ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି

(ARITHMETIC PROGRESSION)

3.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଗୋଟିଏ ନିୟମକୁ ଭିତ୍ତି କରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମ (Order) ରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାସମୂହକୁ ଏକ **ଅନୁକ୍ରମ (Sequence)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : 2, 4, 6, 8..............; 1, 3, 5, 7 ....;

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.......... ; 2, 6, 18, 54............... ଇତ୍ୟାଦି ।

ଅନୁକ୍ରମରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଦ (term) କୁହାଯାଏ । ଅନୁକ୍ରମର ବିଶେଷତ୍ୱ ହେଲା, ପ୍ରଥମ ତିନିଟି କିମ୍ବା ଚାରିଟି ପଦକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ଏହାର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଜାଣି ହୁଏ ।

ସାଧାରଣ ଭାବେ ଲେଖିଲେ ଅନୁକ୍ରମକୁ t_1, t_2, t_3, t_4, ... ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଏଠାରେ t_1, t_2, t_3, t_4, ... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପ୍ରଥମ ପଦ (first term), ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ (second term), ତୃତୀୟ ପଦ (third term) ଏବଂ ଚତୁର୍ଥ ପଦ (fourth term) ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି n – ତମ ପଦକୁ t_n ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ । n – ତମ ପଦକୁ ଅନୁକ୍ରମର **ସାଧାରଣ ପଦ (General term)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots\cdots = 0$ (ଶୂନ) ତେବେ ଅନୁକ୍ରମଟି t_1, t_2, ... t_n ଓ ଏହା ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ । ଆମର ଆଲୋଚନାରେ ଆସୁଥିବା ଯେ କୌଣସି ଅନୁକ୍ରମ ସସୀମ (Finite sequence) । ଉକ୍ତ ଅନୁକ୍ରମକୁ $\{ t_n \}$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ଅସୀମ ଅନୁକ୍ରମ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ପଢ଼ିବ ।

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନିୟମକୁ ନେଇ କ୍ରମରେ ଥିବା ଅନୁକ୍ରମକୁ ଗୋଟିଏ **ପ୍ରଗତି (Progression)** କୁହାଯାଏ ।

ପ୍ରଗତି ସାଧାରଣତଃ ତିନି ପ୍ରକାରର –

(i) ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (Arithmetic progression)

(ii) ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି (Geometric progression)

(iii) ହରାତ୍ମକ ପ୍ରଗତି (Harmonic progression)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଗତି ଗୋଟିଏ ପ୍ରକାରର ସଂଖ୍ୟା ଅନୁକ୍ରମ ସୃଷ୍ଟି କରିଥାନ୍ତି । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କେବଳ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ଓ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଗତି ତଥା ହରାତ୍ମକ ପ୍ରଗତି ସମ୍ପର୍କରେ ଉଚ୍ଚମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

3.2 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (Arithmetic Progression (A.P.)) :

ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ (A. P.) ଲେଖାଯାଏ । ଯଦି କୌଣସି ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରୁ (ପ୍ରଥମଟିକୁ ଛାଡ଼ି) ପୂର୍ବପଦର ବିୟୋଗଫଳ ସର୍ବଦା ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଅନୁକ୍ରମଟିକୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (A. P.) କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ବିୟୋଗଫଳକୁ **ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର (Common difference)** କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ 'd' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଅତଏବ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ପାଇଁ $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = ... = t_n - t_{n-1} = d$ ଅଟେ ।

3.2.1 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର n-ତମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

କୌଣସି A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d ହେଲେ ଏହି ଅନୁକ୍ରମର ସାଧାରଣ ରୂପ

$$
\begin{aligned}
t_1 &= a \\
t_2 &= a + d = a + (2-1)\,d \\
t_3 &= a + 2d = a + (3-1)\,d \\
t_4 &= a + 3d = a + (4-1)\,d \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_n &= a + (n-1)\,d
\end{aligned}
$$

ଅର୍ଥାତ୍ A.P. ରେ ଥିବା ଅନୁକ୍ରମର ସାଧାରଣ ରୂପଟି $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + (n-1)d$

ସୁତରାଂ **n ତମ ପଦର ସୂତ୍ର :** $\boxed{t_n = a + (n-1)d}$

ସୂଚନା : A.P. ରେ ସାଧାରଣତଃ ପ୍ରଥମ ପଦକୁ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତରକୁ d ନିଆଯାଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ A.P. ଅଟେ ।

(i) $-18, -16, -14, -12.......$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = -18$ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = -16 - (-18) = -14 - (-16) = -12 - (-14) = 2$

(ii) $-11, 0, 11, 22, 33, 44.............$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = -11$ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = 0 - (-11) = 11 - 0 = 22 - 11 = 11$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, ...$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{3}$ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

ଉପରେ ଥିବା A.P. ମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ପଦ t_n ଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ

(i) $t_n = -18 + (n-1)2 = -18 + 2n - 2 = 2n - 20$ $\qquad (\because t_n = a + (n-1)d)$

(ii) $t_n = -11 + (n-1)11 = -11 + 11n - 11 = 11n - 22$

(iii) $t_n = \frac{1}{3} + (n-1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n$

ପୁନଶ୍ଚ କୌଣସି A.P. ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରରେ a, n ମାନ ସ୍ଥାପନ କରି t_n ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।

ମନେକର ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଥମ A.P. ର ଦଶମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$t_{10} = -18 + (10-1)2 = -18 + 18 = 0$

3.2.2 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ n - ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳ :

A.P. ର ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳର ସୂତ୍ରକୁ ପ୍ରଥମେ **ଜର୍ମାନୀର ବିଖ୍ୟାତ ଗଣିତଜ୍ଞ ଗସ୍ (Gauss)** ତାଙ୍କ ବାଲ୍ୟକାଳରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିଥିଲେ । ତାଙ୍କର ସ୍କୁଲ ଶିକ୍ଷକ 1 ରୁ 100 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଗସ୍‌ଙ୍କୁ କହିଲେ । ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ଧାରଣା ଥିଲା ଏଥିପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ସମୟ ଲାଗିବ ଓ ଗସ୍ ଚୁପ୍‌ଚାପ୍ ରହି ଏହା କରିବେ । ମାତ୍ର ଅଳ୍ପ ସମୟରେ ଗସ୍ ଏହାର ଉତ୍ତର ପାଇଥିଲେ । ସେ ଯେଉଁ ପଦ୍ଧତିରେ କଲେ ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :

ମନେକର 1 ରୁ 100 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ S_{100} ତେବେ

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$
$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

ମିଶାଇଲେ $$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101$$

$$\therefore 2S_{100} = 101 \text{ x } 100 \Rightarrow S_{100} = \frac{101 \text{x} 100}{2} = 5050$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ a, a + d, a + 2d, a + 3d, ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ n ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ମନେକର n ତମ ପଦଟି $t_n = a + (n-1)d = l$ ହେଉ । ତେବେ ଶେଷ ପଦ = l, ଏହାର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପଦ $l-d$, $l-d$ ର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପଦ $l-2d$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ମନେକର n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ S_n

$\therefore S_n = a + (a+d) + ... + (l-d) + l$

$S_n = l + (l-d) + ... + (a+d) + a$ (ପଦଗୁଡ଼ିକ ଓଲଟାକ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଇଛି)

ମିଶାଇଲେ $2S_n = (a+l) + (a+l) + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

$\therefore 2S_n = n(a+l) \qquad \therefore S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

$\therefore$ n **ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟିର ସୂତ୍ର :** $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a+l)}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(\text{ପ୍ରଥମ ପଦ} + n \text{ ତମ ପଦ})}$

ପୁନଶ୍ଚ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରରେ $l = a + (n-1)d$ ସ୍ଥାପନ କଲେ

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

∴ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ୟ ଏକ ସୂତ୍ର : $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 1. ପ୍ରଥମ n ଗୋଟି ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

କାରଣ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1 ଓ n ତମ ପଦ = n ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 2. ଯଦି ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = 0$ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରଗତିଟି a, a, a, a, ... ହେବ ଏବଂ $S_n = a+a+a+....$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ = na ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 3. ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗକଲେ;
(ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରୁ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ;
(iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ;
(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d
ଓ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିଟି a, a+d, a + 2d, ..., a+(n–1)d,
(i) ର ସତ୍ୟତା ପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ k ସଂଖ୍ୟାଟି ଯୋଗ କଲେ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମଟି
(a +k), (a+k) + d, (a+k) + 2d, ..., (a+k) + (n–1)d ହେବ ।
ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ଯେଉଁଥିରେ ପ୍ରଥମ ପଦ a+k ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d,
ଠିକ୍ ଅନୁରୂପ ଭାବେ (ii), (iii) ଓ (iv) ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

(a) ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା ପଦ୍ଧତିରେ 15 ଠାରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ଗୋଟିଏ A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ 4 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର 3 ହେଲେ

(i) A.P. ଟି ଲେଖ,
(ii) A.P. ର 33 ତମ ପଦ (t_{33}) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ
(iii) A.P. ର ପ୍ରଥମ 40 ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି (s_{40}) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

(a) 1 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ହେଲେ 85 ଗୋଟି ଓ 1 ରୁ 14 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ହେଲେ 14 ଗୋଟି ।

∴ 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା = 85 – 14 = 71

Educational Information

ବିକଳ୍ପ ହିସାବ : 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା = (85 – 15) + 1 = 71

ମନେକର 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳ = S_{71} । ଅତଏବ

S_{71} = 15 + 16 + 17 + 18 +.... + 83 + 84 + 85

S_{71} = 85 + 84 + 83 + 82 +.... + 17 + 16 + 15 (ଓଲଟାଇ ଲେଖିଲେ)

$2S_{71}$ = 100 + 100 + 100 + 100 ..... + 100 + 100 + 100

$\therefore 2S_{71} = 100 \times 71$

$\Rightarrow S_{71} = \frac{100 \times 71}{2} = 50 \times 71 = 3550$ (ଉତ୍ତର)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, $S_{71} = \frac{71}{2}(15+85) = 50 \times 71 = 3550$ $[\because S_n = \frac{n}{2}\{a+\boldsymbol{l}\}]$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ (a) = 15 ଏବଂ ଶେଷପଦ ($\boldsymbol{l}$) = 85 ।

(b) (i) A. P. = 4, 7, 10, 13, 17, ... $[\because a = 4$ ଏବଂ $d = 3]$

(ii) $t_{33} = 4 + (33 - 1) \times 3 = 100$ $[\because t_n = a + (n-1)d]$

(iii) 40 ଟି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ମିଶାଣଫଳ $(S_{40}) = \frac{40}{2}\{2 \times 4 + (40 - 1) 3\} = 20(8+117)$

$\Rightarrow S_{40} = 20 \times 125$ $[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}]$

$\Rightarrow S_{40} = 2500$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଗୋଟିଏ A.P. ର $t_4 = 11$, $t_{10} = 16$ ହେଲେ, t_{21} ଏବଂ ପ୍ରଥମ 40 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରଥମ ପଦ = a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = d

ଦତ୍ତ ଅଛି : $t_4 = 11 \Rightarrow a + (4 - 1) d = 11 \Rightarrow a + 3d = 11$ .... (1)

ଦତ୍ତ $t_{10} = 16 \Rightarrow a + (10 - 1) d = 16 \Rightarrow a + 9d = 16$ .... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ $\Rightarrow (a + 9d) - (a + 3d) = 16 - 11 \Rightarrow 6d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{6}$

ବର୍ତ୍ତମାନ (1) $\Rightarrow a + 3 \times \frac{5}{6} = 11 \Rightarrow a = 11 - \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$

ତେଣୁ $t_{21} = a + (21 - 1) d = \frac{17}{2} + 20 \times \frac{5}{6} = \frac{151}{6} = 25\frac{1}{6}$ (ଉତ୍ତର)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $S_{40} = \frac{40}{2}\{2 \times \frac{17}{2} + (40-1)\frac{5}{6}\}$

$\Rightarrow S_{40} = 20(17 + \frac{65}{2}) = 340 + 650 = 990$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : 2, 4, 6, 8, ... ଅନୁକ୍ରମର S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$, $t_3 - t_2 = 6 - 4 = 2$, $t_4 - t_3 = 8 - 6 = 2$ ....ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ଅଟେ ଏବଂ ଏହାର a = 2 ଓ d = 2

$\therefore\ S_{50} = \frac{50}{2}\{2 \times 2 + (50 - 1)2\} = 2550$ $[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}]$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : 27 + 24 + 21+ ... ... ର କେତୋଟି ପଦ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ ?

ଦୁଇଟି ଉତ୍ତରର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ ବୁଝାଅ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ a = 27 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 24 – 27 = 21 – 24 = – 3 ଇତ୍ୟାଦି ।

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଅନୁକ୍ରମଟି 27, 24, 21, ... A.P. ରେ ଅଛି ।

ମନେକର ପଦ ସଂଖ୍ୟା n ହେଲେ ଯୋଗଫଳ = 132 $\therefore\ S_n = 132$

$\Rightarrow \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 132 \Rightarrow \frac{n}{2}\{2 \times 27 + (n-1)(-3)\} = 132$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(57 - 3n) = 132 \Rightarrow n(57 - 3n) = 264 \Rightarrow -3n^2 + 57n - 264 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 88 = 0 \Rightarrow (n-11)(n-8) = 0$

$\Rightarrow$ n = 11 ବା 8 ଅର୍ଥାତ୍ A.P. ର 11 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ ଏବଂ 8 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ 132 ହେବ । ।

ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ : ବର୍ତ୍ତମାନ $t_9 = 27 + (9-1)(-3) = 3$, $t_{10} = t_9 + d = 3 + (-3) = 0$

$t_{11} = t_{10} + d = 0 + (-3) = -3$

$\Rightarrow t_9 + t_{10} + t_{11} = 3 + 0 + (-3) = 0$

$\Rightarrow S_{11} = S_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} = S_8 + 0 = S_8$

ଅର୍ଥାତ୍ ଯୋଗଫଳରେ 8 କିମ୍ବା 11 ଗୋଟି ପଦ ରହିଲେ ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଅନୁକ୍ରମର $t_n = 2n + 3$ ହେଲେ S_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $t_n = 2n + 3$ ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱରେ n ବଦଳରେ 1 ଲେଖିଲେ ପାଇବା

$t_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \Rightarrow a = 5$

ସେହିଭଳି n ବଦଳରେ 2 ଲେଖିଲେ ଏବଂ 3 ଲେଖିଲେ ପାଇବା

$t_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$ ଏବଂ $t_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$

$t_3 - t_2 = 9 - 7 = 2$ ଏବଂ $t_2 - t_1 = 7 - 5 = 2$ $\therefore t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = 2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର 2 ହେତୁ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ଯାହାର d = 2

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1) \times 2]$

$= \frac{n}{2}(10 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n + 8) = n(n + 4) = n^2 + 4n$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା: n ସ୍ଥାନରେ ଗୋଟିଏ ଯେକୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଅର୍ଥାତ୍ n = 30 ନେଲେ, S_{30} ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇପାରିବ ।

$\therefore S_{30} = 30^2 + 4 \times 30 = 900 + 120 = 1020$

ଉଦାହରଣ - 7 : ଗୋଟିଏ ଅନୁକ୍ରମର $S_n = 3n + 4n^2$ ହେଲେ, t_7 କେତେ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $S_n = 3n + 4n^2$

(n–1) ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି S_{n-1} ହେଲେ (S_n ରେ n ପରିବର୍ତ୍ତେ n–1 ଲେଖିଲେ)

$S_{n-1} = 3(n-1) + 4(n-1)^2 = 3n - 3 + 4n^2 - 8n + 4 = -5n + 4n^2 + 1$

ମାତ୍ର $S_n = S_{n-1} + t_n \Rightarrow 3n + 4n^2 = -5n + 4n^2 + 1 + t_n$

$\Rightarrow t_n = 8n - 1$ .... (i)

$\therefore t_7 = 8 \times 7 - 1 = 55$ [(i) ରେ n = 7 ଲେଖିଲେ] (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଯଦି a^2, b^2, c^2 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ A.P ରେ ରହନ୍ତି, ତେବେ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ a^2, b^2, c^2 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ A.P. ରେ ରହିଛନ୍ତି ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାରେ ab + bc + ca ଯୋଗ କଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ A.P. ରେ ରହିବେ । (ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - 3)

$\therefore a^2+ab+bc+ca,\ b^2+ab+bc+ca,\ c^2+ab+bc+ca$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\Rightarrow a(a+b)+c(a+b),\ b(a+b)+c(a+b),\ c(b+c)+a(b+c)$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\Rightarrow (a+b)(c+a),\ (a+b)(b+c),\ (b+c)(c+a)$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ (a+b)(b+c)(c+a) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\frac{(a+b)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\therefore \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. ରେ ରହିବେ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 9 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ A.P. ର $t_{m+n} + t_{m-n} = 2t_m$

ସମାଧାନ : ମନେକର A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ d

$\therefore t_{m+n} = a + (m+n-1)d$ ଏବଂ $t_{m-n} = a + (m-n-1)d$

$t_{m+n} + t_{m-n} = (a+a) + (m+n-1+m-n-1)d = 2a + (2m-2)d$

$= 2\{a+(m-1)d\} = 2t_m$

$\therefore t_{m+n} + t_{m-n} = 2t_m$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ ।

(i) 1, 2, 3, 4, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_8 = ... [(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9]

(ii) 2, 4, 6, 8, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_7 = ... [(a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 18]

(iii) -5, -3, -1, 1, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_{11} = ... [(a) 13 (b) 15 (c) 17 (d) 19]

(iv) 3, 6, 9, ... ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6]

(v) -4, -2, 0, 2, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ...[(a) -2 (b) -3 (c) 2 (d) 3]

(vi) 10.2,10.4, 10.6, 10.8, ... ରେ t_5 = ... [(a) 11.0 (b) 11.2 (c) 11.4 (d) 11.6]

(vii) 2.5, 2.9, 3.3, 3.7, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ...[(a) 1.5 (b) 1.4 (c) 0.5 (d) 0.4]

(viii) 3, x, 9, ... ଏକ A.P. ହେଲେ x = ... [(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7]

(ix) 1.01, 1.51, 2.01, 2.51, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) 1 (b) 0.5 (c) 1.5 (d) 1.05]

(x) 5, 0, -5, -10, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) –5 (b) 5 (c) –10 (d) 10]

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ A.P. ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର :

(i) 1, 4, 7, 10, 15, 16, 19, 22
(ii) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50
(iii) 1, 6, 11, 15, 22, 28, 34, 40
(iv) 1, 4, 7, 9, 11, 14, 17, 20
(v) –5, –3, –1, 0, 2, 4, 6, 8
(vi) a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, a + 7d
(vii) 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0
(viii) –7, –4, –1, 2, 5, 8, 11, 14

3. ପ୍ରଶ୍ନ 2 ରେ ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ A.P. ସେମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ନିରୂପଣ କର ।

4. ପ୍ରଥମ ପଦ a = 5 ନେଇ A.P. ର ପ୍ରଥମ ଚାରିଗୋଟି ପଦ ଲେଖ ଯେପରିକି ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର

(i) d = 5 (ii) d = 4 (iii) d = 2 (iv) d = –2 (v) d = –3 ହେବ ।

5. ଏକ A.P. ର n ତମ ପଦ t_n ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ t_5, t_8 ଓ t_{10} କେତେ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $t_n = \frac{n+1}{2}$
(ii) $t_n = -10 + 2n$
(iii) $t_n = 10n + 5$
(iv) $t_n = 4n - 6$

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ A.P. ଗଠନ କର (କେବଳ ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦ ତ୍ରୟ ଆବଶ୍ୟକ) ଯେଉଁଠାରେ

(i) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 4, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 3
(ii) ପ୍ରଥମ ପଦ a = -8, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –2
(iii) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 7, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –4
(iv) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 10, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 5
(v) ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{2}$, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{3}{2}$
(vi) ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{2}$, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –1

7. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ ବା ଠିକ୍ ଲେଖ ।

(a) 1, 2, 3, 4....... ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି ।

(b) 1, –1, 1, –1,......... ଅନୁକ୍ରମଟି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ଅଟେ ।

(c) 2, 1, –1, –2 ସଂଖ୍ୟା ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ବିଦ୍ୟମାନ ।

(d) ଯେଉଁ ଅନୁକ୍ରମର $t_n = n - 1$, ତାହା ଏକ A. P. ଅଟେ ।

(e) ଯେଉଁ ଅନୁକ୍ରମର $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ ତାହା A. P. ଅଟେ ।

(f) ଯଦି କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2 : 3 : 4 ହୁଏ, ତେବେ କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ଗୋଟିଏ A.P. ଗଠନ କରିବେ ।

(g) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଗୋଟିଏ A.P. ରେ ରହିପାରିବେ ।

(h) ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାମାନେ A.P. ଗଠନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

(i) 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏକ A.P. ଅଟନ୍ତି ।

(j) 5, x, 9 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିଲେ $x = 6$

(ଖ - ବିଭାଗ)

8. (a) 1 + 2 + 3 + ... ରେ S_{30} କେତେ ?
(b) 1 + 3 + 5 + ... ରେ S_{10} କେତେ ?

(c) 2 + 4 + 6 + ... ରେ S_{15} କେତେ ?
(d) 1 – 2 + 3 – 4 + ... ରେ S_{30} କେତେ ?

(e) 1 – 2 + 3 – 4 + ... ରେ S_{41} କେତେ ?
(f) 1+1 +2 + 2 + 3 + 3 ... ରେ S_{17} କେତେ ?

(g) 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 5 ... ରେ S_{39} କେତେ ?

(h) – 7 – 10 – 13 - ... ରେ S_{21} କେତେ ?
(i) 10 + 6 + 2 + ... ରେ S_{15} କେତେ ?

(j) 20 + 9 – 2 + ... ରେ S_{25} କେତେ ?
(k) n+(n– 1) + (n – 2) + ... ରେ S_n କେତେ ?

(l) $5 + 4\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} + \ldots$ ରେ S_{20} କେତେ ?

9. (a) ଯଦି $a = 3, d = 4, n = 10$, ତେବେ S_n କେତେ ?

(b) ଯଦି $a = -5, d = -3$, ତେବେ S_{17} କେତେ ?

(c) ଯଦି $t_n = 2n - 1$, ତେବେ ପ୍ରଥମ 5 ଟି ପଦ ଲେଖ ।

(d) ଯଦି $t_n = 3n + 2$, S_{61} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(e) ଯଦି $t_n = 3n - 5$, ତେବେ S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(f) ଯଦି $t_n = 2 - 3n$, ତେବେ S_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(g) ଯଦି $S_n = n^2$, ତେବେ t_{15} କେତେ ?

(h) ଏକ A. P. ର a = 3, d = 4, $S_n = 903$, ତେବେ n କେତେ ?

(i) ଏକ A. P. ର d = 2, $S_{15} = 285$, ତେବେ a କେତେ ?

(j) ଏକ A. P. ର $t_{15} = 30$, $t_{20} = 50$, ତେବେ S_{17} କେତେ ?

10. (i) 'ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା କୌଶଳରେ' ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 1 ଠାରୁ 105 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(b) 25 ଠାରୁ 93 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(c) 111 ଠାରୁ 222 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) 1, 2, 3, ... ଅନୁକ୍ରମର

(a) S_{20} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (b) S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) 32 ଠାରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) 100 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) 150 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. ଯେଉଁ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମ ପଦ 17 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର – 2 ତାହାର କେତୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି 72 ହେବ ? ଏହାର ଦୁଇଟି ଉତ୍ତର ମିଳିବାର କାରଣ ଲେଖ ।

12.(i) ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନୋଟି ରାଶିର ଯୋଗଫଳ18 ଏବଂ ଗୁଣଫଳ 192 ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ $a - d$, a, $a + d$ ହିସାବରେ ନେଇ ପ୍ରଶ୍ନଟି ସମାଧାନ କର ।)

(ii) ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ଛଅଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରାନ୍ତ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ 16 ଏବଂ ମଧ୍ୟ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 63 ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ମନେକର ରାଶିଗୁଡ଼ିକ $a - 5d$, $a - 3d$, $a - d$, $a + d$, $a + 3d$ ଏବଂ $a + 5d$)

13. ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନୋଟି ରାଶିର ଯୋଗଫଳ 21 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ 155; ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ କେତେ ?

14. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଥିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ 3 : 4 : 5 ହେବ ।

15. 100 ରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏବଂ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. 200 ରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଓ 3 ଦ୍ୱାରା ଅବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
(**ସୂଚନା :** 1+2+....+199 ଓ 3+6+....+198 ନିରୂପଣ କରି ପ୍ରଥମରୁ ଦ୍ୱିତୀୟକୁ ବିୟୋଗ କର ।)

17. 15 କୁ ଏପରି 3 ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କର ଯେପରିକି ସେମାନେ ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ରହିବେ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 120 ହେବ ।

18. A. P. ରେ ଥିବା ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 15 ଏବଂ ପ୍ରାନ୍ତସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ 58 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

19. A. P. ରେ ଥିବା ଚାରୋଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରାନ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ 8 ଏବଂ ମଧ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 15 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ $a - 3d$, $a - d$, $a + d$ ଏବଂ $a + 3d$ ମନେକରି ସମାଧାନ କର ।)

20. A. P. ରେ ଥିବା ତିନୋଟି ରାଶିମାଳାର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି S_1, S_2 ଏବଂ S_3 ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିମାଳାର ପ୍ରଥମ ପଦ 1 ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3 ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $S_1 + S_3 = 2S_2$

21. ଏକ A.P. ର ତମ, P - ତମ, q - ତମ ଏବଂ r - ତମ ପଦଗୁଡ଼ିକର ମାନ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଏବଂ c ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$

22. ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା a, b, c ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ।

(i) $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$

(ii) $b + c, c + a, a + b$

(iii) $b + c - a, c + a - b, a + b - c$

(iv) $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \frac{1}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(v) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$

23. (i) $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ A.P ରେ ରହିଲେ ଏବଂ $a + b + c \neq 0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ ମଧ୍ୟ A.P.ରେ ରହିବେ ।

(ii) $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ ଅନୁକ୍ରମ A.P ରେ ରହିଲେ ଏବଂ $a + b + c \neq 0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ A.P.ରେ ରହିବେ ।

24. ଯଦି କୌଣସି A.P.ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ଶେଷ ପଦ l ହୁଏ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମରୁ r- ତମ ପଦ ଏବଂ ଶେଷରୁ r-ତମ ପଦର ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରଥମ ଓ ଶେଷ ପଦର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ।

25. ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ p ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି r, ପ୍ରଥମ q ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି s ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d, ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{r}{p} - \frac{s}{q} = (p - q)\frac{d}{2}$ ହେବ ।

26. ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର ପ୍ରଥମ p, q, r ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି a,b,c ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ ହେବ ।

27. କୌଣସି A.P. ର $t_p = q, t_q = p$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $t_m = p + q - m$ ।

ସୂଚନା : $a+(p-1)d = q$ ଓ $a+(q-1)d = p$ କୁ ସମାଧାନ କରି a ଓ d ନିରୂପଣ କରି t_{pq} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

28. କୌଣସି A.P. ର $S_m = n, S_n = m$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $S_{m+n} = -(m+n)$ ହେବ ।

3.3. ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର (Difference formula) :

ପୂର୍ବରୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥିବା ପଦମାନଙ୍କର ମିଶାଣ ପାଇଁ 'ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା' କୌଶଳ ତୁମେ ଜାଣିଛ । ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ କୌଶଳ **'ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର'** ମଧ୍ୟ ଏକ ସୁନ୍ଦର କୌଶଳ ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ବିଷୟରେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଜାଣିବା ।

ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\left[\because \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\right]$

ଏହି ସୂତ୍ରଟିକୁ **ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର** କୁହାଯାଏ । କାରଣ ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ପଦକୁ ଦୁଇଟି ପଦର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି । ଏହି ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପାଇବା : $\frac{1}{1\times2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ ଏବଂ $\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 10 : $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}$ ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $\frac{1}{1\times2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\times4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ମିଶାଇଲେ, $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+.....+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n(n+1)}$

$$\therefore S_n = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର କୌଶଳ ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ, ଯାହାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

(i) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) ର ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର $S_n = 1 + 2 + 3 + ... n$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = 1, ପଦସଂଖ୍ୟା= n

$$S_n = \frac{n}{2}\{2x1+(n-1)1\} = \frac{n}{2}(2+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} ....(1)$$

ସୂତ୍ର : $\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

(ii) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Odd Natural Numbers) ମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ**

ମନେକର, $S_n = 1 + 3 + 5 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = 2, ପଦସଂଖ୍ୟା = n

$$S_n = \frac{n}{2}\{2x1+(n-1)2\} = \frac{n}{2}(2+n-2) = \frac{n}{2}.\,2n = n^2 ....(2)$$

ସୂତ୍ର : $\boxed{1 + 3 + 5 + ... + n \text{ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ } = n^2}$

(iii) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Even Natural Numbers) ମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର, $S_n = 2 + 4 + 6 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

= 2 (1+ 2 + 3 + ... n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

$= 2 . \frac{n(n+1)}{2} = n (n + 1)$; [(1) ସାହାଯ୍ୟରେ] ....(3)

ସୂତ୍ର : $\boxed{2 + 4 + 6 + ... + n \text{ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ } = n (n + 1)}$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ ତଥା ଘନର ଯୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କରାଯିବ । ଏଥିପାଇଁ ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦର ପ୍ରାରମ୍ଭରେ ଆଲୋଚିତ ଅନ୍ତର ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ ।

(A) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର (Squares of Natural Numbers) ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2+3n-1) = 3n^2 - 3n +1$

ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ଯାହାକି ଏକ ଅନ୍ତର ଅଟେ । ଏଥିରେ n ବଦଳରେ 1, 2, 3, 4............. ଇତ୍ୟାଦି କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

....

....

$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$

$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$

$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ପଦଗୁଡ଼ିକ ଯୋଗ କରିବାରୁ

$\Rightarrow n^3 = 3S_n - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$ (ସୂତ୍ର (1) ଅନୁସାରେ)

$\Rightarrow -3S_n = -n^3 + n - \frac{3n}{2}(n+1) \Rightarrow 3S_n = n^3 - n + \frac{3n}{2}(n+1)$

$= n(n^2 - 1) + \frac{3n}{2}(n+1)$

$= n(n+1)\left\{(n-1) + \frac{3}{2}\right\} = n(n+1)\left(\frac{2n-2+3}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .... (4)

ସୂତ୍ର : $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(B) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଘନ (Cubes of Natural Numbers)ର ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ r^2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, $r^2(r+1)^2 - (r-1)^2 r^2 = 4r^3$

ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ଓ r ବଦଳରେ 1, 2, 3............. n ଲେଖିଲେ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ n ଗୋଟି ଧାଡ଼ି ପାଇବା ।

$1^2 \cdot 2^2 - 0^2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 1^3$

$2^2 \cdot 3^2 - 1^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^3$

$3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 3^3$

....

....

$(n-1)^2 \cdot n^2 - (n-2)^2 \cdot (n-1)^2 = 4(n-1)^3$

$n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 \cdot n^2 = 4n^3$

ଯୋଗକଲେ, $n^2(n+1)^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$

$\therefore 4S_n = n^2(n+1)^2$

$\therefore S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ....(5)

ସୂତ୍ର : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n)^2$

ଅର୍ଥାତ୍ **n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନର ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳର ବର୍ଗ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।**

ବି.ଦ୍ର. : $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ ମଧ୍ୟ S_n ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରିବ ।

Σ ଚିହ୍ନ (Sigma notation) :

ସୁବିଧା ସକାଶେ କେତେଗୁଡିଏ ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ସିଗ୍‌ମା (Σ) ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।

$$1+2+3+\ldots\ldots + n = \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots + n^2 = \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots + n^3 = \Sigma n^3 = \left\{\frac{n(n+1)^2}{2}\right\}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ପାଇଁ (1) ଠାରୁ (5) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\Sigma\, n(n+1) = \Sigma(n^2 + n) = \Sigma n^2 + \Sigma n,$

$$\Sigma(n+1)(n+2) = \Sigma(n^2 + 3n + 2) = \Sigma n^2 + 3\Sigma n + \Sigma 2 = \Sigma n^2 + 3\Sigma n + 2n$$

ଉଦାହରଣ - 11 : $1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + \ldots\ldots\ldots + n(n+1)$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_n = n(n+1)$ ମନେକର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳ $= S_n$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \Sigma n(n+1) = \Sigma(n^2+n) = \Sigma n^2 + \Sigma n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.\frac{2(n+2)}{3} = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା : Σn^2 ଓ Σn ସୂତ୍ରଦ୍ୱୟର ସିଧାସଳଖ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -12 : 1. 2. 3 + 2 . 3 . 4 + 3 . 4 . 5 + ...ର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_n = n (n + 1) (n + 2) = n(n^2+3n+2)= n^3+3n^2+2n$

$\therefore S_n = \Sigma t_n = \Sigma (n^3 + 3n^2 + 2n) = \Sigma n^3 + 3 \Sigma n^2 + 2\Sigma n$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

[$\Sigma n^3, \Sigma n^2, \Sigma n$ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି)

$$= \frac{\{n(n+1)\}^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} \{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + n + 4n + 2 + 4) = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+2n+3n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n(n+2)+3(n+2)\}}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା : ଆମକୁ ଯଦି ଦତ୍ତ ପ୍ରଥମ 10 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ କୁହାଯାଇଥାଆନ୍ତା ତେବେ S_n ରେ n = 10 ନେଇ S_{10} ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

$S_{10} = \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13}{2} = 8580$ ଉତ୍ତର ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିଥାନ୍ତା ।

ଉଦାହରଣ - 13 : 1+ (1+2) + (1+2+3) + (1 + 2 + 3 + 4) + ... ର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ n ତମ ପଦଟି $t_n = (1 + 2 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2}$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{n(n+1)(2n+4)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1(n+2)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଯୋଗଫଳରେ n ତମ ପଦ t_n ହେଲେ

$$t_n = \{1 + (n-1)2\}^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = 4\Sigma n^2 - 4\Sigma n + \Sigma 1$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = 2n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) + n$$

$$= \frac{2n(n+1).2(n-1)}{3} + n = \left\{\frac{4n(n^2-1)}{3} + n\right\} = n\left(\frac{4n^2-4}{3} + 1\right) = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$

$$S_n = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ...$ (n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏହି ସ୍ଥଳରେ ଯଦିଓ ଦତ୍ତ ରାଶିମାଳା A.P ନୁହଁନ୍ତି ତଥାପି କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଅନ୍ତରଗୁଡ଼ିକ (ଅର୍ଥାତ୍ 2,3,4,5,.... ଇତ୍ୟାଦି) A.P. ଅଟନ୍ତି ।

$$S_n = 1 + 3 + 6 + ... + t_{n-1} + t_n$$

ପୁନଶ୍ଚ $S_n = \quad 1 + 3 + ... + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$ (ଗୋଟିଏ ପଦକୁ ଘୁଞ୍ଚାଇ ଲେଖାଯାଇଛି)

ବିୟୋଗ କଲେ, $0 = 1 + (3-1) + (6-3) + (10-6) + ... + (t_n - t_{n-1}) - t_n$

$\therefore t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_n = \Sigma t_n = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\left\{\frac{(2n+1)}{3} + 1\right\} = \frac{1}{4}\frac{n(n+1)(2n+4)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

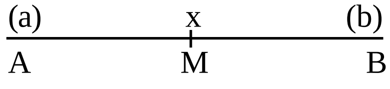
$$\therefore S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$ (ଉତ୍ତର)

3.4 ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (Arithmetic mean) :

ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ଦିଆଯାଇଥିଲେ ସେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ $x = \frac{a+b}{2}$

ଜ୍ୟାମିତିକ ଅନୁଶୀଳନ ମାଧ୍ୟମରେ ବିଚାର କରିବା ।

$\overline{AB}$ ର A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b (b > a) ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

$\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ M ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $x = \frac{a+b}{2}$ (ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ)

ଏଠାରେ a, $\frac{a+b}{2}$, b ରାଶିତ୍ରୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (A.P.) ରେ ରହନ୍ତି କାରଣ,

$\frac{a+b}{2} - a = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = d$ (ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର) [ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b–a]

a, $\frac{a+b}{2}$, b A.P. ରେ ରହିଲେ $\frac{a+b}{2}$ କୁ a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ବା A.M. କୁହାଯାଏ ।

ସୂତ୍ର : A.M. = $\frac{a+b}{2}$ (ଯେଉଁଠାରେ a, $\frac{a+b}{2}$, b A.P. ରେ ଅଛନ୍ତି)

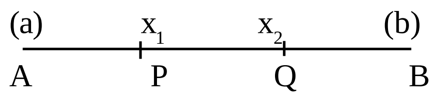
ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 7 ଓ 15 ର A.M. = $\frac{7+15}{2} = \frac{22}{2} = 11$, ସେହିପରି –1 ଓ 10 ର AM = $\frac{-1+10}{2} = 4.5$ ଇତ୍ୟାଦି ।

3.4.1 ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ A.M. ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(i) ମନେକର a ଓ b ଦତ୍ତ ରାଶି । ପ୍ରଥମେ ଏହି ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଗୋଟି A.M. ଯଥା x_1 ଓ x_2 ସ୍ଥାପନ କରିବା । ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟକର ସ୍ଥାପନ ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଦୁଇ ଭାଗ କରି ବାକୁ ପଡ଼ିଥିଲା । $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଟିକୁ ସୂଚାଉ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା $\frac{a+b}{2}$, a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ । ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟକ ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ କୁ ସମାନ ତିନି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{b-a}{3}$ ଯାହା a, x_1, x_2, b ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d ସହ ସମାନ । ଅତଏବ ଏଠାରେ $d = \frac{b-a}{3}$ । ($\because$ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b–a)

ସୁତରାଂ $x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}$ ଏବଂ

$$x_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{3}\right) = \frac{a+2b}{3}$$

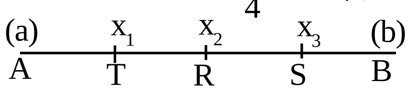


(ଚିତ୍ର 3.2)

ଅତଏବ ଦୁଇଟି ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଦ୍ୱୟ $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$ ....(iii)

(ii) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି A.M. ସ୍ଥାପନ କରିବା ।

a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଯଥା x_1, x_2 ଓ x_3 ହୁଅନ୍ତୁ । ଏଠାରେ a, x_1, x_2, x_3, b ପାଞ୍ଚ ଗୋଟି ରାଶି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ରେ ରହିବେ । x_1, x_2 ଓ x_3 କୁ a ଓ b ମାଧ୍ୟମରେ ଜାଣିବା ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଚାରି ଭାଗ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $d = \frac{b-a}{4}$ । ($\because$ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b – a)



(ଚିତ୍ର 3.3)

$x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{4} = \frac{3a+b}{4}$, $x_2 = a + 2d = a + 2 \times \frac{b-a}{4} = \frac{a+b}{2}$

ଏବଂ $x_3 = a + 3d = a + 3 \times \frac{b-a}{4} = \frac{a+3b}{4}$

$\therefore$ ଦୁଇଟି ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକତ୍ରୟ $\frac{3a+b}{4}$, $\frac{a+b}{2}$ ଏବଂ $\frac{a+3b}{4}$ ...... (iv)

(iii) ସେହିପରି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M.) ସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେଲେ $\overline{AB}$ କୁ (n+1) ସମାନ ଭାବେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ; ଯେଉଁଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{b-a}{n+1}$ ହେବ । ଯଦି ମଧ୍ୟକଗୁଡ଼ିକ $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ, $x_1 = a + \frac{b-a}{n+1}$, $x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$, $x_3 = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$, ..., $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$ ହେବ ।

ଏଠାରେ, a, x_1, x_2, x_3 .... x_n, b A.P. ରେ ରହିବେ, ଯାହାର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{n+1}$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 16 : 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ (i) ଗୋଟିଏ (ii) ଦୁଇଗୋଟି (iii) ତିନିଗୋଟି (iv) ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M.) ସ୍ଥାପନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ a = 2 ଓ b = 62 । $\therefore b - a = 60$

(i) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି x_1 ହେଲେ, $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = 2 + \frac{60}{2} = 2 + 30 = 32$

$\therefore$ 32, 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(ii) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଦ୍ୱୟ x_1 ଓ x_2 ହେଲେ, $2, x_1, x_2, 62$ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ଏଠାରେ

ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{3} = \frac{60}{3} = 20$

$\therefore x_1 = a + d = 2 + 20 = 22$ ଏବଂ $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 20 = 42$ ।

$\therefore$ 22 ଓ 42, 2 ଏବଂ 62 ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(iii) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ତ୍ରୟ x_1, x_2 ଓ x_3 ହେଲେ,

$2, x_1, x_2, x_3, 62$ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{4} = \frac{60}{4} = 15$ । ତେଣୁ

$x_1 = a + d = 2 + 15 = 17$, $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 15 = 32$ ଏବଂ $x_3 = a + 3d = 2 + 3 \times 15 = 47$ ।

$\therefore$ 17, 32 ଓ 47, 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(iv) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଚାରିଟି x_1, x_2, x_3 ଓ x_4 ହେଲେ,

2, x_1, x_2, x_3, x_4, 62 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{5} = \frac{60}{5} = 12$ । ଅତଏବ

$x_1 = a + d = 2 + 12 = 14$, $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 12 = 26$, $x_3 = a + 3d = 2 + 3 \times 12 = 38$,

ଏବଂ $x_4 = a + 4d = 2 + 4 \times 12 = 50$ ।

$\therefore$ 14, 24, 38 ଓ 50, 2 ଏବଂ 62 ମଧ୍ୟରେ ଚାରୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) $\frac{1}{15 \times 16} = ... - \frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{12 \times 11} = \frac{1}{11} - ....$

(c) $\frac{1}{n(n+1)} = ... - \frac{1}{n+1}$ (d) $\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - ....$

(e) 5 ଓ 9 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି ....

(f) x ଓ 7 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି 5 ହେଲେ x = ...

(g) (a+b) ଓ (a–b) ମଧ୍ୟରେ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି ....

(h) ଦୁଇଟି ରାଶିର A.M. 11, ଯଦି ଗୋଟିଏ ରାଶି 7 ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟଟି ....

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$ ... ... 20 ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ;

(b) $\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8}$ ... ... 16 ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ;

3. (a) 7 x 15 + 8 x 20 + 9 x 25 +...ର t_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) $6\Sigma n^2 + 4\Sigma n^3$ ର ସରଳୀକୃତ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) 1 x 2 + 2 x 3 + 3 x 4 ... + n (n + 1) ପାଇଁ S_n ଓ S_{20} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(d) 1 x 3 + 2 x 4 + 3 x 5 ... ର t_n, S_n ଓ S_{10} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 1. 1. + 2. 3. + 3. 5 + 4. 7 + ... (b) 1 . 3 + 3 . 5 + 5 . 7 + 7 . 9 + ...

(c) 3 . 8 + 6 . 11 + 9 . 14 + ... (d) 1 + (1 + 3) + (1 +3 + 5) + ...

(e) $1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + ...$ (f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ...$

(g) $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + ...$

(h) $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + ...$

5. 15 ଓ 27 ମଧ୍ୟରେ (i) ଗୋଟିଏ ଓ (ii) ଦୁଇଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

6. 12 ଓ 36 ମଧ୍ୟରେ (i) ଦୁଇଗୋଟି ଓ (ii) ତିନିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

7. 6 ଓ 46 ମଧ୍ୟରେ (i) ଦୁଇଗୋଟି ଓ (ii) ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

8. 5 ଓ 65 ମଧ୍ୟରେ (i) ତିନିଗୋଟି ଓ (ii) ପାଞ୍ଚଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

9. 11 ଓ 71 ମଧ୍ୟରେ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

10. 20 ଓ 80 ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ A.M. ଅଛି । ଯଦି ପ୍ରଥମ ମଧ୍ୟକ : ଶେଷ ମଧ୍ୟକ = 1:3 ହୁଏ ତେବେ, n ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

11. A.P. ରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଯୋଗଫଳ 2 ଏବଂ ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟକ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର 10 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।