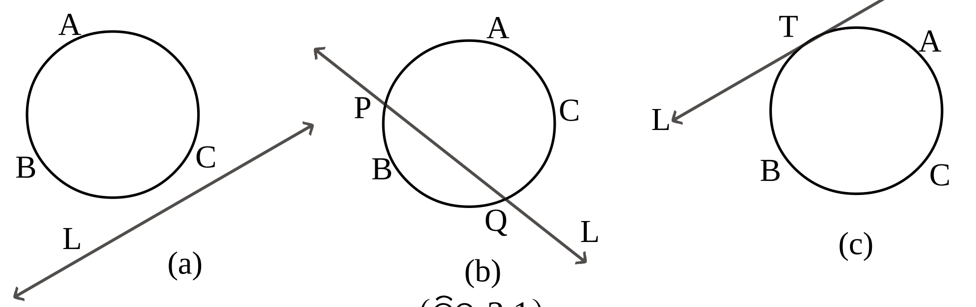
ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ

(TANGENTS TO A CIRCLE)

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ସେହି ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା । ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ସମ୍ଭାବନା ମଧ୍ୟରୁ କରିଥିବା ଅଙ୍କନରେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜୁଛି କି ? ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

ଏକ ସମତଳରେ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କଲା ପରେ, ସରଳରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କଲେ ଅଙ୍କନ ପରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜେ । ତାହା ହେଲା – (i) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ (ଚିତ୍ର 3.1(a)) (ii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(b)) ଏବଂ (iii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(c)) ।

ଚିତ୍ର - 3.1(a) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା L, **ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ** ବା ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।**

ଚିତ୍ର - 3.1(b) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ଉଭୟର ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଅଛନ୍ତି ।** ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC କୁ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏବଂ L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ଛେଦକ ରେଖା (Secant)** କୁହାଯାଏ । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର - 3.1(c) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ, ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦବିନ୍ଦୁ (ବା ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ) ସଂଖ୍ୟା ଏକ ।** ଏପରି ଅବସ୍ଥାରେ ସରଳରେଖା L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ସ୍ପର୍ଶକ (tangent)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି L ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ (Point of contact)** ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକବୃତ୍ତ ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଥିଲେ, ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1(c) ରେ ବୃତ୍ତ ABC ର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି L ଏବଂ T ହେଉଛି ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ କହିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ବୋଲି କହିବା ।

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନେଲେ ଏହା ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ (ଚିତ୍ର 3.2) । ନଚେତ୍ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧ୍ୟାୟର ପ୍ରମେୟ - 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନା ଦେଖ) । ସୁତରାଂ ଆମେ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ, **କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।**

ଉପପାଦ୍ୟ - 12

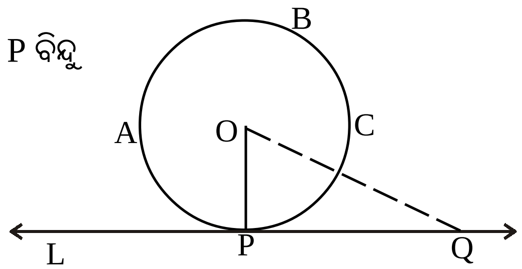
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(A tangent to a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , L ରେଖା ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । $\overline{OP}$ ହେଉଛି P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{OP} \perp L$

ପ୍ରମାଣ : P ଭିନ୍ନ, ରେଖା L ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ Q, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ।



(ଚିତ୍ର 3.2)

$\therefore OQ > OP$ ($\because$ $\overline{OP}$, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

ମାତ୍ର Q ବିନ୍ଦୁ, L ଉପରିସ୍ଥ P ଠାରୁ ଭିନ୍ନ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ Q ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବସ୍ଥାନ ଲାଗି $OQ > OP$ ବା $OP < OQ$ ।

$\therefore$ O ବିନ୍ଦୁରୁ L ରେଖା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

$\Rightarrow \overline{OP} \perp L$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ -3.1 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 12 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

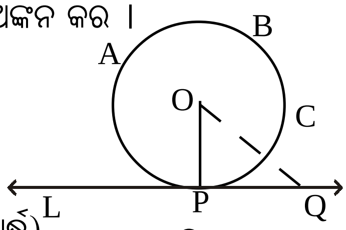
ବୃତ୍ତର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟେ ।

(The line drawn perpendicular to the radius at a point of a circle through that point, is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ: ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P, P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଏବଂ L $\perp$ $\overline{OP}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଅଙ୍କନ : L ରେଖା ଉପରେ , P ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନିଆଯାଉ । $\overline{OQ}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.3)

ପ୍ରମାଣ : L $\perp$ $\overline{OP}$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ OPQ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ $\overline{OQ}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ।

ଅର୍ଥାତ୍ OQ, ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ OP ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ($\because$ $\overline{OP}$ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

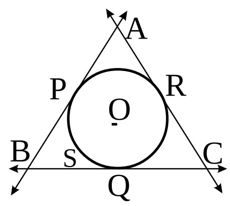
ଏଣୁ, Q ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

$\Rightarrow$ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ABC ଓ ରେଖା L ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ।

$\therefore$ L ରେଖା, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1) : ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2) : ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । କାରଣ P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ର P ଠାରେ $\overline{OP}$ ପ୍ରତି କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି ।



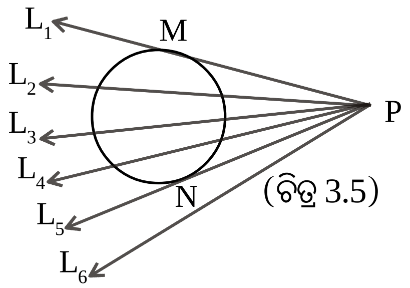
(ଚିତ୍ର 3.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର 3.4 ରେ S ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ନିଆଯାଇ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ABC ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠିତ ହେଉଛି ଏବଂ ବୃତ୍ତ S, ΔABC ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଛି । P, Q, R ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାନକୁ ନେଇ ଆମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯେ କୌଣସି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ PQR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବୃତ୍ତ ବା **ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ (Incircle)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O କୁ ତ୍ରିଭୁଜର **ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର (Incentre)** କୁହାଯାଏ । P, Q, R ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥବାରୁ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି । ଏହା ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle$A, $\angle$B ଓ $\angle$Cର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଟନ୍ତି ।

3.2 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ :

ତୁମ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ତାର ନାମ ଦିଅ P । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯେତେ ସମ୍ଭବ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର । ଚିତ୍ର 3.5 ଭଳି ଚିତ୍ରଟିଏ ପାଇବ । ସେହି

ଚିତ୍ରରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛଅଗୋଟି ରେଖା $L_1, L_2, L_3, ...L_6$ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଦୁଇଟି L_1 ଓ L_5 ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇଥିବାର ଦେଖିବ ।



(ଚିତ୍ର 3.5)

ଏଣୁ ଆମେ ଏହି କାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜାଣିଲେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ଏବଂ କେବଳ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ (ଅବଶ୍ୟ ଏହା ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ତଥ୍ୟ) । ମାତ୍ର ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମ ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ରେଖା L_1 ଓ L_5 ପ୍ରତ୍ୟେକେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ । ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $\overrightarrow{PM} \subset L_1$ ଏବଂ $\overrightarrow{PN} \subset L_5$ । ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ M, $\overrightarrow{PM}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N, $\overrightarrow{PN}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ଏଣୁ ଆମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ କୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୋଲି କହିବା । ଚିତ୍ର 3.5 ରେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକେ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଏବଂ M ଓ N ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟନ୍ତି ।

ସ୍ପର୍ଶକ -ଖଣ୍ଡ (Tangent segment) : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ M ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N ।

$\overline{PM}$ ଓ $\overline{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ **ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ** କୁହାଯାଏ । ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଗୋଟିଏ ରେଖା ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନ ଥାଏ । ମାତ୍ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ହୋଇଥିବାରୁ **ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଥାଏ ।**

ଟୀକା : 'ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ' କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ତଥା ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ବୁଝିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

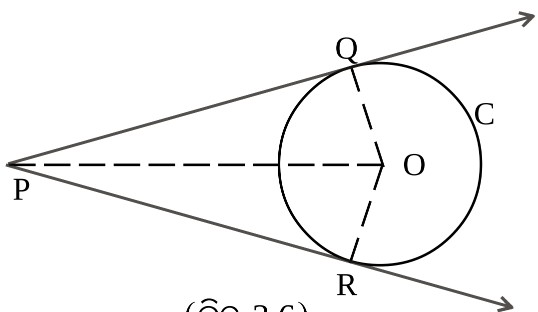
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

(The lengths of two tangent segments drawn to a circle from an external point are equal.)

ଦତ୍ତ : ବୃତ୍ତ C ର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ C ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଏବଂ Q ଓ R ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PQ = PR

ଅଙ୍କନ : $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ଏବଂ $\overline{OR}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

ପ୍ରମାଣ: ΔOQP ଏବଂ Δ ORP ରେ

$\because \begin{cases} \angle OQP \cong \angle ORP & \text{(ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ । } \because \overline{OQ} \text{ ଏବଂ } \overline{OR} \text{ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ \text{କର୍ଣ୍ଣ } \overline{OP} \cong \overline{OP} & \text{(ସାଧାରଣ ବାହୁ) ଏବଂ } \overline{OQ} \cong \overline{OR} \text{ (ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ \therefore \Delta OQP \cong \Delta ORP & \text{(ସ.କ.ବା ସର୍ବସମତା)} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ) ଅର୍ଥାତ୍ $PQ = PR$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (1) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ, $\overline{PO}, \angle QPR$ ଏବଂ $\angle QOR$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ-13 ରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି : $\Delta OQP \cong \Delta ORP$

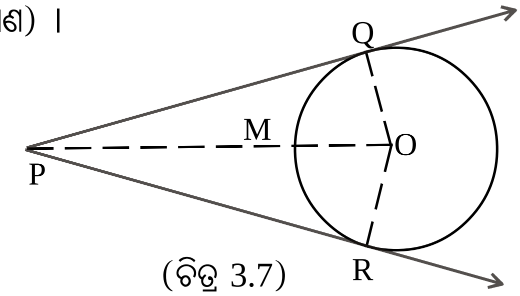
$\Rightarrow \angle OPQ \cong \angle OPR$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QPR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ $\angle POQ \cong \angle POR$

(ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QOR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ) ।



(ଚିତ୍ର 3.7)

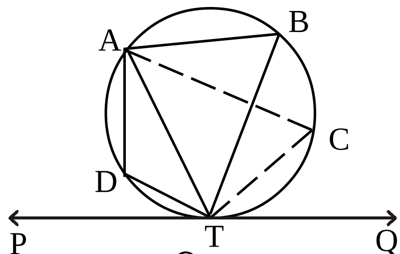
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\overline{PO}$, $\overset{\frown}{QR}$ ଚାପକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଚିତ୍ର 3.7 ରେ ଯେଉଁଠାରେ $\overline{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । $m\angle QOM = m\angle ROM$ ହେତୁ $\overline{QM}$ ଓ $\overline{MR}$ (ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ) ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ସୁତରାଂ M, $\overset{\frown}{QMR}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

3.3 ଏକାନ୍ତର ଚାପ (Alternate arc) :

ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ଥିବା ABC ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ । T ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କିତ । $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାକୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା $\overline{TA}$, ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସହ $\angle ATP$ ଓ $\angle ATQ$ ଅଙ୍କନ କରେ । ଜ୍ୟା $\overline{TA}$ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତ ABC ଉପରେ ଦୁଇଟି ଚାପ $\overset{\frown}{ABT}$ ଓ $\overset{\frown}{ADT}$ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ । ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ତା'ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଠାରେ $\overset{\frown}{ABT}$ କୁ $\angle ATP$ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପ** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ$\angle ABT$ କୁ $\angle ATP$ ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ**



(ଚିତ୍ର 3.8)

କୁହାଯାଏ। ∠ACT ମଧ୍ୟ ∠ATP ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟେ । ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ ∠ATQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{ADT}$ ଏବଂ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଉଛି ∠ADT ।

3.3.1 ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଓ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ସମ୍ପର୍କକୁ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ପଢ଼ିବା ।

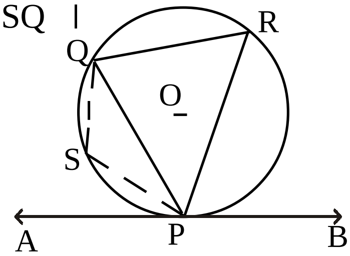
ପ୍ରମେୟ - 3.2 : ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା ସହିତ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତା'ର ପରିମାଣ ସହ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ।

(The measure of an angle formed by a tangent to a circle and a chord through the point of contact is equal to the measure of an angle inscribed in the alternate arc.)

ଦତ୍ତ : O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ PQR ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ ଏବଂ $\overline{PQ}$, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 3.9) । $\overleftrightarrow{AB}$ ସହ $\overline{PQ}$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ ଦୁଇଟି ହେଲେ ∠APQ ଏବଂ ∠BPQ । ∠APQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PRQ}$ ଏବଂ ∠APQ ର ଗୋଟିଏ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ∠PRQ । ସେହିପରି ∠BPQର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PSQ}$ ଏବଂ ∠BPQ ର ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ∠PSQ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : (i) m∠APQ = m ∠PRQ

(ii) m ∠BPQ = m ∠PSQ



(ଚିତ୍ର 3.9)

ପ୍ରମେୟ - 3.3 : (ପ୍ରମେୟ 3.2 ର ବିପରୀତ କଥନ) :

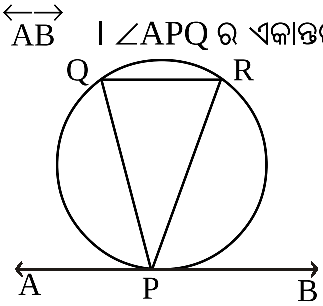
ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା, ଏହାର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତାହା ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସହ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

(If the angle which a chord makes with the straight line drawn through one end of it is equal in measure to the angle inscribed in the alternate arc of the angle, then the line is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ : PQR ବୃତ୍ତର $\overline{PQ}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ । ∠APQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣ ∠PRQ । m∠APQ = m ∠PRQ

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\overleftrightarrow{AB}$ ହେଉଛି PQR ବୃତ୍ତର P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ।

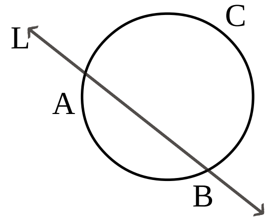
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ 3.2 ଏବଂ ପ୍ରମେୟ 3.3ର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ; କେବଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.10)

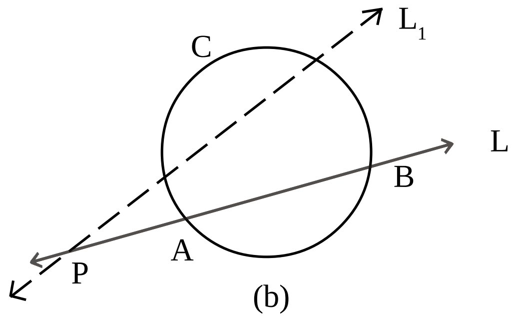
3.4 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ :

ଚିତ୍ର 3.11 (a) ରେ L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ ରେଖା ଏବଂ ଏହା ବୃତ୍ତ ABC କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । A, B ଏବଂ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ L ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ବହିଃସ୍ଥ ।



(a)

(ଚିତ୍ର 3.11)



(b)

ଚିତ୍ର 3.11(b) ରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ । ଏଠାରେ ଛେଦକ ରେଖା L, P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ABC ର ଅନ୍ୟ ଛେଦକ ରେଖା ହେଉଛି L_1 । ଏହିଭଳି P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ଛେଦକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ଏବଂ ଏକ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{PAB}$ ଅଙ୍କିତ ହେଲେ, $PA \times PB = PT^2$ ।

(If from an external point P of a circle a tangent segment $\overline{PT}$ and a secant $\overleftrightarrow{PAB}$ are drawn, then $PA \times PB = PT^2$.)

ଦତ୍ତ : TBA ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ, ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $PA \times PB = PT^2$

ଅଙ୍କନ : $\overline{TA}$ ଓ $\overline{TB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

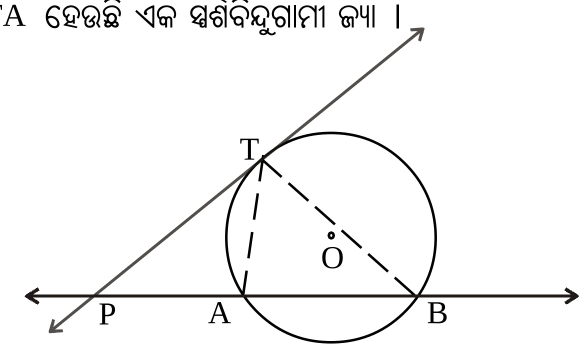
ପ୍ରମାଣ : TAB ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $\overline{TA}$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ।

$\therefore m\angle PTA = m\angle TBA$ (ପ୍ରମେୟ - 3.2)

ΔPTA ଏବଂ ΔPBT ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} m\angle TPA = m\angle TPB \text{ (ସାଧାରଣ କୋଣ) ଏବଂ} \\ m\angle PTA = m\angle TBP \end{cases}$

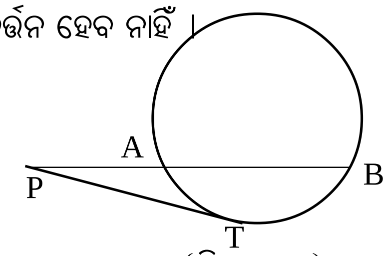
$\therefore \Delta PTA \sim \Delta PBT$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)



(ଚିତ୍ର 3.12)

$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} = \frac{AT}{BT} \Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \times PB = PT^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ (i) : ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରମାଣରେ, ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P, A ଓ B କୁ P - A- B ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି । ସେ ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିକୁ P - B - A ରୂପେ ନିଆଗଲେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ନାହିଁ ।

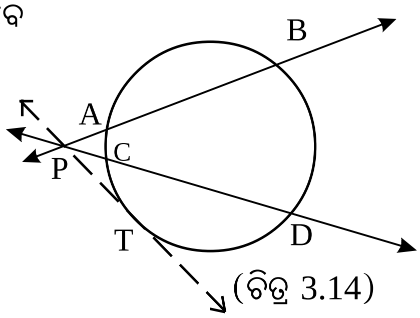


(ଚିତ୍ର 3.13)

ମନ୍ତବ୍ୟ (ii): ପୂର୍ବ ପ୍ରମାଣିତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ଚିତ୍ର 3.13 ଭଳି ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର କରାଯାଇପାରେ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ –1: ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଯଦି ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A,B ଓ C,D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ (ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T) ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ,

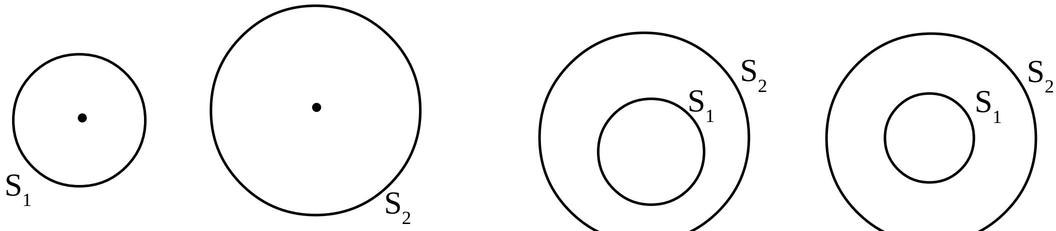
PA x PB = PC x PD



(ଚିତ୍ର 3.14)

3.5 ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି S_1 ଓ S_2 ର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(a) (b) (c)

(ଚିତ୍ର 3.15)

(a) ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ :

ଚିତ୍ର 3.15 (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ପରସ୍ପରର ବହିଃସ୍ଥ ।

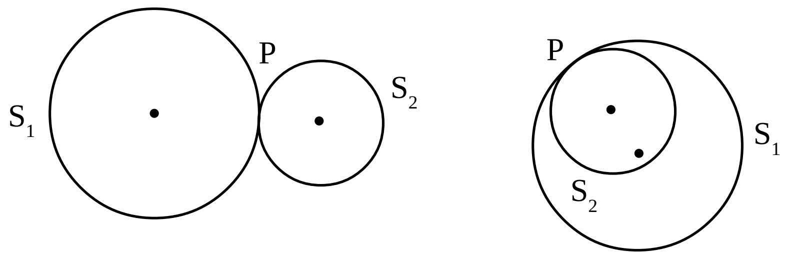
ଚିତ୍ର 3.15 (b)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1, S_2 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ।

ଚିତ୍ର 3.15 (c)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ** ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1 ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତ S_2 ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ **ଉଭୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଭିନ୍ନ** । ଏପରି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ **ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ (Concentric circle)** କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟ ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର ସଂଯୋଗରେ ଏକ **ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟ (Circular annulus)** ଗଠିତ ହୁଏ । ଏକ ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟରେ **ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶର ଛେଦ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବଳୟାକୃତି କ୍ଷେତ୍ର (Annular Region) କୁହାଯାଏ ।**

(b) ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତ ।

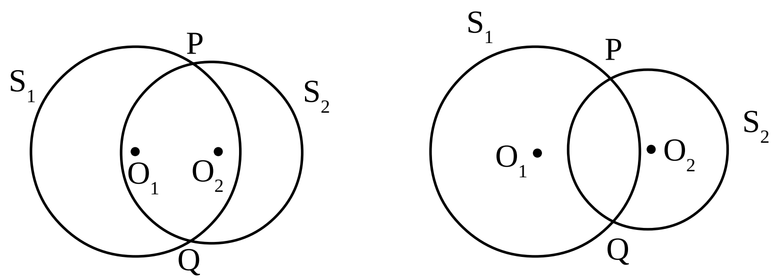


(a) (ଚିତ୍ର 3.16) (b)

ଚିତ୍ର 3.16 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P ।

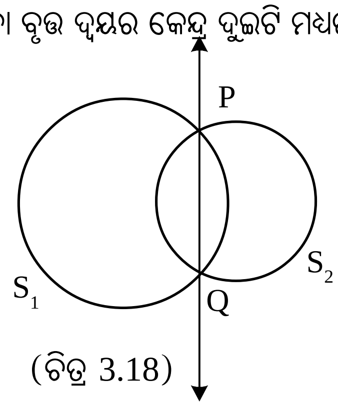
ଚିତ୍ର 3.16 (b)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P । ଏଠାରେ S_2 ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଯୋଡ଼ିକୁ **ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ (tangent circles)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର(a)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Externally tangent circles)** ଓ ଚିତ୍ର (b)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Internally tangent circles)** କୁହାଯାଏ ।

(c) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତ :



(a) (ଚିତ୍ର 3.17) (b)

ଚିତ୍ର 3.17 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚିତ୍ର (a) ଓ (b)ରେ ବୃତ୍ତଯୋଡ଼ିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବିଶେଷ କିଛି ପାର୍ଥକ୍ୟ ନାହିଁ । (a) ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ବେଳେ (b) ଚିତ୍ରରେ ଥବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଚିତ୍ର 3.18 ରେ ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ଦର୍ଶାଯାଇଛି । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ। $\overleftrightarrow{PQ}$ ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ (Radical axis)** କୁହାଯାଏ । **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।**

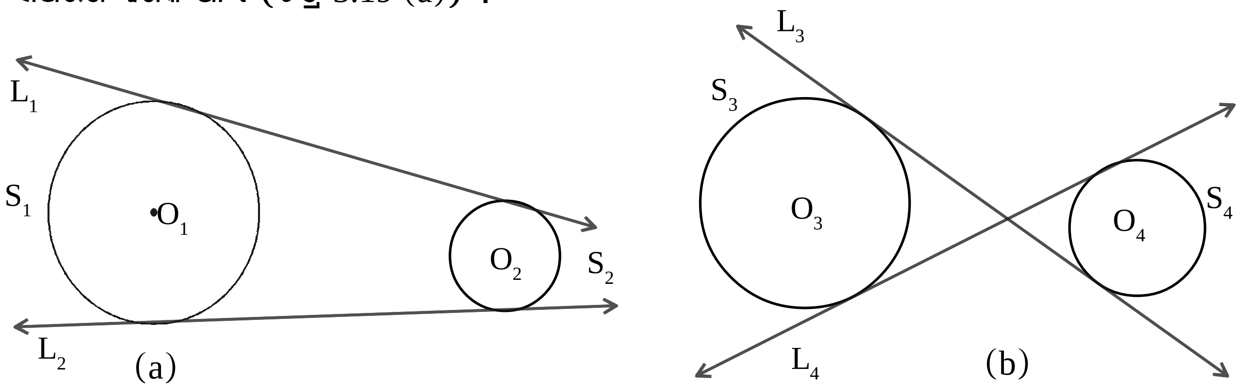
ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ । $\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ଜ୍ୟା (Common chord)** କୁହାଯାଏ ।

3.6 ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common Tangents)

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକୁ ସେହି ସମତଳରେ ଯେଉଁ ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରେ ତାକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common tangent)** କୁହାଯାଏ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥିତିରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(a) ପରସ୍ପର ଅରଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

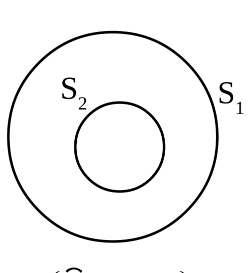
ଚିତ୍ର 3.19 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର 3.19 (a)ରେ ଥିବା S_1 ଓ S_2 ଉଭୟ ବୃତ୍ତକୁ L_1 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଓ O_2 ଉଭୟ L_1 ରେଖାର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ L_1 ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର **ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (direct common tangent)** କୁହାଯାଏ । L_2 ରେଖା ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏଣୁ **ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଗୋଟି ସରଳ ସାଧରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ (ଚିତ୍ର 3.19 (a)) ।**



(ଚିତ୍ର 3.19)

ଚିତ୍ର 3.19 (b)ରେ ଥିବା S_3 ଓ S_4 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ L_3 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ଏବଂ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ କେନ୍ଦ୍ର O_3 ଏବଂ O_4 , L_3 ରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛନ୍ତି । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକକୁ **ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (transverse common tangent)** କୁହାଯାଏ ।

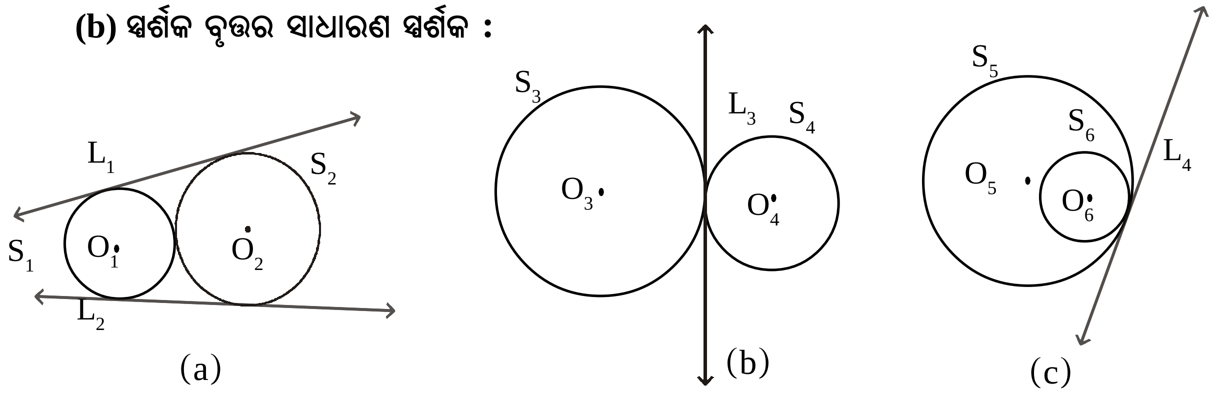
ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତ ଲାଗି ଦୁଇଟି ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।(ଚିତ୍ର 3.19 (b))**



(ଚିତ୍ର 3.20)

ଚିତ୍ର 3.20 ରେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ମଧ୍ୟରୁ S_2 ବୃତ୍ତ S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । ଏଣୁ ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।**

(b) ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :



(ଚିତ୍ର 3.21)

(i) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :** ଚିତ୍ର 3.21 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ (ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ) L_1 ଓ L_2 ଉଭୟ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

(ii) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

3.21 (b) ରେ S_3 ଓ S_4 ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_3 ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏହା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ହିଁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ।

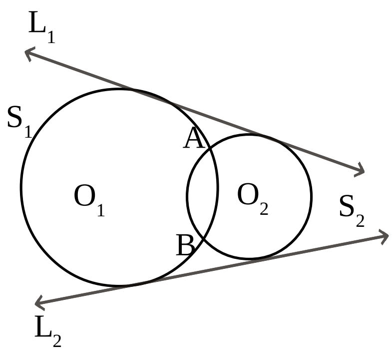
(iii) **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

ଚିତ୍ର 3.21 (c) ରେ S_5 ଓ S_6 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_4 ରେଖା ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ଏହା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଚିତ୍ର 3.21 (a) ଓ (c) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.21 (b) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । କାହିଁକି ?

(c) ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

ଚିତ୍ର 3.22 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏଠାରେ L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_1 ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_2 ର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଣୁ L_1 ଓ L_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ, S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।



(ଚିତ୍ର 3.22)

3.7 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ-ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି :

ପରସ୍ପରକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ,ଏହିପରି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟରେ ପଢ଼ିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

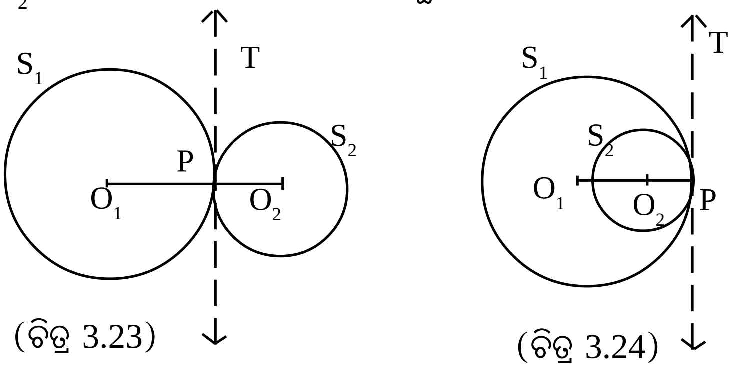
ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(The centres of two tangent circles and their point of contact are collinear)

ଦତ୍ତ : S_1 ଓ S_2 ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 ।

ଚିତ୍ର 3.23ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.24ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : O_1, O_2 ଏବଂ P ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.23) (ଚିତ୍ର 3.24)

ଅଙ୍କନ : ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{PO_1}$ ଓ $\overline{PO_2}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । (ଚିତ୍ର 3.23 ଓ ଚିତ୍ର 3.24 ରେ ଯଥାକ୍ରମେ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।)

ପ୍ରମାଣ : S_1 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ PO_1 । $\therefore \overline{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ସେହିପରି S_2 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{O_2P}$ ।

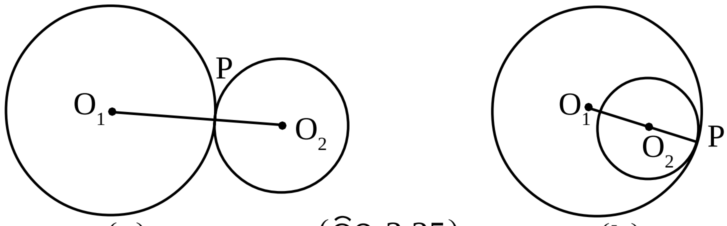
$\therefore \overline{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ମାତ୍ର $\overleftrightarrow{PT}$ ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଗୋଟିଏ ଓ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବ ସମ୍ଭବ । $\therefore$ $\overleftrightarrow{O_1P}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{O_2P}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ ।

ଏଣୁ O_1 , O_2 ଓ P ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ [ଚିତ୍ର 3.25 (a)]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନ୍ତର ସହ ସମାନ [(ଚିତ୍ର 3.25 (b))]



(ଚିତ୍ର 3.25)

ଚିତ୍ର 3.25 (a)ରେ $O_1O_2 = O_1P + O_2P$ [$\because O_1$-P-O_2]

ଚିତ୍ର 3.25 (b)ରେ $O_1O_2 = O_1P - O_2P$ [$\because O_1$-O_2-P]

ସ୍ପର୍ଶକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉଦାହରଣ :

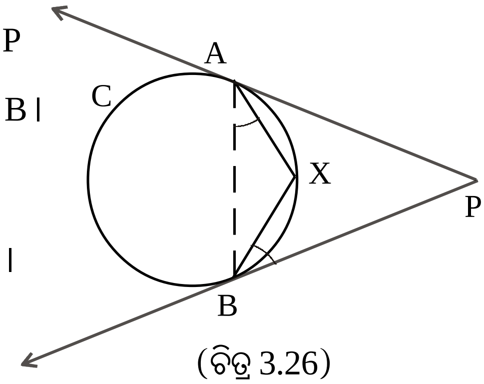
ଉଦାହରଣ -1 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । $m\angle APB = 42^0$ ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.26 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B।

$\widehat{AXB}$ ହେଉଛି A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ।

$\angle AXB$ ହେଉଛି $\widehat{AXB}$ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଗୋଟିଏ କୋଣ ।

$m\angle APB = 42^0$ ।



(ଚିତ୍ର 3.26)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $m\angle AXB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PB}$ ଓ $\overline{BX}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ହେତୁ, $m\angle XBP = m\angle BAX$ (ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ) । ମନେକର $m\angle XBP = m\angle BAX = a^0$ ହେଉ ।

ସେହି କାରଣରୁ $m\angle XAP = m\angle ABX = b^0$ ହେଉ ।

$\therefore m\angle PAB = (a+b)^0$ ଏବଂ $m\angle PBA = (a+b)^0$

ΔPAB ରେ, $m\angle PAB + m\angle PBA + m\angle APB = 180^0$

$\Rightarrow (a+b)^0 + (a+b)^0 + 42^0 = 180^0$

$\Rightarrow 2(a+b) = 180 - 42 \Rightarrow 2(a+b) = 138 \Rightarrow a+b = \frac{138}{2} = 69$ ... (1)

ΔAXB ରେ $m\angle AXB + m\angle XAB + m\angle XBA = 180^0$

$\Rightarrow m\angle AXB + a^0 + b^0 = 180^0 \Rightarrow m\angle AXB + 69^0 = 180^0$ [(1) ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow m\angle AXB = 180^0 - 69^0 = 111^0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -2 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ । ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ହେଲେ $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.27 ରେ . $\overleftrightarrow{PQ}$ ହେଉଛି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ହେଉଛନ୍ତି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ମନେକର AP= r_1 , BQ= r_2 ଏବଂ $r_1 \geq r_2$ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : $\angle APQ$ ଓ $\angle BQP$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ

[$\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେତୁ]

$\angle BCP$ ସମକୋଣ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ।

ଏଣୁ BCPQ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଥ କୋଣ $\angle CBQ$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣ । $\therefore$ BCPQ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଫଳରେ PQ = BC .... (1)

ଏବଂ PC = BQ .... (2)

$AP = r_1$, $BQ = r_2$ ଏବଂ $AC = AP - PC = r_1 - r_2$

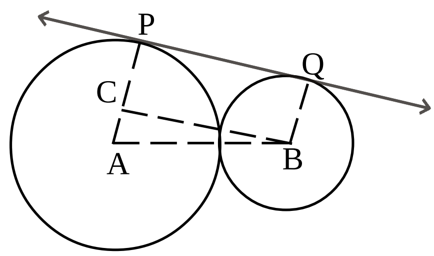
ΔABC ରେ, $\angle ACB = 90^0$ [$\because \overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ]

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$

[ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା = $r_1 + r_2$]

$\Rightarrow BC = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$\therefore PQ = BC = 2\sqrt{r_1r_2}$ (ଉତ୍ତର)



(ଚିତ୍ର 3.27)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle OTP$ = ...

(ii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ । $\angle XPY$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ, $\angle XOY$ ଏକ .... କୋଣ ।

(iii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle TOP + m\angle TPO$ = ...

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଲେ, (a) XOP କୋଣ ଓ ... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ;

(b) YPO କୋଣ ଓ .... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ OP ଓ r ମଧ୍ୟରେ .... ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

(vi) 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 13 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଓ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, $\overline{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି.

(vii) କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ r ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ସେ.ମି. ହେଲେ OP = ... ସେ.ମି. ।

(viii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର (a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ... ଏବଂ

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(ix) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(x) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xi) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇ ନ ଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xii) Δ ABC ର AB = AC । Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରି P ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle PAC = 70^0$ ହେଲେ, $m\angle ABC$ = ...

(xiii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି ହେଲେ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା .... ସେ.ମି. ।

(xiv) ଦୁଇଟି ବର୍ହିସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସହ ସମାନ ।

(xv) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(xvi) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ସରଳରେଖାଟି ସର୍ବାଧିକ ..... ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇପାରିବ ।

2. ଦତ୍ତ ଥିବା ଉକ୍ତି ଭୁଲଥିଲେ (ଏହାକୁ ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିର ନାସ୍ତିବାଚକ ଉକ୍ତି (Negative Statement) ବ୍ୟବହାର ନ କରି) ସଂଶୋଧନ କର ।

(i) r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର L ରେଖା ଏକ ଛେଦକ ହେଲେ, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ L ର ଦୂରତା = r ଏକକ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ହେଲେ ΔOPT ରେ $\angle POT$ ଏକ ସମକୋଣ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ଏକକ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ, $d^2 + r^2 = t^2$.

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$; P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତଟିକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରି P-A-B । ତେବେ $PT^2 = PA \times AB$

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

(vi) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଛି, ଯେଉଁଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

(vii) ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ସହ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସମାନ ହେଲେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହ ସମାନ ।

(ix) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବ ।

(x) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେବଳ ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।

(xi) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ, ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(xii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ, ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟିର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

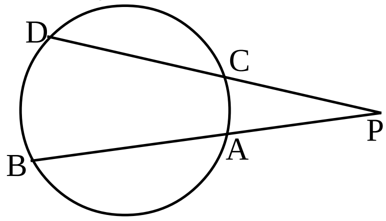
3. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ PO=17 ସେମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

ଖ – ବିଭାଗ

4. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4.5 ସେ.ମି. ଓ 12.5 ସେ.ମି. । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

5. ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ଏକ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା 20 ସେମି. ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟ 7 ସେମି ଓ 5 ସେମି. ହେଲେ, PQ କେତେ ସେ.ମି. ?

6. ଚିତ୍ର - 3.28 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦଣ୍ଡ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-C-D । (i) ସ୍ପର୍ଶକ-ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.28)

PA x PB = PC x PD

(ii) PA = 10 ସେ.ମି. PB = 16 ସେ.ମି. ଓ PD = 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

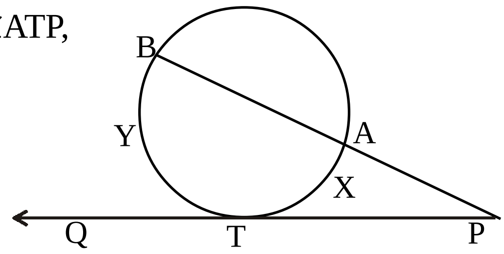
(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ AB = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଚିତ୍ର 3.29 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଯେପରି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T ।

(i) $m\,\widehat{AXT} = 60^0$ ଏବଂ $m\,\widehat{BYT} = 130^0$ ହେଲେ $m\angle ATP$, $m\angle APT$, $m\angle ATB$ ଓ $m\angle BTQ$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $m\angle BTQ = 2m\angle ATP$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : (a) BT = TP (b) TA = AP



(ଚିତ୍ର 3.29)

(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ PT = 12 ସେ.ମି ହେଲେ, AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PT = 2AP ଏବଂ AB = 18 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

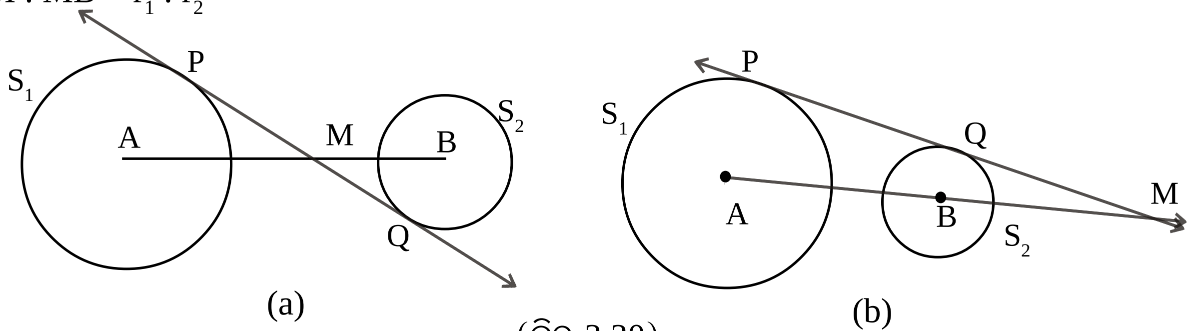
(v) PT = 2AP ଏବଂ PB = 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.(a) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହାର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(b) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

9. ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ଓ B । $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି A-B-P । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

10. ଚିତ୍ର 3.30 ରେ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । ଚିତ୍ର 3.30 (a)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : MB = r_1 : r_2$



(ଚିତ୍ର 3.30)

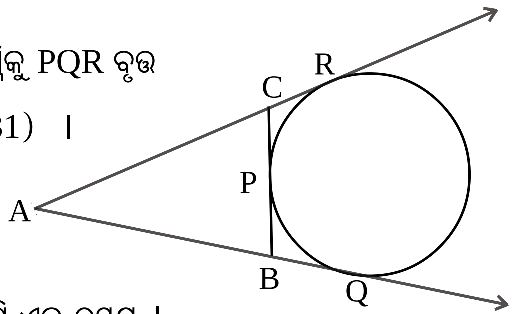
ଚିତ୍ର 3.30 (b) ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି A-B-M . । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : BM = r_1 : r_2$ ।

11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{QR}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

12. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ।

14. ΔABC ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{BC}$ ବାହୁ, $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମି ଓ $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମିକୁ PQR ବୃତ୍ତ ଯଥାକ୍ରମେ P,Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ (ଚିତ୍ର 3.31) ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$



(ଚିତ୍ର 3.31)

15. ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମସ୍ତ ବାହୁକୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।

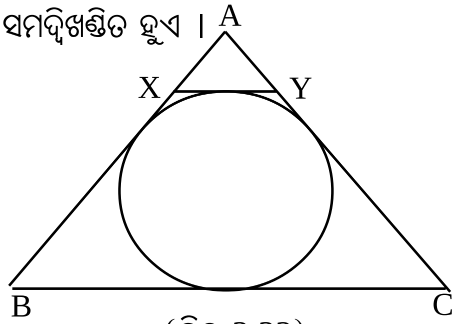
ଗ - ବିଭାଗ

16. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏହି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ଠାରୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ । $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABP ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T, $\overline{OP}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q (ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ) ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ QT = QP ।

18. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PT}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ରେଖା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି P-A-B । $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ C ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର: (a) $\overrightarrow{TC}$, $\angle ATB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ, PC=PT

(b) PC = PT ହେଲେ $\overrightarrow{TC}$ ଦ୍ୱାରା $\angle ATB$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

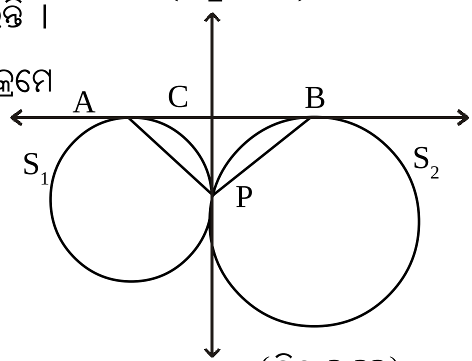


(ଚିତ୍ର 3.32)

19. ΔABC ର ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତକୁ $\overline{XY}$ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ (ଚିତ୍ର 3.32) ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX + XY +YA= AB + AC – BC

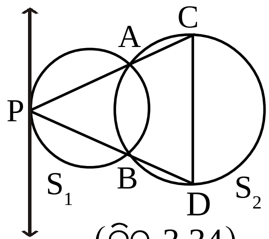
20. ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣସ୍ପର୍ଶକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର - 3.33) । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (a) AC = BC ଏବଂ

(b) $m\angle APB = 90^0$



(ଚିତ୍ର 3.33)

21. S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 3.34) । S_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ S_2 ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ S_1 ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{CD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 3.34)

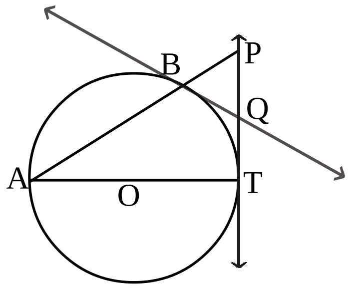
22. ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ଏବଂ $r_1 > r_2$ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ

(a) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ A ଓ B ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = d^2 (r_1 – r_2)^2$ ଏବଂ

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ C ଓ D ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $CD^2 = d^2(r_1+ r_2)^2$

23. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{QS}$ ଦ୍ୱାରା $\angle PQR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

24. ଚିତ୍ର -3.35 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର $\overline{AT}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ B । $\overrightarrow{AB}$ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{TP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\overline{PT}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 3.35)

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{CA}$, ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = AC \times AD$

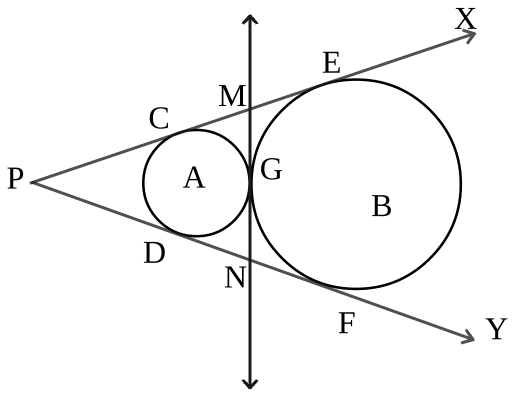
26. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି C-B-D । ଯଦି $\overline{CA}$ ଓ $\overline{DA}$ ଯଥାକ୍ରମେ ବୃତ୍ତକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AC \times AP = AD \times AQ$

27. ଚିତ୍ର 3.36 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ G ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମି $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ P। S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତକୁ $\overrightarrow{PX}$ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\overrightarrow{PY}$ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତ ।

(a) ପ୍ରମାଣ କର :

(i) P, A, G, B ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ

(ii) CE = DF

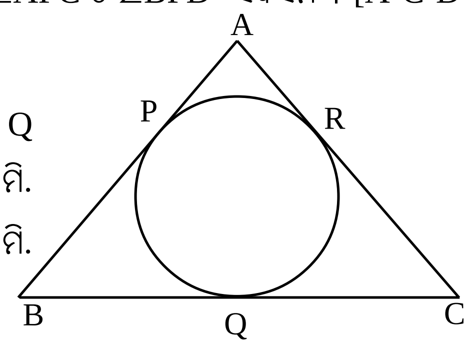


(ଚିତ୍ର 3.36)

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) PM = PN, (ii) MG = NG ।

28. ପରସ୍ପର ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P । ଏକ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle APC$ ଓ $\angle BPD$ ସର୍ବସମ । [A-C-D ଓ A-D-C ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।]

29. ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । (ଚିତ୍ର -3.37) BQ = 8 ସେ.ମି. CQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ ΔABC ର ପରିସୀମା 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, AB ଓ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

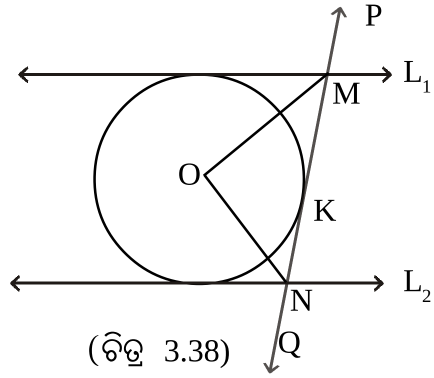


(ଚିତ୍ର 3.37)

30. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ପରିଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle AOB$ ଓ $\angle COD$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle AOD$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

31. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$, ଏହି ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $\widehat{APB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

32. ଚିତ୍ର 3.38 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $L_1 \parallel L_2$ । ବୃତ୍ତର K ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$, L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle MON$ ଏକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.38)

■ ■ ■