાના અવરોધની, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિ પર કોઈ અસર થતી નથી. તમારે એ સમજવું જોઈએ કે આ વિધાનનો સાચો અર્થ શું થાય ? ઘર્ષણ, શ્યાનતાબળ, હવાનું અવરોધક બળ આ બધા ઊર્જાનો વ્યય કરનારાં બળો (Dissipative Forces) છે. ગતિનો વિરોધ કરતાં આવાં બળોની હાજરીને કારણે ગતિમાન પદાર્થની મૂળ ઊર્જા અને તેના પરિણામે તેના વેગમાનમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, પોતાના પરવલયકાર પથ પર ગતિમાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં ચોક્કસરૂપે પોતાના આદર્શ ગતિપથથી વિચલિત થઈ જશે. તેથી જમીનની સપાટીને તે જ વેગથી નહિ અથડાય જેટલા વેગથી તેને ફેંકવામાં આવ્યો હતો. હવાના અવરોધક બળની ગેરહાજરીમાં વેગનો x ઘટક અચળ રહે છે. ફક્ત y ઘટકમાં જ સતત ફેરફાર થાય છે. જ્યારે હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં બંને ઘટકો પ્રભાવિત થાય છે. તેનો અર્થ એ થયો કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ માટે સમક્ષિતિજ અવધિનું મૂલ્ય સમીકરણ (4.43) દ્વારા મળતાં મૂલ્ય કરતાં ઓછું મૂલ્ય મળશે. મહત્તમ ઊંચાઈ પણ સમીકરણ (4.42) દ્વારા ગણેલ મૂલ્ય કરતાં ઓછી હશે. ત્યારે તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે ઉડ્ડયન સમયમાં શું ફેરફાર થશે ?

હવાના અવરોધથી બચવું હોય તો આપણે પ્રયોગ શૂન્યાવકાશમાં કે બહુ જ ઓછા દબાણની સ્થિતિમાં કરવો પડે, જે સહેલું કાર્ય નથી. જ્યારે આપણે 'હવાના અવરોધને અવગણ્ય માની લો.' જેવાં વાક્યોના ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે આપણે જાણીએ છીએ કે અવધિ, ઊંચાઈ જેવાં પ્રાચલોમાં તેના કારણે થતાં ફેરફારો, હવાની ગેરહાજરીમાં મળતાં મૂલ્યોની સરખામણીમાં ખૂબ જ ઓછા છે. હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લીધા વગર ગણતરી કરવી, હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લઈને કરવા કરતાં ઘણી જ સરળ છે.

4.11 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ (UNIFORM CIRCULAR MOTION)

અચળ ઝડપથી વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા પદાર્થની ગતિને **નિયમિત વર્તુળ ગતિ** કહે છે. શબ્દ 'નિયમિત' તે ઝડપ માટે વાપરવામાં આવ્યો છે જે સમગ્ર ગતિ દરમિયાન સમાન (અચળ) રહે છે. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર કોઈ પદાર્થ υ જેટલી ઝડપથી R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરે છે. અહીં વેગની દિશા સતત બદલાતી હોવાથી તેમાં પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. આપણે આ પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધીએ.



આકૃતિ 4.19 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ કરતા પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ. આકૃતિ (a) થી (c) સુધી સમયગાળો Δt ઘટતો જઈને શૂન્ય બને છે. વર્તુળાકાર પથ પર દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

આકૃતિ 4.19(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે પદાર્થ P અને P' બિંદુઓ પાસે હોય ત્યારે તેના સ્થાનસદિશ અને વેગ અનુક્રમે $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ છે. વ્યાખ્યા અનુસાર કોઈ બિંદુ પાસે પદાર્થનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 4.19 (a1)માં વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ને દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 4.19 (a2)માં સદિશ સરવાળા માટે ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ મેળવેલ છે. ગતિપથ વર્તુળાકાર હોવાથી r ને υ અને $\mathbf{r}'$ને $\boldsymbol{\upsilon}'$ લંબરૂપે છે. તેથી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$, $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ હોય છે. સરેરાશ પ્રવેગ $\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}\right)$ $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશામાં છે તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ પણ $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ છે. હવે જો આપણે $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ને $\mathbf{r}$ તથા $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગતી રેખા પર મૂકીએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તેની દિશા વર્તુળના કેન્દ્રની તરફ હશે. આ રાશિઓને આકૃતિ 4.19(b)માં સમયના નાના ગાળા માટે દર્શાવેલ છે. $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ અને તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ની દિશા ફરીથી કેન્દ્ર તરફ હશે. આકૃતિ 4.19(c)માં $\Delta t \rightarrow 0$ છે, તેથી સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થશે તેની દિશા કેન્દ્ર તરફની હોય છે.* આમ, એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે નિયમિત વર્તુળ ગતિ માટે પદાર્થના પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે. હવે આપણે આ પ્રવેગનું માન મેળવીશું.

વ્યાખ્યા અનુસાર $\mathbf{a}$નું મૂલ્ય નીચે દર્શાવેલ સમીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય :

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t}$$

ધારો કે સ્થાનસદિશો $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેનો ખૂણો $\Delta\theta$ છે. હવે, વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{\upsilon}'$ હંમેશાં સ્થાનસદિશોને લંબ હોય છે. તેથી તેમની વચ્ચેનો ખૂણો પણ $\Delta\theta$ થશે. તેથી સ્થાનસદિશો દ્વારા બનતો ત્રિકોણ CPP' તથા વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\upsilon}'$ અને $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ દ્વારા બનતો ત્રિકોણ GHI સમરૂપ છે (આકૃતિ 4.19a). તેથી એક ત્રિકોણના આધારની લંબાઈ તથા બાજુની લંબાઈનો ગુણોત્તર બીજા ત્રિકોણની તેને અનુરૂપ લંબાઈઓના ગુણોત્તર જેટલો હશે.

એટલે કે,

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\upsilon} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{R} \quad (|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| = R \text{ મૂકેલ છે.})$$

અથવા $|\Delta\boldsymbol{\upsilon}| = \upsilon \dfrac{|\Delta\mathbf{r}|}{R}$

તેથી,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\upsilon|\Delta\mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{\upsilon}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

જો Δt નાનો હોય તો $\Delta\theta$ પણ નાનો હશે. આવી સ્થિતિમાં ચાપ PP′ને લગભગ $|\Delta\mathbf{r}|$ જેટલો લઈ શકાય છે. એટલે કે

$$|\Delta\mathbf{r}| \cong \upsilon\Delta t$$

$$\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} \cong \upsilon$$

અથવા $\displaystyle\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \upsilon$

આ રીતે, કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cનું મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે મળશે :

* $\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ને લંબ થાય છે. આ લક્ષમાં $\Delta\boldsymbol{\upsilon} \rightarrow 0$ હોય છે, તેના પરિણામ સ્વરૂપે તે પણ $\boldsymbol{\upsilon}$ ને લંબ થશે. આમ, વર્તુળાકાર પથના દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

$$a_c = \left(\frac{\upsilon}{R}\right)\upsilon = \upsilon^2/R \qquad (4.44)$$

આમ, R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર υ જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતાં પદાર્થના પ્રવેગનું માન υ^2/R હોય છે જેની દિશા હંમેશાં **વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની** હોય છે. આ કારણે આ પ્રકારના પ્રવેગને **કેન્દ્રગામી પ્રવેગ** કહે છે. (આ શબ્દ ન્યૂટને સૂચવ્યો હતો). કેન્દ્રગામી પ્રવેગને સંબંધિત સંપૂર્ણ વિશ્લેષણાત્મક લેખ સૌપ્રથમ 1673માં ડચ વૈજ્ઞાનિક ક્રિશ્ચિયન હાઈગેન્સે (1629-1695) પ્રકાશિત કર્યો હતો. પરંતુ કદાચ ન્યૂટનને પણ કેટલાંક વર્ષો પહેલાં જ આ હકીકતની જાણ થઈ ગઈ હતી. કેન્દ્રગામીને અંગ્રેજીમાં સેન્ટ્રિપેટલ કહે છે. જે એક ગ્રીક શબ્દ છે જેનો અર્થ કેન્દ્ર-અભિમુખ (કેન્દ્રની તરફ) થાય છે. υ તથા R બંને અચળ હોવાથી કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન પણ અચળ હોય છે. પરંતુ તેની દિશા બદલાતી રહે છે અને તે હંમેશાં કેન્દ્રની તરફ હોય છે. આ પરથી એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી.

કોઈ પદાર્થની નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિના વેગ તથા પ્રવેગને આપણે બીજી રીતે પણ વર્ણવી શકીએ છીએ. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર Δt (= $t' - t$) સમયગાળામાં જ્યારે કણ P થી P′ પર પહોંચે છે ત્યારે CP રેખા $\Delta\theta$ જેટલો ખૂણો ફરી જાય છે. $\Delta\theta$ને કોણીય અંતર કહે છે. કોણીય ઝડપ ω (ગ્રીક અક્ષર 'ઓમેગા')ને આપણે કોણીય અંતરના ફેરફારના સમય-દર રૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ.

તેથી, $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

હવે, જો Δt સમયમાં કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર Δs હોય, એટલે કે $PP' = \Delta s$, તો

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

પરંતુ $\Delta s = R\Delta\theta$ તેથી,

$$\upsilon = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

આમ, $$\upsilon = R\omega \qquad (4.46)$$

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cને આપણે કોણીય વેગના રૂપમાં પણ રજૂ કરી શકીએ. એટલે કે,

$$a_c = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

અથવા $$a_c = \omega^2 R \qquad (4.47)$$

વર્તુળનું એક પરિભ્રમણ પૂરું કરવા માટે પદાર્થને જે સમય લાગે છે તેને આવર્તકાળ T કહે છે. એક સેકન્ડમાં પદાર્થ જેટલાં પરિભ્રમણ કરે છે તેને પદાર્થની આવૃત્તિ ν (=$1/T$) કહે છે. પરંતુ આ સમયમાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર $s = 2\pi R$ હોય છે. તેથી

$$\upsilon = 2\pi R / T = 2\pi R\nu \qquad (4.48)$$

આ રીતે, આવૃત્તિ νના પદમાં,

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\upsilon = 2\pi R\nu$$

$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (4.49)$$

▶ *ઉદાહરણ 4.10* એક જંતુ વર્તુળાકાર ખાંચમાં કે જેની ત્રિજ્યા 12 cm છે તેમાં ફસાઈ જાય છે. તે ખાંચમાં એકધારી ગતિ કરે છે અને 100 સેકન્ડમાં 7 પરિભ્રમણ પૂરાં કરે છે. (a) જંતુની કોણીય ઝડપ તથા રેખીય ઝડપ કેટલી હશે ? (b) શું પ્રવેગ સદિશ એ અચળ સદિશ છે ? તેનું માન કેટલું હશે ?

ઉકેલ આ નિયમિત વર્તુળ ગતિનું ઉદાહરણ છે. અહીં R = 12 cm. કોણીય ઝડપ ωનું મૂલ્ય

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

તથા રેખીય ઝડપ

$$\upsilon = \omega R = 0.44 \text{ s}^{-1} \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}.$$

વર્તુળના દરેક બિંદુ પાસે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા તે બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશા હશે તથા પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હશે. તે સતત દિશા બદલતું હોવાથી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી. પરંતુ તેનું માન અચળ રહેશે.

$$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2 (12 \text{ cm})$$

$$= 2.3 \text{ cm s}^{-2}$$ ◀

સારાંશ

1. અદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માત્ર માન જ હોય. અંતર, ઝડપ, દ્રવ્યમાન તથા તાપમાન અદિશરાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.
2. સદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માન અને દિશા બંને હોય છે. સ્થાનાંતર, વેગ તથા પ્રવેગ વગેરે આ પ્રકારની રાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. તેઓ સદિશ બીજગણિતના ચોક્કસ નિયમોનું પાલન કરે છે.
3. જો કોઈ સદિશ **A**ને વાસ્તવિક સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે તો મળતો સદિશ **B** એવો હોય છે કે તેનું માન **A**ના માન કરતાં λ ગણું હોય છે. નવા સદિશની દિશા કાં તો **A**ની દિશામાં અથવા તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે, જે λ ધન કે ઋણ છે તેના પર આધાર રાખે છે.
4. બે સદિશો **A** તથા **B**ના સરવાળા માટે કાં તો શીર્ષથી પુચ્છની આલેખીય રીત અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતનો ઉપયોગ થાય છે.
5. સદિશોનો સરવાળો ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
તથા તે જૂથના નિયમનું પણ પાલન કરે છે એટલે કે,
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$
6. શૂન્ય સદિશ એક એવો સદિશ છે કે જેનું માન શૂન્ય હોય છે. તેનું માન શૂન્ય હોવાથી તેની સાથે દિશા દર્શાવવી જરૂરી નથી. તેના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$
7. સદિશ **B**ને **A**માંથી બાદ કરવો એટલે સદિશ **A**માં **–B** સદિશ ઉમેરવો.
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$
8. કોઈ સદિશ **A**ને તે જ સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **a** અને **b**ની દિશામાં બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે.
$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$
જ્યાં λ તથા μ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
9. સદિશ **A** સાથે સંકળાયેલ એકમ સદિશનું માન એક એકમ તથા દિશા સદિશ **A**ની દિશામાં હોય છે. એકમ સદિશ
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$
એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ એકમ માન ધરાવતાં સદિશ છે જેમની દિશાઓ અનુક્રમે જમણા હાથની યામપદ્ધતિની અક્ષો x, y તથા zની દિશામાં હોય છે.
10. સદિશ **A**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :
$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$
જ્યાં A_x, A_y અનુક્રમે x અને y-અક્ષોને અનુરૂપ **A**ના ઘટકો છે. જો સદિશ **A**, x-અક્ષની સાથે θ કોણ બનાવતો હોય, તો $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ તથા $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$
11. સદિશોનો સરવાળો બૈજિક રીત (Analytical Method)થી પણ સરળતાથી કરી શકાય છે. જો $x–y$ સમતલમાં બે સદિશો **A** તથા **B**નો સરવાળો **R** હોય, તો
$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$ તથા $R_y = A_y + B_y$
12. $x–y$ સમતલમાં કોઈ પદાર્થનો સ્થાનસદિશ આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે : $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ અને સ્થાન **r** થી સ્થાન **r'** સુધીનું સ્થાનાંતર આ મુજબ લખી શકાય,
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}$$

13. જો કોઈ પદાર્થ $\Delta\mathbf{r}$ સમયગાળામાં Δt જેટલું સ્થાનાંતર કરતો હોય, તો તેનો સરેરાશ વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ થશે. t સમયે પદાર્થનો વેગ, સરેરાશ વેગના મૂલ્યમાં $\Delta t \to 0$ લક્ષ લઈને મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$. તેને એકમ સદિશના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{j}} + \upsilon_z\hat{\mathbf{k}}$ જ્યાં $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$

જ્યારે કોઈ યામપદ્ધતિમાં પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવામાં આવે છે, ત્યારે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ ની દિશા પદાર્થના ગતિપથ દર્શાવતા વક્રના કોઈ બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

14. જો કોઈ પદાર્થનો વેગ Δt સમયગાળામાં $\boldsymbol{\upsilon}$ થી બદલાઈને $\boldsymbol{\upsilon}'$ થતો હોય, તો તેનો સરેરાશ પ્રવેગ : $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{\upsilon}' - \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$

t સમયે પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$, સરેરાશ પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$ના $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$$

ઘટકોના સ્વરૂપમાં, $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$

જ્યાં $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt}$

15. જો કોઈ પદાર્થ સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ થી ગતિ કરતો હોય તથા $t = 0$ સમયે તેનો સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}_0$ હોય, તો t સમયે તે જે બિંદુ પાસે હશે તેનો સ્થાનસદિશ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

અને તેનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$

જ્યાં $\boldsymbol{\upsilon}_0$ એ $t = 0$ સમયે તેનો વેગ છે.

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$$

કોઈ સમતલમાં અચળ પ્રવેગી ગતિ પરસ્પર લંબરૂપે બે દિશાઓમાં એક સાથે થતી એક પારિમાણિક સ્વતંત્ર ગતિઓના સંયોજન સ્વરૂપમાં જોઈ શકાય છે.

16. કોઈ ફેંકાયેલો પદાર્થ ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહેવાય છે. જો x-અક્ષ સાથે θ_0 કોણે વસ્તુનો પ્રારંભિક વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ હોય અને જો પદાર્થની પ્રારંભિક સ્થિતિ, યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ સાથે સંપાત (Coincide) થતી હોય, તો t સમયે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનું સ્થાન અને વેગ નીચે પ્રમાણે આપી શકાય :

$$x = (\upsilon_0 \cos\theta_0)\, t$$

$$y = (\upsilon_0 \sin\theta_0)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta_0 - g\, t$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે જેનું સમીકરણ

$$y = (\tan\theta_0)\, x - \frac{gx^2}{2(\upsilon_0 \cos\theta_0)^2} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$$

તે ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે લાગતો સમય

$$t_m = \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા તેના પ્રારંભિક સ્થાનથી તેના પતન દરમિયાન $y = 0$માંથી પસાર થાય ત્યાં સુધી કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને અવધિ R કહે છે.

આમ, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ $R = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\,\theta_0$.

17. જ્યારે કોઈ પદાર્થ વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપથી ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેની ગતિને નિયમિત વર્તુળગતિ કહે છે. તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય $a_c = \upsilon^2/R$. a_cની દિશા હંમેશાં વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની હોય છે. કોણીય સ્થાનમાં થતાં ફેરફારના સમય-દરને કોણીય ઝડપ ω કહે છે. તે રેખીય વેગ υ સાથે $\upsilon = \omega R$ સૂત્ર દ્વારા સંકળાયેલ છે. પ્રવેગ $a_c = \omega^2 R$.
જો પદાર્થના પરિભ્રમણનો સમય T હોય અને વર્તુળાકાર પથ પર આવૃત્તિ ν હોય, તો $\omega = 2\pi\nu$, $\upsilon = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$.

ભૌતિકરાશિ	સંજ્ઞા	પારિમાણિક સૂત્ર	એકમ	નોંધ
સ્થાનસદિશ	**r**	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
સ્થાનાંતર	$\Delta \mathbf{r}$	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
વેગ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$			$= \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	$\boldsymbol{\upsilon}$			$= \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, સદિશ
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\mathbf{a}}$			$= \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	**a**			$= \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$, સદિશ
પ્રક્ષિપ્ત ગતિ				
(a) મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય	t_m	[T]	s	$= \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g}$
(b) મહત્તમ ઊંચાઈ	h_m	[L]	m	$= \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ	R	[L]	m	$= \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
વર્તુળગતિ				
(a) કોણીય ઝડપ	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{r}$
(b) કેન્દ્રગામી પ્રવેગ	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$= \frac{\upsilon^2}{r}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ પદાર્થ દ્વારા બે બિંદુઓ વચ્ચેની પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરના માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતર ફક્ત ગતિપથનાં અંતિમ બિંદુઓ પર આધાર રાખે છે. જ્યારે પથલંબાઈ (નામ પરથી જ સ્પષ્ટ છે) વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખે છે. બંને રાશિઓ ત્યારે જ સમાન હશે જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમ્યાન પોતાની દિશા બદલતો ન હોય. આ સિવાય અન્ય સ્થિતિઓમાં પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના મૂલ્ય કરતાં વધારે હોય છે.
2. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 1ના સંદર્ભે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ કોઈ આપેલ સમયગાળામાં કાં તો સરેરાશ વેગના મૂલ્ય જેટલી કે તેના કરતાં વધારે હશે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરના મૂલ્ય સમાન હોય ત્યારે બંને સમાન મળે છે.
3. સદિશ સમીકરણ (4.33a) તથા (4.34a) અક્ષોની પસંદગી પર આધાર રાખતી નથી. ચોક્કસ તમે તેને બે સ્વતંત્ર અક્ષો પર વિભાજિત કરી શકો છો.
4. અચળ પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો નિયમિત વર્તુળગતિ માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ. કારણ કે તેમાં પ્રવેગનું માન અચળ હોય છે પરંતુ દિશા સતત બદલાતી રહે છે.
5. જો કોઈ પદાર્થના બે વેગ $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ હોય, તો તેનો પરિણામી વેગ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ થશે. ઉપર્યુક્ત સૂત્ર તથા પદાર્થ 2 ની સાપેક્ષે પદાર્થ 1 નો વેગ એટલે કે $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ વચ્ચેનો ભેદ બરાબર ઓળખો. અહીં $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમની સાપેક્ષે વેગ છે.
6. વર્તુળાકાર ગતિમાં પદાર્થનો પરિણામી પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય, તો જ તેની ઝડપ અચળ હોય.
7. કોઈ પદાર્થના ગતિપથનો આકાર માત્ર પ્રવેગથી જ નક્કી નથી થતો, પરંતુ તે ગતિની પ્રારંભિક સ્થિતિઓ (પ્રારંભિક સ્થાન તથા પ્રારંભિક વેગ) પર પણ આધાર રાખે છે. ઉદાહરણ તરીકે સમાન ગુરુત્વપ્રવેગથી ગતિ કરતાં કોઈ પદાર્થનો માર્ગ સુરેખ પથ પણ હોઈ શકે કે પરવલય પણ હોઈ શકે જે પ્રારંભિક સ્થિતિઓ પર આધાર રાખે છે.

સ્વાધ્યાય

4.1 નીચે આપેલી ભૌતિકરાશિઓમાંથી દર્શાવો કે કઈ સદિશ રાશિ છે અને કઈ અદિશ રાશિ છે :
કદ, દ્રવ્યમાન, ઝડપ, પ્રવેગ, ઘનતા, મોલસંખ્યા, વેગ, કોણીય આવૃત્તિ, સ્થાનાંતર, કોણીય વેગ

4.2 નીચે આપેલ યાદીમાંથી બે અદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
બળ, કોણીય વેગમાન, કાર્ય, વિદ્યુતપ્રવાહ, રેખીય વેગમાન, વિદ્યુતક્ષેત્ર, સરેરાશ વેગ, ચુંબકીય ચાકમાત્રા, સાપેક્ષ વેગ

4.3 નીચે આપેલ યાદીમાંથી ફક્ત સદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
તાપમાન, દબાણ, આઘાત, સમય, પાવર, કુલ પથલંબાઈ, ઊર્જા, ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન, ઘર્ષણાંક, વિદ્યુતભાર

4.4 કારણ સહિત જણાવો કે અદિશ તથા સદિશ રાશિઓ સાથે નીચે દર્શાવેલ કઈ પ્રક્રિયાઓ અર્થપૂર્ણ છે ?
(a) બે અદિશોનો સરવાળો (b) સમાન પરિમાણના એક સદિશ અને એક અદિશનો સરવાળો (c) એક સદિશનો એક અદિશ સાથે ગુણાકાર (d) બે અદિશોનો ગુણાકાર (e) બે સદિશોનો સરવાળો (f) એક સદિશના ઘટકનો તે જ સદિશ સાથે સરવાળો.

4.5 નીચે આપેલ પ્રત્યેક કથનને ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું :
(a) કોઈ સદિશનું મૂલ્ય હંમેશાં અદિશ હોય છે. (b) કોઈ સદિશનો દરેક ઘટક હંમેશાં અદિશ હોય છે. (c) કોઈ કણ દ્વારા કપાયેલ અંતરની કુલ પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતર સદિશના મૂલ્ય જેટલી હોય છે. (d) કોઈ કણની સરેરાશ ઝડપ (કુલ પથલંબાઈ ભાગ્યા તે પથ કાપવા લાગેલો સમય) સમાન સમયગાળામાં કણના સરેરાશ વેગના મૂલ્યથી વધારે કે તેના જેટલી હોય છે. (e) ત્રણ સદિશો કે જે એક જ સમતલમાં નથી તેનો સરવાળો કદાપી શૂન્ય સદિશ થતો નથી.

4.6 નીચે દર્શાવેલ અસમતાઓ ભૌમિતિક કે અન્ય કોઈ રીતે સાબિત કરો :
(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

તેમાં સમતાનું ચિહ્ન ક્યારે લાગુ પડે છે ?

4.7 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ આપેલ છે. નીચે આપેલ વિધાનોમાંથી કયું સાચું છે :

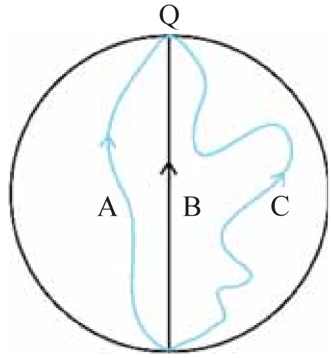
(a) **a, b, c** તથા **d** દરેક શૂન્ય સદિશ છે.

(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ નું મૂલ્ય $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ના મૂલ્ય જેટલું છે.

(c) **a**નું માન **b, c** તથા **d**ના માનના સરવાળાથી ક્યારેય વધારે ન હોઈ શકે.

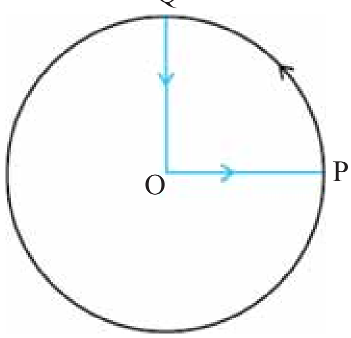
(d) જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ ન હોય તો **b** + **c**, **a** અને **d** વડે બનતા સમતલમાં હશે અને જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ હોય, તો તે **a** અને **d**ની રેખામાં હશે.

4.8 ત્રણ છોકરીઓ 200 m ત્રિજ્યાવાળી વર્તુળાકાર રિંગમાં બરફની સપાટી પર સ્કેટિંગ કરી રહી છે તે સપાટીની કિનારી પર બિંદુ Pથી સ્કેટિંગ શરૂ કરે છે તથા Pના વ્યાસાંત બિંદુ Q પર જુદા જુદા પથો પર થઈને આકૃતિ (4.20)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પહોંચે છે. દરેક છોકરીના સ્થાનાંતર સદિશનું માન કેટલું છે ? કઈ છોકરી માટે તેનું માન તેની મૂળ સ્કેટની પથલંબાઈ જેટલું થશે ?



આકૃતિ **4.20**

4.9 કોઈ સાઇકલ-સવાર 1 km ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાના કેન્દ્ર Oથી ગતિ શરૂ કરે છે તથા બગીચાના કિનારા P સુધી પહોંચે છે. ત્યાંથી તે બગીચાના પરિઘ પર સાઇકલ ચલાવતા ચલાવતા QO માર્ગે (આકૃતિ 4.21માં દર્શાવ્યા મુજબ) કેન્દ્ર O પર પાછો આવે છે. જો આ ચક્કર કાપવા માટે તેને 10 મિનિટ જેટલો સમય લાગતો હોય, તો સાઇકલ-સવારનું (a) ચોખ્ખું સ્થાનાંતર (b) સરેરાશ વેગ તથા (c) સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ **4.21**

4.10 એક ખુલ્લા મેદાનમાં એક કારચાલક એવો રસ્તો પકડે છે કે જે દરેક 500 મીટર અંતર બાદ તેની ડાબી બાજુ $60°$ના ખૂણે વળાંક લે છે. એક વળાંકથી શરૂ કરી, કારચાલકના ત્રીજા, છઠ્ઠા તથા આઠમા વળાંક પાસે સ્થાનાંતર શોધો. આ દરેક સ્થિતિમાં કારચાલકની કુલ પથ લંબાઈની તેના સ્થાનાંતરના માન સાથે તુલના કરો.

4.11 એક મુસાફર એક નવા શહેરમાં સ્ટેશન પર ઊતરીને ટેક્સી કરે છે. સ્ટેશનથી સુરેખ રોડ પર તેની હોટલ 10 km દૂર છે. ટેક્સી ડ્રાઇવર મુસાફરને 23 km લંબાઈના વાંકાચૂંકા માર્ગે 28 minમાં હોટલ પર પહોંચાડે છે, તો (a) ટેક્સીની સરેરાશ ઝડપ અને (b) સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? શું આ બંને સમાન હશે ?

4.12 વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 30 m s^{-1}ની ઝડપથી પડી રહ્યો છે. કોઈ સ્ત્રી ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશા તરફ 10 m s^{-1}ની ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહી છે. તેને પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?

4.13 એક વ્યક્તિ સ્થિર પાણીમાં 4.0 km/hની ઝડપથી તરી શકે છે. નદીનું પાણી 3.0 km/hની અચળ ઝડપથી વહી રહ્યું અને વ્યક્તિ આ વહેણને લંબરૂપે તરવાનો પ્રયત્ન કરતો હોય, તો જ્યારે તે નદીના બીજા કિનારે પહોંચશે ત્યારે તે નદીના વહેણ તરફ કેટલે દૂર પહોંચશે ?

4.14 એક બંદર (Harbour) પાસે હવા 72 km/h ઝડપથી વહી રહી છે. આ બંદરમાં ઊભેલી એક નૌકા ઉપર લગાવેલ ઝંડો N-E દિશામાં ફરકી રહ્યો છે. જો આ નૌકા ઉત્તર દિશામાં 51 km/hની ઝડપથી ગતિ કરવાનું શરૂ કરે, તો નૌકા પર લગાવેલ ઝંડો કઈ દિશામાં ફરકશે.

4.15 એક લાંબા હૉલની છત 25 m ઊંચી છે. 40 ms^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવેલ દડો છતને અથડાયા વગર પસાર થઈ શકે તે રીતે કેટલું મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર કાપશે ?

4.16 ક્રિકેટનો કોઈ ખેલાડી દડાને 100 m જેટલા મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર સુધી ફેંકી શકે છે. આ ખેલાડી આ જ દડાને જમીનથી ઉપર તરફ કેટલી ઊંચાઈ સુધી ફેંકી શકશે ?

4.17 80 cm લાંબા દોરડાના છેડે એક પથ્થર બાંધેલ છે તેને અચળ ઝડપથી સમક્ષિતિજ વર્તુળાકાર ફેરવવામાં આવે છે. જો પથ્થર 25 secમાં 14 પરિભ્રમણ પૂરા કરતો હોય, તો પથ્થરના પ્રવેગનું માન તથા તેની દિશા શોધો ?

4.18 એક વિમાન 900 km h^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઊડી રહ્યું છે અને 1.00 km ત્રિજ્યાનું સમક્ષિતિજ વર્તુળ બનાવે છે. તેના કેન્દ્રગામી પ્રવેગ ગુરુત્વીય પ્રવેગની સાથે સરખામણી કરો.

4.19 નીચે આપેલ વિધાનોને ધ્યાનથી વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચાં છે કે ખોટાં :

(a) વર્તુળ ગતિમાં કોઈ કણનો ચોખ્ખો પ્રવેગ હંમેશાં વર્તુળાકાર પથની ત્રિજ્યાની દિશામાં કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

(b) કોઈ બિંદુ પાસે કણનો વેગ હંમેશાં તે બિંદુ પાસેના પથની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

(c) નિયમિત વર્તુળ ગતિ કરતાં કણ માટે એક પરિભ્રમણ પર લીધેલ સરેરાશ પ્રવેગ 0 સદિશ હોય છે.

4.20 એક કણનો સ્થાનસદિશ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}\,\text{m}$$

જ્યાં t સેકન્ડમાં તથા દરેક સહગુણકનો એકમ એ રીતે છે કે જેથી r મીટરમાં મળે.

(a) કણનો $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{a}$ મેળવો. (b) t = 2.0 સેકન્ડે કણના વેગનું માન તથા દિશા શોધો.

4.21 કોઈ કણ t = 0 સમયે ઊગમબિંદુથી 10.0 $\hat{\mathbf{j}}$ m/sના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે અને xy સમતલમાં તેનો અચળ પ્રવેગ $(8.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m s^{-2} છે. તો (a) કયા સમયે તેનો x-યામ 16 m થશે ? આ સમયે તેનો y-યામ કેટલો હશે ? (b) આ સમયે તેની ઝડપ કેટલી હશે ?

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ તથા $\hat{\mathbf{j}}$ અનુક્રમે X અને Y-અક્ષ પરના એકમ સદિશ છે. સદિશો $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$નાં મૂલ્યો અને દિશા કઈ હશે ? સદિશ A = $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ના $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ની દિશાઓમાં ઘટક શોધો. (તમે આલેખીય રીતનો ઉપયોગ કરી શકો છો.)

4.23 અવકાશમાં કોઈ સ્વૈચ્છિક ગતિ માટે નીચે આપેલા સંબંધો પૈકી કયો સાચો છે ?

(a) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = (1/2)\,(\boldsymbol{\upsilon}(t_1) + \boldsymbol{\upsilon}(t_2))$

(b) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(c) $\boldsymbol{\upsilon}(t) = \boldsymbol{\upsilon}(0) + \boldsymbol{a}\,t$

(d) $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}(0) + \boldsymbol{\upsilon}(0)t + (1/2)\,\boldsymbol{a}t^2$

(e) $\boldsymbol{a}_{\text{સરેરાશ}} = [\boldsymbol{\upsilon}(t_2) - \boldsymbol{\upsilon}(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(અહીં 'સરેરાશ મૂલ્ય' t_1 થી t_2 સમયગાળા સાથે સંબંધિત ભૌતિકરાશિનું સરેરાશ મૂલ્ય છે.)

4.24 નીચે દર્શાવેલ દરેક વિધાન ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ તથા ઉદાહરણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું : અદિશ રાશિ તે છે કે જે

(a) કોઈ પ્રક્રિયામાં અચળ રહે છે.

(b) તે ક્યારેય ઋણ નથી હોતી.

(c) તે પરિમાણરહિત હોય છે.

(d) અવકાશમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ વચ્ચે બદલાતી નથી.

(e) તે દરેક અવલોકનકાર માટે એક મૂલ્ય હોય છે પછી ભલે તેના યામાક્ષોનાં નમન (Orientations) જુદાં હોય.

4.25 કોઈ વિમાન પૃથ્વીથી 3400 mની ઊંચાઈએ ઊડી રહ્યું છે. જો પૃથ્વી પરના કોઈ અવલોકન બિંદુ પાસે વિમાન દ્વારા 10 secમાં કપાયેલ અંતર 30°નો કોણ બનાવતું હોય, તો વિમાનની ઝડપ કેટલી હશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

4.26 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું અવકાશમાં તેને કોઈ સ્થાન હોય છે ? શું સમય સાથે તે બદલાઈ શકે ? શું અવકાશમાં જુદાંજુદાં સ્થાનો પાસે બે સમાન સદિશો **a** તથા **b** સમાન ભૌતિક અસર દર્શાવશે ? તમારા જવાબના સમર્થનમાં ઉદાહરણ આપો.

4.27 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ રાશિ જેને માન અને દિશા બંને હોય તે સદિશ જ હશે ? કોઈ વસ્તુનું પરિભ્રમણ, ભ્રમણાક્ષની દિશા તથા કોણીય સ્થાન વડે દર્શાવી શકાય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ પણ પરિભ્રમણ એક સદિશ છે ?

4.28 (a) કોઈ વર્તુળાકાર લૂપમાં વાળેલ તારની લંબાઈ (b) કોઈ સમતલ ક્ષેત્રફળ (c) કોઈ ગોળા સાથે સદિશને સાંકળી શકાય ? સમજાવો.

4.29 બંદૂકમાંથી સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના કોણે છોડેલી ગોળી જમીનને 3.0 km દૂર અથડાય છે. પ્રક્ષિપ્ત કોણનું મૂલ્ય ગોઠવીને આપણે 5.0 km દૂર આવેલા લક્ષ્ય પર ગોળી મારી શકીએ ? ગણતરી કરીને જણાવો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

4.30 એક ફાઇટર જેટ પ્લેન 1.5 kmની ઊંચાઈ પર 720 km/hની ઝડપથી સમક્ષિતિજ દિશામાં ઊડી રહ્યું છે. જો તે વિમાન વિરોધી તોપની બરાબર ઉપરથી પસાર થતું હોય, તો શિરોલંબ દિશા સાથે તોપના નાળચાનો ખૂણો કેટલો હોવો જોઈએ કે જેથી 600 m s^{-1}ની ઝડપથી છોડેલ ગોળો ફાઇટર પ્લેનને અથડાય ? ફાઇટર પ્લેનના પાઇલોટે લઘુતમ કેટલી ઊંચાઈએ પ્લેન ઉડાડવું જોઈએ કે જેથી તે ગોળાથી બચી શકે ? ($g = 10\ ms^{-2}$)

4.31 એક સાઇકલ-સવાર 27 km/h ની ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહ્યો છે. જેવો તે રસ્તા પર 80 m ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર વળાંક પર પહોંચે તેવો તે, બ્રેક લગાવી દરેક સેકન્ડે પોતાની ઝડપ 0.50 m/sના એક સમાન દરથી ઓછી કરે છે. વર્તુળાકાર પથ પર સાઇકલ-સવારના ચોખ્ખા પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધો.

4.32 (a) દર્શાવો કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ x-અક્ષ તથા તેના વેગ સદિશ વચ્ચે બનતો ખૂણો સમયના પદમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

(b) ઊગમબિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$

વડે અપાય છે તેમ સાબિત કરો. અહીં સંજ્ઞાઓને પ્રચલિત અર્થ છે.

પ્રકરણ 5

ગતિના નિયમો (Laws of Motion)

5.1 પ્રસ્તાવના
5.2 ઍરિસ્ટોટલની ભૂલભરેલી માન્યતા
5.3 જડત્વનો નિયમ
5.4 ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ
5.5 ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ
5.6 ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ
5.7 વેગમાનનું સંરક્ષણ
5.8 કણનું સંતુલન
5.9 યંત્રશાસ્ત્રમાં સામાન્ય બળો
5.10 વર્તુળાકાર ગતિ
5.11 યંત્રશાસ્ત્રમાં કોયડાઓ ઉકેલવા
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

5.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે અવકાશમાં કણની ગતિનું માત્રાત્મક વર્ણન કર્યું. આપણે જોયું કે નિયમિત (Uniform) ગતિના વર્ણન માટે માત્ર વેગનો ખ્યાલ જરૂરી છે, જ્યારે અનિયમિત (Non-uniform) ગતિ માટે તે ઉપરાંત પ્રવેગનો ખ્યાલ જરૂરી છે. હજી સુધી આપણે એવો પ્રશ્ન પૂછ્યો નથી કે પદાર્થોની ગતિનું નિયંત્રણ શાનાથી થાય છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે આ મૂળભૂત પ્રશ્ન પર આવીશું.

પ્રારંભમાં ચાલો આપણા સામાન્ય અનુભવ પર આધારિત જવાબનું અનુમાન કરીએ. સ્થિર રહેલા ફૂટબૉલને ખસેડવા કોઈકે તેને લાત (Kick) મારવી પડે. કોઈ પથ્થરને ઉપર ફેંકવા માટે કોઈકે તેને ઉપર તરફ ધકેલવો પડે. પવન વૃક્ષની ડાળીઓને ઝુલાવે છે; ભારે પવન ભારે પદાર્થોને પણ ખસેડી શકે છે. હલેસાં માર્યા વિના પણ નાવ વહેતી નદીમાં ગતિ કરે છે. સ્પષ્ટ રીતે, પદાર્થને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી બળ પૂરું પાડવા માટે કોઈક બાહ્ય પરિબળ જરૂરી છે. તે જ રીતે, ગતિને (વેગને) ધીમી પાડવા કે અટકાવવા માટે પણ બાહ્ય બળ જરૂરી છે. ઢાળ પરથી ગબડતા બૉલને તેની ગતિની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં બળ લગાડીને તમે અટકાવી શકો છો.

આ બધાં ઉદાહરણોમાં બળ લગાડતું બાહ્ય પરિબળ (હાથ, પવન, જલપ્રવાહ વગેરે) પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં છે. આમ, હોવું હંમેશ જરૂરી નથી. કોઈ મકાનની ટોચ પરથી મુક્ત કરેલો પથ્થર પૃથ્વીના ગુરુત્વીય ખેંચાણને લીધે નિમ્ન દિશામાં (અધોદિશામાં) પ્રવેગિત થાય છે. એક ગજિયો ચુંબક દૂરથી પણ એક લોખંડની ખીલીને આકર્ષી શકે છે. **આ દર્શાવે છે કે બાહ્ય પરિબળો (દા.ત., ગુરુત્વાકર્ષણ અને ચુંબકીય બળો) દૂરથી પણ પદાર્થ પર બળ લગાડી શકે છે.**

ટૂંકમાં, સ્થિર પદાર્થને ગતિમાં લાવવા અથવા ગતિમાન પદાર્થને અટકાવવા માટે બળ જરૂરી છે અને આવું બળ પૂરું પાડવા માટે કોઈક બાહ્ય પરિબળ જરૂરી છે. આ બાહ્ય પરિબળ પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં હોય પણ ખરું અથવા ન પણ હોય.

આ બધું તો બરાબર છે. પણ જો પદાર્થ નિયમિત ગતિ કરતો હોય (દા.ત., બરફના સમક્ષિતિજ ચોસલા પર અચળ ઝડપથી સુરેખ ગતિ કરતો સ્કેટર) તો શું ? **શું પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં રાખવા માટે બાહ્ય બળની જરૂર છે ?**

5.2 ઍરિસ્ટોટલની ભૂલભરેલી માન્યતા (ARISTOTLE'S FALLACY)

ઉપર દર્શાવેલ પ્રશ્ન સહેલો લાગે છે. તેમ છતાં તેનો જવાબ મળતાં વર્ષો થયાં હતાં. ખરેખર, આ પ્રશ્નનો ગૅલિલિયોએ સત્તરમી સદીમાં આપેલો સાચો જવાબ ન્યૂટનના યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો હતો, જેણે આધુનિક વિજ્ઞાનના જન્મનો સંકેત આપ્યો.

ગ્રીક ચિંતક, ઍરિસ્ટોટલ (ઈ.સ. પૂર્વે 384 - ઈ.સ. પૂર્વે 322) એવું માનતો હતો કે જો પદાર્થ ગતિમાં હોય, તો તેને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે કંઈક બાહ્ય અસર જરૂરી છે. આ મત મુજબ, દા.ત., ધનુષમાંથી છોડેલું તીર ઊડ્યા કરે છે કારણ કે, તીરની પાછળની હવા તેને ધકેલે જાય છે. આ મત, વિશ્વમાં પદાર્થોની ગતિ અંગે, ઍરિસ્ટોટલે વિકસાવેલ વિસ્તૃત વિચાર પદ્ધતિનો એક ભાગ હતો. ગતિ અંગેના ઍરિસ્ટોટલના મોટા ભાગના ખ્યાલો હવે અસત્ય હોવાનું જણાયું છે અને તેથી તે આપણને સ્પર્શતા નથી. અત્રે, આપણા હેતુ માટે ગતિ અંગેનો ઍરિસ્ટોટલનો નિયમ આમ લખાય : **પદાર્થને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાહ્ય બળ જરૂરી છે.**

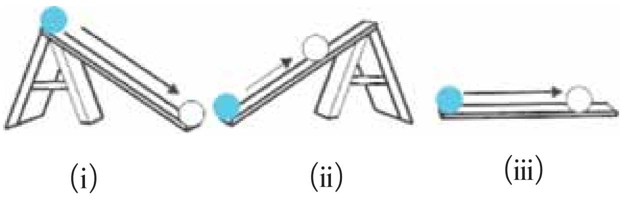
આપણે જોઈશું કે ગતિ અંગેનો ઍરિસ્ટોટલનો નિયમ ભૂલભરેલો છે. આમ છતાં કોઈ પણ વ્યક્તિ સામાન્ય અનુભવમાંથી જે અભિપ્રાય ધરાવે એવો એ સ્વાભાવિક અભિપ્રાય છે. એક નાનું બાળક પણ સાદી રમકડાની કાર (અવિદ્યુતીય) વડે રમતાં જાણે છે કે તે કારને જમીન પર ગતિમાં રાખવા માટે તેની સાથે જોડેલી દોરીને અમુક બળથી ખેંચતા રહેવું પડે છે. જો તે દોરીને છોડી દે છે તો કાર સ્થિર થાય છે. પૃથ્વી પર જોવા મળતી ગતિમાં આ એક સામાન્ય અનુભવ છે. પદાર્થોને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાહ્ય બળો જરૂરી હોય તેવું લાગે છે. જો પદાર્થોને માત્ર તેમના પર છોડી દેવામાં આવે તો બધા પદાર્થો અંતે તો સ્થિર થઈ જાય છે.

ઍરિસ્ટોટલની દલીલમાં ભૂલ કઈ છે ? જવાબ આ છે : ગતિ કરતી રમકડાની કાર સ્થિર થાય છે કારણ કે જમીન વડે કાર પર લાગતું ઘર્ષણનું બાહ્ય બળ તેની ગતિનો વિરોધ કરે છે. આ (ઘર્ષણ) બળનો સામનો કરવા માટે બાળકને ગતિની દિશામાં કાર પર બાહ્ય બળ લગાડવું પડે છે. જ્યારે કાર નિયમિત ગતિમાં હોય છે ત્યારે તેની પર કોઈ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું નથી : બાળક વડે લાગતું બળ, જમીન વડે લાગતા (ઘર્ષણ) બળને નાબૂદ કરે છે. આ પરથી એવું કહી શકાય કે, જો કોઈ ઘર્ષણ હોત જ નહિ તો કારને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાળકને કોઈ બળ લગાડવું પડત નહિ.

કુદરતી વિશ્વમાં, ઘર્ષણ (ઘન પદાર્થો માટે) અને શ્યાનતા (તરલ પદાર્થો માટે) જેવા ગતિનો વિરોધ કરનારાં બળો હંમેશાં હાજર હોય છે. આ પરથી પદાર્થોને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે, ઘર્ષણ બળોનો સામનો કરવા બાહ્ય પરિબળો વડે બળો લગાડવાનું કેમ જરૂરી છે તે સમજાય છે. હવે આપણને એ સમજાય કે ઍરિસ્ટોટલની ક્યાં ભૂલ થઈ. તેણે એક વ્યાવહારિક અનુભવને એક મૂળભૂત દલીલનું સ્વરૂપ આપ્યું. બળો અને ગતિ અંગેનો કુદરતનો સાચો નિયમ શું છે તે જાણવા માટે એવા વિશ્વની કલ્પના કરવી પડે કે જેમાં ગતિને અવરોધતા ઘર્ષણ બળો વગરની નિયમિત ગતિ શક્ય હોય. ગૅલિલિયોએ આમ જ કર્યું હતું.

5.3 જડત્વનો નિયમ (LAW OF INERTIA)

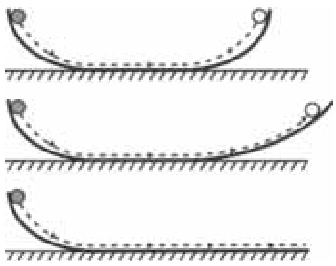
ગૅલિલિયોએ ઢળતા સમતલ પર પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ કર્યો. (i) ઢળતા સમતલ પર નીચે તરફ ગતિ કરતા પદાર્થો પ્રવેગિત થાય છે જ્યારે (ii) ઉપર તરફ ગતિ કરતા પદાર્થો પ્રતિપ્રવેગિત થાય છે. (iii) સમક્ષિતિજ સમતલ પરની ગતિ એ વચગાળાની સ્થિતિ છે. આ પરથી ગૅલિલિયોએ એવો નિષ્કર્ષ તારવ્યો કે ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સમતલ પર ગતિ કરતા પદાર્થને પ્રવેગ કે પ્રતિપ્રવેગ એકેય હોઈ જ ન શકે, એટલે કે તે અચળ વેગથી ગતિ કરતો હોવો જોઈએ. (આકૃતિ 5.1(a))



આકૃતિ 5.1(a)

આ જ નિષ્કર્ષ તરફ દોરી જતા ગૅલિલિયોના એકબીજા પ્રયોગમાં બે ઢળતા સમતલો વપરાય છે. એક સમતલ પર સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરેલ બૉલ ગબડીને નીચે આવે છે અને બીજા સમતલ પર ચઢે છે. જો ઢળતા સમતલની સપાટીઓ લીસી હોય તો બૉલે પ્રાપ્ત કરેલી અંતિમ ઊંચાઈ લગભગ મૂળ ઊંચાઈ જેટલી હોય છે. (સહેજ ઓછી પણ કદી વધારે તો નહિ જ.) આદર્શ પરિસ્થિતિમાં જ્યારે ઘર્ષણ ગેરહાજર હોય ત્યારે બૉલને મળતી અંતિમ ઊંચાઈ પ્રારંભિક ઊંચાઈ જેટલી જ હોય.

જો બીજા સમતલનો ઢાળ ઓછો રાખવામાં આવે તો પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરતાં બૉલ હજીય તેટલી જ ઊંચાઈએ પહોંચે છે પરંતુ આમ કરવામાં તે વધારે લાંબું અંતર કાપે છે. સીમાંત કિસ્સામાં જ્યારે બીજા સમતલનો ઢાળ શૂન્ય બને છે (એટલે કે, સમતલ સમક્ષિતિજ બને છે) ત્યારે બૉલ અનંત અંતર કાપે છે. બીજા શબ્દોમાં તેની ગતિ ક્યારેય અટકતી નથી. અલબત્ત, આ એક આદર્શ પરિસ્થિતિ છે. (આકૃતિ 5.1(b))



આકૃતિ 5.1(b) ગૅલિલિયોએ બે ઢળતાં સમતલો પર બૉલની ગતિનાં અવલોકનો પરથી જડત્વનો નિયમ તારવ્યો હતો

વ્યવહારમાં, સમક્ષિતિજ સમતલ પર બૉલ અમુક નિશ્ચિત અંતર કાપીને સ્થિર થાય છે, તેનું કારણ ગતિનો વિરોધ કરતું ઘર્ષણ બળ છે, જેને કદી સંપૂર્ણતઃ નિવારી શકાતું નથી. આમ છતાં, જો ઘર્ષણ ન હોત, તો સમક્ષિતિજ સમતલ પર બૉલ અચળ વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખત.

આમ, ગૅલિલિયોએ ગતિ અંગે ઊંડી સમજ મેળવી જે ઍરિસ્ટોટલ અને તેના અનુયાયીઓને મળી ન હતી. સ્થિર અવસ્થા અને નિયમિત સુરેખ ગતિ (અચળ વેગ સાથેની ગતિ)ની અવસ્થા બંને સમતુલ્ય છે. બંને કિસ્સાઓમાં, પદાર્થ પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી, Net) બળ લાગતું નથી. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે ચોખ્ખા (પરિણામી, Net) બળની જરૂર છે એમ માની લેવું સાચું નથી. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે ઘર્ષણનો સામનો કરવા માટે આપણે બાહ્ય બળ લગાડવું પડે છે કે જેથી બંને બળોનો સરવાળો થઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય બને.

ટૂંકમાં, જો ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો સ્થિર પદાર્થ સ્થિર જ રહે છે અને ગતિમાન પદાર્થ નિયમિત વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખે છે. પદાર્થના આ ગુણધર્મને જડત્વ કહે છે. જડત્વ એટલે **'ફેરફારનો વિરોધ'**. પદાર્થ તેની સ્થિર અવસ્થા કે નિયમિત ગતિની અવસ્થા બદલતો નથી, સિવાય કે કોઈ બાહ્ય બળ તેને તે અવસ્થા બદલવા માટે ફરજ પાડે.

5.4 ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ (NEWTON'S FIRST LAW OF MOTION)

ગૅલિલિયોના સાદા પરંતુ ક્રાંતિકારી વિચારોએ ઍરિસ્ટોટેલિયન યંત્રશાસ્ત્રનું સામ્રાજ્ય ખતમ કર્યું. એક નવું યંત્રશાસ્ત્ર વિકસાવવું પડ્યું. આ કાર્ય સર્વકાલિન મહાન વૈજ્ઞાનિકોમાંના એક એવા આઈઝૅક ન્યૂટને લગભગ એકલે હાથે પાર પાડ્યું.

ન્યૂટને ગૅલિલિયોના વિચારોથી શરૂઆત કરીને, યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો નાંખનાર ગતિના ત્રણ નિયમો આપ્યા, જે તેના નામથી ઓળખાય છે. ગૅલિલિયોનો જડત્વનો નિયમ એ તેનું આરંભ બિંદુ હતો, જેને તેણે **ગતિના પહેલા નિયમ** તરીકે રજૂ કર્યો :

દરેક પદાર્થ તેની સ્થિર અવસ્થા અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિની અવસ્થા જાળવી રાખે છે સિવાય કે કોઈ બાહ્ય બળ તેને અન્ય કંઈક કરવાની ફરજ પાડે.

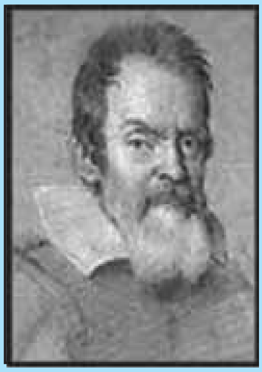
સ્થિર અવસ્થા અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિની અવસ્થા, બંને શૂન્ય પ્રવેગ દર્શાવે છે. આથી ગતિનો પહેલો નિયમ સરળ રીતે આ પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય : **જો પદાર્થ પર ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે. જો પદાર્થ પર ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું હોય, તો જ તેનો પ્રવેગ અશૂન્ય હોય છે.**

આ નિયમોના વ્યાવહારિક ઉપયોગમાં બે પ્રકારની પરિસ્થિતિઓનો સામનો કરવો પડે છે. કેટલાક કિસ્સાઓમાં આપણે જાણીએ છીએ કે, પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. આવા કિસ્સામાં આપણે એવો નિર્ણય કરીએ છીએ કે પદાર્થનો પ્રવેગ શૂન્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, બીજા બધા પદાર્થોથી દૂર અને પોતાનાં રૉકેટો બંધ કરેલાં હોય તેવું, અવકાશયાન બાહ્ય અવકાશમાં હોય ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું નથી. પહેલા નિયમ મુજબ તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવો જોઈએ. જો તે ગતિમાં હોય તો નિયમિત વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ જ રાખવું જોઈએ.

પ્રાચીન ભારતીય વિજ્ઞાનમાં ગતિ અંગેના ખ્યાલો

પ્રાચીન ભારતીય ચિંતકો ગતિ અંગેની એક વિસ્તૃત વિચારપદ્ધતિ પર પહોંચ્યા હતા. બળ કે જે ગતિનું કારણ છે તે, જુદા જુદા પ્રકારોનું માનવામાં આવતું : સતત દબાણના કારણે ઉદ્‌ભવતું બળ (નોદાન) જેમ કે તરતા વહાણ પર લાગતું પવનનું બળ, આઘાત (અભિઘાટ) જેમકે કુંભારનો સળિયો ચાકડાને અથડાય છે, સુરેખામાં ગતિ કરવાનું (વેગ) સતત વલણ (સંસ્કાર), સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થમાં આકારની પુનઃસ્થાપના, દોરી, સળિયો વગેરે દ્વારા બળનું સંચારણ. વૈસેસિકા નામના ગતિના સિદ્ધાંતમાં વેગનો ખ્યાલ કદાચ જડત્વના ખ્યાલની સૌથી નજીક છે. વેગ, જે સુરેખામાં ગતિનું વલણ છે તે, વાતાવરણ સહિત પદાર્થો સાથેના સંપર્ક વડે અવરોધાય છે. આ ખ્યાલ ઘર્ષણ અને હવાના અવરોધના ખ્યાલ જેવો જ છે. વિસ્તૃત પદાર્થની જુદા જુદા પ્રકારની ગતિ (સ્થાનાંતરિત, ચાક અને દોલન) માત્ર તેના ઘટક કણોની સ્થાનાંતરિત ગતિમાંથી ઉદ્‌ભવે છે તેમ સાચી રીતે જ દર્શાવાયું હતું. એક પાંદડું પવનમાં પડે ત્યારે સમગ્રપણે અધોદિશામાં ગતિ કરે (પતન) અને તેને ચાકગતિ અને દોલનગતિ (ભ્રમણ, સ્પંદન) પણ હોય, પરંતુ પાંદડાના દરેક કણને આપેલી ક્ષણે જ નિશ્ચિત (નાનું) સ્થાનાંતર હોય છે. ગતિનાં માપ તેમજ લંબાઈ અને સમયના એકમો અંગે ભારતીયોએ સારું એવું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરેલું હતું. અવકાશમાં પદાર્થનું સ્થાન ત્રણ અક્ષોની દિશામાં માપેલાં અંતરો પરથી દર્શાવી શકાય છે એમ જાણીતું હતું. ભાસ્કર (ઈ.સ. 1150) દ્વારા 'તાત્ક્ષણિક ગતિ'નો ખ્યાલ રજૂ થયો હતો. જે, વિકલ કલનશાસ્ત્ર પરથી મળતા તાત્ક્ષણિક વેગના આધુનિક વિચારની અગમ જાણકારી સમાન હતો. તરંગ અને જલપ્રવાહ વચ્ચેનું અંતર સ્પષ્ટ રીતે સમજાયેલું હતું : પ્રવાહ એ ગુરુત્વ અને તરલતાની અસર નીચે પાણીના કણોની ગતિ છે, જ્યારે તરંગ તો પાણીના કણોનાં દોલનોના સંચારથી પરિણમે છે.

ગૅલિલિયો ગૅલિલી (1564-1642)



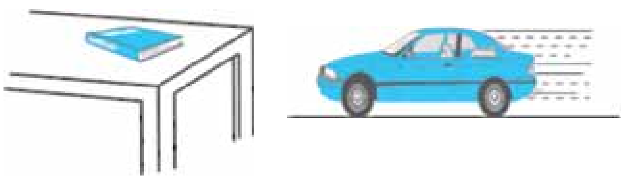
ઈટલીના પીસા શહેરમાં ઈ.સ. 1564માં જન્મેલ ગૅલિલિયો ચાર સદી અગાઉ યુરોપમાં થયેલ વૈજ્ઞાનિક ક્રાંતિનો પ્રણેતા હતો. ગૅલિલિયોએ ઢળતા સમતલો પર ગતિ કરતા અથવા મુક્ત પતન કરતા પદાર્થોના અભ્યાસ પરથી પ્રવેગનો ખ્યાલ રજૂ કર્યો. તેણે ઍરિસ્ટોટલના એવા મતનું ખંડન કર્યું કે ગતિ ચાલુ રાખવા માટે બળની જરૂર છે અને ગુરુત્વાકર્ષણની અસર હેઠળ ભારે પદાર્થો હલકા પદાર્થો કરતાં વધુ ઝડપથી પડે છે. આમ, તેણે જડત્વનો નિયમ મેળવ્યો, જે ત્યાર પછી ન્યૂટનના યુગપ્રવર્તક કાર્યનું આરંભબિંદુ હતો.

ખગોળશાસ્ત્રમાં પણ ગૅલિલિયોની શોધો એટલી જ ક્રાંતિકારી હતી. 1609માં તેણે પોતાનું ટેલિસ્કૉપ બનાવ્યું. (અગાઉ તે હોલૅન્ડમાં શોધાયેલું હતું.) અને સંખ્યાબંધ આશ્ચર્યકારક અવલોકનો કરવા માટે તેનો ઉપયોગ કર્યો : ચંદ્રની સપાટી પરના પર્વતો અને ખીણો, સૂર્ય પરનાં કાળાં ધાબાં, ગુરુના ચંદ્રો અને શુક્રની કળાઓ. તેણે એવો નિષ્કર્ષ મેળવ્યો કે આકાશગંગાની પ્રકાશિતતા, નરી આંખે ન જોઈ શકાતા અસંખ્ય તારાઓમાંથી આવતા પ્રકાશને આભારી છે. વૈજ્ઞાનિક તર્કનું કૌશલ્ય ધરાવતી તેની ઉત્તમ રચના : "Dialogue on the Two Chief World Systems"માં ગૅલિલિયોએ, કૉપરનિક્સ દ્વારા સૂર્યમંડળ માટે રજૂ થયેલ ''સૂર્ય-કેન્દ્રીવાદ''નું સમર્થન કર્યું જે આજે પણ સાર્વત્રિક સ્વીકૃતિ પામેલ છે.

ગૅલિલિયો સાથે વૈજ્ઞાનિક શોધખોળની મૂળ પદ્ધતિમાં વળાંક આવ્યો. વિજ્ઞાન એ માત્ર કુદરતનાં અવલોકનો અને તેમાંથી મળતાં અનુમાનો જ રહ્યું ન હતું. વિજ્ઞાનમાં સિદ્ધાંતોને ચકાસવા માટે અથવા નકારવા માટે પ્રયોગો રચવાના અને કરવાના પણ હોય. વિજ્ઞાનમાં રાશિઓની માપણી કરવાની અને તેમની વચ્ચે ગાણિતિક સંબંધો શોધવાના હોય. ગૅલિલિયોને ઘણા લોકો આધુનિક વિજ્ઞાનનો પિતા કહે છે તે અયોગ્ય નથી.

જોકે, ઘણી વાર આપણને પ્રારંભમાં બધાં બળોની ખબર હોતી નથી, એ કિસ્સામાં જો આપણને ખબર પડે કે પદાર્થ પ્રવેગિત નથી. (એટલે કે કાં તો સ્થિર છે અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિમાં છે) તો આપણે પહેલા નિયમ પરથી એવું અનુમાન કરી શકીએ કે પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું જ જોઈએ. ગુરુત્વાકર્ષણ દરેક સ્થળે છે. ખાસ તો, પૃથ્વી પરની ઘટનાઓમાં દરેક પદાર્થ પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અનુભવે છે. વળી ગતિમાં રહેલા પદાર્થો સામાન્યતઃ ઘર્ષણ, શ્યાનતા બળ વગેરે અનુભવે છે. તેથી જો પૃથ્વી પર કોઈ પદાર્થ સ્થિર હોય કે નિયમિત સુરેખ ગતિમાં હોય તો, તે એટલા માટે નહિ કે તેના પર કોઈ બળો લાગતાં નથી પણ એટલા માટે કે તેની પર લાગતાં જુદાં જુદાં બાહ્ય બળો નાબૂદ થાય છે. એટલે કે કુલ થઈને ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય બને છે.

એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર સ્થિર રહેલા એક પુસ્તકનો વિચાર કરો. [આકૃતિ 5.2(a)] તેનાં પર બે બાહ્ય બળો લાગે છે. ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે લાગતું બળ (એટલે કે તેનું વજન W) અધોદિશામાં અને ટેબલ દ્વારા પુસ્તક પર લાગતું ઊર્ધ્વદિશામાંનું બળ, લંબબળ R. R એ સ્વનિયમન કરતું બળ છે. ઉપર દર્શાવેલ જેવી પરિસ્થિતિનું આ ઉદાહરણ છે. બળો પૂરેપૂરાં જાણીતાં નથી પરંતુ ગતિની અવસ્થા જાણીતી છે. આપણે પુસ્તક સ્થિર હોવાનું અવલોકન કરીએ છીએ. તેથી આપણે પહેલા નિયમ પરથી નિર્ણય કરીએ છીએ કે Rનું માન Wના માન જેટલું છે. ઘણી વાર એવું વિધાન જોવા મળે છે કે, ''W = R હોવાથી, બળો નાબૂદ થાય છે અને તેથી પુસ્તક સ્થિર રહે છે.'' આ તર્ક અસત્ય છે. સાચું વિધાન આ છે : ''પુસ્તક સ્થિર હોવાનું જણાતાં પહેલા નિયમ મુજબ તેના પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું જ જોઈએ. આ દર્શાવે છે કે લંબબળ R વજન Wના જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવું જોઈએ.''



(a) (b)

આકૃતિ 5.2 (a) *ટેબલ પર સ્થિર રહેલું પુસ્તક* (b) *નિયમિત વેગથી ગતિ કરતી કાર. દરેક કિસ્સામાં ચોખ્ખું બળ શૂન્ય છે.*

સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરી, ઝડપ પ્રાપ્ત કરતી અને પછી સીધી, લીસી સડક પર નિયમિત ઝડપથી ગતિ કરતી કારનો વિચાર કરો. [આકૃતિ 5.2(b)] જ્યારે કાર સ્થિર હોય ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું બળ લાગતું નથી. જ્યારે તે ઝડપ પકડે છે ત્યારે તે પ્રવેગિત થાય છે. આવું કોઈ ચોખ્ખા બાહ્ય બળને લીધે જ બનવું જોઈએ. તે બાહ્ય બળ જ હોવું જોઈએ તે બરાબર નોંધો. કારનો પ્રવેગ કોઈ પણ આંતરિક બળ દ્વારા ગણી શકાય નહિ. આ બાબત કદાચ આશ્ચર્યજનક લાગે પણ તે સાચી છે. સડકને સમાંતર કોઈ પણ વિચારી શકાય તેવું બળ હોય તો એ ઘર્ષણબળ છે. આ ઘર્ષણબળ જ કારને સમગ્રપણે પ્રવેગિત કરે છે. (તમે ઘર્ષણ અંગે પરિચ્છેદ 5.9માં શીખશો.) જ્યારે કાર અચળ વેગથી ગતિ કરે છે ત્યારે કોઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું નથી.

પહેલા નિયમમાં સમાયેલો પદાર્થના જડત્વનો ગુણધર્મ કેટલીક પરિસ્થિતિઓમાં સ્પષ્ટ જણાય છે. ધારો કે આપણે એક સ્થિર બસમાં ઊભા છીએ અને ડ્રાઈવર બસને એકાએક ચાલુ કરે છે. એક ધક્કા સાથે આપણે પાછળની તરફ ફેંકાઈએ છીએ. આમ કેમ ? આપણા પગ બસના તળિયાના સંપર્કમાં છે. જો ઘર્ષણ ન હોત તો આપણે જ્યાં હતાં ત્યાં જ રહેત અને બસનું તળિયું આપણા પગ નીચે આગળ ખસત અને બસનો પાછળનો ભાગ આપણને અથડાત. જોકે સદ્નસીબે પગ અને બસના તળિયા વચ્ચે થોડું ઘર્ષણ હોય છે. જો બસનું ચાલુ થવું બહુ એકાએક ન હોત, એટલે કે પ્રવેગ બહુ ઓછો હોત તો ઘર્ષણબળ આપણા પગને બસની સાથે પ્રવેગિત કરવા માટે પૂરતું હોત. પરંતુ આપણું શરીર સંપૂર્ણપણે એક દૃઢ પદાર્થ નથી. તે વિરુપિત થઈ શકે તેવું છે. એટલે કે તે તેના જુદા જુદા ભાગો વચ્ચે થોડી સાપેક્ષ ગતિ થવા દે છે. આનો અર્થ એ કે જ્યારે આપણા પગ બસની સાથે જાય છે ત્યારે શરીરનો બાકીનો ભાગ જડત્વને લીધે જ્યાં હોય ત્યાં જ રહે છે. તેથી બસની સાપેક્ષે આપણે પાછળ ધકેલાઈએ છીએ. જોકે આવું થાય કે તરત બાકીના શરીર પર સ્નાયુ વડે (પગ વડે) લાગતાં બળો પોતાનો ભાગ ભજવે છે અને શરીરને બસની સાથે ગતિ કરાવે છે. જ્યારે બસ એકાએક અટકે છે ત્યારે પણ આવું જ થાય છે. આપણા પગ ઘર્ષણ, કે જે પગ અને બસના તળિયા વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ થવા દેતું નથી, તેને લીધે અટકે છે. પરંતુ બાકીનું શરીર જડત્વને લીધે આગળ ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખે છે. આમ, આપણે આગળ ધકેલાઈએ છીએ. ફરીથી સ્નાયુ વડે લાગતાં બળો પોતાનો ભાગ ભજવે છે અને શરીરને સ્થિર સ્થિતિમાં લાવે છે.

▶ *ઉદાહરણ 5.1* 100 m s^{-2}ના અચળ પ્રવેગથી બાહ્ય અવકાશમાં ગતિ કરતા એક નાના અવકાશયાનમાંથી એકાએક અવકાશયાત્રી છૂટો પડે છે. અવકાશયાનની બહાર આવ્યા પછીની ક્ષણે તેનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? (એવું ધારો કે નજીકમાં તેના પર ગુરુત્વબળ લગાડતા કોઈ તારાઓ હાજર નથી.)

ઉકેલ તેની પર ગુરુત્વબળ લગાડતા કોઈ તારા નજીકમાં નથી અને નાનું અવકાશયાન તેના પર અવગણ્ય ગુરુત્વાકર્ષણ લગાડે તેથી અવકાશયાનમાંથી બહાર નીકળતાં તેના પરનું કુલ (ચોખ્ખું) બળ શૂન્ય છે. ગતિના પહેલા નિયમ મુજબ અવકાશયાત્રીનો પ્રવેગ શૂન્ય છે. ◀

5.5 ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (NEWTON'S SECOND LAW OF MOTION)

ગતિનો પહેલો નિયમ, જ્યારે પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તેવા સાદા કિસ્સાની વાત કરે છે. ગતિનો બીજો નિયમ, જ્યારે પદાર્થ પર કંઈક ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું હોય તેવા વ્યાપક કિસ્સા વિશે જણાવે છે. તે ચોખ્ખા બાહ્ય બળને પદાર્થના પ્રવેગ સાથે સંબંધિત કરે છે.

વેગમાન (Momentum) : પદાર્થનું વેગમાન તેના દળ m અને વેગ $\mathbf{v}$ના ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે અને તેને $\mathbf{p}$ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (5.1)$$

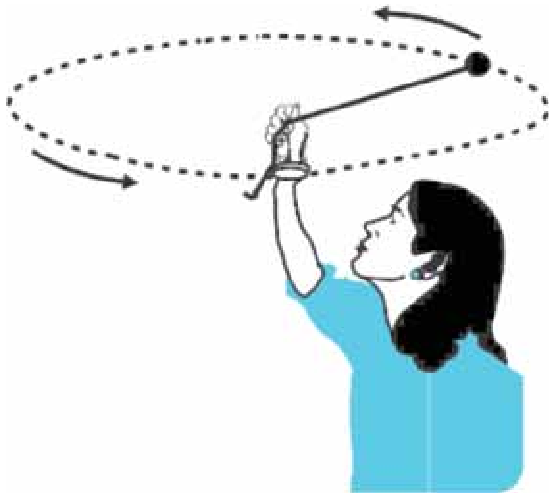
સ્પષ્ટ છે કે વેગમાન એ સદિશ રાશિ છે. નીચેના સામાન્ય અનુભવો, ગતિ પર બળની અસર અંગે વિચારણા કરવામાં, આ રાશિનું મહત્ત્વ દર્શાવે છે.

- ધારો કે એક હલકા વજનનું વાહન (દા.ત., નાની કાર) અને એક ભારે વજનનું વાહન (દા.ત., વજન ભરેલી ટ્રક) એક સમક્ષિતિજ રસ્તા પર રહેલા છે. આપણે સૌ જાણીએ છીએ કે, એકસમાન સમયમાં એક સમાન ઝડપમાં લાવવા માટે કાર કરતાં ટ્રકને વધારે બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. તે જ રીતે જો તેઓ સમાન ઝડપથી ગતિ કરતા હોય તો એકસમાન સમયમાં તેમને અટકાવવા માટે હલકા પદાર્થ કરતાં ભારે પદાર્થને વધારે (મોટા) અવરોધક બળની જરૂર પડે છે.
- એક હલકો અને એક ભારે એમ બે પથ્થર એક મકાનની ટોચ પરથી પડવા દેવામાં આવે તો જમીન પરની વ્યક્તિને ભારે કરતાં હલકા પથ્થરને ઝીલવાનું સહેલું જણાય છે. આમ પદાર્થની ગતિ પર બળની અસર નક્કી કરવામાં તેનું દળ પણ એક અગત્યનો પ્રાચલ (Parameter) છે.
- ઝડપ એ ધ્યાનમાં લેવાનો અન્ય અગત્યનો પ્રાચલ છે. બંદૂકમાંથી છૂટેલી બુલિટ (ગોળી) અટકતાં પહેલાં માનવશરીરની પેશીઓને સહેલાઈથી વીંધી શકે છે. જેનાથી મોત પણ નીપજે છે. તે જ બુલિટને મર્યાદિત ઝડપથી ફેંકવામાં આવે તો તે બહુ નુકસાન કરી શકતી નથી. આમ, આપેલા દળ માટે જો ઝડપ વધુ હોય તો ચોક્કસ સમયમાં તે પદાર્થને અટકાવવા માટે મોટા અવરોધક બળની જરૂર પડે છે. દળ અને વેગને એક સાથે લેતાં તેમનો ગુણાકાર એટલે કે વેગમાન એ ગતિનો એક મહત્ત્વનો પ્રાચલ છે. આપેલા સમયમાં વેગમાનમાં વધારે ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે વધારે મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે.
- એક અનુભવી ક્રિકેટર વધુ ઝડપે આવતા ક્રિકેટ બૉલને ઘણી સહેલાઈથી ઝીલે છે, જ્યારે આ કાર્યમાં કોઈ શિખાઉ ખેલાડીનો હાથ ઈજાગ્રસ્ત થઈ શકે છે. એક કારણ એ છે કે, અનુભવી ક્રિકેટર બૉલને અટકાવવા માટે વધારે સમય આપે છે. તમે નોંધ્યું હશે કે તે બૉલને ઝીલવાની ક્રિયામાં તેના હાથને પાછળની તરફ ખેંચે છે (આકૃતિ 5.3) જ્યારે શિખાઉ ખેલાડી તેના હાથ સ્થિર રાખીને બૉલને તત્કાળ ઝીલવાનો પ્રયત્ન કરે છે. બૉલને તત્કાળ અટકાવવા માટે તેને વધુ મોટા બળની જરૂર પડે છે અને આમાં તેને ઈજા થાય છે. આનો નિષ્કર્ષ સ્પષ્ટ છે : બળ માત્ર વેગમાનના

ફેરફાર પર આધારિત નથી પણ એ ફેરફાર કેટલો ઝડપથી કરવામાં આવે છે તેના પર પણ આધારિત છે. ઓછા સમયમાં વેગમાનમાં અમુક નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે વધુ મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. ટૂંકમાં, વેગમાનના ફેરફારનો દર મોટો હોય, તો બળ પણ મોટું હોય.

આકૃતિ 5.3 *બળ વેગમાનના માત્ર ફેરફાર પર આધારિત નથી પરંતુ તે ફેરફાર કેટલી ઝડપથી કરવામાં આવે છે તેના પર પણ આધારિત છે. અનુભવી ક્રિકેટર દડાને ઝીલવા દરમિયાન તેના હાથ પાછા ખેંચે છે અને દડાને અટકવામાં વધારે સમય લાગવા દે છે. આમ તેને નાના બળની જરૂર પડે છે.*

- અવલોકનો પુષ્ટિ કરે છે કે દળ અને વેગનો ગુણાકાર (એટલે કે વેગમાન), ગતિ પર બળની અસર ઊપજાવવામાં પાયાની બાબત છે. જો પ્રારંભમાં સ્થિર એવા બે જુદા જુદા દળના પદાર્થો પર એક નિશ્ચિત બળ નિશ્ચિત સમયગાળા માટે લગાડવામાં આવે તો હલકો પદાર્થ ભારે પદાર્થ કરતાં વધારે ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે. પરંતુ અવલોકનો દર્શાવે છે કે એ સમયગાળાને અંતે બંને પદાર્થો વેગમાન તો એકસરખું જ પ્રાપ્ત કરે છે. **આમ જુદા જુદા પદાર્થો પર સમાન બળ સમાન સમયમાં વેગમાનનો એકસમાન ફેરફાર ઉત્પન્ન કરે છે.** ગતિના બીજા નિયમ માટે આ નિર્ણાયક બાબત છે.
- અગાઉનાં અવલોકનો વેગમાનના સદિશ તરીકેના ગુણધર્મનો પુરાવો આપતાં નથી. એ બધાં ઉદાહરણોમાં વેગમાન અને વેગમાનનો ફેરફાર બંનેને એક જ (અથવા વિરુદ્ધ) દિશા છે. પણ હંમેશાં આવું નથી હોતું. ધારો કે એક દોરી વડે એક પથ્થરને સમક્ષિતિજ સમતલમાં નિયમિત ઝડપથી ઘુમાવવામાં આવે છે. આમાં વેગમાનનું માન નિશ્ચિત છે પરંતુ તેની દિશા બદલાય છે. (આકૃતિ 5.4). આ વેગમાન સદિશમાં ફેરફાર કરવા માટે બળની જરૂર પડે છે. આવું બળ આપણા હાથ વડે દોરી મારફતે લગાડાય છે. અનુભવ પરથી જણાય છે કે, પથ્થરને વધારે ઝડપથી અથવા નાની ત્રિજ્યાના વર્તુળમાં ઘુમાવવા અથવા એ બંને કરવા માટે આપણા હાથ વડે મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. આ બાબત મોટા પ્રવેગ એટલે કે વેગમાન સદિશના ફેરફારના મોટા દર સાથે સંકળાયેલ છે. આ સૂચવે છે કે વેગમાન સદિશમાં ફેરફારનો દર મોટો હોય, તો લગાડેલું બળ પણ મોટું હોય.



આકૃતિ 5.4 *વેગમાનનું મૂલ્ય અચળ હોય તોપણ તેની દિશા બદલવા માટે બળની જરૂર છે. સમક્ષિતિજ વર્તુળમાં એક દોરી વડે પથ્થરને અચળ ઝડપથી ઘુમાવતાં આપણે આમ અનુભવી શકીએ છીએ.*

આ બધાં ગુણાત્મક અવલોકનો **ગતિના બીજા નિયમ** તરફ દોરી જાય છે જેને ન્યૂટને નીચે મુજબ રજૂ કર્યો :

પદાર્થના વેગમાનના ફેરફારનો દર લાગુ પાડેલા બળના સમપ્રમાણમાં અને લગાડેલા બળની દિશામાં હોય છે.

આમ, જો બળ **F**, સમયગાળા Δt માટે લાગતાં m દળના પદાર્થનો વેગ $\mathbf{v}$થી બદલાઈને $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ થાય એટલે કે તેનું પ્રારંભિક વેગમાન $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$માં $\Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$ જેટલો ફેરફાર થાય તો, ગતિના બીજા નિયમ મુજબ,

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} \text{ અથવા } \mathbf{F} = k\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$$

જ્યાં k સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે. $\Delta t \to 0$ લક્ષ લેતાં, $\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$ પદ, **p**નું *t*ને અનુલક્ષીને વિકલન અથવા વિકલ અચળાંક બને છે, જેને $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ તરીકે દર્શાવાય છે. આમ,

$$\mathbf{F} = k\frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.2)$$

અચળ દળ m ધરાવતા પદાર્થ માટે

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{\upsilon}) = m\,\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = m\,\mathbf{a} \quad (5.3)$$

એટલે કે ગતિનો બીજો નિયમ

$$\mathbf{F} = k\,m\,\mathbf{a} \quad (5.4)$$

તરીકે પણ લખી શકાય, જે દર્શાવે છે કે બળ એ દળ m અને પ્રવેગ **a**ના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં છે.

હજી સુધી બળનો એકમ વ્યાખ્યાયિત કર્યો નથી.

વાસ્તવમાં, આપણે સમીકરણ (5.4)નો ઉપયોગ કરી બળના એકમને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી આપણને kનું કોઈ પણ મૂલ્ય પસંદ કરવાની સ્વતંત્રતા છે. સરળતા ખાતર આપણે $k = 1$ પસંદ કરીએ છીએ. હવે ગતિનો બીજો નિયમ

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\mathbf{a} \quad (5.5)$$

તરીકે લખાય. SI એકમમાં એકમ બળ 1 kg દળના પદાર્થમાં 1 m s^{-2}નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ એકમને **newton** કહે છે : 1 N = 1 kg m s^{-2}

આ તબક્કે ગતિના બીજા નિયમના કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓ નોંધીએ :

1. ગતિના બીજા નિયમ પરથી **F** = 0 સૂચવે છે કે **a** = 0. આમ, બીજો નિયમ પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત છે.
2. ગતિનો બીજો નિયમ એ સદિશ નિયમ છે. સદિશના દરેક ઘટકને અનુરૂપ એક સમીકરણ લખતાં તે ત્રણ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે :

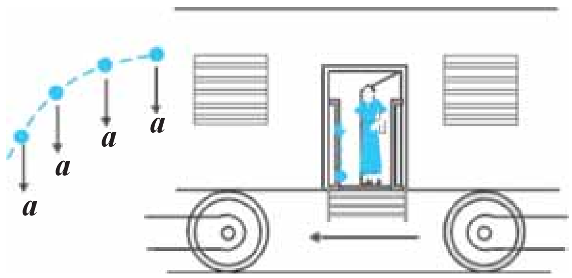
$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = ma_z \quad (5.6)$$

આનો અર્થ એ છે કે, જો બળ પદાર્થના વેગને સમાંતર ન હોય પણ વેગ સાથે કંઈક કોણ બનાવતું હોય, તો તે બળની દિશામાંના વેગના ઘટકમાં જ બદલાવ લાવી શકે છે. બળને લંબ દિશામાંનો ઘટક અફર રહે છે. દાખલા તરીકે, અધોદિશામાંના ગુરુત્વ બળની અસર નીચે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિમાં વેગનો સમક્ષિતિજ ઘટક અચળ રહે છે. (આકૃતિ 5.5)

3. સમીકરણ (5.5) વડે અપાતો ગતિનો બીજો નિયમ એકાકી (Single) બિંદુરૂપ કણને લાગુ પડે છે. નિયમમાં બળ **F** એ કણ પરનું ચોખ્ખું (પરિણામી) બાહ્ય બળ છે અને **a** કણનો પ્રવેગ છે. પરંતુ એવું જણાય છે કે આ નિયમ દૃઢ પદાર્થ અથવા વ્યાપક રીતે કણોના તંત્રને પણ તે જ સ્વરૂપમાં લાગુ પડે છે. તે પરિસ્થિતિમાં **F** એ તંત્ર પરનું કુલ (પરિણામી) બાહ્ય બળ અને **a** એ સમગ્ર તંત્રનો પ્રવેગ છે. વધુ ચોકસાઈથી કહીએ તો **a** એ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો પ્રવેગ છે, જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 7માં વિગતે શીખીશું. **તંત્રની અંદરના કોઈ આંતરિક બળને Fમાં સમાવવાનું (ગણવાનું) નથી.**



***આકૃતિ* 5.5** *આપેલી ક્ષણે પ્રવેગ તે ક્ષણે લાગતા બળ વડે નક્કી થાય છે. પ્રવેગિત ગતિ કરતી ટ્રેનમાંથી પથ્થરને બહાર પડવા દેવાની પછીની ક્ષણે તેના પર કોઈ સમક્ષિતિજ બળ કે પ્રવેગ હોતા નથી (હવાનો અવરોધ અવગણતાં). પથ્થરને અગાઉની ક્ષણે તેના ટ્રેનની સાથેના પ્રવેગની કોઈ સ્મૃતિ હોતી નથી.*

4. ગતિનો બીજો નિયમ એક સ્થાનિક સંબંધ છે. એનો અર્થ એમ છે કે અવકાશમાં (પદાર્થના સ્થાને) આપેલા બિંદુએ આપેલી ક્ષણે બળ **F** તે બિંદુએ તે જ ક્ષણે પદાર્થના પ્રવેગ **a** સાથે સંબંધ ધરાવે છે. અહીં અને અત્યારે પ્રવેગ, અહીં અને અત્યારે લાગતા બળ વડે નક્કી થાય છે, **કણની ગતિના કોઈ ઈતિહાસ (તે ક્ષણ અગાઉની બાબતો) પરથી નહિ. (જુઓ આકૃતિ 5.5.)**

ઉદાહરણ 5.2 0.04 kg દળ ધરાવતી અને 90 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતી એક બુલિટ એક ભારે લાકડાના બ્લૉકમાં પ્રવેશે છે અને 60 cmનું અંતર કાપીને અટકી જાય છે. બ્લૉક વડે બુલિટ પર સરેરાશ અવરોધક બળ કેટલું લાગે છે ?

ઉકેલ બુલિટનો પ્રતિપ્રવેગ (અચળ ગણેલ છે.)

$$a = \frac{-u^2}{2s} = \frac{-90\times 90}{2\times 0.6} = -6750 \text{ m s}^{-2}$$

ગતિના બીજા નિયમ મુજબ અવરોધક બળ

$= 0.04 \text{ kg} \times 6750 \text{ m s}^{-2} = 270 \text{ N}$

અહીં, ખરેખર લાગતું અવરોધક બળ અને તેથી બુલેટનો પ્રતિપ્રવેગ અચળ ન પણ હોય. તેથી આ જવાબ માત્ર સરેરાશ અવરોધક બળ દર્શાવે છે. ◀

> ▶ *ઉદાહરણ 5.3* m દળના પદાર્થની ગતિ $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ તરીકે વર્ણવાય છે. પદાર્થ પર લાગતું બળ શોધો.

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

હવે, $\upsilon = \frac{dy}{dt} = u + gt$

પ્રવેગ $a = \frac{d\upsilon}{dt} = g$

સમીકરણ (5.5) પરથી બળ

$$F = ma = mg$$ ◀

આમ, આપેલ સમીકરણ ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ પદાર્થની ગતિ વર્ણવે છે અને y, gની દિશામાંનો સ્થાન યામ છે.

આઘાત (*Impulse*)

ઘણી વાર આપણને એવી ઘટનાઓ જોવા મળે છે કે એક મોટું બળ ખૂબ નાના સમયગાળા માટે લાગે છે અને પદાર્થના વેગમાનમાં નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરે છે. દાખલા તરીકે, જ્યારે દડો દીવાલને અથડાઈને પાછો પડે છે, ત્યારે દીવાલ વડે દડા પર લાગતું બળ તે બંને સંપર્કમાં હોય તેવા ખૂબ ટૂંકા સમયગાળા માટે જ લાગતું હોય છે, પરંતુ બળ દડાના વેગમાનને ઊલટાવી દેવા જેટલું પર્યાપ્ત મોટું હોય છે. આવા સંજોગોમાં ઘણી વાર બળ અને સમયગાળાને જુદા જુદા માપવાનું અઘરું હોય છે. પરંતુ બળ અને સમયગાળાનો ગુણાકાર કે જે વેગમાનનો ફેરફાર છે તે માપી શકાય તેવી રાશિ છે. આ ગુણાકારને આઘાત કહે છે.

આઘાત = બળ × સમયગાળો

= વેગમાનમાં ફેરફાર (5.7)

વેગમાનમાં નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે ટૂંકા સમયગાળામાં લાગતા મોટા બળને **આઘાતી બળ** કહે છે. વિજ્ઞાનના ઇતિહાસમાં આઘાતી બળોને સામાન્ય બળો કરતાં સંકલ્પનાની રીતે જુદાં પ્રકારનાં બળો તરીકે ગણવામાં આવતાં હતાં. ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રમાં આવો કોઈ ભેદભાવ નથી. આઘાતી બળ અન્ય બળ જેવું જ છે સિવાય કે તે મોટું છે અને ટૂંકા સમય માટે લાગે છે.

> ▶ *ઉદાહરણ 5.4* એક બૅટ્સમૅન બૉલને તેની 12 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપને બદલ્યા સિવાય સીધો બૉલરની દિશામાં પાછો ફટકારે છે. જો બૉલનું દળ 0.15 kg હોય, તો બૉલ પર લાગતો આઘાત શોધો. (બૉલની ગતિ સુરેખ ધારો.)

ઉકેલ વેગમાનમાં ફેરફાર

$= 0.15 \times 12 - (-0.15 \times 12)$

$= 3.6 \text{ N s}$

આઘાત $= 3.6 \text{ N s}$,

બૅટ્સમૅનથી બૉલરની દિશામાં. આ એવું ઉદાહરણ છે કે જેમાં બૅટ્સમૅન વડે બૉલ પર લગાડેલું બળ તેમજ બૉલ અને બૅટ વચ્ચેનો સંપર્કસમય જાણવાનું મુશ્કેલ છે, પરંતુ આઘાત સહેલાઈથી ગણી શકાય છે. ◀

5.6 ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ (NEWTON'S THIRD LAW OF MOTION)

ગતિનો બીજો નિયમ પદાર્થ પર લાગતા બળ અને તેના પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ છે. પદાર્થ પર લાગતા બાહ્ય બળનું ઉદ્‌ગમ શું છે ? કયું પરિબળ બાહ્ય બળ લગાડે છે ? ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રમાં આનો સરળ જવાબ એ છે કે પદાર્થ પર બાહ્ય બળ હંમેશાં બીજા પદાર્થને લીધે ઉદ્‌ભવે છે. A અને B એ બે પદાર્થોની એક જોડ વિચારો. B પદાર્થ, A પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડે છે. હવે સહજ પ્રશ્ન એવો થાય કે બદલામાં શું A પદાર્થ B પર બાહ્ય બળ લગાડે છે ? કેટલાક કિસ્સાઓમાં જવાબ સ્પષ્ટ જણાય છે. તમે એક ગૂંચળા આકારની સ્પ્રિંગને દબાવો તો સ્પ્રિંગ તમારા હાથના બળ વડે દબાય છે. દબાયેલી સ્પ્રિંગ બદલામાં તમારા હાથ પર બળ લગાડે છે અને તમે તે અનુભવી શકો છો. પણ જો પદાર્થો સંપર્કમાં ન હોય તો શું ? પૃથ્વી ગુરુત્વને લીધે પથ્થરને અધોદિશામાં ખેંચે છે. શું પથ્થર પૃથ્વી પર બળ લગાડે છે ? આનો જવાબ સ્પષ્ટ એટલા માટે જણાતો નથી કે આપણને પથ્થરની પૃથ્વી પર થતી અસર દેખાતી નથી. ન્યૂટનના મત મુજબ જવાબ છે : હા. પથ્થર પૃથ્વી પર તેટલું જ બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. આપણે એ નોંધી શકતા નથી કારણ કે પૃથ્વી બહુ દળદાર છે અને નાના બળની તેની ગતિ પરની અસર અવગણ્ય છે.

આમ, ન્યૂટોનિયમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ કુદરતમાં બળ કદી એકલું (એકાકી) હોતું નથી. બળ એ બે પદાર્થો વચ્ચેની પરસ્પર આંતરક્રિયા છે. બળો હંમેશાં જોડ (Pair)માં જ લાગે છે. વળી

બે પદાર્થો વચ્ચેનાં પરસ્પર બળો હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આ ખ્યાલને ન્યૂટને **ગતિના ત્રીજા નિયમ**માં રજૂ કર્યો.

દરેક ક્રિયાબળ (action)ને હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનું પ્રતિક્રિયાબળ (reaction) હોય છે.

ગતિના ત્રીજા નિયમના ન્યૂટનના શબ્દપ્રયોગ -

To every action, there is equal and opposite reaction – એવાં તો અલંકૃત અને સુંદર છે કે તે સામાન્ય વાતચીતનો ભાગ બની ગયાં છે. તેથી જ કદાચ ત્રીજા નિયમ વિશે ગેરસમજ પ્રવર્તે છે. ગતિના ત્રીજા નિયમ અંગે – વિશેષ તો ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ જેવાં પદોના ઉપયોગ અંગે - આપણે કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓની નોંધ લઈએ :

1. ગતિના ત્રીજા નિયમમાં ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ એ શબ્દોનો અર્થ બીજો કોઈ નહિ પણ 'બળ' છે. એક જ ભૌતિક ખ્યાલ માટે જુદા જુદા શબ્દોનો ઉપયોગ ઘણી વખત ગૂંચવણ ઉપજાવે છે. ત્રીજા નિયમને એકદમ સરળ અને સ્પષ્ટ શબ્દોમાં રજૂ કરવાની રીત નીચે મુજબ છે :

   બળો હંમેશાં જોડ (pairs)માં જ લાગે છે. A પદાર્થ પર B વડે લાગતું બળ, B પદાર્થ પર A વડે લાગતા બળ જેટલું જ અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

2. ત્રીજા નિયમમાં ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ શબ્દો કદાચ એવી ગેરસમજ ઉપજાવે છે કે ક્રિયાબળ; પ્રતિક્રિયાબળની અગાઉ લાગે છે. એટલે કે ક્રિયાબળ કારણ છે અને પ્રતિક્રિયાબળ એ તેની અસર છે. **ત્રીજા નિયમમાં કોઈ કારણ-અસરનો સંબંધ અભિપ્રેત નથી. B વડે A પરનું બળ અને A વડે B પરનું બળ એક જ ક્ષણે લાગે છે.** આ કારણથી તેમાંના ગમે તે એકને ક્રિયાબળ અને બીજાને પ્રતિક્રિયાબળ કહી શકાય છે.

3. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ એક જ પદાર્થ પર નહિ પણ બે જુદા પદાર્થો પર લાગે છે. A અને B પદાર્થોની એક જોડ વિચારો. ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ,

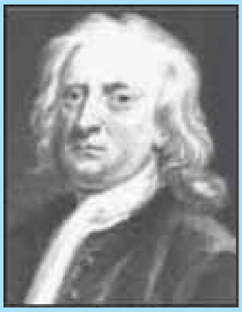
$$\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA} \qquad (5.8)$$

(A પર B વડે બળ) = –(B પર A વડે બળ)

આથી જો આપણે કોઈ એક પદાર્થ (A અથવા B)ની ગતિનો વિચાર કરતા હોઈએ તો, બેમાંનું એક જ બળ ગણવાનું છે. બે બળોનો સરવાળો કરીને ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ શૂન્ય થાય છે એમ કહેવું ભૂલભરેલું છે.

જોકે, બે પદાર્થોનું સમગ્રપણે એક તંત્ર વિચારતા હોઈએ તો $\mathbf{F}_{AB}$ અને $\mathbf{F}_{BA}$ એ (A + B) તંત્રનાં આંતરિક બળો છે. તેમનો સરવાળો થઈને શૂન્ય બળ બને છે. આમ, પદાર્થમાં અથવા કણોના તંત્રમાં આંતરિક બળોની જોડ નાબૂદ થાય છે. આ મહત્ત્વની હકીકતને લીધે ગતિનો બીજો નિયમ પદાર્થ અથવા કણોના તંત્ર પર પણ લાગુ પાડી શકાય છે. (જુઓ પ્રકરણ 7.)

આઈઝૅક ન્યૂટન (1642-1727)

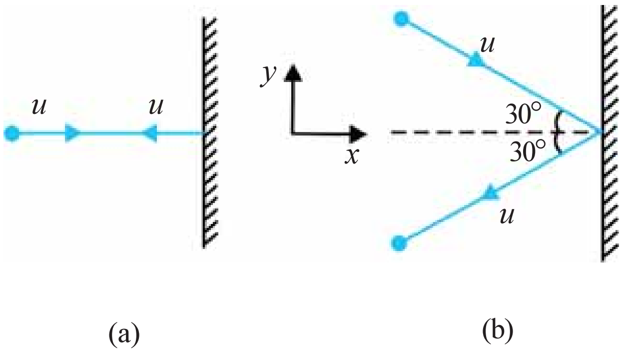


આઈઝૅક ન્યૂટનનો જન્મ, જે વર્ષે ગૅલિલિયોનું અવસાન થયું તે જ વર્ષે - 1642માં - વુલ્સથોર્પ, ઇંગ્લૅન્ડમાં થયો હતો. તેનું અસામાન્ય ગાણિતિક અને યાંત્રિક વલણ તેના શાળાજીવન દરમિયાન બીજાઓથી છૂપું રહ્યું હતું. તે 1662માં પૂર્વ-સ્નાતક અભ્યાસ માટે કેમ્બ્રિજ ગયો. 1665માં પ્લેગનો રોગચાળો ફાટી નીકળતાં યુનિવર્સિટીનું નગર બંધ થયું અને તે તેની માતાના ફાર્મ પર પાછો ફર્યો. ત્યાં બે વર્ષના એકાંતવાસ દરમિયાન તેની સુષુપ્ત સર્જનાત્મકતા ગણિત અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં મૂળભૂત શોધખોળોના ઘોડાપુર રૂપે વિકાસ પામી : ઋણ અને અપૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે દ્વિપદી પ્રમેય, કલનગણિતની શરૂઆત, ગુરુત્વાકર્ષણનો વ્યસ્ત વર્ગનો નિયમ, શ્વેત પ્રકાશનો વર્ણપટ વગેરે. કેમ્બ્રિજ પાછા ફરીને તેણે પ્રકાશશાસ્ત્રમાં તેની શોધખોળ ચાલુ રાખી અને પરાવર્તક ટેલિસ્કૉપની રચના કરી.

1684માં તેના મિત્ર ઍડમંડ હેલીના પ્રોત્સાહનથી ન્યૂટને 'The Principia Mathematica' નામના ગ્રંથના લેખનમાં ઝુકાવ્યું, જે અત્યાર સુધી થયેલા મહાન વૈજ્ઞાનિક પ્રકાશનોમાનું એક બન્યું. તેમાં તેણે ગતિના ત્રણ નિયમો અને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ જણાવ્યા, જેના વડે ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના ત્રણ નિયમોની સમજૂતી આપી. તે પુસ્તકમાં ચીલા-ચાતરનાર ઘણી સિદ્ધિઓ સમાયેલી હતી : તરલ યંત્રશાસ્ત્રના મૂળભૂત સિદ્ધાંતો, તરંગ ગતિનું ગણિત, પૃથ્વી સૂર્ય અને બીજા ગ્રહોના દળની ગણતરી, અયનબિંદુઓનાં ચલનની સમજૂતી, ભરતીનો સિદ્ધાંત વગેરે. 1704માં ન્યૂટને બીજું એક ખૂબીભર્યું પુસ્તક 'Opticks' બહાર પાડ્યું, જેમાં તેના પ્રકાશ અને રંગો પરના કાર્ય રજૂ થયાં.

કૉપરનિકસથી પ્રારંભ થયેલ અને કૅપ્લર અને ગૅલિલિયોએ પ્રબળતાથી આગળ ધપાવેલ ક્રાંતિની ન્યૂટન દ્વારા ભવ્ય પૂર્ણાહુતિ થઈ. ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્ર વડે પૃથ્વી પરની અને આકાશમાં થતી ઘટનાઓનું એકીકીકરણ થયું જમીન પર પડતા સફરજન અને પૃથ્વીની ફરતે ચંદ્રની ગતિ એ બંનેમાં એક જ પ્રકારના ગણિતીય સમીકરણ જણાય છે. તર્કનો યુગ આરંભી ગયો હતો.

ઉદાહરણ 5.5 આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ બે એક સમાન બિલિયર્ડ બૉલ એક દૃઢ દીવાલ પર સમાન ઝડપથી પણ જુદા જુદા કોણે અથડાઈને ઝડપમાં કોઈ ફેરફાર વિના પરાવર્તન પામે છે. (i) દરેક બૉલને લીધે દીવાલ પર લાગતા બળની દિશા કઈ હશે ? (ii) દીવાલ વડે બંને બૉલ પર લગાડેલ આઘાતના માનનો ગુણોતર કેટલો હશે ?



આકૃતિ 5.6

ઉકેલ સાહજિક રીતે પ્રશ્ન (i) માટે એવો જવાબ સૂઝે કે કદાચ કિસ્સા (a)માં દીવાલ પરનું બળ દીવાલને લંબદિશામાં છે. જ્યારે કિસ્સા (b)માં તે દિવાલને લંબ સાથે 30°ના કોણે ઢળેલું છે. આ જવાબ ખોટો છે. બંને કિસ્સામાં દીવાલ પરનું બળ દીવાલને લંબદિશામાં છે.

દીવાલ પરનું બળ કેવી રીતે શોધવું ? એની યુક્તિ એ છે કે બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરી દીવાલ વડે બૉલ પર લાગતું બળ (અથવા આઘાત) વિચારો અને પછી ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્ન (i)નો જવાબ મેળવો. ધારો કે દરેક બૉલની દિવાલ સાથે સંઘાત પહેલાંની અને પછીની ઝડપ u છે અને દરેક બૉલનું દળ m છે. x અને y-અક્ષોને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પસંદ કરો અને દરેક કિસ્સામાં બૉલના વેગમાનમાં ફેરફાર વિચારો.

કિસ્સો (a)

$(p_x)_{\text{પ્રારંભિક}} = \text{m u} \qquad (p_y)_{\text{પ્રારંભિક}} = 0$

$(p_x)_{\text{અંતિમ}} = -\text{ m u} \qquad (p_y)_{\text{અંતિમ}} = 0$

આઘાત એટલે વેગમાન સદિશનો ફેરફાર. આથી,

આઘાતનો x ઘટક $= -2\ m\ u$

આઘાતનો y ઘટક $= 0$

આઘાત અને બળ એક જ દિશામાં હોય છે. આ પરથી સ્પષ્ટ છે કે દીવાલ વડે બૉલ પર લાગતું બળ, દીવાલને લંબ ઋણ x દિશામાં છે. ગતિના ત્રીજા નિયમ પરથી દીવાલ પર બૉલ વડે લાગતું બળ, દીવાલને લંબ ધન x-દિશામાં છે. બળનું માન અત્રે મેળવી શકાશે નહિ કારણ કે આ પ્રશ્નમાં સંઘાત માટે લાગતો નાનો સમયગાળો આપેલ નથી.

કિસ્સો (b)

$(p_x)_{\text{પ્રારંભિક}} = m\ u \cos 30°,$

$(p_y)_{\text{પ્રારંભિક}} = -\text{ m u} \sin 30°$

$(p_x)_{\text{અંતિમ}} = -\ m\ u \cos 30°,$

$(p_y)_{\text{અંતિમ}} = -\ m\ u \sin 30°$

નોંધો કે, સંઘાત બાદ p_xની નિશાની બદલાય છે પણ p_yની બદલાતી નથી. આથી,

આઘાતનો x-ઘટક $= -2\ m\ u \cos 30°$

આઘાતનો y-ઘટક $= 0$

આઘાત (અને બળ)ની દિશા (a)માં હતી તે જ છે અને તે દીવાલને લંબ ઋણ x-દિશામાં છે. અગાઉની જેમ જ ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પરથી દીવાલ પર બૉલ વડે લાગતું બળ દીવાલને લંબ ધન x-દિશામાં છે.

(ii) (a) અને (b) કિસ્સાઓમાં બૉલ પર લાગતા આઘાતના માનનો ગુણોત્તર

$$2\ m\ u\ /\ (2\ m\ u \cos 30°) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$$ ◀

5.7 વેગમાનનું સંરક્ષણ (CONSERVATION OF MOMENTUM)

ગતિનો બીજો અને ત્રીજો નિયમ એક અગત્યના પરિણામ તરફ દોરી જાય છે : વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ. એક જાણીતું ઉદાહરણ લઈએ. એક ગનમાંથી બુલિટ છોડવામાં આવે છે. જો ગન વડે બુલિટ પર લાગતું બળ **F** હોય, તો ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ બુલિટ વડે ગન પર લાગતું બળ − **F** છે. આ બે બળો એક સમાન સમયગાળા Δt માટે લાગે છે. ગતિના બીજા નિયમ મુજબ, $\mathbf{F}\,\Delta t$ એ બુલિટના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર છે અને $-\mathbf{F}\,\Delta t$ એ ગનના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર છે. પ્રારંભમાં બંને સ્થિર હોવાથી વેગમાનનો ફેરફાર તે દરેકના અંતિમ વેગમાન જેટલો હશે. આમ જો બુલિટને છોડ્યા બાદ બુલિટનું વેગમાન $\mathbf{P}_b$ હોય અને રિકોઇલ (પાછી ફેંકાતી) ગનનું વેગમાન $\mathbf{P}_g$ હોય તો $\mathbf{P}_g = -\mathbf{P}_b$ એટલે કે $\mathbf{P}_g + \mathbf{P}_b = 0$, એટલે કે (બુલિટ + ગન)ના તંત્રના કુલ વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.

આમ, અલગ કરેલા તંત્ર (એટલે કે બાહ્ય બળ ન લાગતું હોય તેવું તંત્ર)માં કણોની દરેક જોડમાં પરસ્પર લાગતાં બળો વ્યક્તિગત કણોના વેગમાનમાં ફેરફાર કરી શકે છે પરંતુ પરસ્પર લાગતાં બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી, દરેક જોડમાં વેગમાનના ફેરફાર એકબીજાને નાબૂદ કરે અને કુલ વેગમાન અફર રહે છે. આ હકીકતને **વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે :

આંતરક્રિયા કરતા કણોના અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

વેગમાન સંરક્ષણના નિયમના ઉપયોગનું એક અગત્યનું ઉદાહરણ બે પદાર્થો વચ્ચેનો સંઘાત (અથડામણ) છે. બે પદાર્થો A અને Bને ધ્યાનમાં લો. તેમનાં પ્રારંભિક વેગમાન $\mathbf{P}_A$ અને $\mathbf{P}_B$ છે. આ બે પદાર્થો અથડાઈને છૂટા પડે છે અને તેમના અંતિમ વેગમાન અનુક્રમે $\mathbf{P'}_A$ અને $\mathbf{P'}_B$ છે. ગતિના બીજા નિયમ પરથી,

$$\mathbf{F}_{AB}\Delta t = \mathbf{P'}_A - \mathbf{P}_A \text{ અને}$$

$$\mathbf{F}_{BA}\Delta t = \mathbf{P'}_B - \mathbf{P}_B$$

(જ્યાં આપણે બંને બળો માટે એક સમાન સમયગાળો લીધેલ છે જે બે પદાર્થો માટે સંપર્કનો સમય છે.)

ગતિના ત્રીજા નિયમ પરથી,

$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ હોવાથી

$$\mathbf{P'}_A - \mathbf{P}_A = -(\mathbf{P'}_B - \mathbf{P}_B)$$

એટલે કે $\mathbf{P'}_A + \mathbf{P'}_B = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B$ (5.9)

જે દર્શાવે છે કે અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ અંતિમ વેગમાન તેના કુલ પ્રારંભિક વેગમાન જેટલું હોય છે. ધ્યાન રાખજો કે, સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક હોય કે અસ્થિતિસ્થાપક પણ આ બાબત બંનેમાં સત્ય છે. સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતમાં એક બીજી શરત એ છે કે, તંત્રની કુલ પ્રારંભિક ગતિઊર્જા તેની કુલ અંતિમ ગતિઊર્જા જેટલી હોય છે (જુઓ પ્રકરણ 6).

5.8 કણનું સંતુલન (EQUILIBRIUM OF A PARTICLE)

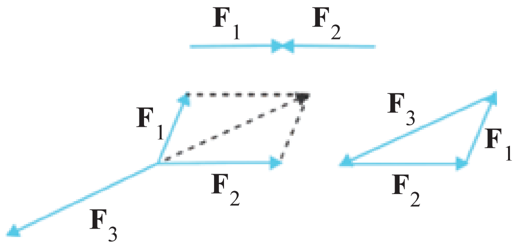
યંત્રશાસ્ત્રમાં કણનું સંતુલન એવી સ્થિતિનો નિર્દેશ કરે છે કે જેમાં કણ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય છે.* ગતિના પહેલા નિયમ મુજબ આનો અર્થ એ થાય કે કણ કાં તો સ્થિર છે અથવા નિયમિત ગતિમાં છે.

જો બે બળો $\mathbf{F}_1$ અને $\mathbf{F}_2$ એક કણ પર એકસાથે લાગતાં હોય, તો સંતુલન માટે જરૂરી છે કે

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (5.10)$$

એટલે કે, કણ પરનાં બે બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાં જ જોઈએ. એક બિંદુગામી એવાં ત્રણ બળો $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ અને $\mathbf{F}_3$ની અસર હેઠળ સંતુલન માટે એ જરૂરી છે કે આ ત્રણ બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થાય.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (5.11)$$



આકૃતિ 5.7 એક બિંદુગામી બળોની અસર હેઠળ સંતુલન

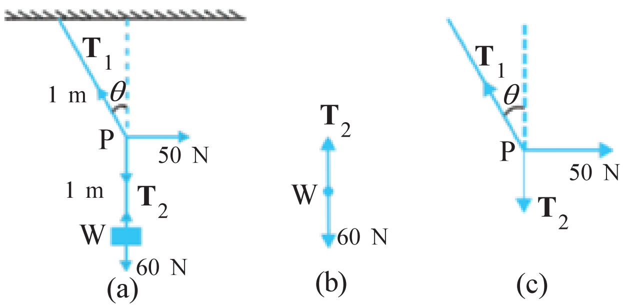
બીજા શબ્દોમાં, બળોના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ પરથી મળતાં કોઈ પણ બે બળો $\mathbf{F}_1$ અને $\mathbf{F}_2$ નું પરિણામી બળ ત્રીજા બળ $\mathbf{F}_3$ના જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 5.7માં દર્શાવ્યા મુજબ, સંતુલનમાં રહેલાં ત્રણ બળોને ત્રિકોણની બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય છે કે જેમાં સદિશોને દર્શાવતા તીરો ક્રમશઃ એક પૂરો થાય ત્યાંથી બીજો શરૂ થાય એમ લીધેલ છે. વ્યાપક રૂપે આ પરિણામ ગમે તે સંખ્યાનાં બળો માટે લાગુ પાડી શકાય છે. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, --. $\mathbf{F}_n$ બળોની અસર નીચે કણ સંતુલનમાં રહે છે, જો તે બળોને n-બાજુઓ-વાળા બંધ બહુકોણ વડે દર્શાવી શકાય કે જેમાં એક તીર પૂરું થાય ત્યાંથી બીજું તીર શરૂ થાય એમ દર્શાવેલ હોય.

સમીકરણ (5.11) પરથી

$$\mathbf{F}_{1x} + \mathbf{F}_{2x} + \mathbf{F}_{3x} = 0$$
$$\mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} + \mathbf{F}_{3y} = 0$$
$$\mathbf{F}_{1z} + \mathbf{F}_{2z} + \mathbf{F}_{3z} = 0 \qquad (5.12)$$

જ્યાં $\mathbf{F}_{1x}$, $\mathbf{F}_{1y}$ અને $\mathbf{F}_{1z}$, બળ $\mathbf{F}_1$ ના અનુક્રમે x, y અને z દિશામાંના ઘટકો છે.

> **ઉદાહરણ 5.6** આકૃતિ 5.8 જુઓ. 6 kg દળને છતથી 2 m લંબાઈના દોરડા વડે લટકાવેલ છે. દોરડાના મધ્યબિંદુ (P) એ 50 Nનું એક બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં દર્શાવ્યા મુજબ લગાડવામાં આવે છે. સંતુલન સ્થિતિમાં દોરડું ઊર્ધ્વ દિશા સાથે કેટલો કોણ બનાવશે ? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ લો). દોરડાનું દળ અવગણો.



આકૃતિ 5.8

* *પદાર્થના સંતુલન માટે માત્ર સ્થાનાંતરિત ગતિમાંનું સંતુલન (ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય) જરૂરી નથી પણ ચાકગતિ માટેનું સંતુલન (ચોખ્ખું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય) પણ જરૂરી છે, જે આપણે પ્રકરણ 7માં જોઈશું.*

ઉકેલ આકૃતિ 5.8 (b) અને 5.8 (c)ને free-body diagrams કહે છે. આકૃતિ 5.8 (b) એ Wનો free-body diagram છે અને આકૃતિ 5.8 (c) એ બિંદુ Pનો free-body diagram છે.

વજન Wનું સંતુલન વિચારો. સ્પષ્ટ છે કે, $T_2 = 6 \times 10 = 60$ N.

બિંદુ Pનું સંતુલન ત્રણ બળો-તણાવ T_1, તણાવ T_2 અને સમક્ષિતિજ બળ 50 Nની અસર હેઠળ વિચારો. પરિણામી બળનો સમક્ષિતિજ ઘટક શૂન્ય બનવો જોઈએ અને ઊર્ધ્વઘટક પણ અલગથી શૂન્ય બનવો જોઈએ.

$T_1 \cos \theta = T_2 = 60$ N

$T_1 \sin \theta = 50$ N

આ પરથી,

$\tan\theta = \frac{5}{6}$ અથવા $\theta = \tan^{-1} \frac{5}{6} = 40°$

અત્રે, એ નોંધો કે જવાબ (દળરહિત ધારેલા) દોરડાની લંબાઈ પર આધારિત નથી કે સમક્ષિતિજ બળ કયા બિંદુએ લગાડ્યું છે તે બિંદુ પર પણ આધારિત નથી. ◀

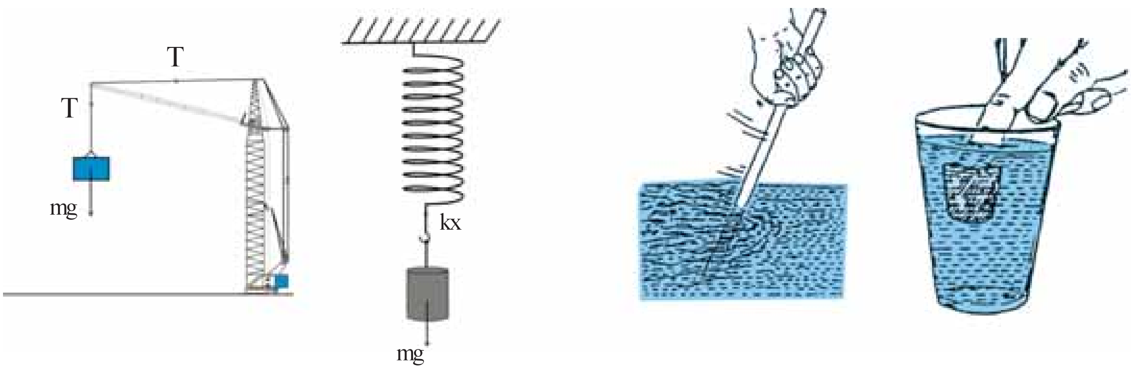
5.9 યંત્રશાસ્ત્રમાં સામાન્ય બળો (COMMON FORCES IN MECHANICS)

યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણને જુદાં જુદાં પ્રકારનાં બળો જોવા મળે છે. જોકે ગુરુત્વબળ તો બધે વ્યાપ્ત છે. પૃથ્વી પરનો દરેક પદાર્થ પૃથ્વીના ગુરુત્વબળનો અનુભવ કરે છે. આકાશી પદાર્થોની ગતિ પણ ગુરુત્વબળ વડે નિયંત્રિત થાય છે. ગુરુત્વબળ દૂરથી પણ, વચ્ચે કોઈ માધ્યમની જરૂર સિવાય, લાગે છે.

યંત્રશાસ્ત્રમાં જોવા મળતાં બીજાં બધાં સામાન્ય બળો સંપર્ક બળો* છે. નામ જ સૂચવે છે કે સંપર્ક બળ એક ઘન કે પ્રવાહી પદાર્થના બીજા પદાર્થના સંપર્કને લીધે ઉદ્‌ભવે છે. જ્યારે પદાર્થો સંપર્કમાં હોય છે. (દા. ત. ટેબલ પર સ્થિર રહેલું પુસ્તક, સળિયા વડે જોડાયેલું દૃઢ પદાર્થોનું તંત્ર, મિજાગરા અને અન્ય પ્રકારના ટેકા), ગતિના ત્રીજા નિયમનું પાલન કરતા (પદાર્થોની દરેક જોડ માટે) પરસ્પર સંપર્ક બળો લાગતા હોય છે. સંપર્ક બળના, સંપર્ક સપાટીને લંબ ઘટકને લંબ પ્રતિક્રિયા કહે છે. સંપર્ક બળના સંપર્ક સપાટીને સમાંતર ઘટકને ઘર્ષણ કહે છે. જ્યારે ઘન પદાર્થો તરલ સાથે સંપર્કમાં હોય ત્યારે પણ સંપર્ક બળો લાગે છે. દાખલા તરીકે, તરલમાં ડૂબેલા ઘન પદાર્થ પર ઉપર તરફનું ઉત્પ્લાવક બળ લાગે છે જે તેણે ખસેડેલા તરલના વજન જેટલું હોય છે. શ્યાનતા બળ, હવાનો અવરોધ વગેરે પણ સંપર્ક બળનાં ઉદાહરણ છે. (આકૃતિ 5.9)

બીજાં બે સામાન્ય બળોમાં એક દોરીમાં ઉદભવતું તણાવ અને બીજું સ્પ્રિંગથી ઉદ્‌ભવતું બળ છે. જ્યારે કોઈ સ્પ્રિંગને બાહ્ય બળ વડે દબાવવામાં કે વિસ્તારવામાં આવે છે ત્યારે પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્‌ભવે છે. આ બળ સામાન્ય રીતે (નાના સ્થાનાંતર માટે) સંકોચન અથવા લંબાઈ-વધારાને સમપ્રમાણમાં હોય છે. સ્પ્રિંગમાં બળ F ને $F = -kx$ તરીકે લખવામાં આવે છે જ્યાં x સ્થાનાંતર છે અને k બળ અચળાંક છે. ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે, આ બળ ખેંચાયા વગરની સ્થિતિમાંથી થયેલા સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. અતન્ય (inextensible) દોરી માટે બળ-અચળાંક ખૂબ મોટો હોય છે. દોરીમાં ઉદ્‌ભવતા પુનઃસ્થાપક બળને તણાવ કહે છે. એક પ્રણાલિકા મુજબ સમગ્ર દોરીમાં બધે એક અચળ તણાવ T ગણવામાં આવે છે. આ પૂર્વધારણા અવગણ્ય દળ ધરાવતી દોરી માટે સત્ય ઠરે છે.

પ્રકરણ 1માં, આપણે જાણ્યું કે કુદરતમાં ચાર મૂળભૂત પ્રકારનાં બળ છે. આમાંથી નિર્બળ (weak) અને પ્રબળ (strong) બળો, (અંતરના માપક્રમના) એવા વિસ્તારમાં લાગે છે કે અહીં આપણે તેમની ચિંતા કરીશું નહિ. યંત્રશાસ્ત્રના પરિપ્રેક્ષમાં માત્ર ગુરુત્વબળો અને વિદ્યુતબળો જ પ્રસ્તુત છે. ઉપર જણાવ્યાં તેવાં યંત્રશાસ્ત્રનાં જુદાં જુદાં સંપર્ક બળો મૂળભૂત રીતે વિદ્યુતબળોમાંથી ઉદ્‌ભવે છે. યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણે વિદ્યુતભાર રહિત



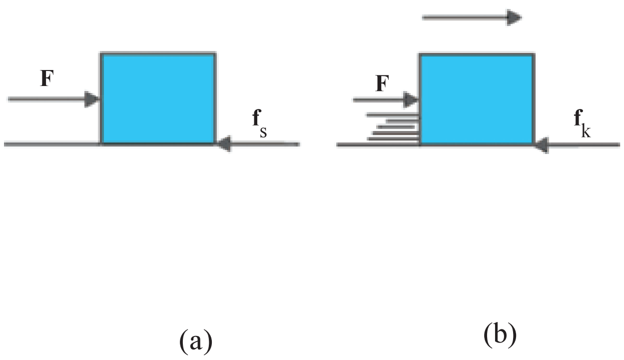
આકૃતિ 5.9 યંત્રશાસ્ત્રમાં સંપર્ક બળોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો

* *સરળતા ખાતર આપણે વિદ્યુતભારિત અને ચુંબકીય પદાર્થો અત્રે લક્ષમાં લીધેલ નથી. ગુરુત્વાકર્ષણ ઉપરાંત તેમને માટે વિદ્યુત અને ચુંબકીય બિનસંપર્ક બળો લાગતાં હોય છે.*

અને અચુંબકીય પદાર્થોની વાત કરતા હોવાથી એ બાબત કદાચ આશ્ચર્યજનક લાગે. સૂક્ષ્મ સ્તરે બધા પદાર્થો વિદ્યુતભાર ધરાવતાં ઘટકો (ન્યુક્લિયસ અને ઇલેક્ટ્રૉન્સ)નાં બનેલાં છે અને પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપકતા, અણુઓના સંઘાતો વગેરેથી ઉદ્ભવતા સંપર્ક બળોને વિદ્યુતભારિત પદાર્થો વચ્ચેનાં વિદ્યુતબળના રૂપમાં જોઈ શકાય છે. સૂક્ષ્મ સ્તરે આ બળોનું વિગતવાર ઉદ્ગમ જોકે જટિલ છે અને સ્થૂળ પદાર્થોના સ્તરે યંત્રશાસ્ત્રના પ્રશ્નો ઉકેલવામાં ઉપયોગી નથી. આથી પ્રાયોગિક રીતે મળતા તેમનાં વિશિષ્ટ લક્ષણો સાથે તેમને જુદા પ્રકારનાં બળો તરીકે ગણેલ છે.

5.9.1 ઘર્ષણ (Friction)

વળી પાછા, આપણે સમક્ષિતિજ ટેબલ પર સ્થિર રહેલા m દળના પદાર્થનો વિચાર કરીએ. ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (mg) લંબ પ્રતિક્રિયા બળ N દ્વારા નાબૂદ થાય છે. હવે ધારો કે પદાર્થ પર બળ F સમક્ષિતિજ દિશામાં લગાડવામાં આવે છે. અનુભવ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, લગાડેલું નાનું બળ કદાચ પદાર્થને ખસેડવા માટે પૂરતું ન પણ હોય. પણ પદાર્થ પર આ લગાડેલું બળ એકલું જ લાગતું હોત તો તે ગમે તેટલું નાનું હોય તોપણ પદાર્થ F/m જેટલા પ્રવેગથી ખસતો જ હોત. આથી સ્પષ્ટ છે કે પદાર્થ એટલા માટે સ્થિર રહે છે કે સમક્ષિતિજ દિશામાં બીજું કોઈક બળ લાગવા માંડે છે અને આપણે લગાડેલા બળ Fનો વિરોધ કરે છે જેથી પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બળ શૂન્ય બને છે. પદાર્થની ટેબલ સાથેની સંપર્ક સપાટીને સમાંતર દિશામાં લાગતા આ બળ f_sને ઘર્ષણબળ અથવા સાદી રીતે ઘર્ષણ કહે છે. (આકૃતિ 5.10 (a)). અહીં



આકૃતિ 5.10 *સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ : (a) પદાર્થની અપેક્ષિત ગતિ સ્થિત ઘર્ષણ દ્વારા અવરોધાય છે. જ્યારે બાહ્ય બળ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણથી વધી જાય છે ત્યારે પદાર્થ ગતિની શરૂઆત કરે છે. (b) એકવાર પદાર્થ ગતિમાં આવે એટલે તેના પર ગતિક ઘર્ષણબળ લાગે છે. જે સંપર્કમાં રહેલી બે સપાટીઓની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે. ગતિકઘર્ષણ સામાન્યતઃ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણ કરતાં ઓછું હોય છે.*

s સ્થિત (static) ઘર્ષણ માટે વાપરેલ છે જેથી તેને હવે પછી આવનારા ગતિક ઘર્ષણ f_k (આકૃતિ 5.10 (b)) થી જુદું પાડી શકાય. એ નોંધનીય છે કે સ્થિત ઘર્ષણ પોતાની મેળે અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. જ્યારે કોઈ બળ લગાડવામાં આવતું નથી ત્યારે કોઈ સ્થિત ઘર્ષણ લાગતું નથી. જ્યારે બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે જ તે (ઘર્ષણ) લાગવા માંડે છે. જેમ લગાડેલું બળ F વધારીએ તેમ f_s પણ વધતું જાય છે (અમુક હદ સુધી) અને લગાડેલા બળ જેટલું જ વિરુદ્ધ દિશામાં રહીને પદાર્થને સ્થિર રાખે છે. તેથી તેને **સ્થિત ઘર્ષણ** કહે છે. સ્થિત ઘર્ષણ **અપેક્ષિત ગતિ**નો વિરોધ કરે છે. અપેક્ષિત ગતિ એટલે જો ઘર્ષણ ન હોત તો લગાડેલા બળની અસર નીચે જે ગતિ થાત (પણ વાસ્તવમાં થતી નથી) તે.

અનુભવ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, લગાડેલું બળ અમુક સીમાથી વધે તો પદાર્થ ગતિ કરવા (ખસવા) લાગે છે. પ્રયોગોથી જણાયું છે કે સ્થિત ઘર્ષણનું સીમાંત મૂલ્ય $(f_s)_{max}$ સંપર્ક ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી અને લગભગ

$$(f_s)_{max} = \mu_s N \qquad (5.13)$$

મુજબ લંબ બળ સાથે બદલાય છે, જ્યાં μ_s એ સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે, જે સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓના માત્ર પ્રકાર પર આધાર રાખે છે. અચળાંક μ_sને સ્થિત ઘર્ષણાંક કહે છે. આમ સ્થિત ઘર્ષણનો નિયમ

$$f_s \le \mu_s N \qquad (5.14)$$

તરીકે લખી શકાય છે. જો લગાડેલું બળ F, $(f_s)_{max}$થી વધી જાય તો પદાર્થ સપાટી પર ખસવા લાગે છે. પ્રયોગો પરથી જણાય છે કે સાપેક્ષ ગતિ શરૂ થાય પછી ઘર્ષણબળ, મહત્તમ ઘર્ષણબળ $(f_s)_{max}$થી ઘટવા લાગે છે. સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરતા ઘર્ષણબળને ગતિક ઘર્ષણ કહે છે અને તેને f_k વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સ્થિત ઘર્ષણની જેમજ ગતિક ઘર્ષણ પણ સંપર્ક ક્ષેત્રફળથી સ્વતંત્ર છે. ઉપરાંત, તે વેગથી પણ લગભગ સ્વતંત્ર છે. તે સ્થિત ઘર્ષણના નિયમ જેવા જ નિયમનું પાલન કરે છે.

$$f_k = \mu_k \mathrm{N} \qquad (5.15)$$

જ્યાં μ_k એ ગતિક ઘર્ષણાંક છે, જે માત્ર સંપર્ક સપાટીઓ પર આધારિત છે. ઉપર જણાવ્યું તેમ, પ્રયોગો દર્શાવે છે કે μ_kનું મૂલ્ય μ_s કરતાં ઓછું હોય છે. એકવાર સાપેક્ષ ગતિ શરૂ થાય પછી, ગતિના બીજા નિયમ મુજબ પદાર્થનો પ્રવેગ $(\mathrm{F} - f_k)/\mathrm{m}$ હોય છે. અચળ વેગથી ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $\mathrm{F} = f_k$. જો પદાર્થ પર લગાડેલું બળ દૂર કરવામાં આવે તો તેનો પ્રવેગ $-f_k/\mathrm{m}$ થાય છે અને છેવટે તે અટકી જાય છે.

ઉપર દર્શાવેલા ઘર્ષણના નિયમો ગુરુત્વાકર્ષણ, વિદ્યુત કે ચુંબકીય બળોના નિયમો જેવા મૂળભૂત પ્રકારના નથી. તેઓ આનુભવિક સંબંધો છે અને માત્ર આશરા પડતા સાચા છે.

છતાં યંત્રશાસ્ત્રમાં વ્યાવહારિક ગણતરીઓમાં તેઓ ઘણા ઉપયોગી છે.

આમ, જ્યારે બે પદાર્થો સંપર્કમાં હોય ત્યારે દરેક પદાર્થ બીજાને લીધે સંપર્કબળ અનુભવે છે. વ્યાખ્યા મુજબ, ઘર્ષણ એ સંપર્કબળનો સંપર્ક સપાટીઓને સમાંતર ઘટક છે જે, બે સપાટીઓ વચ્ચેની અપેક્ષિત કે વાસ્તવિક સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે. બરાબર નોંધો કે ઘર્ષણ બળ ગતિનો નહિ પણ **સાપેક્ષ ગતિ**નો વિરોધ કરે છે. એક પ્રવેગિત થતી ટ્રેનના કંપાર્ટમેન્ટમાં સ્થિર રહેલ એક બૉક્સનો વિચાર કરો. જો બૉક્સ ટ્રેનની સાપેક્ષે સ્થિર હોય તો ટ્રેન સાથે જ તે પણ પ્રવેગિત થાય છે. બૉક્સનો પ્રવેગ કયાં બળોથી થાય છે ? સ્પષ્ટ છે કે, સમક્ષિતિજ દિશામાં ઘર્ષણબળ જ એકમાત્ર વિચારણીય બળ છે. જો ઘર્ષણ ન હોત તો ટ્રેનનું તળિયું ખસવા માંડત અને બૉક્સ તો તેના જડત્વના ગુણધર્મને લીધે ત્યાંનું ત્યાં જ રહેત (અને ટ્રેનના પાછળના ભાગ સાથે અથડાત).

આ અપેક્ષિત સાપેક્ષ ગતિ, સ્થિત ઘર્ષણ f_s વડે અવરોધાય છે. સ્થિત ઘર્ષણ બૉક્સને ટ્રેનના જેટલો જ પ્રવેગ આપે છે અને ટ્રેનની સાપેક્ષે તેને સ્થિર રાખે છે.

> *ઉદાહરણ 5.7* બૉક્સ અને ટ્રેનના તળિયા વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.15 હોય, તો ટ્રેનના તળિયા પર રહેલ બૉક્સ સ્થિર રહે તે માટે ટ્રેનનો મહત્તમ પ્રવેગ શોધો.

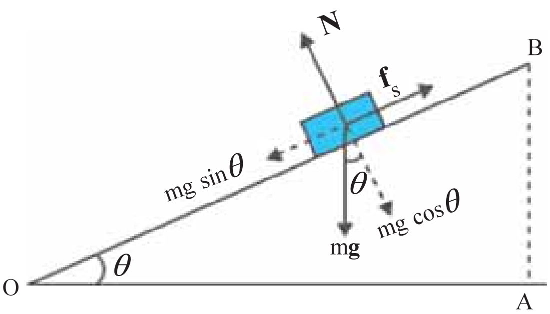
ઉકેલ બૉક્સનો પ્રવેગ સ્થિત ઘર્ષણને લીધે હોવાથી

$$ma = f_s \le \mu_s N = \mu_s mg$$

એટલે કે $a \le \mu_s g$

$$\therefore a_{max} = \mu_s g = 0.15 \times 10 \text{ m s}^{-2}$$
$$= 1.5 \text{ m s}^{-2}$$

> *ઉદાહરણ 5.8* આકૃતિ 5.11 જુઓ. 4 kg દળ એક સમક્ષિતિજ સમતલ પર રહેલ છે. સમતલને સમક્ષિતિજ સાથે ક્રમશઃ ઢળતું કરતાં $\theta = 15°$ એ તે દળ ખસવાની શરૂઆત કરે છે. બ્લૉક અને સપાટી વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક કેટલો હશે ?



આકૃતિ 5.11

ઉકેલ ઢાળ પર સ્થિર રહેલા દળ m પર (i) વજન mg અધો દિશામાં લાગે (ii) સમતલ વડે બ્લૉક પર લંબ બળ N લાગે (iii) અપેક્ષિત ગતિનો વિરોધ કરતું સ્થિત ઘર્ષણબળ f_s લાગે. સંતુલનમાં આ બધાં બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય બનવું જોઈએ. દર્શાવેલી બે દિશાઓમાં mgનાં ઘટકો લેતાં,

$$mg \sin\theta = f_s \,,\ mg \cos\theta = N$$

જેમ જેમ θ વધે છે તેમ તેમ સ્વનિયમન કરતું ઘર્ષણબળ વધે છે અને $\theta = \theta_{max}$ માટે f_s તેનું મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરે છે જ્યાં $(f_s)_{max} = \mu_s N$

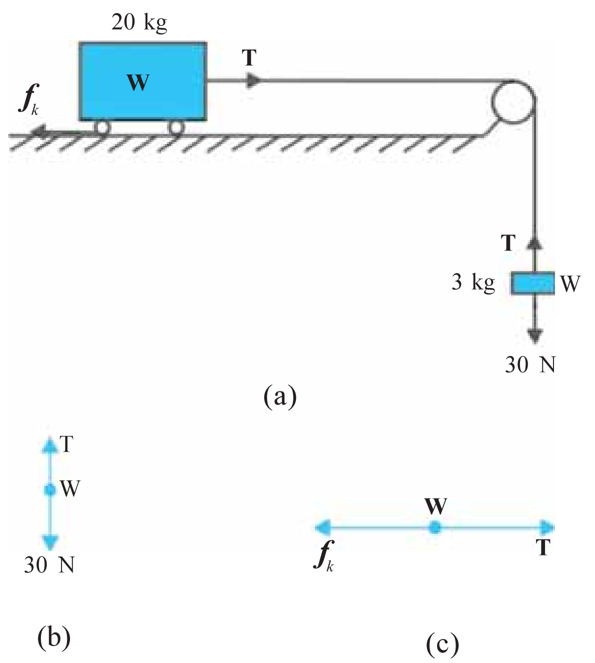
આથી, $\tan\theta_{max} = \mu_s$ અથવા $\theta_{max} = \tan^{-1}\mu_s$

જ્યારે θ, θ_{max} કરતાં સહેજ જ વધે કે તરત બ્લૉક પર સહેજ ચોખ્ખું બળ લાગે અને તે ખસવા લાગે. એ નોંધો કે θ_{max} માત્ર μ_s પર આધારિત છે પણ બ્લૉકના દળ પર આધારિત નથી.

$\theta_{max} = 15°$ માટે

$$\mu_s = \tan 15°$$
$$= 0.27$$

> *ઉદાહરણ 5.9* આકૃતિ 5.12 (a)માં દર્શાવેલ ટ્રૉલી અને સપાટી વચ્ચેનો ગતિક ઘર્ષણાંક 0.04 હોય, તો બ્લૉક અને ટ્રૉલીના તંત્રનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? દોરીમાં કેટલું તણાવ હશે ? ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો). દોરીનું દળ અવગણો.



આકૃતિ 5.12

ઉકેલ દોરી ખેંચાણ વગરની અને ગરગડી લીસી હોવાથી, 3 kg બ્લૉક અને 20 kg ટ્રૉલી બંનેના પ્રવેગનું મૂલ્ય એક સમાન હશે. બ્લૉક માટે ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં [આકૃતિ 5.12(b)].

$30 - T = 3a$

ટ્રૉલી માટે ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં [આકૃતિ 5.12(c)]

$T - f_k = 20\ a.$

હવે, $f_k = \mu_k N.$

અહીં, $\mu_k = 0.04.$

$N = 20 \times 10$

$= 200$ N

આમ, ટ્રૉલી માટે ગતિનું સમીકરણ

$T - 0.04 \times 200 = 20\ a$ અથવા $T - 8 = 20\ a$

આ સમીકરણો પરથી $a = \frac{22}{23}$ m s^{-2} = 0.96 m s^{-2}

અને T = 27.1 N. ◀

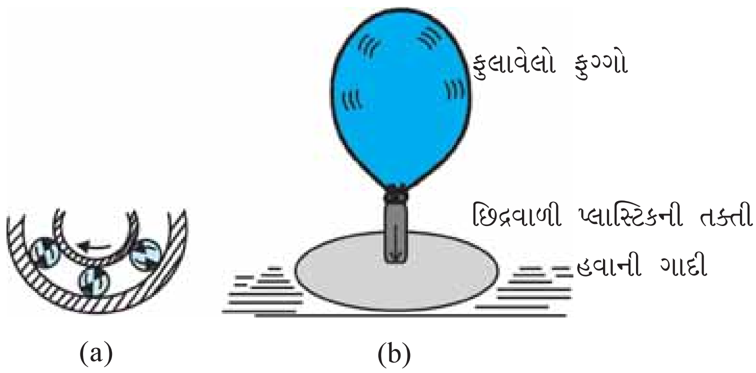
રોલિંગ ઘર્ષણ (Rolling friction)

એક વલય અથવા ગોળા જેવો પદાર્થ જ્યારે સમક્ષિતિજ સમતલ પર સરક્યા વિના ગબડે છે ત્યારે સૈદ્ધાંતિક રીતે તો, તે કોઈ ઘર્ષણનો અનુભવ કરે નહિ. દરેક ક્ષણે પદાર્થ અને સમતલ વચ્ચે માત્ર એક સંપર્કબિંદુ હોય છે અને આ બિંદુને સમતલની સાપેક્ષે કોઈ ગતિ હોતી નથી. આવી આદર્શ પરિસ્થિતિમાં, ગતિક અને સ્થિત ઘર્ષણ શૂન્ય હોય છે અને પદાર્થે અચળ વેગથી ગબડવાનું ચાલુ રાખવું જોઈએ. વ્યવહારમાં આપણને ખબર છે કે આવું નહિ થાય અને ગતિને કંઈક અવરોધ (રોલિંગ ઘર્ષણ) નડે છે, એટલે કે પદાર્થને ગબડતો રાખવા માટે કંઈક બળ લગાડવું પડે છે. આપેલ વજન માટે રોલિંગ ઘર્ષણ, સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ કરતાં ઘણા ઓછા માપનું (બે કે ત્રણ ક્રમનું નાનું – એટલે 10^2 કે 10^3મા ભાગનું) હોય છે. આ કારણથી ચક્રની શોધ માનવ-ઇતિહાસમાં એક મહત્ત્વનું સીમાચિહ્ન છે.

રોલિંગ ઘર્ષણનું ઉદ્‌ગમ પણ જટિલ છે, જોકે તે સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણના ઉદ્‌ગમ કરતાં થોડું જુદું છે. રોલિંગ દરમિયાન સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓ સહેજ વિકૃત થાય છે અને તેથી પદાર્થનું નિશ્ચિત ક્ષેત્રફળ (બિંદુ નહિ) સપાટી સાથે સંપર્કમાં રહે છે. આની પરિણામી અસર એવી થાય છે કે, સંપર્કબળનો સપાટીને સમાંતર ઘટક ગતિનો વિરોધ કરે છે.

આપણે ઘણી વાર ઘર્ષણને કંઈક અનિચ્છનીય ગણીએ છીએ. જુદા જુદા ગતિશીલ ભાગો ધરાવતા યંત્રમાં અને તેના જેવા ઘણા સંજોગોમાં ઘર્ષણ નકારાત્મક ભાગ ભજવે છે. તે સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે અને તે રીતે ઊર્જાનો ઉષ્મા વગેરે રૂપે વ્યય કરે છે. યંત્રમાં ગતિક ઘર્ષણ ઘટાડવા માટે ઊંજણ (Lubricants) વપરાય છે. બીજો રસ્તો યંત્રના ગતિશીલ ભાગો વચ્ચે બૉલ-બેરિંગ્સ વાપરવાનો છે. (આકૃતિ 5.13(a)). બૉલ-બેરિંગ્સ અને તેના સંપર્કમાંની સપાટીઓ વચ્ચેનું રોલિંગ ઘર્ષણ ઘણું ઓછું હોવાથી ઊર્જાનો વ્યય ઘટાડી શકાય છે. ઘર્ષણ ઘટાડવાનો હજી એક બીજો અસરકારક રસ્તો, સાપેક્ષ ગતિમાં હોય તેવી ઘન સપાટીઓ વચ્ચે હવાની પાતળી ગાદી જાળવી રાખવાનો છે. [આકૃતિ 5.13(b)]

જોકે કેટલીક વ્યાવહારિક પરિસ્થિતિઓમાં ઘર્ષણ અત્યંત જરૂરી છે. ગતિક ઘર્ષણ ઊર્જાનો વ્યય કરે છે પણ તે સાપેક્ષ ગતિને ઝડપથી અટકાવવા માટે જરૂરી છે. તેનો ઉપયોગ યંત્રોમાં અને ઑટોમોબાઇલ્સમાં બ્રેક દ્વારા થાય છે. તે જ રીતે સ્થિત ઘર્ષણ રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગી છે. આપણે ઘર્ષણને લીધે જ ચાલી શકીએ છીએ. અત્યંત લીસી સડક પર કાર માટે ગતિ કરવાનું અશક્ય છે. સામાન્ય સડક પર ટાયર અને સડક વચ્ચેનું ઘર્ષણ કારને પ્રવેગ આપવા માટે જરૂરી બાહ્ય બળ પૂરું પાડે છે.



આકૃતિ 5.13 *ઘર્ષણ ઘટાડવાના કેટલાક રસ્તા* (a) *યંત્રના ગતિશીલ ભાગો વચ્ચે મૂકેલ બૉલ-બેરિંગ્સ* (b) *સાપેક્ષ ગતિમાં રહેલ સપાટીઓ વચ્ચે સંકોચિત હવાની ગાદી*

5.10 વર્તુળાકાર ગતિ (CIRCULAR MOTION)

આપણે પ્રકરણ 4માં જોયું કે R ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર નિયમિત ઝડપ υથી ગતિ કરતા પદાર્થનો પ્રવેગ υ^2/R છે અને તે કેન્દ્ર તરફની દિશામાં હોય છે. ગતિના બીજા નિયમ મુજબ આટલો પ્રવેગ પુરું પાડતું બળ

$$f_c = \frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (5.16)$$

છે, જ્યાં m પદાર્થનું દળ છે. કેન્દ્ર તરફની દિશામાં લાગતા આ બળને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે. દોરી વડે વર્તુળમાં ઘુમાવાતા પથ્થર માટે કેન્દ્રગામી બળ દોરીમાંના તણાવ દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. સૂર્યને લીધે ગ્રહ પર લાગતું ગુરુત્વ બળ એ સૂર્યની આસપાસ ગ્રહની ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ તરીકે વર્તે છે. સમક્ષિતિજ સડક પર વર્તુળાકાર વળાંક લેતી કાર માટે કેન્દ્રગામી બળ એ ઘર્ષણબળ છે.

સપાટ અને ઢોળાવવાળા રસ્તા પર કારની વર્તુળ ગતિમાં ગતિના નિયમોના રસપ્રદ ઉપયોગ થતા જણાય છે.

સમતલ રસ્તા પર કારની ગતિ (Motion of a car on a level road)

કાર પર ત્રણ બળો લાગે છે. (આકૃતિ 5.14(a) :

(i) કારનું વજન, mg

(ii) લંબ પ્રતિક્રિયા, N

(iii) ઘર્ષણબળ, f

ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ પ્રવેગ ન હોવાથી

$$N - mg = 0$$

$$N = mg \qquad (5.17)$$

વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ રસ્તાની સપાટીને સમાંતર છે અને તે રસ્તા અને કારના ટાયર વચ્ચેના સંપર્ક બળના, રસ્તાને સમાંતર ઘટક દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. વ્યાખ્યા મુજબ આ ઘર્ષણબળ છે. એ નોંધો કે તે સ્થિત ઘર્ષણ છે કે જે કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે. સ્થિત ઘર્ષણ કારને વર્તુળથી દૂરની તરફ લઈ જનારી અપેક્ષિત ગતિનો વિરોધ કરે છે. સમીકરણો (5.14) અને (5.16) પરથી,

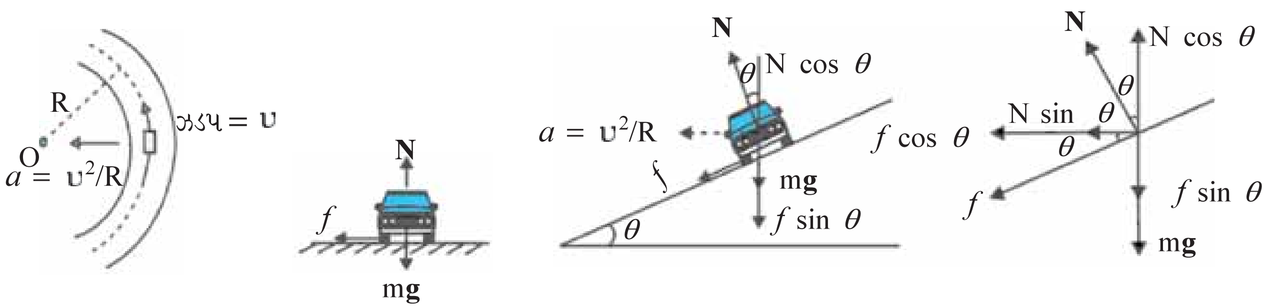
$$f \le \mu_s N = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

$$\upsilon^2 \le \frac{\mu_s RN}{m} = \mu_s Rg \qquad [\because N = mg]$$

જે કારના દળ પર આધારિત નથી. આ દર્શાવે છે કે μ_s અને Rનાં આપેલ મૂલ્યો માટે કારની વર્તુળગતિ માટે જે મહત્તમ ઝડપ υ_{max} શક્ય છે, તે

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\mu_s Rg} \qquad (5.18)$$

પરથી મળે છે.



(a) (b)

આકૃતિ 5.14 કારની વર્તુળગતિ (a) સમતલ રસ્તા પર (b) ઢોળાવવાળા રસ્તા પર

ઢોળાવવાળા રસ્તા પર કારની ગતિ (Motion of a car on a banked road)

જો રસ્તાને ઢોળાવવાળા રાખવામાં આવે તો [આકૃતિ 5.14(b)] કારની વર્તુળગતિ માટે જરૂરી બળમાં ઘર્ષણનો ફાળો ઘટાડી શકાય. ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ પ્રવેગ ન હોવાથી આ દિશામાં ચોખ્ખું બળ શૂન્ય જ હશે. આથી

$$N \cos\theta = mg + f \sin\theta \qquad (5.19a)$$

N અને fનાં સમક્ષિતિજ ઘટકો દ્વારા કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં આવે છે.

$$N \sin\theta + f \cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (5.19b)$$

પરંતુ, $f \le \mu_s N$

આથી, υ_{max} મેળવવા માટે આપણે $f = \mu_s N$ મૂકીએ.

આ પરથી સમીકરણો (5.19a) અને (5.19b) નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$N \cos\theta = mg + \mu_s N \sin\theta \qquad (5.20a)$$

$$N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta = m\upsilon^2/R \qquad (5.20b)$$

સમીકરણ (5.20a) પરથી,

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$

Nનું આ મૂલ્ય સમીકરણ [5.20(b)]માં અવેજ કરતાં,

$$\frac{mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{m\upsilon^2_{max}}{R}$$

$$\text{અથવા } \upsilon_{max} = \left(Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.21)$$

આ સમીકરણને સમીકરણ (5.18) સાથે સરખાવતાં આપણને જણાય છે કે, કારની શક્ય મહત્તમ ઝડપ સપાટ રસ્તા પર હોય તે કરતાં ઢોળાવવાળા રસ્તા પર વધુ હોય છે.

સમીકરણ (5.21)માં $\mu_s = 0$ માટે,

$$\upsilon_0 = (R\ g\ \tan\ \theta)^{1/2} \qquad (5.22)$$

આ ઝડપે, કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવા માટે ઘર્ષણબળની સહેજ પણ જરૂર નથી. ઢોળાવવાળા રસ્તા પર આ ઝડપે વાહન હંકારતાં ટાયરોને ઘસારો ખૂબ ઓછો લાગે છે. આ સમીકરણ એમ પણ જણાવે છે કે $\upsilon < \upsilon_0$ માટે ઘર્ષણબળ ઢાળ પર ઉપર તરફ લાગે અને જો $\tan\theta \le \mu_s$ હોય તો જ કારને ઢોળાવવાળા રસ્તા પર પાર્ક કરી શકાય.

> *ઉદાહરણ 5.10* 18 km/hની ઝડપે જઈ રહેલો એક સાઈકલ-સવાર એક સમતલ રસ્તા પર 3 m ત્રિજ્યાનો તીવ્ર વર્તુળાકાર વળાંક, ઝડપ ઘટાડ્યા સિવાય લે છે. ટાયર અને રસ્તા વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.1 છે. શું વળાંક લેતી વખતે સાઈકલ-સવાર લપસી જશે ?

ઉકેલ ઢોળાવ વગરના રસ્તા પર સાઈકલ-સવારને વર્તુળાકાર વળાંક પર લપસ્યા વિના ગતિ કરાવવા માટે એકલું ઘર્ષણબળ જ, જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડી શકે છે. જો ઝડપ ઘણી વધુ હોય અથવા વળાંક બહુ તીવ્ર (એટલે કે બહુ નાની ત્રિજ્યાનો) અથવા બંને હોય તો કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં ઘર્ષણબળ અપૂરતું રહે છે અને સાઈકલ-સવાર લપસી જાય છે. સાઈકલ-સવાર લપસી ન જાય તે માટેની શરત સમીકરણ (5.18) પરથી

$\upsilon^2 \le \mu_s R g$ પરથી મળે છે.

હવે, $R = 3$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\mu_s = 0.1$. એટલે કે $\mu_s R g = 2.94$ m^2 s^{-2}. $\upsilon = 18$ km/h $= 5$ m s^{-1}. $\therefore \upsilon^2 = 25$ m^2 s^{-2}. ઉપર્યુક્ત શરતનું પાલન થતું નથી એટલે સાઈકલ-સવાર વળાંક લેતી વખતે લપસી પડશે. ◀

> *ઉદાહરણ 5.11* સ્પર્ધા માટેનો એક 300 m ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર માર્ગ 15°ના ઢોળાવવાળો છે. જો રેસકારનાં પૈડાં અને માર્ગ વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.2 હોય તો (a) રેસકારના ટાયરનો ઘસારો નિવારવા માટે તેની optimum (ઇષ્ટ) ઝડપ કેટલી હશે ? (b) લપસવાનું નિવારી શકાય તેવી શક્ય મહત્તમ ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ ઢોળાવવાળા રસ્તા પર, લંબબળનો સમક્ષિતિજ ઘટક અને ઘર્ષણબળ એ બંને કારને લપસ્યા વિના વર્તુળાકાર વળાંક પર ગતિ કરાવવા માટે કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં ફાળો આપે છે. optimum (ઇષ્ટ) ઝડપ વખતે ઘર્ષણબળની જરૂર પડતી નથી અને ફક્ત લંબ પ્રતિક્રિયાનો ઘટક જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવા માટે પર્યાપ્ત છે. આ optimum ઝડપ સમીકરણ (5.22) પરથી મળે.

$$\upsilon_0 = (R\ g\ \tan\ \theta)^{1/2}$$

અહીં, $R = 300$ m, $\theta = 15°$, $g = 9.8$ m s^{-2}.

$\therefore \upsilon_0 = 28.1$ m s^{-1}.

શક્ય મહત્તમ ઝડપ υ_{max} સમીકરણ (5.21) પરથી,

$$\upsilon_{max} = \left(Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = 38.1 \text{ m s}^{-1}. \quad ◀$$

5.11 યંત્રશાસ્ત્રમાં કોયડાઓ ઉકેલવા (SOLVING PROBLEMS IN MECHANICS)

આ પ્રકરણમાં તમે શીખેલા ગતિના ત્રણ નિયમો એ યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો છે. હવે તમે યંત્રશાસ્ત્રમાંના ઘણા પ્રકારના કોયડાઓ ઉકેલી શકતા હોવા જોઈએ. યંત્રશાસ્ત્રમાં કોઈ વિશિષ્ટ કોયડો આપેલાં બળોની અસર નીચે કોઈ એક જ પદાર્થ અંગે નથી હોતો. ઘણી વાર આપણે એકબીજા પર બળ લગાડતા જુદા જુદા પદાર્થોના સમૂહનો વિચાર કરવાની જરૂર પડે છે. તે ઉપરાંત સમૂહનો દરેક પદાર્થ ગુરુત્વબળ પણ અનુભવે છે. આ પ્રકારના કોયડાઓને ઉકેલવામાં એ હકીકત યાદ રાખવી ઉપયોગી છે કે આપણે સમૂહના કોઈ પણ ભાગને પસંદ કરી શકીએ છીએ અને તેના પર ગતિના નિયમો લગાડી શકીએ છીએ, જો આપણે સમૂહના બાકીના ભાગો વડે, પસંદ કરેલા ભાગ પર લાગતાં બળોનો સમાવેશ કરીએ તો. પદાર્થ-સમૂહના આપણે પસંદ કરેલા ભાગને તંત્ર અને પદાર્થ-સમૂહના બાકીના ભાગને (ઉપરાંત બીજા બળ લગાડતાં માધ્યમોને) પરિસર કહીશું. આપણે આ જ પદ્ધતિ અહીં ઉકેલ સહિત આપેલાં ઉદાહરણોમાં

પણ અપનાવી છે. યંત્રશાસ્ત્રમાં વ્યવસ્થિત રીતે કોઈ વિશિષ્ટ કોયડાને ઉકેલવા નીચે મુજબનાં સોપાનો મુજબ આગળ વધવું જોઈએ :

(i) પદાર્થ-સમૂહના જુદા જુદા ભાગો, જોડાણો, આધારો વગેરેને વ્યવસ્થિત રીતે દર્શાવતી આકૃતિ દોરો. (રેખાકૃતિ)

(ii) સમૂહના એક સગવડ પડે તેવા ભાગને તંત્ર તરીકે પસંદ કરો.

(iii) આ તંત્ર અને સમૂહના બાકીના ભાગો વડે તેના પર લાગતાં બળોને દર્શાવતી એક જુદી આકૃતિ દોરો. બીજાં માધ્યમો વડે લાગતાં બળોનો પણ સમાવેશ કરો. **તંત્ર વડે પરિસર પર લાગતાં બળોનો સમાવેશ કરશો નહિ.** આ પ્રકારની આકૃતિને free-body diagram (મુક્ત-પદાર્થ રેખાચિત્ર) કહે છે. (બરાબર ધ્યાન રાખો કે આનો અર્થ એવો નથી કે આપણી વિચારણા હેઠળના તંત્ર પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ લાગતું નથી.)

(iv) free-body diagramમાં જે બળો તમને આપેલા હોય અથવા જેમના લાગવા વિશે તમે ચોક્કસ હોવ, (દા.ત., દોરીમાં તેની લંબાઈને સમાંતર તણાવ) તેમની માહિતીનો સમાવેશ કરો. બાકીનાને અજ્ઞાત તરીકે લઈ, ગતિના નિયમો વાપરીને શોધી કાઢવાના છે એમ ગણો.

(v) જરૂર પડે તો બીજું એક તંત્ર પસંદ કરી તેના માટે પણ આ જ પદ્ધતિ અપનાવો. આમ કરવામાં ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરો. એટલે કે જો Aના free-body diagramમાં, B વડે A પર લાગતું બળ **F** દર્શાવેલ હોય, તો Bના free-body diagramમાં, A વડે B પર લાગતું બળ −**F** તરીકે દર્શાવવું જોઈએ. નીચેનો દાખલો ઉપરની પદ્ધતિની સમજૂતી આપે છે :

▶ ***ઉદાહરણ 5.12*** આકૃતિ (5.15) જુઓ. એક નરમ સમક્ષિતિજ સપાટી પર લાકડાનો 2 kg દળનો એક બ્લૉક સ્થિર રહેલો છે. જ્યારે 25 kg દળના લોખંડના એક નળાકારને આ બ્લૉક પર મૂકવામાં આવે છે ત્યારે તળિયું સતત નમતું જાય છે અને બ્લૉક અને નળાકાર બંને એક સાથે 0.1 m s^{-2} ના પ્રવેગથી નીચે ઊતરે છે. બ્લૉક વડે તળિયા પર તળિયું નમતાં (a) પહેલાં અને (b) પછી, કેટલું ક્રિયાબળ લાગે ? g = 10 m s^{-2} લો. આ પ્રશ્નમાં ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયાબળની જોડની ઓળખ કરો.

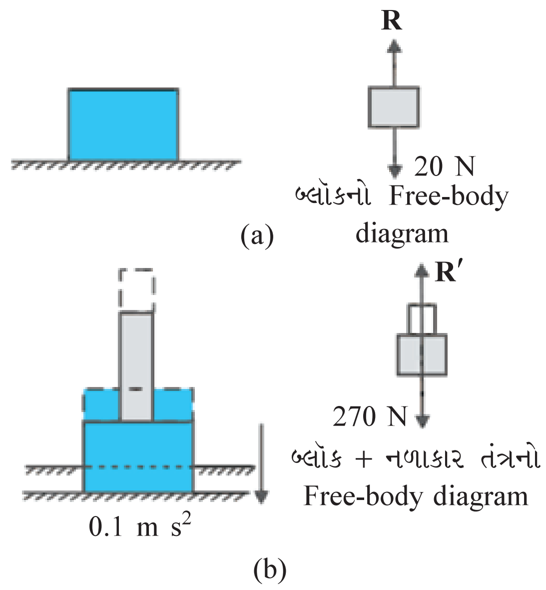
ઉકેલ

(a) તળિયા પર બ્લૉક સ્થિર છે. તેનો free-body diagram બ્લૉક પર બે બળો લાગતાં દર્શાવે છે : પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ 2 × 10 = 20 N અને તળિયા વડે બ્લૉક પર લાગતું લંબબળ R. પહેલા નિયમ મુજબ બ્લૉક પર ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ શૂન્ય હોવું જોઈએ, એટલે કે R = 20 *N*. ત્રીજા નિયમ પરથી બ્લૉક વડે લાગતું ક્રિયાબળ (એટલે કે બ્લૉક વડે તળિયા પર લાગતું બળ) 20 *N* જેટલું અને અધો દિશામાં છે.

(b) (બ્લૉક + નળાકાર) એ તંત્ર અધોદિશામાં 0.1 m s^{-2}ના પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. એ તંત્રનો free-body diagram દર્શાવે છે કે તંત્ર પર બે બળો લાગે છે : પૃથ્વી વડે લાગતું ગુરુત્વબળ (270 *N*) અને તળિયા વડે લાગતું લંબબળ R′. અહીં એ નોંધો કે free-body diagram બ્લૉક અને નળાકાર વચ્ચેનાં આંતરિક બળો દર્શાવતો નથી. ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં,

$270 - R' = 27 \times 0.1$ N

એટલે કે $R' = 267.3$ N



આકૃતિ 5.15

ત્રીજા નિયમ પરથી આ તંત્ર વડે તળિયા પર લાગતું ક્રિયાબળ 267.3 N જેટલું અધોદિશામાં છે.

ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયા બળની જોડ

(a) માટે : (i) પૃથ્વીનું બ્લૉક પરનું ગુરુત્વ બળ (20 N) (તેને ક્રિયાબળ કહીએ), બ્લૉક વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વ બળ 20 N જેટલું, ઉપર તરફ, જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી. (પ્રતિક્રિયા બળ).
(ii) બ્લૉક વડે તળિયા પર લાગતું બળ (ક્રિયાબળ), તળિયા વડે બ્લૉક પર લાગતું બળ (પ્રતિક્રિયા બળ).

(b) માટે : (i) પૃથ્વી વડે તંત્ર પર લાગતું ગુરુત્વબળ (270 N), (ક્રિયાબળ), તંત્ર વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વબળ 270 N જેટલું (પ્રતિક્રિયા બળ), ઊર્ધ્વદિશામાં (આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી.).