ઉકેલ : આપેલ માહિતીને કોષ્ટક 15.8 માં દર્શાવેલ છે અને આ કોષ્ટકની રચના કરેલ છે.

કોષ્ટક 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

અહીં $N = 30$, $\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420.$ તેથી $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$

$$\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \overline{x})^2 = 1374$$

અને તે પરથી વિચરણ $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \overline{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 સતત આવૃત્તિ-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન :

આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણના બધા વર્ગોની મધ્યકિંમતો લઈને તેને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય છે. તે પછી અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધવાની રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

જેનો પ્રત્યેક વર્ગ તેની મધ્યકિંમત x_i તથા આવૃત્તિ f_i દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય તેવું n વર્ગોવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ હોય તો તેનું પ્રમાણિત વિચલન નીચે દર્શાવેલ સૂત્ર દ્વારા મેળવી શકાય :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}$$

અહીં $\overline{x}$ એ આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક છે અને $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

પ્રમાણિત વિચલન માટેનું બીજું સૂત્ર :

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\text{વિચરણ } \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \overline{x}^2 - 2\overline{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x} f_i x_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\, N - 2\bar{x}\,.\,N\,\bar{x}\right] \qquad \left[\text{અહીં } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \quad \text{અથવા} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

અથવા $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$

આમ, પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ... (3)

ઉદાહરણ 10 : નીચે આપેલ વિતરણ માટે મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરો :

વર્ગ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
આવૃત્તિ	3	7	12	15	8	3	2

ઉકેલ : આપેલ માહિતી પરથી આપણે નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક 15.9 તૈયાર કરીએ.

કોષ્ટક 15.9

વર્ગ	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્ય-કિંમત (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10,050

આમ, મધ્યક $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

વિચરણ $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$

અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

ઉદાહરણ 11 : નીચે આપેલ માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

ઉકેલ : ચાલો નીચેનું કોષ્ટક 15.10 તૈયાર કરીએ :

કોષ્ટક 15.10

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

હવે સૂત્ર (3) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

માટે, પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 6.12$

15.5.4 વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધવાની ટૂંકી રીત :

કેટલીક વાર અસતત વિતરણમાં x_i ની કિંમતો અથવા સતત વિતરણના જુદા જુદા વર્ગોની મધ્યકિંમતો x_i ની કિંમતો ઘણી મોટી હોય છે. તેથી મધ્યક અને ચલનની ગણતરી કંટાળાજનક હોય છે અને વધારે સમય લે છે. આવા આવૃત્તિ-વિતરણ કે

જેમાં વર્ગની લંબાઈ સમાન હોય તેમાં સોપાન-વિચલન રીત દ્વારા આ પ્રક્રિયાને સરળ બનાવી શકાય છે.

માની લો કે ધારેલ મધ્યક 'A' છે અને માપ પદ્ધતિને (*scale*) $\frac{1}{h}$ ગણી કરી છે. (h એ વર્ગ અંતરાલની લંબાઈ છે) ધારો કે પદ-વિચલનો અથવા નવી કિંમતો y_i છે.

એટલે કે $y_i = \frac{x_i - A}{h}$ અથવા $x_i = A + hy_i$ ... (1)

આપણે જાણીએ છીએ કે $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ ... (2)

(1) માંથી x_i ની કિંમત (2) માં મૂકતાં, આપણી પાસે,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A \cdot \frac{N}{N} + h\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{કારણ કે, } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

આમ, $\bar{x} = A + h\,\bar{y}$ ... (3)

હવે, ચલ x નું વિચરણ $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\bar{y})^2 \qquad \text{((1) અને (3) નો ઉપયોગ કરતાં)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,h^2\,(y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \bar{y})^2 = h^2 \times \text{ચલ } y_i \text{ નું વિચરણ}$$

એટલે કે $\sigma_x^2 = h^2\sigma_y^2$

અથવા $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) અને (4) પરથી આપણી પાસે,

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \qquad \text{... (5)}$$

ચાલો, ઉદાહરણ 11 ને સમીકરણ (5) નો ઉપયોગ કરીને ટૂંકી રીત દ્વારા ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 12 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
આવૃત્તિ	3	7	12	15	8	3	2

ઉકેલ : ધારો કે ધારેલ મધ્યક A = 65 છે. અહીં $h = 10$

આપેલ માહિતી પરથી નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક 15.11 તૈયાર કરવામાં આવ્યુ છે.

કોષ્ટક 15.11

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	મધ્યકિંમત x_i	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65= A	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
9 0-100	2	95	3	9	6	18
	N=50				– 15	105

તેથી
$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$$

વિચરણ
$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\Sigma f_i y_i^2 - \left(\Sigma f_i y_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

સ્વાધ્યાય 15.2

પ્રશ્ન 1 થી 5 માં આપેલ પ્રત્યેક માહિતી માટે મધ્યક અને વિચરણ શોધો :

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. પ્રથમ n-પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ

3. ત્રણના પ્રથમ 10 ગુણિત

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીને મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

પ્રશ્ન 7 અને 8 માં આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

7.

વર્ગ	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
આવૃત્તિ	2	3	5	10	3	5	2

8.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
આવૃત્તિ	5	8	15	16	6

9. ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીને મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઊંચાઈ સેમીમાં	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
બાળકોની સંખ્યા	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. એક ડિઝાઈનમાં બનાવેલ વર્તુળોના વ્યાસ (મિમીમાં) નીચે આપ્યા છે :

વ્યાસ	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
વર્તુળોની સંખ્યા	15	17	21	22	25

વર્તુળોના વ્યાસનું પ્રમાણિત વિચલન અને મધ્યક વ્યાસ શોધો.

[**સૂચન :** પ્રથમ આપેલ માહિતીને સતત બનાવો. તે માટે વર્ગોને 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 માં પરિવર્તિત કરો અને પછી આગળ વધો.]

15.6 આવૃત્તિ-વિતરણનું વિશ્લેષણ

આ પ્રકરણના આગળના ભાગોમાં આપણે પ્રસારનાં કેટલાંક માપ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. જે એકમોમાં માહિતી આપેલ હોય છે એ જ એકમો સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનના પણ હોય છે. જ્યારે આપણે ભિન્ન એકમોનો ઉપયોગ કરી સમાન મધ્યકવાળી બે

શ્રેણીની તુલના, તેનાં માટે કરવા માંગીએ છીએ, ત્યારે કેવળ પ્રસારના માપની ગણતરી જ નથી કરતાં, પરંતુ આપણને એવાં માપની જરૂરત હોય છે કે જે એકમોથી સ્વતંત્ર હોય. એકમથી સ્વતંત્ર, ચલનના માપને *ચલનાંક* (*coefficient of variation*) કહે છે. તેને C.V. વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ચલનાંકને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100,\ \ \overline{x} \neq 0,$$

જ્યાં σ અને $\overline{x}$ અનુક્રમે આપેલ માહિતીના પ્રમાણિત વિચલન અને મધ્યક છે.

બે શ્રેણીઓમાં ચલન અથવા પ્રસારની સરખામણી કરવા માટે આપણે દરેક શ્રેણીનો ચલનાંક (C.V.) મેળવીએ છીએ. જે શ્રેણીનો ચલનાંક મોટો હોય તેને બીજી શ્રેણી કરતાં વધારે *ચલનશીલ શ્રેણી* કહે છે. નાના (C.V.) વાળી શ્રેણીને બીજી કરતાં વધારે સ્થિર કહે છે.

15.6.1 બે સમાન મધ્યકવાળા આવૃત્તિ-વિતરણોની સરખામણી

ધારો કે $\overline{x}_1$ અને σ_1 એ પ્રથમ આવૃત્તિ-વિતરણનાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન છે તથા $\overline{x}_2$ અને σ_2 એ દ્વિતીય વિતરણના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન છે.

તેથી C.V. (પ્રથમ આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_1}{\overline{x}_1} \times 100$

અને C.V. (દ્વિતિય આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_2}{\overline{x}_2} \times 100$

જો $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}$ આપેલ હોય, તો

C.V. (પ્રથમ આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_1}{\overline{x}} \times 100$ ... (1)

અને C.V. (દ્વિતિય આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_2}{\overline{x}} \times 100$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે બંને C.V. ની સરખામણી σ_1 અને σ_2 ના આધારે જ કરી શકાય છે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે સમાન મધ્યકવાળી બે શ્રેણીઓ પૈકી જે શ્રેણીમાં વધારે પ્રમાણિત વિચલન હોય તેને વધારે ચલિત અથવા ફેલાયેલી શ્રેણી કહે છે. તદ્ઉપરાંત પ્રમાણિત વિચલનનાં નાના(ઓછા) મૂલ્યવાળી શ્રેણીને પ્રમાણમાં બીજી શ્રેણી કરતાં વિશેષ સ્થિર શ્રેણી કહેવાય છે.

ચાલો આપણે નીચે આપેલાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 13 : એક કારખાનામાં બે એકમો A અને B માં કર્મીઓની સંખ્યા અને તેમને ચૂકવવામાં આવતાં વેતન નીચે આપ્યા છે :

	A	B
કર્મીઓની સંખ્યા	5000	6000
સરેરાશ માસિક વેતન	₹ 2500	₹ 2500
વેતનોની આવૃત્તિનું વિચરણ	81	100

વ્યક્તિગત વેતનોમાં A અથવા B એકમમાંથી કયા કારખાનામાં વધારે ચલનીયતા છે ?

ઉકેલ : એકમ A માં વેતનોના વિતરણનું વિચરણ $\sigma_1^2 = 81$

તેથી, એકમ A માં વેતનોના આવૃત્તિ-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન $\sigma_1 = 9$

સાથે જ એકમ B માં વેતનોના આવૃત્તિ-વિતરણનું વિચરણ $\sigma_2^2 = 100$

તેથી, એકમ B માં વેતનોના આવૃત્તિ-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન $\sigma_2 = 10$

બે એકમોમાં સરેરાશ વેતન સમાન એટલે ₹ 2500 છે. તેથી મોટા પ્રમાણિત વિચલનવાળા એકમમાં વધારે ચલન હશે.

આમ, એકમ B માં વ્યક્તિગત વેતનમાં વધારે ચલન છે.

ઉદાહરણ 14 : બે વિતરણોના ચલનાંક (C.V.) અનુક્રમે 60 અને 70 છે તથા એમનાં પ્રમાણિત વિચલનો અનુક્રમે 21 અને 16 છે. તેમના મધ્યક શું થશે ?

ઉકેલ : અહીં, C.V. (પ્રથમ આવૃત્તિ-વિતરણ) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (દ્વિતીય આવૃત્તિ-વિતરણ) = 70, $\sigma_2 = 16$ આપેલ છે.

ધારો કે $\bar{x}_1$ અને $\bar{x}_2$ એ અનુક્રમે પ્રથમ અને દ્વિતીય વિતરણનાં મધ્યકો છે.

હવે C.V. (પ્રથમ આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

માટે $60 = \dfrac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ અથવા $\bar{x}_1 = \dfrac{21}{60} \times 100 = 35$

અને C.V. (દ્વિતીય આવૃત્તિ-વિતરણ) $= \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

એટલે કે $70 = \dfrac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ અથવા $\bar{x}_2 = \dfrac{16}{70} \times 100 = 22.85$

ઉદાહરણ 15 : ધોરણ 11 ના એક સેક્શનમાં વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન માટે નીચે પ્રમાણે માહિતી મળી છે :

	ઊંચાઈ	વજન
મધ્યક	162.6 સેમી	52.36 કિગ્રા
વિચરણ	127.69 સેમી^{2}	23.1361 કિગ્રા^{2}

શું આપણે કહી શકીએ કે વજનમાં ઊંચાઈની સરખામણીએ વધારે ચલન છે ?

ઉકેલ : આપણે ચલનની સરખામણી માટે તેમના ચલનાંક (C.V.) ની ગણતરી કરીશું.

ઊંચાઈમાં વિચરણ = 127.69 સેમી^{2}

તેથી ઊંચાઈનું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{127.69}$ સેમી = 11.3 સેમી

હવે, વજનમાં વિચરણ = 23.1361 કિગ્રા^{2}

તેથી વજનનું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{23.1361}$ કિગ્રા = 4.81 કિગ્રા

હવે, ચલનાંક (C.V.) નીચે પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે :

ઊંચાઈનો ચલનાંક (C.V.) $= \dfrac{\text{પ્રમાણિત વિચલન}}{\text{મધ્યક}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

અને વજનનો ચલનાંક (C.V.) $= \frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

સ્પષ્ટ છે કે વજનનો C.V. એ ઊંચાઈના C.V. કરતાં મોટો છે.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે વજનમાં ઊંચાઈ કરતાં વધારે ચલન છે.

સ્વાધ્યાય 15.3

1. નીચે આપેલ માહિતી પરથી બતાવો કે A અને B માંથી કયા સમૂહમાં વધારે ચલન છે ?

ગુણ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
સમૂહ A	9	17	32	33	40	10	9
સમૂહ B	10	20	30	25	43	15	7

2. X અને Y નાં નીચે આપેલાં શૅરનાં મૂલ્યો પરથી બતાવો કે ક્યા શેરનાં મૂલ્યોમાં વધારે સ્થિરતા છે ?

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. એક કારખાનાની બે શાખાઓ A અને B ના કર્મીઓના આપેલાં માસિક વેતન નું વિશ્લેષણ નીચે પ્રમાણે છે :

	શાખા A	**શાખા B**
વેતન મેળવનારા કર્મીઓની સંખ્યા	586	648
માસિક વેતનોનો મધ્યક	₹ 5253	₹ 5253
વિતરણનું વિચરણ	100	121

(i) A અને B માંથી કઈ શાખા પોતાના કર્મીઓને વધારે રકમ માસિક વેતનના રૂપમાં ચૂકવે છે ?

(ii) વ્યક્તિગત વેતનોમાં કઈ શાખા A અથવા B માં વધારે ચલનીયતા છે ?

4. ટીમ A દ્વારા એક સત્રમાં રમેલી ફૂટબૉલ મેચના આંકડા નીચે આપ્યા છે :

નોંધાવેલ ગૉલની સંખ્યા	0	1	2	3	4
મૅચની સંખ્યા	1	9	7	5	3

ટીમ B દ્વારા રમવામાં આવેલી મૅચમાં બનાવેલ ગૉલની સંખ્યાનો મધ્યક પ્રતિ મૅચ 2 અને ગૉલની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન 1.25 હતાં. કઈ ટીમને વધારે સુસંગત માની શકાય ?

5. 50 વનસ્પતિ ઉત્પાદનોની લંબાઈ x (સેમીમાં) અને વજન y (ગ્રામમાં) નો સરવાળો અને વર્ગોનો સરવાળો નીચે આપેલો છે :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 261 \text{ અને } \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

શેમાં વધારે ચલન છે, લંબાઈ કે વજન?

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 16 : 20 અવલોકનોનું વિચરણ 5 છે. જો પ્રત્યેક અવલોકનને 2 વડે ગુણવામાં આવે, તો પ્રાપ્ત થયેલ અવલોકનો માટે નવું વિચરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_{20}$ છે અને તેમનો મધ્યક $\overline{x}$ છે. વિચરણ = 5 અને $n = 20$ આપેલ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\text{વિચરણ } \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 \text{ એટલે કે, } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2$$

અથવા $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 100 \quad ... (1)$$

જો પ્રત્યેક અવલોકનોને 2 વડે ગુણવામાં આવે અને પરિણામે મળતા નવાં અવલોકનો y_i હોય, તો

$$y_i = 2x_i \text{ એટલે કે, } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

માટે $$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 . \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

એટલે કે $$\overline{y} = 2\,\overline{x} \quad \text{અથવા} \quad \overline{x} = \frac{1}{2}\overline{y}$$

હવે x_i અને $\overline{x}$ ની કિંમતો (1) માં મૂકતાં, આપણને મળે છે.

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\overline{y}\right)^2 = 100, \text{ એટલે કે, } \sum_{i=1}^{20}(y_i - \overline{y})^2 = 400$$

આમ, નવાં અવલોકનોનું વિચરણ $= \frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

નોંધ અહીં વાંચકે નોંધ કરવી જોઈએ કે જો પ્રત્યેક અવલોકનને અચળ સંખ્યા k વડે ગુણવામાં આવે તો પરિણામે મળતાં નવાં અવલોકનોનું વિચરણ એ મૂળ વિચરણના k^2 ગણું થાય છે.

ઉદાહરણ 17 : પાંચ અવલોકનોનો મધ્યક 4.4 છે તથા તેમનું વિચરણ 8.24 છે. જો ત્રણ અવલોકનો 1, 2 અને 6 હોય, તો બાકીનાં બે અવલોકનો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અન્ય બે અવલોકનો x અને y છે.

માટે તે શ્રેણી $1, 2, 6, x, y$ છે.

હવે, મધ્યક $$\overline{x} = 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$$

અથવા $$22 = 9 + x + y$$

માટે, $$x + y = 13 \quad ... (1)$$

વળી, $$\text{વિચરણ} = 8.24 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2$$

એટલે કે $$8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2\times 4.4\,(x+y) + 2\times(4.4)^2\right]$$

અથવા $$41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$$

માટે, $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

પરંતુ (1) પરથી, આપણી પાસે,

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad ... (3)$$

તથા (2) અને (3) પરથી, આપણી પાસે,

$$2xy = 72 \quad ... (4)$$

હવે (4) ને (2) માંથી બાદ કરતાં આપણને મળે છે

$$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72 \text{ i.e. } (x - y)^2 = 25$$

અથવા $x - y = \pm 5$ ... (5)

તેથી, (1) અને (5) પરથી આપણને મળે છે

જ્યારે $x - y = 5$ ત્યારે $x = 9$, $y = 4$

અથવા જ્યારે $x - y = -5$ ત્યારે $x = 4$, $y = 9$

આમ, બાકીનાં બે અવલોકનો 4 અને 9 છે.

ઉદાહરણ 18 : જો પ્રત્યેક અવલોકન $x_1, x_2, ..., x_n$માં કોઈ ધન કે ઋણ સંખ્યા 'a' ઉમેરવામાં આવે, તો સાબિત કરો કે વિચરણ બદલાતું નથી.

ઉકેલ : ધારો કે $\bar{x}$ એ અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$નો મધ્યક છે, તો વિચરણ નીચેના સૂત્રથી દર્શાવાય છે :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

જો પ્રત્યેક અવલોકનોમાં 'a' ઉમેરવામાં આવે તો નવાં અવલોકનો y_i થશે,

$$y_i = x_i + a \quad ... (1)$$

ધારો કે નવાં અવલોકનોનો મધ્યક $\bar{y}$ છે અને

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

એટલે કે $\bar{y} = \bar{x} + a$ ... (2)

આમ, નવાં અવલોકનોનું વિચરણ,

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \quad \text{[(1) અને (2) નો ઉપયોગ કરતાં]}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

તેથી $\sigma_1 = \sigma_2$

આમ, નવાં અવલોકનોનું વિચરણ મૂળ અવલોકનોનું હતું તે જ છે.

> **નોંધ** ધ્યાન રાખો કે અવલોકનોના કોઈ પણ સમૂહમાં પ્રત્યેક અવલોકનમાં કોઈ એક સંખ્યા ઉમેરવાથી કે બાદ કરવાથી વિચરણમાં કોઈ જ ફેરફાર થતો નથી.

ઉદાહરણ 19 : એક વિદ્યાર્થીએ 100 અવલોકનોનો મધ્યક 40 અને પ્રમાણિત વિચલન 5.1 મેળવ્યા છે, પરંતુ એણે ભૂલથી એક અવલોકન 40 ને બદલે 50 લઈ લીધું હતું, તો સાચો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શું છે ?

ઉકેલ : આપેલ અવલોકનોની સંખ્યા $n = 100$ તથા ખોટો મધ્યક $\bar{x} = 40$,

અને ખોટું પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 5.1$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

એટલે કે, $$40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \quad \text{અથવા} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

આનો અર્થ એ છે કે ખોટાં અવલોકનોનો સરવાળો = 4000

આમ, સાચાં અવલોકનોનો સરવાળો = ખોટો સરવાળો – 50 + 40

$$= 4000 - 50 + 40 = 3990$$

$$\text{તેથી સાચો મધ્યક} = \frac{\text{સાચો સરવાળો}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

એટલે કે, $$5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{ખોટો} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$$

અથવા $$26.01 = \frac{1}{100} \times \text{ખોટો} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$$

માટે $$\text{ખોટો} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$$

હવે $$\text{સાચો} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{ખોટો} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

$$\text{માટે સાચું પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\text{સાચો} \sum x_i^2}{n} - (\text{સાચો મધ્યક})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} = \sqrt{25} = 5$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 15

1. આઠ અવલોકનોના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 9 અને 9.25 છે, જો આમાંથી છ અવલોકનો 6, 7, 10, 12, 12 અને 13 હોય, તો બાકીનાં બે અવલોકનો શોધો.

2. સાત અવલોકનોના મધ્યક તથા વિચરણ અનુક્રમે 8 અને 16 છે. જો આમાંથી પાંચ અવલોકનો 2, 4, 10, 12, 14 હોય, તો બાકીનાં બે અવલોકનો શોધો.

3. 6 અવલોકનોના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 8 અને 4 છે. જો પ્રત્યેક અવલોકનને 3 વડે ગુણવામાં આવે, તો પરિણામી અવલોકનોના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

4. જો n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ના મધ્યક $\bar{x}$ અને વિચરણ σ^2 હોય, તો સાબિત કરો કે અવલોકનો $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે $a\bar{x}$ અને $a^2\sigma^2$ છે, $(a \neq 0)$.

5. વીસ અવલોકનોના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 2 છે. પુનઃતપાસ કરતાં માલૂમ પડ્યું કે અવલોકન 8 ખોટું છે. નીચે આપેલ પ્રત્યેક કિસ્સામાં સાચો મધ્યક અને સાચું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(i) ખોટા અવલોકનને દૂર કરવામાં આવે.

(ii) તેને બદલે 12 મૂકવામાં આવે.

6. એક ધોરણના 50 વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા ત્રણ વિષયો ગણિત, ભૌતિકશાસ્ત્ર અને રસાયણશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે પ્રમાણે છે :

વિષય	ગણિત	ભૌતિકશાસ્ત્ર	રસાયણશાસ્ત્ર
મધ્યક	42	32	40.9
પ્રમાણિત વિચલન	12	15	20

કયા વિષયમાં સૌથી વધુ ચલન અને કયા વિષયમાં સૌથી ઓછું ચલન છે ?

7. 100 અવલોકનોના સમૂહનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 20 અને 3 છે. પછીથી જાણ થાય છે કે ત્રણ અવલોકનો 21, 21 અને 18 ખોટાં હતાં. આ ખોટાં અવલોકનોને દૂર કરવામાં આવે તો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

સારાંશ

◆ **પ્રસારનાં માપ :** વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન, વિચરણ, પ્રમાણિત વિચલન એ પ્રસારનાં માપ છે.

વિસ્તાર = મહત્તમ મૂલ્ય – ન્યૂનતમ મૂલ્ય

◆ **અવર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n}$$

◆ વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\text{N}}, \quad \text{M.D.}(\text{M}) = \frac{\sum f_i |x_i - \text{M}|}{\text{N}}, \text{ જ્યાં, } \text{N} = \sum f_i$$

◆ અવર્ગીકૃત માહિતી માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

◆ વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધવા માટેની ટૂંકી રીત

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right], \quad \sigma = \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

જ્યાં, $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

◆ ચલનાંક (C.V.) $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \bar{x} \neq 0.$

સમાન મધ્યકોવાળી શ્રેણીઓમાંથી જે શ્રેણીનું પ્રમાણિત વિચલન ઓછું હોય, તે વધારે સુસંગત અથવા ઓછી ફેલાયેલી હોય છે.

Historical Note

'Statistics' is derived from the Latin word 'status' which means a political state. This suggests that statistics is as old as human civilisation. In the year 3050 B.C., perhaps the first census was held in Egypt. In India also, about 2000 years ago, we had an efficient system of collecting administrative statistics, particularly, during the regime of Chandra Gupta Maurya (324-300 B.C.). The system of collecting data related to births and deaths is mentioned in Kautilya's *Arthshastra* (around 300 B.C.) A detailed account of administrative surveys conducted during Akbar's regime is given in *Ain-I-Akbari* written by Abul Fazl.

Captain John Graunt of London (1620-1674) is known as father of vital statistics due to his studies on statistics of births and deaths. Jacob Bernoulli (1654-1705) stated the Law of Large numbers in his book "Ars Conjectandi", published in 1713.

The theoretical development of statistics came during the mid seventeenth century and continued after that with the introduction of theory of games and chance (i.e., probability). Francis Galton (1822-1921), an Englishman, pioneered the use of statistical methods, in the field of Biometry. Karl Pearson (1857-1936) contributed a lot to the development of statistical studies with his discovery of *Chi square test* and foundation of *statistical laboratory* in England (1911). Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), known as the Father of modern statistics, applied it to various diversified fields such as Genetics, Biometry, Education, Agriculture, etc.

પ્રકરણ 16

સંભાવના

❖*Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 પ્રાસ્તાવિક

Kolmogorov
(1903-1987)

આપણે આગળના વર્ગોમાં વિવિધ ઘટનાઓમાં રહેલી અનિશ્ચિતતાના ગાણિતિક માપ શોધવાના સ્વરૂપે સંભાવનાના મૂળભૂત ખ્યાલનો અભ્યાસ કર્યો છે. આપણે પાસો ફેંકીને યુગ્મ સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના $\frac{3}{6}$ એટલે કે $\frac{1}{2}$ સ્વરૂપે મેળવી છે. અહીં, કુલ શક્ય પરિણામો 1,2,3,4,5 અને 6 છે અને યુગ્મ સંખ્યા મેળવવી એ ઘટનાનાં પરિણામો 2,4,6 છે (કુલ ત્રણ). વ્યાપક રીતે આ ઘટનાની સંભાવના મેળવવા માટે ઘટનામાં મળતાં પરિણામોની સંખ્યા અને સમાનપણે સંભવી શકે તેવાં કુલ પરિણામોની સંખ્યાનો ગુણોત્તર શોધવામાં આવે છે. સંભાવનાના આ અભ્યાસને સંભાવનાના પ્રશિષ્ટ અભ્યાસ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ધોરણ IX માં આપણે સંભાવના શોધવાનો જે અભ્યાસ કર્યો છે, તે નિરીક્ષણ અને એકત્રિત માહિતી પર આધારિત છે. તેને સંભાવનાનો આંકડાશાસ્ત્રીય અભિગમ કહે છે.

બંને પ્રકારનાં અભ્યાસની કેટલીક ગંભીર મુશ્કેલીઓ છે. ઉદાહરણ તરીકે, જે પ્રયોગોનાં પરિણામોની સંખ્યા અનંત હોય તેમાં આ અભ્યાસનો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી. પ્રશિષ્ટ અભ્યાસમાં આપણે ધારીએ છીએ કે બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી છે. યાદ

કરો કેજ્યારે આપણી પાસે એવું માનવાનું કોઈ જ કારણ નથી હોતું કે એક પરિણામની બીજા પરિણામ કરતાં વધુ શક્યતા છે ત્યારે પરિણામો સમસંભાવી કહેવાય છે. વધુ સારા શબ્દોમાં, આપણે દઢપણે માનીએ છીએ કે બધાં જ પરિણામ ઉદ્ભવવાની સમસંભાવિતતા અથવા સંભાવના સમાન છે. આમ, સંભાવનાને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સમસંભાવી પરિણામોનો ઉપયોગ કર્યો છે. તાર્કિક રીતે આ સાચી વ્યાખ્યા નથી. આમ, સંભાવનાના અન્ય એક અભ્યાસનો વિકાસ રશિયન ગણિતશાસ્ત્રી ***A. N. Kolmogorov*** દ્વારા 1933 માં થયો. તેમણે 1933 માં પોતાનું પુસ્તક *Foundations of Probability* પ્રકાશિત કર્યું. તેમાં એમણે સંભાવનાનો અર્થ કરતી કેટલીક પૂર્વધારણાઓ આપી. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આ અભિગમ વિશે અભ્યાસ કરીશું. તેને *સંભાવનાનો પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ* કહેવાય છે. આ અભિગમને સમજવા માટે આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શાવકાશ, ઘટનાઓ વગેરે જેવી કેટલીક મૂળભૂત વ્યાખ્યાઓથી આવશ્યકપણે પરિચિત હોવું જોઈએ. ચાલો આપણે આ બધી બાબતો વિશે હવે પછીના વિભાગમાં અભ્યાસ કરીએ.

16.2 યાદચ્છિક પ્રયોગો

આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે જેનાં પરિણામો ચોક્કસપણે નક્કી હોય તેવી ઘણીબધી પ્રવૃત્તિઓ કરીએ છીએ, પછી ભલેને ગમે તેટલી વાર તેનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવે. ઉદાહરણ તરીકે આપેલ કોઈપણ ત્રિકોણના ખૂણાનાં માપ ના જાણતા હોઈએ તો પણ ચોક્કસપણે આપણે કહી શકીએ કે ત્રણે ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

જ્યારે આદર્શ પરિસ્થિતિઓમાં પુનરાવર્તન કરવામાં આવે ત્યારે જેનાં પરિણામો અસમાન આવી શકે તેવી ઘણી પ્રાયોગિક પ્રવૃત્તિઓ પણ આપણે કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ આવશે કે કાંટો તે નક્કી છે, પરંતુ હકીકતમાં આ પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ આવશે તે નિશ્ચિતપણે કહી શકાતું નથી. આવા પ્રયોગોને *યાદચ્છિક પ્રયોગો* કહે છે.

જે નીચે આપેલી બે શરતોનું પાલન કરે એવા પ્રયોગને *યાદચ્છિક પ્રયોગ* કહે છે :

(i) જેનાં એક કરતાં વધારે શક્ય પરિણામ મળે છે.

(ii) કયું ચોક્કસ પરિણામ આવશે તેનું અગાઉથી પૂર્વાનુમાન ન થઈ શકે.

પાસાઓ ફેંકવાનો પ્રયોગ યાદચ્છિક પ્રયોગ છે કે નહિ તે ચકાસો.

આ પ્રકરણમાં આપણે જ્યાં સુધી અન્ય કોઈ સૂચન ન હોય ત્યાં સુધી 'પ્રયોગ' નો સંદર્ભ યાદચ્છિક પ્રયોગ તરીકે જ કરીશું.

16.2.1 પરિણામો અને નિદર્શાવકાશ

યાદચ્છિક પ્રયોગના નિષ્કર્ષને તેનું *પરિણામ* (*outcome*) કહે છે.

પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ પ્રયોગનાં પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અથવા 6 છે, જો આપણો રસ પાસાની ઉપરથી બાજુ પરનાં ટપકાંની સંખ્યામાં હોય તો તમામ પરિણામોનો ગણ {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે. તેને આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ કહે છે.

આમ,યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોના ગણને આપેલ પ્રયોગ સાથે જોડાયેલ *નિદર્શાવકાશ* (*sample space*) કહે છે, નિદર્શાવકાશને સંકેતમાં S વડે દર્શાવાય છે. નિદર્શાવકાશના પ્રત્યેક ઘટકને *નિદર્શ બિંદુ* (*sample point*) કહે છે. અન્ય શબ્દોમાં, યાદચ્છિક પ્રયોગના પ્રત્યેક પરિણામને *નિદર્શ બિંદુ* કહે છે.

ચાલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બે સિક્કાઓ, એક રૂપિયાનો સિક્કો અને બીજો બે રૂપિયાનો સિક્કો એકવાર ઉછાળો અને નિદર્શાવકાશ શોધો.

ઉકેલ : પહેલો સિક્કો અને બીજો સિક્કો એવા નામથી બે સિક્કાઓને એકબીજાથી જુદા દર્શાવી શકાય. બંને સિક્કાઓ ઉપર છાપ (H) અથવા કાંટો (T) હોઈ શકે છે, આથી શક્ય પરિણામો

બંને સિક્કાઓ ઉપર છાપ H = (H, H) = HH

પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ H અને બીજા સિક્કા ઉપર કાંટો T = (H, T) = HT

પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ T અને બીજા સિક્કા ઉપર કાંટો H = (T, H) = TH

બંને સિક્કા ઉપર કાંટો T = (T, T) = TT

આમ, નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT}

નોંધ : આ પ્રયોગનાં પરિણામો H અને T ની ક્રમયુક્ત જોડ છે. સરળ અભિવ્યક્તિને ધ્યાનમાં રાખીને ક્રમિક જોડમાંથી અલ્પવિરામને દૂર કરેલ છે.

ઉદાહરણ 2 : બે પાસાઓ (એક વાદળી અને બીજો લાલ)ને ફેંકવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ શોધો. વળી, આ નિદર્શાવકાશના ઘટકોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વાદળી પાસા ઉપર 1 અને લાલ પાસા ઉપર 2 દેખાય છે. આ પરિણામને આપણે ક્રમયુક્ત જોડ (1, 2) વડે દર્શાવીશું. આ જ રીતે જો વાદળી પાસા ઉપર '3' અને લાલ પાસા ઉપર '5' દેખાય તો પરિણામને ક્રમયુક્ત જોડ (3,5) તરીકે દર્શાવાય છે.

વ્યાપક રીતે પ્રત્યેક પરિણામ x એ વાદળી પાસા પરની સંખ્યા અને y એ લાલ પાસા પરની સંખ્યા હોય છે તેવી ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) છે. આ નિદર્શાવકાશને S = {(x, y): x એ વાદળી પાસા પરની સંખ્યા અને y એ લાલ પાસા પરની સંખ્યા} વડે દર્શાવાય છે.

આ નિદર્શાવકાશનાં ઘટકોની સંખ્યા $6 \times 6 = 36$ છે અને નિદર્શાવકાશ નીચે મુજબ લખી શકાય :

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

ઉદાહરણ 3 : નીચેના પ્રત્યેક પ્રયોગ માટે યોગ્ય નિદર્શાવકાશ દર્શાવો :

(i) એક છોકરાના ખિસ્સામાં ₹ 1 નો સિક્કો, ₹ 2 નો સિક્કો અને ₹ 5 નો સિક્કો છે. તે એક પછી એક બે સિક્કા ખિસ્સામાંથી બહાર કાઢે છે.

(ii) એક વ્યક્તિ, એક વર્ષમાં, વ્યસ્ત ધોરી માર્ગ પર થયેલા અકસ્માતોની સંખ્યાની નોંધ રાખે છે.

ઉકેલ : (i) ધારો કે Q એ ₹ 1 નો સિક્કો છે, H એ ₹ 2 નો સિક્કો છે અને R એ ₹ 5 નો સિક્કો છે. છોકરો પહેલો સિક્કો તેના ખિસ્સામાંથી બહાર કાઢે છે તે Q, H અથવા R માંથી ગમે તે એક છે. હવે Q ને અનુરૂપ, બીજો સિક્કો H અથવા R હોઈ શકે. તેથી આ બંને પરિસ્થિતિનાં પરિણામ QH અથવા QR મળી શકે. આ જ રીતે, H ને અનુરૂપ બીજી શક્યતા માટે Q અથવા R મળે.

તેથી પરિણામો HQ અથવા HR હોઈ શકે છે અને છેલ્લે, R ને અનુરૂપ, બીજી શક્યતામાં H અથવા Q મળે, આથી પરિણામો RH અથવા RQ મળશે.

આમ, નિદર્શાવકાશ S={QH, QR, HQ, HR, RH, RQ}

(ii) એક વર્ષમાં વ્યસ્ત ધોરીમાર્ગ પર થયેલા અકસ્માતોની સંખ્યા જાણવા માટે થયેલ નિરીક્ષણ 0 (કોઈ અકસ્માત નહી) અથવા 1 અથવા 2, અથવા કોઈક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા.

આમ, આ પ્રયોગ સાથે જોડાયેલ નિદર્શાવકાશ S= {0,1,2,...} છે.

ઉદાહરણ 4 : એક સિક્કો ઉછાળો. જો તે છાપ બતાવે તો આપણે થેલામાંથી એક દડો કાઢીશું. તે થેલામાં 3 વાદળી અને 4 સફેદ દડા છે. જો તે કાંટો બતાવે તો આપણે પાસો ઉછાળીશું. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.

ઉકેલ : આપણે વાદળી દડાઓને B_1, B_2, B_3 અને સફેદ દડાઓને W_1, W_2, W_3, W_4 વડે દર્શાવીએ. હવે આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$S = \{ HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ થશે.

અહીં, HB_i નો અર્થ સિક્કા ઉપર છાપ H અને દડો B_i મળેલ છે. HW_i નો અર્થ સિક્કા ઉપર છાપ અને દડો W_i મળેલ છે. આ જ રીતે, Ti નો અર્થ સિક્કા ઉપર કાંટો અને પાસા ઉપર i મળેલ છે.

ઉદાહરણ 5 : પ્રથમ વખત છાપ મળે ત્યાં સુધી એક સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો.

ઉકેલ : આ પ્રયોગમાં એક સિક્કાને ઉછાળતાં શક્ય છે કે પ્રથમ વખતનું પરિણામ છાપ મળે. પરંતુ, જો પ્રથમ વખતે કાંટો મળે તો બીજી વાર સિક્કો ઉછાળવો પડે. જો બીજા પ્રયત્ને છાપ મળે તો પ્રયોગનું પરિણામ TH બને. જો બીજા પ્રયત્ને પણ T મળે તો ત્રીજી વાર પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરવું પડશે અને ત્યારે જો H મળે તો પરિણામ TTH બને. આમ, જ્યાં સુધી H મળે ત્યાં સુધી પુનરાવર્તન કરતા રહીએ તો નિદર્શાવકાશ,

S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...}

સ્વાધ્યાય 16.1

નીચે આપેલા પ્રશ્નો 1 થી 7 માં દર્શાવેલ પ્રયોગો માટે પ્રત્યેક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો :

1. એક સિક્કાને ત્રણ વાર ઉછાળવામાં આવે છે.
2. એક પાસાને બે વાર ફેંકવામાં આવે છે.
3. એક સિક્કાને ચાર વાર ઉછાળવામાં આવે છે.
4. એક સિક્કાને ઉછાળ્યો છે અને એક પાસાને ફેંક્યો છે.
5. એક સિક્કાને ઉછાળવામાં આવ્યો છે અને સિક્કા પર છાપ મળે ત્યારે પાસાને ફેંકવામાં આવે છે.
6. ઓરડા X માં 2 છોકરા અને 2 છોકરીઓ છે તથા ઓરડા Y માં 1 છોકરો અને 3 છોકરીઓ છે. પહેલા ઓરડા પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી એક વ્યક્તિ પસંદ કરવામાં આવે છે તેવા પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો.
7. એક કોથળામાં એક પાસો લાલ રંગનો, એક સફેદ રંગનો અને અન્ય એક પાસો ભૂરા રંગનો રાખ્યો છે. એક પાસો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કર્યો છે અને તેને ફેંકવામાં આવે છે પાસાનો રંગ અને તેની ઉપરની બાજુ પરની સંખ્યા નોંધવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.
8. એક પરીક્ષણમાં બે બાળકોવાળાં કુટુંબો પૈકી પ્રત્યેકમાં છોકરા-છોકરીઓની સંખ્યા નોંધવામાં આવે છે.

(i) જો જન્મેલ બાળક છોકરો છે કે છોકરી તે ક્રમમાં જાણવામાં આપણી રુચિ હોય તો તેનો નિદર્શાવકાશ શું થશે ?

(ii) જો આપણી રુચિ કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા જાણવાની હોય તો નિદર્શાવકાશ શું થશે ?

9. એક ડબામાં 1 લાલ અને 3 સમાન સફેદ દડા રાખ્યા છે. બે દડા એક પછી એક પાછા મૂક્યા વગર ડબામાંથી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

10. એક ઘટનામાં એક સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો તેના પર છાપ આવે તો તે સિક્કાને ફરીથી ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ વખત ઉછાળવાથી તેના પર કાંટો મળે તો એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શોધો.

11. ધારો કે ગોળાઓના એક ઢગલામાંથી 3 ગોળા યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. પ્રત્યેક ગોળાની ચકાસણી કરીને તેને ખરાબ (D) અથવા સારો (N) માં વર્ગીકરણ કરાય છે. આ ઘટનાનો નિદર્શાવકાશ જણાવો.

12. એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. જો પરિણામ છાપ મળે તો પાસો ફેંકવામાં આવે છે. જો પાસા પર યુગ્મ સંખ્યા દેખાય તો પાસાને ફરીથી ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શું છે ?

13. કાગળની ચાર ચબરખી પર 1, 2, 3 અને 4 સંખ્યાઓ લખી છે. આ ચબરખીને એક ડબામાં મૂકીને સારી રીતે મિશ્ર કરી દીધી છે. એક વ્યક્તિ ડબામાંથી પાછી મૂક્યા વગર એક પછી એક બે ચબરખીઓ કાઢે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.

14. એક પ્રયોગમાં એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે અને જો પાસા ઉપર યુગ્મ સંખ્યા મળે તો એક સિક્કો એક વાર ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર અયુગ્મ સંખ્યા મળે તો સિક્કાને બે વાર ઉછાળે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

15. એક સિક્કાને ઉછાળ્યો છે. જો તેના પર કાંટો દેખાય તો 2 લાલ અને 3 કાળા દડા સમાવતા એક ડબામાંથી એક દડો કાઢવામાં આવે છે. જો તે છાપ બતાવે તો આપણે એક પાસો ફેંકીએ છીએ. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શોધો.

16. એક પાસાને વારંવાર જ્યાં સુધી તેના પર 6 ન દેખાય ત્યાં સુધી ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શું છે ?

16.3 ઘટના

આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ અને તે પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. કોઈ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ બધા જ પ્રશ્નો માટે સાર્વત્રિક ગણ હોય છે.

એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. આ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT} છે.

હવે ધારી લો કે આપણો રસ માત્ર એક છાપ ધરાવતાં પરિણામોમાં છે. આ ઘટના ઘટે તેને અનુકૂળ S નાં ઘટકો માત્ર HT અને TH છે તે આપણને જ્ઞાત છે. આ બે ઘટકો ગણ E = { HT, TH} રચે છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે E એ નિદર્શાવકાશ S નો ઉપગણ છે. આ જ રીતે આપણને જુદી જુદી ઘટનાઓ અને S ના ઉપગણો વચ્ચે નીચે દર્શાવેલ સંગતતા મળે છે :

ઘટનાનું વર્ણન	'S' નો અનુરૂપ ઉપગણ
કાંટાની સંખ્યા બે છે.	A = {TT}
કાંટાની સંખ્યા ઓછામાં ઓછી એક છે.	B = {HT, TH, TT}
છાપની સંખ્યા વધુમાં વધુ એક છે.	C = {HT, TH, TT}
બીજી વાર ઉછાળતાં છાપ નથી મળતી.	D = { HT, TT}
છાપની સંખ્યા મહત્તમ બે છે.	S = {HH, HT, TH, TT}
છાપની સંખ્યા બે કરતાં વધારે છે.	ϕ

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી એ વાત સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શાવકાશના કોઈપણ ઉપગણને અનુરૂપ એક ઘટના ઉદ્ભવે છે અને કોઈપણ ઘટનાને અનુરૂપ નિદર્શાવકાશનો એક ઉપગણ હોય છે. આ સંદર્ભમાં એક ઘટનાને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

વ્યાખ્યા : *નિદર્શાવકાશ S ના કોઈ પણ ઉપગણ E ને ઘટના કહે છે.*

16.3.1 ઘટનાનો ઉદ્ભવ

એક પાસો ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. ધારો કે ઘટના પાસા પરની સંખ્યા ચારથી નાની હોય તેને E દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. જો પાસા પર હકીકતમાં 1 દેખાય તો આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી છે. ખરેખર તો જો પરિણામ 2 અથવા 3 હોય, તો પણ આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી છે.

આમ, જ્યારે પ્રયોગનું પરિણામ ω એ પ્રકારનું હોય કે $\omega \in$ E તો પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ S ની ઘટના E ઉદ્ભવી છે એ કહી શકાય અને જો પરિણામ ω એવું હોય કે $\omega \notin$ E, તો આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી નથી.

16.3.2 ઘટનાઓના પ્રકાર

ઘટનાઓનું તેમના ઘટકોના આધારે જુદા જુદા પ્રકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકાય છે.

1. અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટનાઓ

ખાલી (રિક્ત) ગણ ϕ અને નિદર્શાવકાશ S પણ ઘટનાઓ દર્શાવે છે. વાસ્તવમાં ϕ ને *અશક્ય ઘટના (impossible event)* અને S એટલે કે પૂર્ણ નિદર્શાવકાશને *ચોક્કસ ઘટના (certain event)* કહે છે.

આ સમજવા માટે ચાલો પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ધારો કે ઘટના E એ "પાસા પર દેખાતી સંખ્યા 7 નો ગુણિત છે." શું આપ ઘટના E ના ઉપગણ લખી શકો છો ?

સ્પષ્ટપણે આ પ્રયોગનું કોઈ પણ પરિણામ ઘટના E ની શરતને સંતોષી શકે તેમ નથી, એટલે કે નિદર્શાવકાશનો કોઈ પણ ઘટક ઘટના E ના ઉદ્ભવને નક્કી નથી કરતો. આમ, આપણે કહી શકીએ કે ખાલીગણ જ ઘટના E ને અનુરૂપ ગણ છે. બીજા શબ્દોમાં, આપણે કહી શકીએ કે પાસાની ઉપરની બાજુએ 7 નો ગુણિત દેખાય એ અશક્ય ઘટના છે.

આ રીતે ઘટના E = ϕ એક અશક્ય ઘટના છે.

હવે ચાલો આપણે એક અન્ય ઘટના F "પાસા ઉપર મળતી સંખ્યા યુગ્મ છે અથવા અયુગ્મ". વિશે વિચાર કરીએ. સ્પષ્ટપણે F = {1, 2, 3, 4, 5, 6,} = S એટલે કે બધાં જ પરિણામ ઘટના F ઉદ્ભવે તે ચોક્કસપણે દર્શાવે છે. આમ, F = S એ ચોક્કસ ઘટના છે.

2. પ્રાથમિક અથવા મૂળભૂત ઘટના

જો ઘટના E માં નિદર્શાવકાશનું એક જ નિદર્શ બિંદુ, ઘટક તરીકે હોય (એટલે કે E એ એકાકી હોય) તો ઘટના E ને *પ્રાથમિક* અથવા *મૂળભૂત ઘટના* કહે છે. જે પ્રયોગનાં નિદર્શાવકાશમાં n ભિન્ન ઘટકો હોય, તેમાં ચોક્કસપણે n મૂળભૂત ઘટનાઓ હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સિક્કાને બેવાર ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S={HH, HT, TH, TT} છે.

અહીં, આપણે નિદર્શાવકાશની ચાર પ્રાથમિક ઘટનાઓ નીચે દર્શાવેલ છે :

E_1= {HH}, E_2={HT}, E_3= { TH} અને E_4={TT}.

3. સંયુક્ત ઘટના

જો કોઈ ઘટનામાં એક કરતાં વધારે નિદર્શ બિંદુ હોય, તો તેને સંયુક્ત ઘટના કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવાના પ્રયોગ માટે નીચે દર્શાવેલ ઘટનાઓ સંયુક્ત ઘટનાઓ છે :

E: 'બરાબર એક છાપ દર્શાવે'

F: 'ઓછામાં ઓછી એક છાપ દર્શાવે'

G: 'વધુમાં વધુ એક છાપ દર્શાવે' વગેરે.

આ ઘટનાઓને અનુરૂપ S ના ઉપગણ નીચે દર્શાવેલ છે :

E={HTT, THT, TTH}

F={HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

G= {TTT, THT, HTT, TTH}

ઉપરના પ્રત્યેક ઉપગણમાં એક કરતાં વધારે નિદર્શ બિંદુ છે તેથી આ બધી સંયુક્ત ઘટનાઓ છે.

16.3.3 ઘટનાઓનું બીજગણિત

ગણસિદ્ધાંતના પ્રકરણમાં આપણે બે કે તેથી વધુ ગણોની યોગ, છેદ, તફાવત, ગણનો પૂરકગણ જેવી ગણક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ જ રીતે બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓનું સંયોજન ગણ સંકેતના સમાન ઉપયોગ દ્વારા કરી શકાય.

ધારો કે એક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S ની ઘટનાઓ A, B, C છે.

1. પૂરક ઘટના

પ્રત્યેક ઘટના A ની સાપેક્ષે એક ઘટના A' ઉદ્ભવે છે. તેને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે. A' ને ઘટના 'A-નહિ' પણ કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે ત્રણ સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાનો પ્રયોગ લઈએ. ઘટનાની સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} છે. ધારો કે A={HTH, HHT, THH} એ ઘટના માત્ર એકવાર કાંટો આવે તે દર્શાવે છે. પરિણામ HTT હોય તો ઘટના A ઉદ્ભવી નથી. પરંતુ આપણે કહી શકીએ કે ઘટના 'A-નહિ' ઉદ્ભવી છે. આમ, દરેક પરિણામ કે જે A માં નથી તે દર્શાવવા માટે આપણે કહીએ છીએ કે ઘટના 'A-નહિ' ઉદ્ભવી છે. આમ, ઘટના A ની પૂરક ઘટના એટલે કે 'A-નહિ' અથવા

ઘટના $A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

અથવા $A' = \{\omega : \omega \in S$ અને $\omega \notin A\} = S - A$.

2. ઘટના 'A અથવા B' : યાદ કરો કે બે ગણ A અને B નો યોગ સંકેતમાં $A \cup B$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. જેઓ A માં હોય અથવા

B માં હોય અથવા બંનેમાં હોય તેવા અને માત્ર તેવા જ ઘટકોથી બનતો ગણ $A \cup B$ છે.

જ્યારે ગણ A અને ગણ B કોઈ નિદર્શાવકાશ સાથે સંકળાયેલ બે ઘટનાઓ હોય ત્યારે ઘટના $A \cup B$ એ A અથવા B અથવા બંનેનું નિરૂપણ કરે છે. ઘટના $A \cup B$ ને A અથવા B પણ કહેવામાં આવે છે. તેથી,

$$\text{ઘટના A અથવા B} = A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ અથવા } \omega \in B\}$$

વ્યાપક રીતે $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i = \{\omega_i : \omega_i$ એ ઓછામાં ઓછા એક ગણ A_i માં છે.$\}$

3. ઘટના A અને B : આપણે જાણીએ છીએ બે ગણોનો છેદ $A \cap B$ છે. જે A અને B બંનેમાં સામાન્ય હોય એવા ઘટકોનો ગણ એટલે કે જે A અને B બંનેના સભ્યો હોય તેવા ઘટકોથી $A \cap B$ બને છે.

જો A અને B બે ઘટનાઓ હોય, તો ગણ $A \cap B$ એ ઘટના A અને B દર્શાવે છે.

આમ, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ અને } \omega \in B\}$

વ્યાપક રીતે $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega_i : \omega_i$ એ પ્રત્યેક i માટે ગણ A_i માં છે.$\}$

ઉદાહરણ તરીકે એક પાસાને બે વાર ફેંકવાના પ્રયોગમાં ધારો કે ઘટના A 'પહેલી વાર પાસાને ફેંકતા સંખ્યા 6' મળે છે અને ઘટના B બે વાર પાસાને ફેંકતાં 'મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 11' મળે છે તે દર્શાવે છે.

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$, અને

$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

તેથી $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

નોંધ કરો કે ગણ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ પહેલીવાર પાસાને ફેંકતા 6 મળે છે અને બે વાર ફેંકતા મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો ન્યૂનતમ 11 થાય છે' ને વ્યક્ત કરે છે.

4. ઘટના 'A પણ B-નહિ' : આપણે જાણીએ છીએ કે A–B જે A માં હોય પરંતુ B માં ન હોય એવા બધા ઘટકોનો ગણ છે. એટલા માટે ગણ A–B એ ઘટના A પરંતુ B-નહિ ને વ્યક્ત કરે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે $A - B = A \cap B'$.

ઉદાહરણ 6 : એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. એક અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક મળે તેને ઘટના A અને એક અયુગ્મ પૂર્ણાંક પ્રાપ્ત થાય તેને ઘટના B તરીકે દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપેલ ઘટનાઓ (i) A અથવા B (ii) A અને B (iii) A પરંતુ B નહિ (iv) 'A-નહિ' મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$ અને $B = \{1, 3, 5\}$ છે.

સ્પષ્ટપણે

(i) A અથવા $B = A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) A અને $B = A \cap B = \{3, 5\}$

(iii) A પરંતુ B નહિ $= A - B = \{2\}$

(iv) A નહિ $= A' = \{1, 4, 6\}$

16.3.4 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ :

પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે. ધારો કે ઘટના A 'એક અયુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' અને ઘટના B 'એક યુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' ને રજૂ કરે છે.

સ્પષ્ટપણે ઘટના A એ ઘટના B થી તદ્દન જુદી છે અને એથી ઊલટું પણ સત્ય છે. બીજા શબ્દોમાં, ઘટના A અને ઘટના B એકસાથે ઉદ્‌ભવે છે તેને સુનિશ્ચિત કરે તેવું કોઈ પણ પરિણામ ઉદ્‌ભવતું નથી.

અહીં, $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{2, 4, 6\}$

સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$, એટલે કે A અને B પરસ્પર અલગ ગણ છે.

વ્યાપક રીતે જો બેમાંથી કોઈ પણ એક ઘટનાનો ઉદ્‌ભવ એ બીજી ઘટનાના ઉદ્‌ભવને નિવારે છે, એટલે કે જે એકસાથે ઉદ્‌ભવી શકતી નથી, તેવી બે ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. આ સંજોગોમાં ગણ A અને B પરસ્પર અલગ ગણ હોય છે.

ફરીથી એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગમાં, ઘટના A એક અયુગ્મ સંખ્યા મળે તે અને ઘટના B 4 થી નાની સંખ્યા મળે તે લઈએ.

દેખીતું જ $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{1, 2, 3\}$

હવે, $3 \in A$ અને $3 \in B$

તેથી, A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નથી.

નોંધ : નિદર્શાવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ હંમેશાં પરસ્પર નિવારક હોય છે.

16.3.5 નિઃશેષ ઘટનાઓ :

એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે. ચાલો નીચે આપેલ ઘટનાઓને વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

A : '4 થી નાની સંખ્યા દેખાય છે',

B : '2 થી મોટી પરંતુ 5 થી નાની સંખ્યા દેખાય છે',

અને C : '4 કરતાં મોટી સંખ્યા દેખાય છે'.

ત્યારે $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ અને $C = \{5, 6\}$. આપણે જોઈએ છીએ કે

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S.$$

આવી ઘટનાઓ A, B અને C ને ***નિઃશેષ ઘટનાઓ*** કહે છે. વ્યાપક રીતે, જો $E_1, E_2, ..., E_n$ એ નિદર્શાવકાશ S ની n ઘટનાઓ હોય અને જો

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

તો $E_1, E_2, ..., E_n$ ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે. બીજા શબ્દોમાં, જો પ્રયોગને કરવા પર આમાંની ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ચોક્કસપણે ઉદ્‌ભવે છે, તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ નિઃશેષ કહેવાય છે.

એથી વિશેષ, જો બધા $i \neq j$ માટે $E_i \cap E_j = \phi$ એટલે કે ઘટનાઓ E_i અને E_j પરસ્પર નિવારક હોય અને $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ હોય, તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય છે.

ચાલો હવે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 7 : બે પાસાઓ ફેંકવામાં આવે છે અને પાસાઓ પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો લખવામાં આવે છે. ચાલો હવે આપણે આ પ્રયોગ સાથે સંબંધિત નીચે આપેલ ઘટનાઓ વિશે વિચાર કરીએ :

A : 'પ્રાપ્ત સરવાળો યુગ્મ સંખ્યા છે'

B : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 3 નો ગુણક છે'

C : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 4 કરતાં નાનો છે'

D : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 11 કરતાં મોટો છે'

આ ઘટનાઓમાંથી કઈ જોડની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક છે ?

ઉકેલ : અહીં, નિદર્શાવકાશ $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ માં 36 ઘટકો છે અને ઘટનાઓ

$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ અને $D = \{(6, 6)\}$ મળે છે.

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

તેથી, A અને B પરસ્પર નિવારક નથી.

આ જ પ્રમાણે, $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ અને $B \cap D \neq \phi$.

આમ, જોડ (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) ની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક નથી.

વળી, $C \cap D = \phi$ અને તેથી C અને D એ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

ઉદાહરણ 8 : એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનો વિચાર કરો :

A : 'કોઈ છાપ મળતી નથી',

B : 'એક જ છાપ મળે છે' અને

C : 'ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે છે'.

શું આ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓનો ગણ છે ?

ઉકેલ : પરિણામનો નિદર્શાવકાશ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} અને A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH},
C = {HHT, HTH, THH, HHH}

હવે, $A \cup B \cup C$ = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

તેથી A, B અને C નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

વળી, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ અને $B \cap C = \phi$

આથી, ગણ પરસ્પર અલગ છે, એટલે કે ઘટનાનો પરસ્પર નિવારક છે.

આમ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે.

સ્વાધ્યાય 16.2

1. એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. ધારો કે ઘટના E 'પાસા પર સંખ્યા 4 દર્શાવે છે' અને ઘટના F 'પાસા પર યુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' શું E અને F પરસ્પર નિવારક છે ?

2. એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

(i) A : સંખ્યા 7 કરતાં નાની છે.
(ii) B : સંખ્યા 7 કરતાં મોટી છે.
(iii) C : સંખ્યા 3 નો ગુણક છે.
(iv) D : સંખ્યા 4 કરતાં નાની છે.
(v) E : 4 થી મોટી યુગ્મ સંખ્યા છે.
(vi) F : સંખ્યા 3 કરતાં નાની નથી.

તથા $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' શોધો.

3. એક પ્રયોગમાં પાસાની એક જોડને ફેંકવામાં આવે છે અને તેમના ઉપર દેખાતી સંખ્યાઓની નોંધ કરવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

A : સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ છે.

B : બંને પાસાઓ ઉપર સંખ્યા 2 દેખાય છે.

C : બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 7 છે અને 3 નો ગુણિત છે.

આ ઘટનાઓની કઈ જોડની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક છે ?

4. ત્રણ સિક્કાઓને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે. જો ત્રણ છાપ દેખાય તેને ઘટના A , બે છાપ અને એક કાંટો દેખાય તેને ઘટના B, ત્રણ કાંટા દેખાય તેને ઘટના C અને પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ દેખાય તેને ઘટના D દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. કઈ ઘટનાઓ (i) પરસ્પર નિવારક છે ? (ii) પ્રાથમિક છે ? (iii) સંયુક્ત છે ?

5. ત્રણ સિક્કા એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

(i) પરસ્પર નિવારક બે ઘટનાઓ

(ii) પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ત્રણ ઘટનાઓ

(iii) પરસ્પર નિવારક ન હોય તેવી બે ઘટનાઓ

(iv) પરસ્પર નિવારક છે, પરંતુ નિ:શેષ ન હોય તેવી બે ઘટનાઓ

(v) પરસ્પર નિવારક હોય પણ નિ:શેષ ન હોય તેવી ત્રણ ઘટનાઓ

6. બે પાસાઓ ફેંકવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A, B અને C નીચે આપેલ છે.

A : પહેલા પાસા ઉપર યુગ્મ સંખ્યા મળે છે.

B : પહેલા પાસા ઉપર અયુગ્મ સંખ્યા મળે છે.

C : પાસાઓ ઉપર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો 5 કે 5 થી ઓછો છે.

નીચે આપેલ ઘટનાઓ વર્ણવો :

(i) A' (ii) B નહિ (iii) A અથવા B

(iv) A અને B (v) A પરંતુ C નહીં (vi) B અથવા C

(vii) B અને C (viii) $A' \cap B' \cap C'$

7. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન 6 પરથી નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો (તમારા જવાબનું કારણ આપો) :

(i) A અને B પરસ્પર નિવારક છે.

(ii) A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ છે.

(iii) $A = B'$

(iv) A અને C પરસ્પર નિવારક છે.

(v) A અને B' પરસ્પર નિવારક છે.

(vi) A', B' અને C પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ છે.

16.4 સંભાવનાનો પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ

આ પ્રકરણના આગળના વિભાગોમાં આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શાવકાશ અને આ પ્રયોગોને સંબંધિત ઘટનાઓ વિશે વિચાર કર્યો છે. આપણે આપણા રોજિંદા જીવનમાં કોઈ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના માટે અનેક શબ્દોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. સંભાવનાનો સિદ્ધાંત કોઈ ઘટના ઉદ્ભવશે કે નહિ તેની સંભાવનાનું માપ આપવાનો પ્રયાસ છે.

આગળના વર્ગોમાં આપણે કોઈ પ્રયોગના કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જાણતા હોઈએ તો કોઈ ઘટનાની સંભાવના જાણી શકાય તેવી કેટલીક રીતો વિશે અભ્યાસ કર્યો.

કોઈ ઘટનાની સંભાવના જાણવા માટે બીજી એક રીત, પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ છે. આ અભિગમ અનુસાર સંભાવના નક્કી કરવા માટે, પૂર્વધારણાઓ અથવા નિયમો નક્કી કરવામાં આવ્યા છે.

ધારો કે કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S છે. જેનો પ્રદેશ એ S નો ઘાતગણ અને સહપ્રદેશ [0,1] છે અને જે નીચેની પૂર્વધારણાઓનું સમાધાન કરે છે એવું વિધેય તે સંભાવના વિધેય P છે.

(i) કોઈ પણ ઘટના E માટે, $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) જો E અને F પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

પૂર્વધારણા (iii) પરથી ફલિત થાય છે કે $P(\phi) = 0$. તેને સાબિત કરવા માટે $F = \phi$ લેતાં E અને ϕ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે, તેથી પૂર્વધારણા (iii) પરથી આપણને

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ અથવા $P(E) = P(E) + P(\phi)$ એટલે કે $P(\phi) = 0$ મળે છે .

ધારો કે $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ નિદર્શાવકાશ S નાં પરિણામ છે એટલે કે $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ છે.

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા પરથી એવું તારણ નીકળે છે કે,

(i) પ્રત્યેક $\omega_i \in S$ માટે $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) કોઈ પણ ઘટના A માટે, $P(A) = \sum P(\omega_i)$, $\omega_i \in A$.

નોંધ અત્રે એ નોંધનીય છે કે એકાકી $\{\omega_i\}$ ને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે અને સંકેતની સુવિધાને માટે $P(\{\omega_i\})$ ના સ્થાને $P(\omega_i)$ લખાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગના પ્રત્યેક પરિણામ H અને T ની સંભાવના $\frac{1}{2}$ નિર્ધારિત કરી શકીએ.

એટલે કે $P(H) = \frac{1}{2}$ અને $P(T) = \frac{1}{2}$ (1)

સ્પષ્ટપણે આ નિર્ધારણ બંને શરતોને સંતોષે છે, એટલે કે પ્રત્યેક સંખ્યા ન તો શૂન્યથી નાની છે અને ન તો એકથી મોટી છે અને

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

આમ, આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહી શકીએ કે H ની સંભાવના $= \frac{1}{2}$ અને T ની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

ચાલો, આપણે $P(H) = \frac{1}{4}$ અને $P(T) = \frac{3}{4}$ લઈએ.

શું આ નિર્ધારણ પૂર્વધારણાની રીતની શરતોનું સમાધાન કરશે ?

હા, આ પરિસ્થિતિમાં H ની સંભાવના $= \frac{1}{4}$ અને અને T ની સંભાવના $= \frac{3}{4}$ છે.

સંભાવનાની બંને પૂર્વધારણાઓ (1) અને (2), H અને T ની સંભાવના માટે સ્વીકાર્ય છે.

હકીકતમાં બંને પરિણામોની સંભાવનાઓ માટે સંખ્યાઓ ક્રમશઃ p અને $(1 - p)$ નક્કી કરી શકીએ, જેથી $0 \le p \le 1$ અને $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$.

આ સંભાવના-નિર્ધારણ પણ સંભાવનાના પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમનું સમાધાન કરે છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈ પ્રયોગનાં પરિણામોની સાથે સંભાવના વિતરણ અનેક (વધુ ઉચિતપણે, અનંત) રીતે કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ 9 : ધારો કે એક નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ છે. નીચે દર્શાવેલમાંથી દરેક પરિણામ માટે કઈ કઈ સંભાવના નિર્ધારણ સ્વીકાર્ય છે ?

પરિણામ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

ઉકેલ : (a) શરત (i) : પ્રત્યેક સંખ્યા $P(\omega_i)$ ધન છે અને એક કરતાં નાની છે.

શરત (ii) : સંભાવનાઓનો સરવાળો $= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$

તેથી, આ નિર્ધારણ માન્ય છે.

(b) શરત (i): પ્રત્યેક સંખ્યા $P(\omega_i)$ એ 0 અથવા 1 છે.

શરત (ii) સંભાવનાઓનો સરવાળો = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય છે.

(c) શરત (i) બે સંભાવનાઓ $P(\omega_5)$ અને $P(\omega_6)$ ઋણ છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

(d) $P(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$ છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

(e) સંભાવનાનો સરવાળો = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1 છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

16.4.1 ઘટનાની સંભાવના

એક યંત્ર દ્વારા નિર્મિત પેન પૈકી ત્રણ પેનના પરીક્ષણમાં એમને સારી (ખામીરહિત) અને ખરાબ (ખામીયુક્ત) માં વર્ગીકરણ કરવા માટે લેવામાં આવી. ધારો કે આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S છે. આ પ્રયોગના ફળસ્વરૂપ આપણને 0, 1, 2 કે 3 ખરાબ પેન મળી શકે છે.

આ પ્રયોગને સંગત નિદર્શાવકાશ S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG},

જ્યાં, B એ ખામીયુક્ત પેન અને G એ ખામીરહિત પેન દર્શાવે છે.

ધારો કે પરિણામો માટે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંભાવના લેવામાં આવી છે :

નિદર્શ બિંદુ :	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
સંભાવના :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ધારો કે ઘટના A : માત્ર એક જ ખામીયુક્ત પેન છે અને ઘટના B : ઓછામાં ઓછી બે પેન ખામીયુક્ત છે. આમ, A = {BGG, GBG, GGB} અને B = {BBG, BGB, GBB, BBB}

હવે $$P(A) = \sum P(\omega_i),\ \forall \omega_i \in A$$
$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

આપણે એક નોંધ કરીએ કે $\forall \omega_i$ સંકેત 'પ્રત્યેક ω_i માટે' એમ દર્શાવે છે. $\forall$ તર્કનો સંકેત છે.

અને $$P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$$
$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ચાલો એક અન્ય પ્રયોગ 'એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળવો' વિશે વિચાર કરીએ.

આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT} છે.

ધારો કે જુદાં જુદાં પરિણામો માટે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંભાવના નક્કી કરવામાં આવી છે :

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

સ્પષ્ટ છે કે આ સંભાવનાની પસંદગી તેની પૂર્વધારણાયુક્ત ધારણાની શરતોનું પાલન કરે છે. ચાલો હવે આપણે ઘટના E : 'સિક્કાને બે વાર ઉછાળતા એક સમાન પરિણામ મળે છે' ની સંભાવના જાણીએ. અહીં, E = {HH, TT}

હવે, પ્રત્યેક $w_i \in E$ માટે, $P(E) = \Sigma P(w_i)$

$$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$$

ઘટના F : ‘ફક્ત બે છાપ હોય’, તેના માટે આપણી પાસે F = {HH} અને $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 સમસંભાવી પરિણામોની સંભાવના :

ધારો કે એક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2,..., \omega_n\}$ છે.

ધારો કે બધાં જ પરિણામ સમસંભાવી છે, એટલે કે પ્રત્યેક મૂળભૂત ઘટનાના ઉદ્ભવની સંભાવના સમાન છે. આથી પ્રત્યેક $\omega_i \in S$ માટે, $P(\omega_i) = p$, જ્યાં $0 \le p \le 1$

હવે, $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1.$ તેથી $p + p + ... + p$ (n વખત) = 1

એટલે કે $np = 1$ અથવા $p = \frac{1}{n}$

ધારો કે નિદર્શાવકાશ S ની કોઈ એક ઘટના E, એવી છે કે $n(S) = n$ અને $n(E) = m$, જો પ્રત્યેક પરિણામ સમસંભાવી હોય, તો એવું ફલિત થાય છે છે કે

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E ને અનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}}$$

16.4.3 ઘટના ‘A અથવા B’ ની સંભાવના :

ચાલો આપણે ઘટના ‘A અથવા B’ ની સંભાવના એટલે કે $P(A \cup B)$ જાણીએ.

ધારો કે A = {HHT, HTH, THH} અને B = {HTH, THH, HHH} એ એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવો એ પ્રયોગની બે ઘટનાઓ છે.

સ્પષ્ટ છે કે $A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

હવે, $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

જો બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી હોય તો,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

અને $$P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$$

તેથી, $P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

અહીં, સ્પષ્ટ છે કે $P(A \cup B) \ne P(A) + P(B)$

બિંદુઓ HTH અને THH, એ A અને B માં સામાન્ય ઘટકો છે. P(A) + P(B) ની ગણતરીમાં બિંદુઓ HTH અને THH ની

સંભાવનાઓ, એટલે કે $A \cap B$ નાં ઘટકો બે વાર સમાવ્યાં છે. આમ, $P(A \cup B)$ ની સંભાવના મેળવવા માટે આપણે $A \cap B$ માં આવેલા નિદર્શ બિંદુઓની સંભાવનાને $P(A) + P(B)$ માંથી બાદ કરીશું.

એટલે કે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

આમ, આપણે જોયું કે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

વ્યાપક રીતે જો, A અને B એ કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓ હોય, તો ઘટનાની સંભાવનાની વ્યાખ્યાને આધારે, આપણી પાસે

$$P(A \cup B) = \sum P(\omega_i), \quad \forall \omega_i \in A \cup B.$$

વળી, $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$,

આપણી પાસે

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B - A\right]$$

(કારણ કે A–B, $A \cap B$ અને B – A પરસ્પર નિવારક છે.) વળી, ..(1)

$$P(A) + P(B) = \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A-B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (B-A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (B-A)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

$$= P(A \cup B) + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B\right]$$ [∵ (1) પરથી]

$$= P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

આમ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

આ સૂત્રની વૈકલ્પિક સાબિતી નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પણ આપી શકાય છે :

$A \cup B = A \cup (B - A)$ અહીં A અને B – A પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

અને $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ અહીં $A \cap B$ અને B – A પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

સંભાવનાની પૂર્વધારણા (iii) દ્વારા આપણને પ્રાપ્ત થાય છે કે,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad ...(2)$$

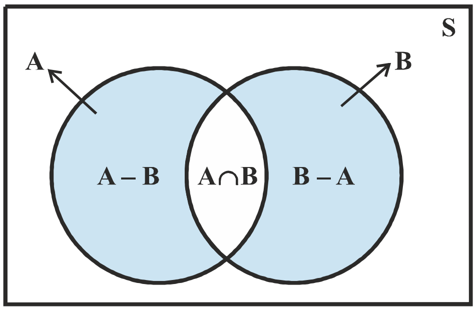
અને $$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad ...(3)$$

(2) માંથી (3) ને બાદ કરતાં

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

અથવા $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

આ પરિણામને વેન-આકૃતિ (આકૃતિ 16.1) નાં અવલોકન દ્વારા પણ પ્રસ્થાપિત કરી શકાય.



આકૃતિ 16.1

જો A અને B અલગ ગણો હોય, એટલે કે તે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો $A \cap B = \phi$

તેથી, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

આમ, પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે આપણને

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ મળે છે.

આ સંભાવનાની પૂર્વધારણા (iii) છે.

નોંધ : ખરેખર આ 'સાબિતી' અસત્ય છે. પૂર્વધારણા સાબિત ન થાય. વળી તેના પરથી જ સૂત્ર

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ મળ્યું છે.

16.4.4 ઘટના 'A-નહિ' ની સંભાવના

1 થી 10 સુધી અંકિત પૂર્ણાંકોવાળા દસ પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું કાઢવાના પ્રયોગની ઘટના A = {2, 4, 6, 8} વિશે વિચાર કરીએ.

સ્પષ્ટ છે કે અહીં નિદર્શાવકાશ S = {1, 2, 3, ...,10} છે.

હવે જો બધાં જ પરિણામો 1, 2, ...,10 ને સમસંભાવી ધારી લઈએ તો દરેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{10}$ થશે.

હવે $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

સાથે જ ઘટના 'A-નહિ' = $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

હવે $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

આ પ્રકારે, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

સાથે જ આપણને એ પણ ખબર છે કે A′ અને A પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે. એટલે કે

$A \cap A' = \phi$ અને $A \cup A' = S$

અથવા $P(A \cup A') = P(S)$

હવે, $P(A) + P(A') = 1$, પૂર્વધારણા (ii) અને (iii) ના ઉપયોગ દ્વારા

અથવા $P(A') = P(A \text{ નહિં}) = 1 - P(A)$

હવે જ્યાં સુધી અન્ય કોઈ સૂચના ન હોય ત્યાં સુધી આપણે સમસંભાવી પરિણામોવાળા પ્રયોગો માટે કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રશ્નો વિશે વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 10 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની એક થોકડીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પત્તું ચોકટનું હોય.

(ii) પત્તું એક્કો ન હોય.

(iii) પત્તું કાળા રંગનું હોય. (એટલે કે કાળીનું અથવા ફુલ્લીનું)

(iv) પત્તું ચોકટનું ન હોય.

(v) પત્તું કાળા રંગનું ન હોય.

તો ખેંચવામાં આવેલાં પત્તાંની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : જ્યારે સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની એક થોકડીમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે ત્યારે સંભવિત પરિણામોની સંખ્યા 52 હોય છે.

(i) ધારો કે ઘટના A ખેંચવામાં આવેલું પત્તું ચોકટનું છે એ દર્શાવે છે. સ્પષ્ટ છે કે A ના ઘટકોની સંખ્યા 13 છે.

તેથી, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

એટલે કે ચોકટનું પત્તું ખેંચવાની સંભાવના = $\frac{1}{4}$ છે.

(ii) ધારો કે ઘટના B ખેંચવામાં આવેલું પત્તું એક્કો છે.

તેથી 'ખેંચવામાં આવેલું પત્તું એક્કો ન હોય' તેને B' વડે દર્શાવાય.

હવે $P(B') = 1 - P(B) = 1-\frac{4}{52}=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$

(iii) ધારો કે 'ખેંચવામાં આવેલું પત્તું કાળા રંગનું છે' એ ઘટના C દ્વારા દર્શાવાય છે.

તેથી ઘટના C ના ઘટકોની સંખ્યા = 26 છે.

એટલે કે $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

આમ, કાળા રંગનું પત્તું ખેંચવામાં આવે તેની સંભાવના = $\frac{1}{2}$.

(iv) આપણે ઉપરના (i) માં જોયું ઘટના A, 'ખેંચવામાં આવેલ પત્તું ચોકટનું હોય' તે દર્શાવે છે. તેથી ઘટના A' અથવા 'A-નહિ' એમ દર્શાવે છે કે ખેંચવામાં આવેલું પત્તું ચોકટનું નથી.

હવે $P(A\text{-નહિ}) = 1 - P(A) = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) 'ખેંચવામાં આવેલ પત્તું કાળા રંગનું ન હોય' એટલે કે ઘટના C-નહિ અથવા C' દર્શાવે છે.

હવે $P(C\text{-નહિ}) = 1 - P(C) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

આમ, પત્તું કાળા રંગનું ન હોય તેની સંભાવના = $\frac{1}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 11 : એક થેલામાં 9 તકતી છે. તે પૈકી 4 લાલ રંગની, 3 ભૂરા રંગની અને 2 પીળા રંગની છે. પ્રત્યેક તકતી આકાર અને માપમાં સમરૂપ છે. થેલામાંથી એક તકતી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. જો તે (i) લાલ રંગની હોય, (ii) પીળા રંગની હોય, (iii) ભૂરા રંગની હોય, (iv) ભૂરા રંગની ન હોય, (v) લાલ રંગની અથવા ભૂરા રંગની હોય તે અનુસાર કાઢવામાં આવેલ તકતીની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : તકતીની કુલ સંખ્યા 9 છે, તેથી સંભવિત પરિણામોની કુલ સંખ્યા 9 થશે. ધારો કે ઘટનાઓ A, B, C એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવી છે કે,

A : કાઢવામાં આવેલ તકતી લાલ રંગની છે.

B : કાઢવામાં આવેલ તકતી પીળા રંગની છે.

C : કાઢવામાં આવેલ તકતી ભૂરા રંગની છે.

(i) લાલ રંગની તકતીની સંખ્યા = 4, એટલે કે n (A) = 4 તેથી, $P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) પીળા રંગની તકતીની સંખ્યા = 2, એટલે કે n (B) = 2

તેથી, $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) ભૂરા રંગની તકતીની સંખ્યા = 3, એટલે કે n(C) = 3

તેથી, $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) સ્પષ્ટપણે ઘટના ‘તકતી ભૂરા રંગની નથી’ એ ‘C-નહિ’ જ છે, આપણે જાણીએ છીએ કે,

P(C-નહિ) = 1 – P(C)

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) ઘટના ‘લાલ રંગની તકતી અથવા ભૂરા રંગની તકતી’ ને ગણ ‘$A \cup C$’ દ્વારા દર્શાવી શકાય. હવે ‘A અને C’ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે, તેથી,

P(A અથવા C) = $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$

ઉદાહરણ 12 : બે વિદ્યાર્થીઓ અનિલ અને આશિમા એક પરીક્ષામાં હાજર રહે છે. અનિલની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.05 અને આશિમાની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.10 છે. બંનેની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.02 છે. નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો :

(a) અનિલ અને આશિમા બંને પૈકી કોઈ પણ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થઈ શકે.

(b) બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય.

(c) બંનેમાંથી માત્ર એક પરીક્ષામાં પાસ થશે.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટનાઓ E તથા F 'અનિલ પરીક્ષામાં પાસ થઈ જશે' અને 'આશિમા પરીક્ષામાં પાસ થઈ જશે' તે ક્રમમાં દર્શાવે છે.

તેથી P(E) = 0.05, P(F) = 0.10 અને $P(E \cap F) = 0.02$.

હવે (a) ઘટના 'બંનેમાંથી કોઈ પણ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થઈ શકે' ને $E' \cap F'$ વડે દર્શાવી શકાય, કારણ કે

E' ઘટના 'E-નહિ' એટલે કે 'અનિલ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય' તથા F' ઘટના 'F-નહિ', એટલે કે 'આશિમા પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય' તે દર્શાવે છે.

વળી, $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (દ મોર્ગનનો નિયમ)

હવે, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$\therefore \ P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

તેથી $P(E' \cap F') = P((E \cup F)') = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય.)

= 1 − P(બંને પાસ થશે.)

= 1 − 0.02 = 0.98

(c) ઘટના 'બંનેમાંથી માત્ર એક જ પાસ થશે' એ નીચે દર્શાવેલ ઘટનાને સમાન છે :

અનિલ પાસ થશે અને આશિમા પાસ નહિ થાય અથવા અનિલ પાસ નહિ થાય અને આશિમા પાસ થશે એટલે કે $E \cap F'$ અથવા $E' \cap F$. અહીં, $E \cap F'$ અને $E' \cap F$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

તેથી P (બંનેમાંથી માત્ર એક જ પાસ થશે.)

= P ($E \cap F'$ અથવા $E' \cap F$)

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F)$

$= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

ઉદાહરણ 13 : બે પુરુષો અને બે સ્ત્રીઓના સમૂહમાંથી બે વ્યક્તિઓની એક સમિતિની રચના કરવાની છે. જ્યારે સમિતિમાં (a) કોઈ પુરુષ ન હોય ? (b) એક પુરુષ હોય? (c) બંનેય પુરુષ હોય, તે ઘટનાની સંભાવના શું થશે ?

ઉકેલ : સમૂહમાં વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા = 2 + 2 = 4. આ ચાર વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓને $^4C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય છે.

(a) સમિતિમાં કોઈ પુરુષ ન હોવાનો અર્થ એ છે કે સમિતિમાં બે સ્ત્રીઓ છે. બે સ્ત્રીઓમાંથી બે ને પસંદ $^2C_2 = 1$ પ્રકારે કરી શકાય.

તેથી P (કોઈ પુરુષ નહિ.) $= \dfrac{^2C_2}{^4C_2} = \dfrac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

(b) સમિતિમાં એક પુરુષ હોવાનું તાત્પર્ય છે કે તેનામાં એક સ્ત્રી છે. 2 પુરુષોમાંથી 1 પુરુષની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $^2C_1$ તથા 2 સ્ત્રીઓમાંથી 1 સ્ત્રીની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $^2C_1$ છે. બંને પસંદગીઓ એક સાથે કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $^2C_1 \times {^2C_1}$ છે.

તેથી P (એક પુરુષ) $= \dfrac{^2C_1 \times {^2C_1}}{^4C_2} = \dfrac{2 \times 2}{2 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

(c) બે પુરુષોની પસંદગી ${}^2C_2$ પ્રકારે થઈ શકે છે.

આથી $$P\text{ (બે પુરુષ)} = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

સ્વાધ્યાય 16.3

1. નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ નાં પરિણામો માટે નીચે દર્શાવેલમાંથી કયું સંભાવનાં નિર્ધારણ માન્ય નથી :

પરિણામ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળતાં, ઓછામાં ઓછી એક વાર કાંટો મળે તેની સંભાવના શું થશે?

3. એક પાસાને ફેંકવામાં આવ્યો છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) એક અવિભાજ્ય સંખ્યા આવે.

(ii) 3 કે 3 થી મોટી સંખ્યા આવે.

(iii) 1 કે 1 થી નાની સંખ્યા આવે.

(iv) 6 થી મોટી સંખ્યા આવે.

(v) 6 થી નાની સંખ્યા આવે.

4. તાસની 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(a) નિદર્શાવકાશમાં કેટલાં બિંદુ છે ?

(b) પત્તું કાળીનો એક્કો હોય તેની સંભાવના શું છે?

(c) પત્તું (i) એક્કો હોય (ii) કાળા રંગનું હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક સમતોલ સિક્કો જેની એક બાજુ પર 1 અને બીજી બાજુ પર 6 અંકિત કરેલ છે. આ સિક્કો તથા એક સમતોલ પાસો બંનેને ઉછાળવામાં આવે છે. મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 3 હોય (ii) 12 હોય, તેની સંભાવના શોધો.

6. શહેર પરિષદમાં ચાર પુરુષો અને છ સ્ત્રીઓ છે. જો એક સમિતિ માટે યાદચ્છિક રીતે એક પરિષદ-સભ્ય પસંદ કરવામાં આવ્યા છે, તો એક સ્ત્રી-સભ્યની પસંદ થવાની સંભાવના કેટલી?

7. એક સમતોલ સિક્કાને ચાર-વાર ઉછાળવામાં આવે છે અને એક વ્યક્તિ પ્રત્યેક છાપ (H) પર ₹ 1 જીતે છે અને પ્રત્યેક કાંટા (T) પર ₹ 1.50 હારે છે. આ પ્રયોગનાં નિદર્શાવકાશ પરથી શોધો કે ચાર વાર સિક્કાને ઉછાળ્યા પછી તે કેટલી રકમ પ્રાપ્ત કરી શકે છે તથા આ પ્રત્યેક રકમની સંભાવના શોધો.

8. ત્રણ સિક્કા એક વાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) 3 છાપ મળે. (ii) 2 છાપ મળે. (iii) ઓછામાં ઓછી 2 છાપ મળે.

(iv) વધુમાં વધુ 2 છાપ મળે. (v) એક પણ છાપ નહિ. (vi) 3 કાંટા મળે.

(vii) માત્ર બે જ કાંટા મળે. (viii) એક પણ કાંટો નહિ. (ix) વધુમાં વધુ બે કાંટા મળે.

9. જો કોઈ ઘટના A ની સંભાવના $\frac{2}{11}$ હોય, તો ઘટના 'A-નહિ' ની સંભાવના શોધો.

10. શબ્દ 'ASSASSINATION' માંથી એક અક્ષર યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. (i) તે એક સ્વર હોય (ii) એક વ્યંજન હોય તો પસંદ કરેલા અક્ષરની સંભાવના શોધો.

11. એક લોટરીમાં એક વ્યક્તિ1 થી 20 સુધીની સંખ્યાઓમાંથી છ જુદી જુદી સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે અને જો એ પસંદ કરેલી છ સંખ્યાઓ લોટરી સમિતિએ પૂર્વનિર્ધારિત કરેલ છ સંખ્યાઓ સાથે મેળ ખાતી હોય તો એ વ્યક્તિ ઈનામ જીતી જાય છે. આ લોટરીની રમતમાં ઈનામ જીતવાની સંભાવના શું છે?

[**સૂચન :** સંખ્યાઓ પ્રાપ્ત થવાનો ક્રમ મહત્ત્વપૂર્ણ નથી.]

12. ચકાસો કે નીચેની સંભાવનાઓ P(A) અને P(B) સુસંગત રીતે વ્યાખ્યાયિત છે.

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

13. નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા ભરો :

	P(A)	**P(B)**	**P(A ∩ B)**	**P(A ∪ B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	...
(ii)	0.35	...	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	...	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ અને $P(B) = \frac{1}{5}$ આપેલ છે. જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો P(A અથવા B) શોધો.

15. ઘટનાઓ E અને F એવા પ્રકારની છે કે $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ અને P(E અને F) = $\frac{1}{8}$, તો (i) P(E અથવા F), (ii) P(E-નહિ અને F-નહિ) શોધો.

16. ઘટનાઓ E અને F એવા પ્રકારની છે કે P(E-નહિ અથવા F-નહિ) = 0.25, ચકાસો કે E અને F પરસ્પર નિવારક છે કે નહિ?

17. ઘટનાઓ A અને B એવા પ્રકારની છે કે P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 અને P(A અને B) = 0.16. (i) P(A-નહિ), (ii) P(B-નહિ) અને (iii) P(A અથવા B) શોધો.

18. એક શાળાના ધોરણ XI નાં 40 % વિદ્યાર્થી ગણિત ભણે છે અને 30 % જીવવિજ્ઞાન ભણે છે. વર્ગના 10 % વિદ્યાર્થી ગણિત અને જીવવિજ્ઞાન બંને ભણે છે. આ ધોરણનો એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે, તો આ વિદ્યાર્થી ગણિત અથવા જીવવિજ્ઞાન ભણતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

19. એક પ્રવેશ કસોટીને બે પરીક્ષાના આધાર પર શ્રેણીબદ્ધ કરવામાં આવે છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીની

પહેલી પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.8 છે અને બીજી પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.7 છે. બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.95 છે. બંને પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના શું છે?

20. એક વિદ્યાર્થીની અંતિમ પરીક્ષાના અંગ્રેજી અને હિંદી બન્ને વિષયો પાસ કરવાની સંભાવના 0.5 છે અને બંનેમાંથી કોઈ પણ વિષય પાસ ન કરવાની સંભાવના 0.1 છે. જો અંગ્રેજીની પરીક્ષા પાસ કરવાની સંભાવના 0.75 હોય, તો હિંદીની પરીક્ષા પાસ કરવાની સંભાવના શું છે?

21. એક ધોરણના 60 વિદ્યાર્થીઓમાંથી NCC ને 30, NSS ને 32 અને બંનેને 24 વિદ્યાર્થીઓએ પસંદ કર્યા છે. જો આ બધામાંથી એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો આપેલ ઘટનાઓની સંભાવના શોધો.

(i) વિદ્યાર્થીએ NCC અથવા NSS ને પસંદ કર્યા છે.

(ii) વિદ્યાર્થીએ NCC અને NSS માંથી એક પણ પસંદ કર્યા નથી.

(iii) વિદ્યાર્થીએ NSS ને પસંદ કર્યું છે. પરંતુ NCC ને પસંદ કર્યું નથી.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 14 : રજાઓમાં વીણાએ ચાર શહેરો A, B, C અને D ની યાદચ્છિક ક્રમમાં યાત્રા કરી છે. શું સંભાવના છે કે એણે

(i) A ની યાત્રા B ના પહેલાં કરી ?

(ii) A ની યાત્રા B ના પહેલાં અને B ની યાત્રા C ના પહેલાં કરી ?

(iii) A ની યાત્રા પહેલાં અને B ની છેલ્લે યાત્રા કરી ?

(iv) A ની યાત્રા સૌથી પહેલાં અથવા બીજા ક્રમે કરી ?

(v) A ની યાત્રા B ના તરત પહેલાં જ કરી ?

ઉકેલ : વીણા દ્વારા ચાર શહેરો A, B, C અને D ની યાત્રાના જુદા જુદા પ્રકારોની સંખ્યા 4! એટલે કે 24 છે. તેથી n (S) = 24. આમ, આ પ્રયોગના નિદર્શાવકાશમાં 24 ઘટકો છે. એ બધા પરિણામ સમસંભાવી ધારી લઈએ તો આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC,
BDAC, BDCA, BCAD, BCDA, CABD, CADB, CBDA, CBAD,
CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA}

(i) ધારો કે ઘટના E : વીણા A ની યાત્રા B ના પહેલાં કરે છે, તે દર્શાવે છે. તેથી

E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB, ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

આમ, આ પ્રકારે $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

(ii) ધારો કે ઘટના F : વીણા A ની યાત્રા B પહેલાં અને B ની યાત્રા C ના પહેલાં કરે છે.
તે દર્શાવે છે. અહીં F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

તેથી, $P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

વિદ્યાર્થીઓને સૂચના આપવામાં આવે છે કે (iii), (iv) અને (v) ની સંભાવના સ્વ-પ્રયત્ને શોધે.

ઉદાહરણ 15 : જ્યારે તાસનાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી 7 પત્તાનો એક સમૂહ બનાવવામાં આવે તો જેમાં (i) બધા બાદશાહનો સમાવેશ હોય (ii) 3 બાદશાહ હોય (iii) ઓછામાં ઓછા 3 બાદશાહ હોય એ ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : 7 પત્તાંના સમૂહોની કુલ શક્ય સંખ્યા = $^{52}C_7$

(i) 4 બાદશાહો સહિત સમૂહોની સંખ્યા = $^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (બાકીનાં 48 પત્તાંમાંથી અન્ય 3 પત્તાંની પસંદગી થશે.)

તેથી P (સમૂહમાં 4 બાદશાહ) = $\dfrac{^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{^{52}C_7} = \dfrac{1}{7735}$

(ii) 3 બાદશાહ અને 4 બાદશાહ સિવાયનાં પત્તાંવાળા સમૂહોની સંખ્યા = $^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

તેથી P (સમૂહમાં 3 બાદશાહ) = $\dfrac{^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(iii) P(ઓછામાં ઓછા 3 બાદશાહ) = P(3 બાદશાહ અથવા 4 બાદશાહ)

= P(3 બાદશાહ) + P(4 બાદશાહ)

$= \dfrac{9}{1547} + \dfrac{1}{7735} = \dfrac{46}{7735}$

ઉદાહરણ 16 : જો A, B, C એ કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ત્રણ ઘટનાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ઉકેલ : જ્યારે E = B ∪ C હોય, ત્યારે

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$

$= P(A) + P(E) - P(A \cap E)$ ...(1)

હવે, $P(E) = P(B \cup C)$

$= P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ ... (2)

વળી, $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [ગણોના યોગ પર છેદનો વિભાજનનો નિયમ]

આથી, $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C]$ ... (3)

(2) અને (3) નો (1) માં ઉપયોગ કરતાં

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ઉદાહરણ 17 : એક રિલે દોડમાં પાંચ ટુકડીઓ A, B, C, D અને E એ ભાગ લીધો છે.

(a) A, B અને C ક્રમમાં પહેલા, બીજા અને ત્રીજા સ્થાને આવે તેની સંભાવના શું છે?

(b) A, B અને C પ્રથમ ત્રણ સ્થાને (કોઈ પણ ક્રમમાં) રહે તેની સંભાવના શું છે?

(ધારી લો કે બધા જ અંતિમ ક્રમ સમસંભાવી છે.)

ઉકેલ : જો આપણે પ્રથમ ત્રણ સ્થાનો માટે અંતિમ સ્થિતિનાં નિદર્શાવકાશ વિશે વિચાર કરીએ તો જાણીશું કે આમાં ${}^5P_3$, એટલે કે $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ નિદર્શ બિંદુ છે અને પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{60}$ છે.

(a) A, B અને C ક્રમશઃ પહેલાં, બીજા અને ત્રીજા સ્થાન પર રહે છે. એના માટે એક જ અંતિમ ક્રમ ABC છે.

તેથી P(A, B અને C ક્રમશઃ પહેલા, બીજા અને ત્રીજા સ્થાન પર રહે છે.) $= \frac{1}{60}$

(b) A, B અને C પહેલાં ત્રણ સ્થાનો પર છે. એના માટે A, B અને C માટે 3! પ્રકાર છે. તેથી આ ઘટનાને સંગત 3! નિદર્શ બિંદુ મળશે.

તેથી, P (A, B અને C પહેલા ત્રણ સ્થાનો પર રહે.) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 16

1. એક પેટીમાં 10 લાલ, 20 ભૂરી અને 30 લીલી લખોટીઓ છે. તે પેટીમાંથી 5 લખોટીઓ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. તો

   (i) બધી લખોટીઓ ભૂરી હોય. (ii) ઓછામાં ઓછી એક લખોટી લીલી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

2. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 4 પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચવામાં આવેલાં પત્તાંમાં 3 ચોકટના અને એક કાળીનું પત્તું હોય એ ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

3. એક પાસાની બે બાજુઓમાંથી પ્રત્યેક પર સંખ્યા '1' દર્શાવેલ છે, ત્રણ બાજુઓમાં પ્રત્યેક પર સંખ્યા '2' દર્શાવેલ છે અને એક બાજુ પર સંખ્યા '3' છે. જો આ પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે તો નીચે આપેલ શોધો :

   (i) P(2) (ii) P(1 અથવા 3) (iii) P(3 નહિ)

4. એક લોટરીની દસ સમાન ઇનામવાળી 10,000 ટિકિટ વેચવામાં આવી છે. જો તમે (a) એક ટિકિટ (b) બે ટિકિટ (c) 10 ટિકિટ ખરીદો છો તો કોઈ પણ ઇનામ ન મળે તેની સંભાવના શોધો.

5. 100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 40 અને 60 વિદ્યાર્થીઓના બે વર્ગ બનાવ્યા છે. જો તમે અને તમારો એક મિત્ર 100 વિદ્યાર્થીઓમાં છો તો

   (a) તમે બંને એક જ વર્ગમાં છો તેની સંભાવના શું છે ?

   (b) તમે બંને અલગ અલગ વર્ગોમાં છો તેની સંભાવના શું છે ?

6. ત્રણ વ્યક્તિઓને માટે ત્રણ પત્ર લખાઈ ગયા છે અને દરેક માટે સરનામું લખેલ એક પરબીડિયાં છે. પત્રોને યાદચ્છિક રીતે પરબીડિયામાં મૂક્યા છે. પ્રત્યેક પરબીડિયામાં એક જ પત્ર છે. ઓછામાં ઓછો એક પત્ર પોતાના સાચા પરબીડિયામાં મૂકાયો છે તેની સંભાવના શોધો.

7. A અને B બે ઘટનાઓ એવા પ્રકારની છે કે $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ અને $P(A \cap B) = 0.35$

   (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$ શોધો.

8. એક સંસ્થાનાં કર્મીઓમાંથી 5 કર્મીઓને વ્યવસ્થા સમિતિ માટે પસંદ કરવામાં આવ્યા છે. આ પાંચ કર્મીઓની વિગતો નીચે દર્શાવેલ છે :

ક્રમ	નામ	જાતિ	ઉંમર (વર્ષમાં)
1.	હરીશ	પુ	30
2.	રોહન	પુ	33
3.	શીતલ	સ્રી	46
4.	એલિસ	સ્રી	28
5.	સલીમ	પુ	41

આ સમૂહમાંથી પ્રવક્તાનાં પદ માટે યાદચ્છિક રીતે એક વ્યક્તિને પસંદ કરવામાં આવી છે. પ્રવક્તા પુરુષ હોય અથવા 35 વર્ષથી વધારે ઉંમરના હોય તેની સંભાવના શું થશે?

9. 0, 1, 3, 5 અને 7 અંકોના ઉપયોગથી (i) પુનરાવર્તન સિવાય (ii) પુનરાવર્તન સહિત ગોઠવણી કરતાં 5 વડે વિભાજ્ય હોય એવી 4 અંકોની સંખ્યા બને તેની સંભાવના શોધો.

10. કોઈ પેટીના તાળામાં ચાર આંટા લાગે છે. તેનામાં પ્રત્યેક પર 0 થી 9 સુધી 10 અંક છાપેલા છે. તાળું ચાર આંકડાઓના એક વિશેષ ક્રમ (આંકડાઓના પુનરાવર્તન સિવાય) અનુસાર જ ખૂલે છે. એ વાતની શું સંભાવના છે કે કોઈ વ્યક્તિ પેટી ખોલવા માટે સાચા ક્રમની જાણ મેળવી લે?

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે સંભાવનાના પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિશેષતાઓ નીચે દર્શાવેલ છે :

- નિદર્શાવકાશ : તમામ શક્ય પરિણામોનો ગણ
- નિદર્શ બિંદુ : નિદર્શાવકાશનો ઘટક
- ઘટના : નિદર્શાવકાશનો એક ઉપગણ
- અશક્ય ઘટના : ખાલીગણ
- ચોક્કસ ઘટના : પૂર્ણ નિદર્શાવકાશ
- પૂરક ઘટના અથવા નહિ-ઘટના : A' અથવા $S - A$
- ઘટના **A** અથવા **B** : ગણ $A \cup B$
- ઘટના **A** અને **B** : ગણ $A \cap B$
- ઘટના **A,** પરંતુ **B** નહિ : ગણ $A - B$
- પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : જો $A \cap B = \phi$ તો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.
- નિ:શેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : જો $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ અને $E_i \cap E_j = \phi$, $\forall\, i \neq j$ તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ છે.

- સંભાવના : પ્રત્યેક નિદર્શ બિંદુ ω_i ને સંગત સંખ્યા P (ω_i) એવી મળે કે જેથી

(i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ (ii) બધા જ $\omega_i \in S$ માટે $\sum P(\omega_i) = 1$

(iii) બધા જ $\omega_i \in A$, માટે $P(A) = \sum P(\omega_i)$ જ્યાં P (ω_i) એ પરિણામ ω_i ની સંભાવના કહેવાય છે.

- સમસંભાવી પરિણામ : સમાન સંભાવનાવાળા બધાં પરિણામ

- ઘટનાની સંભાવના : એક સમસંભાવી પરિણામોવાળા સાન્ત નિદર્શાવકાશ માટે ઘટના A ની સંભાવના

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, જ્યાં $n(A)$ = ગણ A ના ઘટકોની સંખ્યા અને $n(S)$ = ગણ S ના ઘટકોની સંખ્યા

- જો A અને B કોઈ બે ઘટનાઓ હોય તો

P(A અથવા B) = P(A) + P(B) – P(A અને B)

અથવા $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો P(A અથવા B) = P(A) + P(B)

- કોઈ ઘટના A માટે

P(A-નહિ) = 1 – P(A)

Historical Note

Probability theory like many other branches of mathematics, evolved out of practical consideration. It had its origin in the 16th century when an Italian physician and mathematician Jerome Cardan (1501–1576) wrote the first book on the subject "Book on Games of Chance" (*Biber de Ludo Aleae*). It was published in 1663 after his death.

In 1654, a gambler Chevalier de Metre approached the well known French Philosopher and Mathematician Blaise Pascal (1623–1662) for certain dice problem. Pascal became interested in these problems and discussed with famous French Mathematician Pierre de Fermat (1601–1665). Both Pascal and Fermat solved the problem independently. Besides, Pascal and Fermat, outstanding contributions to probability theory were also made by Christian Huygenes (1629–1665), a Dutchman, J. Bernoulli (1654–1705), De Moivre (1667–1754), a Frenchman Pierre Laplace (1749–1827), the Russian P.L Chebyshev (1821–1897), A. A Markov (1856–1922) and A. N Kolmogorove (1903–1987). Kolmogorov is credited with the axiomatic theory of probability. His book '*Foundations of Probability*' published in 1933, introduces probability as a set function and is considered a classic.

પરિશિષ્ટ 1

અનંત શ્રેઢી

A.1.1 પ્રાસ્તાવિક

શ્રેણી $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ને અનંત પદો છે. આ શ્રેણીને અનંત શ્રેણી કહે છે અને તેનો સરવાળો એટલે કે $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ ને આ અનંત શ્રેણીના સંદર્ભમાં અનંત શ્રેઢી કહે છે. આપણે શ્રેણી અને શ્રેઢી શીર્ષકવાળા પ્રકરણ 9 માં આ ચર્ચા કરી. આ શ્રેઢીને સરવાળાના સંકેત (*sigma*)નો ઉપયોગ કરી સંક્ષિપ્તરૂપે પણ દર્શાવી શકાય એટલે કે,

$$a_1 + a_2 + a_3 + . . . + a_n + . . . = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

આ પ્રકરણમાં આપણે જુદી જુદી સમસ્યાની પરિસ્થિતિમાં ઉપયોગી થઈ શકે તેવી કેટલીક વિશેષ પ્રકારની શ્રેણીઓનો અભ્યાસ કરીશું.

A.1.2 કોઈપણ ઘાતાંક માટે દ્વિપદી પ્રમેય :

પ્રકરણ 8 માં આપણે ઘાતાંક ધન પૂર્ણાંક હોય તેવા દ્વિપદી પ્રમેયની ચર્ચા કરી. આપણે આ વિભાગમાં આ પ્રમેયમાં જેમાં ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા હોય તેવું જરૂરી નથી તેવા વ્યાપક સ્વરૂપને વ્યક્ત કરીશું. તે આપણને એક વિશિષ્ટ પ્રકારની અનંત શ્રેઢી આપે છે. તેને *દ્વિપદી શ્રેઢી* કહે છે. ઉદાહરણો દ્વારા કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો પર આપણે પ્રકાશ ફેંકીશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + . . . + {}^nC_n\, x^n$$

અહીં, n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે. જો આપણે ઘાતાંક n ને ઋણ પૂર્ણાંક અથવા અપૂર્ણાંક લઈએ, તો આપણે નિરીક્ષણ કરી શકીએ કે સંચય ${}^nC_r$ નો કોઈ અર્થ રહેતો નથી.

હવે જો ઘાતાંક ઋણ પૂર્ણાંક અથવા અપૂર્ણાંક હોય અને પૂર્ણ સંખ્યા ન હોય, તો અનંત શ્રેઢી મળે તેવું દ્વિપદી પ્રમેય આપણે વ્યક્ત (સાબિતી સિવાય) કરીશું.

પ્રમેય : જો $|x|<1$ હોય, તો

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$$

નોંધ : 1. જ્યારે m ઋણ પૂર્ણાંક અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે $|x| < 1$, એટલે કે $-1 < x < 1$ શરત હોવી જરૂરી છે એમ આપણે કાળજીપૂર્વક નોંધીશું. ઉદાહરણ તરીકે, જો આપણે $x = -2$ અને $m = -2$, લઈએ, તો આપણને

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}(-2)^2 + \dots \text{ મળે}$$

અથવા $\quad 1 = 1 + 4 + 12 + \dots$ મળે.

આ અશક્ય છે.

2. જ્યારે m ઋણ પૂર્ણાંક અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે આપણે નોંધીશું કે $(1+x)^m$ ના વિસ્તરણમાં અનંત સંખ્યામાં પદો મળે છે.

હવે, $$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \dots$$ નો વિચાર કરીએ.

આ વિસ્તરણ જ્યારે $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ અથવા તેને સમકક્ષ $|b| < |a|$ હોય ત્યારે પ્રમાણભૂત છે.

$(a+b)^m$ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1\cdot 2\cdot 3\dots r} \text{ છે.}$$

આપણે નીચે પ્રમાણે દ્વિપદી પ્રમેયનાં અમુક ચોક્કસ ઉદાહરણો આપીશું. આપણે $|x|<1$ ધારીશું. આ વિસ્તરણોને આપણે વિદ્યાર્થીઓ માટે સ્વાધ્યાય તરીકે રાખીશું.

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
3. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$
4. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

ઉદાહરણ 1 : $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $|x| < 2$ માટેનું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : $$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+...$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+...$$ મળશે.

A.1.3 અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી :

પ્રકરણ 9, વિભાગ 9.5 માં કહ્યું છે કે જો $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (અચળ) $k = 1, 2, 3, ..., n-1$, હોય, તો શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહેવાય છે. વિશેષતઃ જો $a_1 = a$ લઈએ તો શ્રેણીના સ્વરૂપમાં $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપ તરીકે લેવામાં આવે છે. અહીં a પ્રથમ પદ અને r સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

અગાઉ આપણે સાન્ત શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$નો સરવાળો શોધવાના સૂત્રની ચર્ચા કરી છે. તે નીચે આપેલ છે.

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}.$$

આ વિભાગમાં, આપણે અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$નો સરવાળો શોધવાનું સૂત્ર વ્યક્ત કરીએ અને તેને ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણી $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ લઈએ.

અહીં, $a = 1, r = \frac{2}{3}$.

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad ... (1)$$

ચાલો આપણે હવે, n નું મૂલ્ય મોટું અને મોટું થાય ત્યારે $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ની વર્તણૂકનો અભ્યાસ કરીએ.

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે જેમ n નું મૂલ્ય મોટું અને મોટું થતું જાય તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ નું મૂલ્ય શૂન્યની નજીક જાય છે. ગાણિતિક રીતે,

આપણે કહીશું કે જેમ n ખૂબ જ મોટો થાય તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ નું મૂલ્ય ખૂબ જ નાનું થતું જાય છે. બીજા શબ્દોમાં જેમ $n \to \infty$, તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. પરિણામ સ્વરૂપે આપણને અનંત પદોનો સરવાળો S = 3 મળે છે.

આમ, અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ...,$ ના સામાન્ય ગુણોત્તર r નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય 1 કરતાં ઓછું હોય, તો

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

આ વિકલ્પમાં, $|r|<1$ હોવાથી જેમ $n \to \infty$ તેમ $r^n \to 0$. તેથી $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$.

$$n \to \infty \text{ ત્યારે } S_n \to \frac{a}{1-r}.$$

અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો સંકેતમાં S વડે દર્શાવાય છે. આમ, આપણને, $S = \frac{a}{1-r}$ મળે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

ઉદાહરણ 2 : સમગુણોત્તર શ્રેણી $\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, ...$ નાં અનંત પદ સુધીનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ: અહીં $a = \frac{-5}{4}$ અને $r = -\frac{1}{4}$. આથી $|r|<1$.

આથી અનંત પદ સુધીનો સરવાળો $\frac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$ થાય.

A.1.4 ઘાતાંકીય શ્રેઢી

સ્વિસના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી ***Leonhard Euler*** એ (1707 – 1783), તેમના કલનના પુસ્તકમાં 1748 માં એક સંખ્યા e ની રજૂઆત કરી. જેવી રીતે વર્તુળના અભ્યાસમાં π ઉપયોગી છે, તેવી જ રીતે કલન ગણિતમાં e ઉપયોગી છે.

નીચે આપેલી સંખ્યાઓની અનંત શ્રેઢી

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \text{ નો વિચાર કરીએ.} \quad ... (1)$$

(1) માં આપેલી શ્રેઢીના સરવાળાને e દ્વારા દર્શાવાય છે.

સંખ્યા e નું આપણે આકલન કરીએ.

(1) ની શ્રેઢીનાં તમામ પદો ધન હોવાથી સ્પષ્ટ છે કે તેમનો સરવાળો પણ ધન છે.

બે સરવાળાનો વિચાર કરીએ.

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+... \qquad ...(2)$$

અને

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+... \qquad ...(3)$$

નિરીક્ષણ કરો.

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} \text{ અને } \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}. \quad \text{આથી, } \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24} \text{ અને } \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}. \quad \text{આથી, } \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120} \text{ અને } \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}. \quad \text{આથી, } \frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}.$$

માટે, સમાનતાના આધારે, આપણે કહી શકીએ કે,

$$n>2 \text{ માટે } \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે (2) નું દરેક પદ તેને અનુરૂપ (3) ના પદ કરતાં નાનું છે,

માટે

$$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right) \qquad ...(4)$$

(4) ની બંને બાજુએ $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ ઉમેરતાં,

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)$$

$$<\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\} \qquad ...(5)$$

$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

(5) ની ડાબી બાજુ શ્રેઢી (1) દર્શાવે છે. માટે $e<3$ અને $e>2$ પણ છે. આથી, $2<e<3$.

નોંધ : ચલ x ને સમાવિષ્ટ કરતી ઘાતાંકીય શ્રેઢી

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

ઉદાહરણ 3 : x ના ઘાતવાળી શ્રેઢી e^{2x+3} ના વિસ્તરણમાં x^2 નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : ઘાતાંકીય શ્રેઢી,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

માં x ના સ્થાને $(2x + 3)$ લેતાં,

$$e^{2x+3} = 1+\frac{(2x+3)}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+...$$

અહીં, વ્યાપક પદ $\frac{(2x+3)^n}{n!} = \frac{(3+2x)^n}{n!}$ થશે. દ્વિપદી પ્રમેયથી તેનું વિસ્તરણ

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + ... + (2x)^n\right].$$

અહીં x^2 નો સહગુણક $\frac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$ છે. આથી આવી શ્રેઢીમાં x^2 નો સહગુણક

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 3^{n-2}2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} \qquad [n! = n(n-1)(n-2)! \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+...\right]$$

$$= 2e^3.$$

આમ, e^{2x+3} ના વિસ્તરણમાં x^2 નો સહગુણક $2e^3$ છે.

વૈકલ્પિક રીતે, $e^{2x+3} = e^3 . e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...\right]$$

આમ, e^{2x+3} ના વિસ્તરણમાં x^2 નો સહગુણક $e^3.\frac{2^2}{2!} = 2e^3$

ઉદાહરણ 4 : દશાંશના એક સ્થાન સુધી e^2 નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : x નો સમાવેશ કરતી ઘાતાંકીય શ્રેઢીના સૂત્ર,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \text{ માં } x = 2 \text{ લેતાં,}$$

$$e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+...$$

$$= 1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+\ldots$$

$\geq$ પ્રથમ સાત પદોનો સરવાળો ≥ 7.355.

બીજી રીતે જોઈએ તો,

$$e^2 < \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)+\frac{2^5}{5!}\left(1+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+\ldots\right)$$

$$= 7+\frac{4}{15}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right) = 7+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 7+\frac{2}{5}=7.4.$$

આમ, e^2 એ 7.355 અને 7.4 ની વચ્ચે આવેલી છે. આથી e^2 નું દશાંશના એક સ્થળ સુધીની આસન્ન કિંમત 7.4 છે.

A.1.5 લઘુગણકીય શ્રેઢી

લઘુગણકીય શ્રેઢી એ પણ બીજી ઘણી અગત્યની શ્રેઢી છે. તે પણ અનંત શ્રેઢીના સ્વરૂપમાં છે. આપણે આગળનું પરિણામ સાબિતી આપ્યા સિવાય વ્યક્ત કરીશું અને ઉદાહરણ દ્વારા તેની ઉપયોગિતા સ્પષ્ટ કરીશું.

પ્રમેય: જો $|x|<1$ હોય, તો

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

ઉપરની જમણી બાજુની શ્રેઢીને લઘુગણકીય શ્રેઢી કહે છે.

નોંધ $\log_e(1+x)$ નું વિસ્તરણ $x = 1$ માટે સત્ય છે. $\log_e(1+x)$ ના વિસ્તરણમાં $x = 1$ લેતાં, આપણને $\log_e 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ મળે.

ઉદાહરણ 5 : જો α, β એ સમીકરણ $x^2-px+q=0$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે,

$$\log_e\left(1+px+qx^2\right)=(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\ldots$$

ઉકેલ : જમણી બાજુ $=\left[\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\ldots\right]+\left[\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\ldots\right]$

$= \log_e(1+\alpha x)+\log(1+\beta x)$

$= \log_e\left(1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\right)$

$= \log_e\left(1+px+qx^2\right)$ = ડાબી બાજુ

અહીં, આપણે $\alpha+\beta=p$ અને $\alpha\beta=q$ હકીકતનો ઉપયોગ કર્યો છે. આ હકીકત આપણે, દ્વિઘાત સમીકરણનાં આપેલ બીજ પરથી જાણીએ છીએ. આપણે $|\alpha x|<1$ અને $|\beta x|<1$ છે તેમ પણ ધારી લીધું છે.

પરિશિષ્ટ 2

ગાણિતિક નમૂના

A.2.1 પ્રાસ્તાવિક

છેલ્લી કેટલીક સદીઓથી વિવિધ ક્ષેત્રો જેમકે વિજ્ઞાન, નાણાવ્યવસ્થા, સંચાલન વગેરેની મોટા ભાગની ગતિમાં ઉદ્ભવતી વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગાણિતિક પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવો આવશ્યક બને છે. ડિજિટલ કમ્પ્યૂટર અને ગણતરીની પદ્ધતિઓની વધતી જતી શક્તિના લીધે જીવનની વાસ્તવિક સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગણિતના ઉપયોગનો બહોળો પ્રસાર થયો તેમજ આ બંનેના કારણે સરળતાથી ખૂબ જ લાંબી અને જટિલ સમસ્યાઓનો ઉકેલ હાથવગો થયો.

વાસ્તવિક જીવનની અમુક સમસ્યાઓનું ગાણિતિક સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરી તેના ઉકેલને સારી રીતે રજૂ કરી શકાય છે. આ રૂપાંતરણની ક્રિયાને ગાણિતિક નમૂના મેળવવાની પદ્ધતિ કહે છે.

અહીં અમે તમને ઉદાહરણો દ્વારા આ વિધિમાં ઉપયોગમાં લેવાતા સોપાનોથી પરિચિત કરીશું. સૌ પ્રથમ આપણે ગાણિતિક નમૂનો શું છે તેની વાત કરીશું અને પછી ગાણિતિક નમૂના બનાવવાની પ્રક્રિયામાં આવતાં સોપાનોની ચર્ચા કરીશું.

A.2.2 પ્રાથમિકતાઓ

વિશ્વને સમજવા માટે ગાણિતિક નમૂના એ આવશ્યક સાધન છે. જૂના જમાનામાં ચાઈનિઝ, ઈજિપ્શયન, ભારતીય, બેબીલોનીઅન અને ગ્રીક પ્રજા ગણિતના જ્ઞાન દ્વારા કુદરતી ઘટનાઓની આગાહી કરતાં હતાં. શિલ્પી, કસબી અને હસ્તકલાના મોટા ભાગની કલાકારીગરી ભૂમિતિના સિદ્ધાંત પર આધારિત હતી.

ધારો કે એક સર્વેયરને ટાવરની ઊંચાઈ માપવી છે. માપપટ્ટીથી આ ઊંચાઈ માપવી મુશ્કેલ છે. આ ઊંચાઈ માપવા માટેનાં કયાં પરિબળો છે તે શોધવું એ બીજો વિકલ્પ છે. જો સર્વેયર ઉત્સેધકોણ અને જ્યાં તે ઊભો છે ત્યાંથી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર જાણતા હોય, તો ત્રિકોણમિતિના જ્ઞાનથી ટાવરની ઊંચાઈની ગણતરી કરી શકે.

આથી તેનું કામ હવે ટાવરના ટોચનો ઉત્સેધકોણ અને તે જ્યાં ઊભો છે ત્યાંથી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર શોધવાનું

રહે છે. તે બંને સરળતાથી માપી શકાય છે. આમ, જો ઉત્સેધકોણ 40° હોય અને અંતર 450 મી હોય, તો આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઉદાહરણ 1માં આપેલ છે.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પરના બિંદુ O થી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 40° છે તથા ટાવરના જમીન પરના બિંદુથી O નું અંતર 450 મી છે. ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આપણે આ પ્રશ્નને જુદાં જુદાં સોપાનોથી ઉકેલીશું.

સોપાન 1 : પ્રથમ આપણે વાસ્તવિક સમસ્યાને સમજીશું. પ્રશ્નમાં ટાવર આપેલ છે અને તેની ઊંચાઈ માપવાની છે. ધારો કે તેની ઊંચાઈ h છે. જમીન પરના કોઈક બિંદુ O થી ટાવરના જમીન પરના બિંદુનું અંતર 450 મી આપેલ છે. ધારો કે આ અંતર d છે. તેથી $d = 450$ મી. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, θ વડે દર્શાવેલ ઉત્સેધકોણ 40° છે.

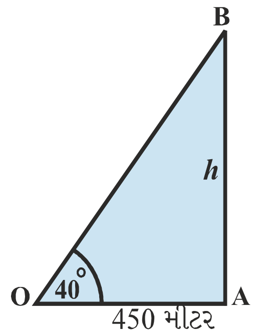
અંતર d અને ઉત્સેધકોણ θ આપેલ હોય ત્યારે ઊંચાઈ h શોધવી તે વાસ્તવિક સમસ્યા છે.

સોપાન 2 : પ્રશ્નમાં ત્રણ વસ્તુઓ દર્શાવેલ છે; ઊંચાઈ, અંતર અને ઉત્સેધકોણ છે. તો આપણે આ ત્રણેને સાંકળતો સંબંધ મેળવીશું. પ્રશ્નને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવીને આ સંબંધ મેળવી શકાય. (આકૃતિ 1)

AB ટાવર દર્શાવે છે. OA એ બિંદુ O થી ટાવરના જમીન પરના બિંદુ વચ્ચેનું સમક્ષિતિજ અંતર છે. ∠AOB એ ઉત્સેધકોણ છે.

આમ, $\tan\theta = \dfrac{h}{d}$ અથવા $h = d \tan\theta$ ... (1)

આ θ, h અને d ને સાંકળતું સમીકરણ છે.



આકૃતિ 1

સોપાન 3 : આપણે h શોધવા માટે સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ કરીશું. આપણી પાસે $\theta = 40°$ અને $d = 450$ મી છે.

$\therefore\ h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ મી

સોપાન 4 : આમ આપણે ટાવરની ઊંચાઈ આશરે 378 મી મેળવી.

ચાલો આપણે આ પ્રશ્નને ઉકેલવા માટે જે જુદાં જુદાં સોપાનોનો ઉપયોગ કર્યો છે તેના વિશે વિચારીએ. સોપાન 1 માં આપણે વાસ્તવિક સમસ્યાનો અભ્યાસ કર્યો અને તેમાં ત્રણ પ્રચલ, ઊંચાઈ, અંતર અને ઉત્સેધકોણ આવેલ છે તેમ નક્કી કર્યું. એટલે કે આ સોપાનમાં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાનો અભ્યાસ કર્યો અને પ્રચલને ઓળખ્યા.

સોપાન 2 માં આપણે ભૂમિતિનો ઉપયોગ કર્યો અને આકૃતિ 1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપણે શોધ્યું કે આપેલ સમસ્યાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ કરી શકાય છે. પછી *"tangent"* વિધેયના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરી

$h = d \tan\theta$ સંબંધ સ્થાપિત કર્યો.

આમ, આ સોપાનમાં આપણે સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કર્યું. એટલે કે આપણે આ વાસ્તવિક સમસ્યાને દર્શાવતું સમીકરણ શોધ્યું.

સોપાન 3 માં આપણે ગાણિતિક પ્રશ્નનો ઉકેલ શોધ્યો અને $h = 377.6$ મી પ્રાપ્ત કર્યા. એટલે કે આપણે સમસ્યાનો ઉકેલ શોધ્યો.

છેલ્લા સોપાનમાં આપણે પ્રશ્નના ઉકેલનું અર્થઘટન કર્યું અને દર્શાવ્યું કે ટાવરની ઊંચાઈ આશરે 378 મી છે. આપણે આને

વાસ્તવિક સમસ્યાના ગાણિતિક ઉકેલનું અર્થઘટન કરવું એમ કહીએ છીએ.

ખરેખર ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને બીજા બધા જ્યારે વાસ્તવિક જીવનની જુદી જુદી સમસ્યાઓનો અભ્યાસ કરે છે ત્યારે આ સોપાનો હોય છે.

જ્યાં જુદી જુદી પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવા માટે ગણિતનો ઉપયોગ અસરકારક રીતે થાય છે એવાં અમુક ઉદાહરણો નીચે આપ્યાં છે :

1. માનવ અને અન્ય તમામ પ્રાણીઓમાં શરીરના વિવિધ ભાગોમાં ઑક્સિજન અને અન્ય પોષક તત્ત્વોને પ્રવાહિત કરવા માટે રક્તનો યોગ્ય પ્રવાહ આવશ્યક છે. રક્તવાહિનીમાં કોઈ પણ પ્રકારનું સંકોચન અથવા રક્તવાહિનીઓની લાક્ષણિકતાઓમાં કોઈ ફેરફાર પ્રવાહને બદલી શકે છે અને તેનાથી અસુવિધાથી માંડીને અચાનક મૃત્યુ સુધીની ક્ષતિ થઈ શકે છે. રક્તપ્રવાહ અને રક્તવાહિનીની શારીરિક લાક્ષણિકતાઓ વચ્ચેનો સંબંધ શોધવો એ સમસ્યા હોય છે.

2. ક્રિકેટમાં ત્રીજા અમ્પાયર બૅટ્સમૅન ત્યાં નથી એવું ધારીને દડાના પથનું અનુકરણ કરીને પ્રથમ LBW નો નિર્ણય કરે છે. બૅટ્સમૅનના પગને દડો વાગે તે પહેલાંના તેના જાણીતા પથના ગાણિતિક સમીકરણ પર આવી શકાય છે. આ અનુકરણ નમૂનાની મદદથી LBWનો નિર્ણય લઈ શકાય છે.

3. હવામાનશાસ્ત્રના વિભાગ હવામાનની આગાહી ગાણિતિક નમૂનાઓના આધારે કરે છે. હવામાનની પરિસ્થિતિમાં ફેરફારને અસર કરતાં અમુક પરિબળો તાપમાન, હવાનું દબાણ, ભેજ, પવનની ઝડપ વગેરે છે. આ પરિબળો માપવા માટે તાપમાન માપવા માટે થરમૉમિટર, હવાનું દબાણ માપવા માટે બેરોમિટર, ભેજ માપવા માટે ભેજમાપક *(hygrometer)*, પવનની ઝડપ માપવા માટે એનેમોમિટર જેવાં સાધનો વપરાય છે. એકવાર દેશભરનાં વિવિધ કેન્દ્રો પાસેથી માહિતી પ્રાપ્ત થાય પછી કમ્પ્યૂટરની મદદથી તેનું વધુ વિશ્લેષણ અને અર્થઘટન કરવામાં આવે છે.

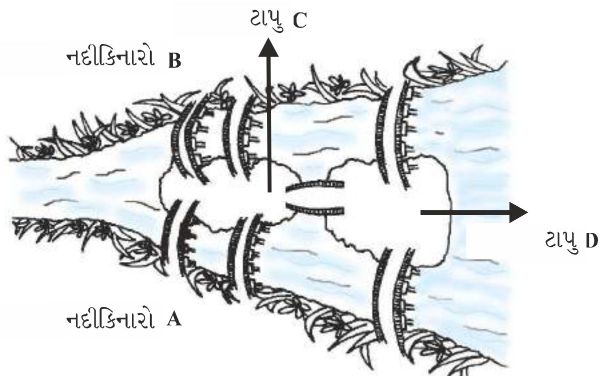
4. કૃષિવિભાગ ભારતમાં ઉત્પાદિત થતા પાકમાંથી ચોખાની ઊપજનો અંદાજ કાઢવા માંગે છે. વૈજ્ઞાનિકો ચોખાની ખેતીના વિસ્તારોને ઓળખી કાઢે છે અને કેટલાંક પ્રતિનિધિ ક્ષેત્રોમાંથી પાકની લણણી અને વજનના આધારે એકર દીઠ સરેરાશ ઊપજ શોધી કાઢે છે. આંકડાશાસ્ત્રીય તકનિકોના આધારે ચોખાની સરેરાશ ઊપજનો નિર્ણય કરવામાં આવે છે.

ગણિતશાસ્ત્રીઓ આવી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે કેવી રીતે મદદ કરે છે ? તે જે-તે ક્ષેત્રના નિષ્ણાતો સાથે બેસે છે. ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પ્રશ્નમાં શરીરવિજ્ઞાની સાથે કામ કરીને સમસ્યાને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં તૈયાર કરે છે. આ ગાણિતિક સ્વરૂપ એક અથવા વધુ સમીકરણો અથવા અસમતાઓ ધરાવે છે. તેમને આપણે ગાણિતિક નમૂના કહીએ છીએ. ત્યાર બાદ આ નમૂનાનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે અને તે ઉકેલનું મૂળ સમસ્યાના સંદર્ભમાં અર્થઘટન કરવામાં આવે છે.

આ પ્રક્રિયા સમજાવતા પહેલાં આપણે ગાણિતિક નમૂના શું છે તેની ચર્ચા કરીશું.

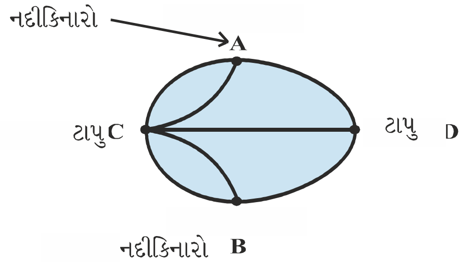
ગાણિતિક નમૂનો એ પરિસ્થિતિના આકલનની રજૂઆત છે. એક રસપ્રદ ભૌમિતિક નમૂનો પૃષ્ઠ 388 પરના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે :

ઉદાહરણ 2 : (સેતુ સમસ્યા) કોનિગ્સબર્ગ એ પ્રીગલ નદી પર આવેલું શહેર છે. તે 18મી સદીમાં જર્મન શહેર હતું, પરંતુ હવે તે રશિયામાં છે. શહેરની અંદર નદીના બે ટાપુઓ અને નદીના બે કિનારા આકૃતિ 2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સાત પુલ દ્વારા જોડાયેલા છે.



આકૃતિ 2

લોકો શહેરની આસપાસ ફક્ત એકવાર દરેક પુલનો ઉપયોગ કરીને ચાલવાનો પ્રયાસ કરતા હતા, પરંતુ તે મુશ્કેલ સમસ્યા સાબિત થઈ હતી. રશિયન સામ્રાજ્ય કેથેરિન ધી ગ્રેટમાં નોકરી કરતા સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્રી ***Leonhard Euler*** એ આ સમસ્યા વિશે સાંભળ્યું. ઈ. સ. 1736 માં ઑઇલરે સાબિત કર્યું કે ઉપરની શરત પ્રમાણે ચાલી શકાય નહિ. તેણે જેને જાળગૂંથણી કહે છે તે રેખાકૃતિ શોધી અને તેણે પરિણામ સાબિત કર્યું. આ જાળગૂંથણી જ્યાં રેખાઓ મળે તે બિંદુઓ અને જીવાઓ (રેખાઓ)થી બનેલી હોય છે. (આકૃતિ 3).

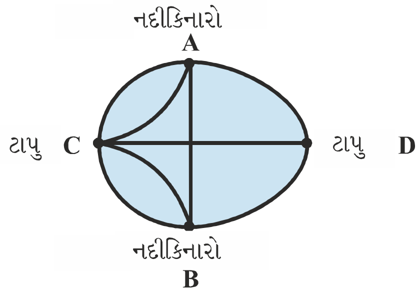


આકૃતિ 3

તેણે નદીના બે કિનારા તથા બે ટાપુઓ માટે ચાર બિંદુઓ (શિરોબિંદુઓ)નો ઉપયોગ કર્યો. તે આકૃતિમાં A, B, C, D વડે દર્શાવેલ છે. સાત પુલ માટે સાત રેખાઓ છે. તમે જોઈ શકો છો કે 3 પુલ નદીના કિનારા A સાથે જોડાયેલ છે અને 3 પુલ નદીના કિનારા B સાથે જોડાયેલ છે. 5 પુલ ટાપુ C સાથે તથા 3 પુલ ટાપુ D સાથે જોડાયેલ છે. આનો અર્થ એમ થાય કે જીવાઓ બધાં શિરોબિંદુઓને અયુગ્મ સંખ્યામાં મળે છે. તેથી તેને અયુગ્મ શિરોબિંદુ કહે છે. (જીવાઓ યુગ્મ શિરોબિંદુને યુગ્મ સંખ્યામાં મળે.) યાદ રાખો કે શહેરની આસપાસ દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરવાનો છે. આનો અર્થ એમ થાય કે ઑઇલરની જાળગૂંથણીમાં દરેક જીવાનો ફક્ત એક વખત ઉપયોગ કરીને દરેક શિરોબિંદુ પર જઈ શકાતું હોવું જોઈએ. ઑઇલરે સાબિત કર્યું કે, આ થઈ શકે નહિ. કારણ કે તેણે બતાવ્યું કે અયુગ્મ શિરોબિંદુ હોય ત્યારે તમારે સફરની શરૂઆત અથવા અંત તે જ શિરોબિંદુથી કરવો પડે. (આના વિશે વિચારો.)

અહીં ફક્ત એક જ શરૂઆત અને એક અંત છે તથા જો તમારે દરેક જીવાનો ફક્ત એક જ વાર ઉપયોગ કરવાનો હોય તો ફક્ત બે જ અયુગ્મ શિરોબિંદુ હોય. પરંતુ આ પ્રશ્નમાં 4 અયુગ્મ શિરોબિંદુ છે તેથી આમ કરવું શક્ય નથી.

ઑઇલરે તેનો પ્રમેય સાબિત કર્યા પછી કોનિગ્સબર્ગના પુલ હેઠળ ઘણું પાણી વહી ગયું છે. ઈ. સ. 1875માં કોનિગ્સબર્ગમાં ટાપુઓ અને નદીના કિનારા A તથા B ને જોડતો એક વધારાનો પુલ બાંધવામાં આવેલ છે. (આકૃતિ 4) હવે કોનિગ્સબર્ગના લોકો માટે દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને શહેરની આસપાસ ફરી શકાય ?



આકૃતિ 4

અહીં પરિસ્થિતિ આકૃતિ 4 પ્રમાણે છે. નવી ધાર ઉમેરવાથી બંને શિરોબિંદુઓ A અને B યુગ્મ શિરોબિંદુઓ થશે. પરંતુ D અને C અયુગ્મ શિરોબિંદુઓ છે. આમ, કોનિગ્સબર્ગના લોકો શહેરની આસપાસ દરેક પુલનો ફક્ત એક જ વખત ઉપયોગ કરીને જઈ શકે છે.

જાળગૂંથણીની શોધના કારણે એક નવા સિદ્ધાંત "*ગ્રાફ થિઅરી*" *(Graph Theory)*ની શરૂઆત થઈ. આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ રેલવેના નેટવર્કનું આયોજન અને નકશો બનાવવા તેમજ બીજા ઘણા પ્રકારે થાય છે. (આકૃતિ 4)

A.2.3 ગાણિતિક નમૂના શું છે ?

અહીં આપણે ગાણિતિક નમૂના શું છે તે વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને તેમાં આવતી ભિન્ન પ્રક્રિયાઓ ઉદાહરણ દ્વારા દર્શાવીશું.

વ્યાખ્યા : ગાણિતિક નમૂના એ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાના અમુક ભાગનો ગાણિતિક શબ્દોમાં અભ્યાસ કરવાનો એક પ્રયત્ન છે.

ભૌતિક પરિસ્થિતિના યોગ્ય શરતો દ્વારા ગણિતમાં રૂપાંતરણને ગાણિતિક નમૂના તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ગાણિતિક નમૂના એ બીજું કંઈ જ નથી પરંતુ જે મૂળભૂત હોય તેવું *પ્રવિધિ* અને *અધ્યાયન શાસ્ત્ર* છે. તે વિજ્ઞાનમાંથી નહિ પરંતુ કલા-ક્ષેત્રમાંથી લેવામાં આવેલ છે.

ચાલો આપણે ગાણિતિક નમૂનામાં આવતી ભિન્ન પ્રક્રિયાઓને સમજીએ. આ પ્રક્રિયામાં ચાર સોપાન આવેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે નમૂના તરીકે સરળ લોલકની ગતિના અભ્યાસનો વિચાર કરીએ.

સમસ્યાની સમજ

ઉદાહરણ તરીકે સાદા લોલકની ગતિની પ્રક્રિયાની સમજ મેળવીએ. આપણે સાદા લોલકથી પરિચિત છીએ. આ લોલકમાં એક દોરીના છેડે વજન લગાવેલું હોય છે. (જે લોલક તરીકે ઓળખાય છે.) તેનો બીજો છેડો એક બિંદુએ નિશ્ચિત હોય છે. આપણે અભ્યાસ કર્યો છે કે સાદા લોલકની ગતિ આવર્તી હોય છે. આ આવર્તમાન દોરીની લંબાઈ અને ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે ઉત્પન્ન થતા પ્રવેગ પર આધાર રાખે છે. એટલે કે આપણે આવર્તમાન જાણવું જરૂરી છે. આના આધારે આપણે સમસ્યાને ચોક્કસ વિધાનમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

વિધાન : આપણે સાદા લોલકનું આવર્તમાન કેવી રીતે શોધી શકીએ ?

હવે પછીનું સોપાન એ સૂત્રો ઘડવાનું છે. સૂત્રો ઘડવાની પ્રક્રિયા બે મુખ્ય સોપાન ધરાવે છે.

1. સંબંધિત પરિબળો ઓળખવા

આમાં આપણે સમસ્યામાં કયાં પરિબળો/પરિમાણોનો સમાવેશ થાય છે તે શોધીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે લોલકના કિસ્સામાં આંદોલનોનું આવર્તમાન (T), લોલકનું વજન (m), આલંબન બિંદુથી લોલકના ગુરુત્વકેન્દ્ર વચ્ચેના અંતર જેટલી લોલકની અસરકારક લંબાઈ (l) છે. અહીં કોઈ સ્થળે આપણે દોરીની લંબાઈ એટલે કે લોલકની અસરકારક લંબાઈ છે અને ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે પ્રવેગ (g) અચળ છે તેમ ધારીશું.

આથી આપણે આ સમસ્યાનો અભ્યાસ કરવા માટે ચાર પરિબળો ઓળખ્યાં. હવે આપણો ઉદ્દેશ T શોધવાનો છે. આના માટે આપણે સમજવું જરૂરી છે કે, આવર્તમાન પર કયાં પરિબળો અસર કરે છે તે એક સરળ પ્રયોગ કરીને જોઈ શકાશે.

આપણે બે ભિન્ન દળવાળા ધાતુના દડા લઈશું અને દરેકને બે સરખી લંબાઈની દોરીની સાથે લટકાવીને પ્રયોગ કરીશું. આપણે આંદોલનકાળ માપીશું. આપણે નોંધીશું કે દળથી આંદોલનકાળમાં કોઈ નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો નથી. હવે, આપણે સરખા દળવાળા દડા અને ભિન્ન લંબાઈની દોરી લઈને પ્રયોગ કરીશું. આપણે અવલોકન કરીશું કે આવર્તનકાળ એ લોલકની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે. આ દર્શાવે છે કે આવર્તનકાળ શોધવા માટે દળ m એ આવશ્યક પરિબળ નથી, જ્યારે l એ આવશ્યક પરિબળ છે.

હવે પછીના સોપાન પર જતાં પહેલાં આવશ્યક પરિબળ શોધવાની પ્રક્રિયા જરૂરી છે.

2. ગાણિતિક વર્ણન

આમાં જાણીતાં પરિબળોનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણ શોધવું, અસમતા શોધવી અથવા ભૌમિતિક આકૃતિ દોરવાની ક્રિયાઓનો સમાવેશ થાય છે. સાદા લોલકના કિસ્સામાં l ની ભિન્ન કિંમતો માટે આવર્તનકાળ T માપવા માટે પ્રયોગ કર્યો. આ કિંમતો પરથી આલેખ દોરવામાં આવ્યો અને પરિણામે તે પરવલય વક્ર જેવો દેખાય તેવું જાણવા મળ્યું. આના પરથી T અને l વચ્ચેનો સંબંધ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$T^2 = kl \qquad \text{... (1)}$$

અગાઉથી જ્ઞાત છે કે $k = \dfrac{4\pi^2}{g}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{... (2)}$$

સમીકરણ (2) એ સમસ્યાનું ગાણિતિક સૂત્રો ઘડવાની પ્રક્રિયા છે.

ઉકેલ શોધવા : ગાણિતિક સૂત્રો ક્યારેક જ સીધો જવાબ આપે છે. સામાન્ય રીતે આપણે સમીકરણનો ઉકેલ, ગણતરી અથવા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરવો વગેરે કામગીરી કરવાનો સમાવેશ થાય છે. સાદા લોલકના કિસ્સામાં તેનો ઉકેલ સૂત્ર (2)નો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય છે.

ભિન્ન લંબાઈ ધરાવતા બે ભિન્ન લોલકના આવર્તનકાળની ગણતરી કોષ્ટક 1માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 1

l	225 સેમી	275 સેમી
T	3.04 સે	3.36 સે

કોષ્ટક l બતાવે છે કે l = 225 સેમી માટે T = 3.04 સેકન્ડ અને l = 275 સેમી માટે T = 3.36 સેકન્ડ

અર્થઘટન/યથાર્થતા

ગાણિતિક નમૂના એ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાની આવશ્યક લાક્ષણિકતાનો અભ્યાસ કરવાનો એક પ્રયત્ન છે. ઘણી વખત ગાણિતિક નમૂનામાં આદર્શ પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં સમીકરણ મેળવાય છે. જો ગાણિતિક નમૂના આપણે સમજવા ઇચ્છતા હોઈએ તે તમામ હકીકતો સમજાવે તો તે નમૂના ઉપયોગી થશે. અન્યથા આપણે તેને નકારી કાઢીશું, અથવા સુધારો કરીશું પછી ફરીથી પરીક્ષણ કરીશું. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, *વાસ્તવિક સમસ્યાની જાણીતી હકીકતો સાથે આપણે ગાણિતિક નમૂનાથી મેળવેલાં પરિણામોની સરખામણી કરીને તેની અસરકારકતા માપીશું. આ ક્રિયાને નમૂનાની યથાર્થતા કહે છે.* સાદા લોલકના કિસ્સામાં આપણે અમુક પ્રયોગો કરીને લોલકનો આવર્તનકાળ શોધીશું. પ્રયોગોના પરિણામ કોષ્ટક 2 માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 2

પ્રયોગો દ્વારા ચાર ભિન્ન લોલકના આવર્તનકાળ

દળ (ગ્રામ)	લંબાઈ (સેમી)	સમય (સેકન્ડ)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

હવે, આપણે કોષ્ટક 2ની માપેલી કિંમતોની કોષ્ટક 1માં ગણતરી કરીને મેળવેલી કિંમતો સાથે સરખામણી કરીશું.

પ્રયોગો દ્વારા મેળવેલ કિંમત અને ગણતરી કરીને મેળવેલી કિંમતના તફાવતને ત્રુટિ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $l = 275$ સેમી અને દળ $m = 385$ ગ્રામ માટે,

ત્રુટિ $= 3.371 - 3.36 = 0.011$ ઓછી છે અને નમૂનાને સ્વીકારીશું.

એક વખત આપણે નમૂનાને સ્વીકારીએ પછી આપણે તેનું અર્થઘટન કરવું પડે. *વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં ઉકેલનું વર્ણન કરવાની ક્રિયાને ગાણિતિક નમૂનાનું અર્થઘટન કહેવામાં આવે છે.* આ કિસ્સામાં આપણે ઉકેલનું નીચે પ્રમાણે અર્થઘટન કરીશું :

(a) આવર્તમાન લોલકની લંબાઈના વર્ગમૂળના સમચલનમાં છે.

(b) તે ગુરુત્વપ્રવેગના વર્ગમૂળના વ્યસ્ત ચલનમાં છે.

આ નમૂનાની આપણી માન્યતા અને અર્થઘટન દર્શાવે છે કે, ગાણિતિક નમૂનાથી મળેલ કિંમતો પ્રયોગ દ્વારા મેળવેલ કિંમતો સાથે સુસંગત થાય છે. પરંતુ આપણે એવું શોધ્યું કે ગણતરીથી મેળવેલ કિંમતો અને પ્રયોગોથી મેળવેલ કિંમતોમાં થોડીક ત્રુટિ હોય છે. આ એટલા કારણે થાય છે કે આપણે દોરીનું વજન તથા માધ્યમના અવરોધને અવગણ્યો છે. આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે આ પ્રક્રિયાને ચાલુ રાખીને વધુ સારા નમૂનાનો વિચાર કરીએ. આ આપણને એક અગત્યના નિરીક્ષણ તરફ દોરી જાય છે. વાસ્તવિક દુનિયા સમજવી અને તેનું સંપૂર્ણપણે વર્ણન કરવું ખૂબ જ જટિલ છે. આપણે પરિસ્થિતિને પ્રભાવિત કરતા હોય તેવા સંપૂર્ણપણે સચોટ ફક્ત એક કે બે મુખ્ય પરિબળોને પસંદ કરીએ છીએ. પછી જે પરિસ્થિતિ વિશે કંઈક માહિતી આપતા હોય તેવો સરળ નમૂનો મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. આ સ્થિતિમાં વધુ સારો નમૂનો મળશે તેવી અપેક્ષા રાખીને આપણે આ નમૂના દ્વારા સરળ પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરીએ છીએ. ગાણિતિક નમૂના મેળવવા માટેની મુખ્ય પ્રક્રિયાનો સારાંશ આ મુજબ થશે :

(a) સૂત્રો ઘડવા (b) ઉકેલ (c) અર્થઘટન/યથાર્થતા

હવે પછીના ઉદાહરણમાં આપણે ગાણિતિક નમૂના દ્વારા અસમતાઓનો ઉકેલ આલેખની મદદથી મેળવી શકાય છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 3 : એક ખેત-ઘર દરરોજ ઓછામાં ઓછો 800 કિગ્રા વિશિષ્ટ ખોરાકનો ઉપયોગ કરે છે. આ વિશિષ્ટ ખોરાક મકાઈ અને સોયાબીનના મિશ્રણથી નીચે પ્રમાણે બનાવવામાં આવે છે :

કોષ્ટક 3

સામગ્રી	કિગ્રા દીઠ પોષક તત્ત્વો પ્રોટીન	કિગ્રા દીઠ પોષક તત્ત્વો રેષા	કિગ્રા દીઠ કિંમત
મકાઈ	0.09	0.02	₹ 10
સોયાબીન	0.60	0.06	₹ 20

વિશિષ્ટ ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં ઓછામાં ઓછું 30 % પ્રોટીન અને વધુમાં વધુ 5 % રેષા હોવા જોઈએ. આ ખોરાકના મિશ્રણની દૈનિક ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : પગલું 1 : અહીં આપણો હેતુ મકાઈ અને સોયાબીનમાંથી બનાવેલ ખોરાકની દૈનિક કિંમત ન્યૂનતમ હોય તે છે. આથી પૃષ્ઠ 392 પરના ચલોનો વિચાર કરીએ.

x = મકાઈનું વજન

y = સોયાબીનનું વજન

z = કિંમત

પગલું 2 : કોષ્ટક 3 નો છેલ્લો સ્તંભ z એ x, y વચ્ચેના સંબંધનું સમીકરણ સૂચવે છે.

$$z = 10x + 20y \qquad \dots (1)$$

નીચે પ્રમાણેની શરતોને અધિન z ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધવાની સમસ્યા છે :

(a) ખેત-ઘર ઓછામાં ઓછો 800 કિગ્રા મકાઈ અને સોયાબીન મિશ્રિત ખોરાકનો ઉપયોગ કરે છે. એટલે કે,

$$x + y \geq 800 \qquad \dots (2)$$

(b) ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં ઓછામાં ઓછું 30 % પ્રોટીન જરૂરી છે. કોષ્ટક 3 ના પહેલા સ્તંભ પરથી,

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3\ (x + y) \qquad \dots (3)$$

(c) તે જ પ્રમાણે ખોરાકની આહારની જરૂરિયાતમાં વધુમાં વધુ 5 % રેષા જરૂરી છે. કોષ્ટક 3ના બીજા સ્તંભ પરથી

$$0.02x + 0.06\ y \leq 0.05\ (x + y) \qquad \dots (4)$$

સમીકરણ (2), (3) અને (4) માં x, y ના સહગુણકોને એક સાથે ફરીથી નીચે પ્રમાણે રાખીને આપેલ સમસ્યાને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

વિધાન : z ની ન્યૂનતમ કિંમત નીચેની શરતોને અધિન શોધો :

$$x + y \geq 800$$

$$0\cdot21x - 0\cdot30y \leq 0$$

$$0\cdot03x - 0\cdot01y \geq 0$$

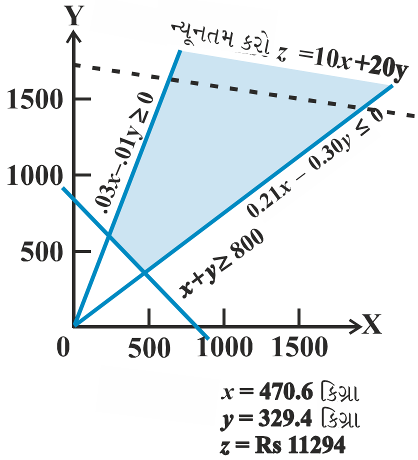
તે ગાણિતિક નમૂનાનાં સૂત્રો છે.

પગલું 3 : આ પ્રશ્નનો આલેખની મદદથી ઉકેલ મેળવી શકાય. આકૃતિ 5 માં સમીકરણના શક્ય ઉકેલને રંગીન કરેલ છે.

આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે (470.6, 329.4) આગળ એટલે કે x = 470.6 અને y = 329.4 આગળ ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$\therefore\ z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$

આ ગાણિતિક ઉકેલ છે.



આકૃતિ 5

પગલું 4 : ઉકેલનું આ રીતે અર્થઘટન કરી શકાય. ''470.6'' કિગ્રા મકાઈ અને સોયાબીન મિશ્રિત જરૂરી પ્રોટીન અને રેષાયુક્ત પોષક તત્ત્વો ધરાવતા વિશિષ્ટ ખોરાકની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 11,294 થાય.''

હવે પછીના ઉદાહરણમાં આપણે એક ચોક્કસ સમયે દેશની વસતીના અભ્યાસના ગાણિતિક નમૂનાની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે વસતી-નિયંત્રણ વિભાગ ''કોઈ દેશમાં 10 વર્ષ પછી કેટલા માણસો હશે.'' એવું શોધવા માંગે છે.

પગલું 1 : સૂત્રો ઘડવા : આપણે જાણીએ છીએ કે સમયની સાથે વસતીમાં ફેરફાર થાય છે. તે જન્મ સાથે વધે છે અને મૃત્યુ સાથે ઘટે છે.

આપણે કોઈ ચોક્કસ સમયે વસતી શોધવી છે. ધારો કે t એ સમય (વર્ષમાં) દર્શાવે છે. તેથી t ની કિંમત 0, 1, 2,..., t = 0 એ વર્તમાન સમય, t = 1 એ એક વર્ષ વગેરે દર્શાવે છે. ધારો કે P (t) એ કોઈ ચોક્કસ વર્ષે t ની વસતી દર્શાવે છે.

ધારો કે આપણે ચોક્કસ વર્ષ $t_0 = 2006$ ની વસતી શોધવી છે. આપણે તે કેવી રીતે કરીશું ? આપણે પહેલી જાન્યુઆરી 2005 સુધીની વસતી શોધીશું. એ વર્ષમાં જેટલા વ્યક્તિનો જન્મ થયો હોય તેટલાને ઉમેરો અને જેટલી વ્યક્તિ મૃત્યુ પામી હોય તેટલીને બાદ કરો. ધારો કે B(t) એ t થી $t + 1$ વર્ષમાં જેટલી વ્યક્તિનો જન્મ થયો હોય તે દર્શાવે છે. જ્યારે D(t) એ t થી $t + 1$ વર્ષમાં જેટલી વ્યક્તિ મૃત્યુ પામી હોય તે દર્શાવે છે.

આથી આપણે નીચે પ્રમાણેનો સંબંધ લખી શકીએ :

$$P(t + 1) = P(t) + B(t) - D(t)$$

હવે આપણે કેટલીક ધારણાઓ અને વ્યાખ્યાઓ આપીશું.

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ ને સમય અંતરાલ t થી $t + 1$ માટેનો જન્મદર કહે છે.

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ ને સમય અંતરાલ t થી $t + 1$ માટેનો મૃત્યુદર કહે છે.

ધારણાઓ

1. બધા જ અંતરાલ માટે જન્મદર સરખો હોય છે. તે જ રીતે બધા જ અંતરાલ માટે મૃત્યુદર સરખો હોય છે. આનો અર્થ એ કે જન્મદર તરીકે ઓળખાતો દર B(t) અને મૃત્યુદર તરીકે ઓળખાતો દર D(t) એવા મળે છે કે જેથી પ્રત્યેક $t \geq 0$ માટે

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \quad \text{અને} \quad d = \frac{D(t)}{P(t)} \qquad \dots (1)$$

2. વસતીમાંથી સ્થળાંતર કરીને કોઈ બહાર જતા નથી કે બહારથી કોઈ અંદર આવતા નથી. એટલે કે વસતીના ફેરફારનો સ્રોત ફક્ત જન્મ અને મૃત્યુ છે.

ધારણા 1 અને 2 પરથી આપણે નીચે મુજબ તારવી શકીએ :

$t \geq 0$ માટે

$$\begin{aligned} P(t + 1) &= P(t) + B(t) - D(t) \\ &= P(t) + bP(t) - dP(t) \\ &= (1 + b - d)\, P(t) \qquad \dots (2) \end{aligned}$$

સમીકરણ (2)માં $t = 0$ મૂકતાં

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \qquad \dots (3)$$

સમીકરણ (2)માં $t = 1$ મૂકતાં

$$\begin{aligned} P(2) &= (1 + b - d)\, P(1) \\ &= (1 + b - d)\,(1 + b - d)\, P(0) \qquad \text{(સમીકરણ (3) પરથી)} \\ &= (1 + b - d)^2\, P(0) \end{aligned}$$

આ રીતે આગળ વધતાં,

$$P(t) = (1 + b - d)^t \, P(0), \quad t = 0, 1, 2, ... \qquad ... (4)$$

અચળ $1 + b - d$ ને સંક્ષિપ્તમાં r લખાય છે અને તેને વૃદ્ધિદર અથવા આ નમૂના વિશે ધ્યાનાકર્ષણ કરવા બદલ *Robert Malthus* ના માનમાં તેને *Malthusian અચળાંક* કહે છે. r ના સંદર્ભમાં સમીકરણ (4) લખતાં,

$$P(t) = P(0)r^t, \quad t = 0, 1, 2, ... \qquad ... (5)$$

$P(t)$ એ ઘાતાંકીય વિધેયનું ઉદાહરણ છે. કોઈ પણ વિધેય cr^t જ્યાં c અને r અચળ હોય તે પ્રકારનું હોય તે ઘાતાંકીય વિધેય છે. સમીકરણ (5) એ આપેલી સમસ્યાનું ગાણિતિક સૂત્ર છે.

પગલું 2 : ઉકેલ

ધારો કે હાલની વસતી 250,000,000 છે અને જન્મદર $b = 0.02$ તથા મૃત્યુદર $d = 0.01$ છે. 10 વર્ષ પછી કેટલી વસતી હશે ? સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને આપણે P(10) ની ગણતરી કરીશું.

$$P(10) = (1.01)^{10} \, (250,000,000)$$

$$= (1.104622125) \, (250,000,000)$$

$$= 276,155,531.25$$

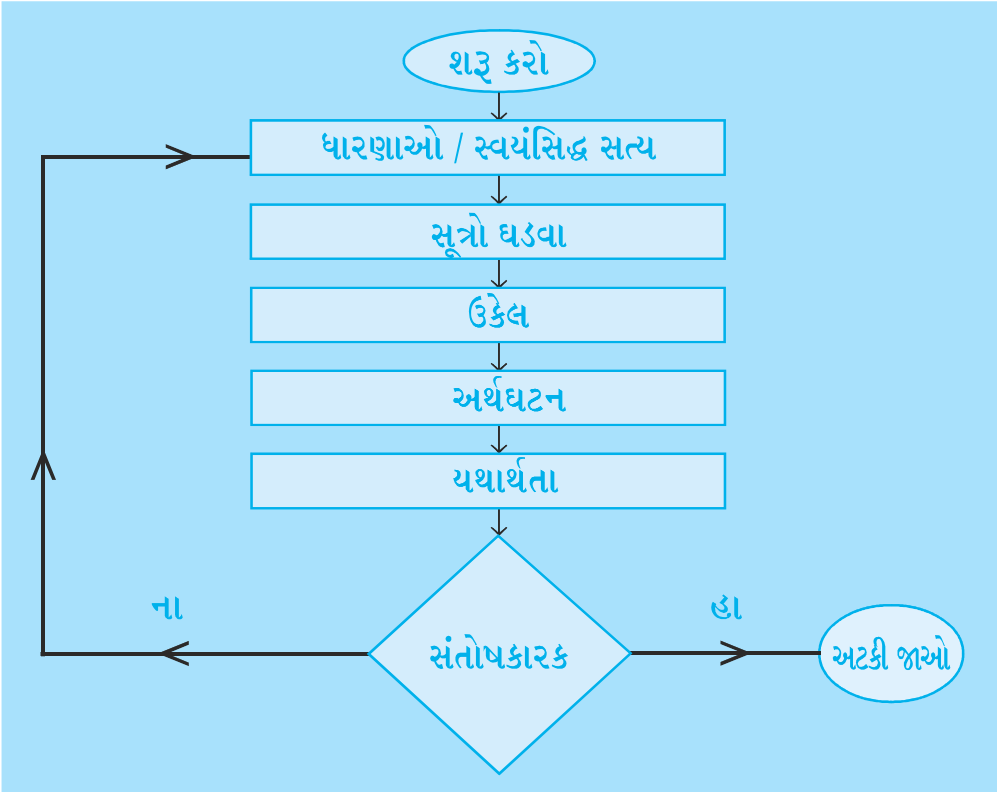
પગલું 3 : અર્થઘટન અને યથાર્થતા

સ્વાભાવિક રીતે આ પરિણામ અર્થહીન છે કારણ કે 0.25 માણસ ન હોઈ શકે. તેથી આપણે સ્થૂળ કિંમત લઈશું અને એવા નિષ્કર્ષ પર આવીશું કે વસતી 276,155,531 (આશરે) છે. આપણા ગાણિતિક નમૂનામાં ધારણાઓ રાખવાથી આપણને ચોક્કસ જવાબ મળતો નથી.

ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે, ભિન્ન ગાણિતિક રીતોના ઉપયોગથી ભિન્ન પરિસ્થિતિઓ માટે ગાણિતિક નમૂના કેવી રીતે મેળવી શકાય છે.

ગાણિતિક નમૂના એ વ્યાવહારિક પ્રશ્નનું સરળ સ્વરૂપ હોવાથી તે પાયાની રીતે અંતર્ગત ધારણાઓ અને આસન્ન મૂલ્યો ધરાવે છે. દેખીતી રીતે અગત્યનો પ્રશ્ન ગાણિતિક નમૂનો સારો છે કે નહિ તે નક્કી કરવાનો હોય છે. એટલે કે જ્યારે મેળવેલાં પરિણામોનું અર્થઘટન કરીએ ત્યારે જોઈએ છીએ કે ગાણિતિક નમૂનાથી યોગ્ય જવાબ આવે છે કે નહિ. જો ગાણિતિક નમૂનાથી સંતોષકારક પરિણામ ન મળતું હોય તો આપણે તેમાં રહેલી ખામીઓ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. એવું બની શકે કે આપણે નવાં સૂત્રો, નવી ગાણિતિક સમજૂતી અને તેથી નવા મૂલ્યાંકનની જરૂર પડે.

આમ, ગાણિતિક નમૂના એ નમૂનાકરણની પ્રક્રિયા છે, તો પૃષ્ઠ 395 પર ફ્લોચાર્ટમાં આપેલ છે.


શરૂ કરો
ધારણાઓ / સ્વયંસિદ્ધ સત્ય
સૂત્રો ઘડવા
ઉકેલ
અર્થઘટન
યથાર્થતા
સંતોષકારક
ના
હા
અટકી જાઓ

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i), (iv), (v), (vi), (vii) અને (viii) ગણ છે.

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

3. (i) A $= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) B $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) C $= \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$ (iv) D $= \{2, 3, 5\}$

(v) E = {T, R, I, G, O, N, M, E, Y} (vi) F = {B, E, T, R}

4. (i) $\{x : x = 3n, n \in \mathrm{N}$ અને $1 \le n \le 4\}$ (ii) $\{x : x = 2^n, n \in \mathrm{N}$ અને $1 \le n \le 5\}$

(iii) $\{x : x = 5^n, n \in \mathrm{N}$ અને $1 \le n \le 4\}$ (iv) $\{x : x$ એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

(v) $\{x : x = n^2, n \in \mathrm{N}$ અને $1 \le n \le 10\}$

5. (i) A $= \{1, 3, 5, \ldots\}$ (ii) B $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) C $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (iv) D = { L, O, Y, A }

(v) E = { ફેબ્રુઆરી, એપ્રિલ, જૂન, સપ્ટેમ્બર, નવેમ્બર}

(vi) F $= \{b, c, d, f, g, h, j\}$

6. (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i), (iii), (iv)

2. (i) સાન્ત (ii) અનંત (iii) સાન્ત (iv) અનંત (v) સાન્ત

3. (i) અનંત (ii) સાન્ત (iii) અનંત (iv) સાન્ત (v) અનંત

4. (i) હા (ii) ના (iii) હા (iv) ના

5. (i) ના (ii) હા

6. B= D, E = G

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$ (vii) $\subset$

2. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) સત્ય (v) અસત્ય (vi) સત્ય

3. (i), (v), (vii), (viii), (ix), (xi)

4. (i) $\phi, \{a\}$ (ii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

(iii) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. 1

6. (i) $(-4, 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$ (iv) $[3, 4]$

7. (i) $\{x : x \in R, -3 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in R, 6 \le x \le 12\}$

(iii) $\{x : x \in R, 6 < x \le 12\}$ (iv) $\{x : x \in R, -23 \le x < 5\}$ **9.** (iii)

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$

(iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5$ અથવા 3 નો ગુણિત$\}$

(iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in N\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. હા, $A \cup B = \{a, b, c\}$ **3.** B

4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5. (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$ (iv) ϕ (v) ϕ

6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$

(v) ϕ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) ϕ

(viii) $\{7, 9, 11\}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$

7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ

(v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x$ એ અયુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

8. (iii)

9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) $\{4, 8, 16, 20)$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$

(vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$

(x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$

11. અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ **12.** (i) F (ii) F (iii) T (iv) T

સ્વાધ્યાય 1.5

1. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
(iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
2. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$
(iv) $\{b, c, d, e)$
3. (i) { $x : x$ એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
(ii) { $x : x$ એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
(iii) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને x એ 3 નો ગુણિત નથી.}
(iv) { $x : x$ એ ધન વિભાજ્ય સંખ્યા અથવા $x = 1$]
(v) { $x : x$ એ ધન પૂર્ણાંક જે 3 થી અથવા 5 થી વિભાજ્ય નથી.}
(vi) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને x એ પૂર્ણવર્ગ નથી.}
(vii) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને x એ પૂર્ણઘન નથી.}
(viii) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને $x \neq 3$ } (ix) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને $x \neq 2$ }
(x) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને $x < 7$ } (xi) { $x : x \in \mathbf{N}$ અને $x \leq \frac{9}{2}$ }
6. A' એ સમભૂજ ત્રિકોણનો ગણ છે.
7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

સ્વાધ્યાય 1.6

1. 2 2. 5 3. 50 4. 42
5. 30 6. 19 7. 25, 35 8. 60

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset C$
2. (i) અસત્ય (ii) અસત્ય (iii) સત્ય (iv) અસત્ય (v) અસત્ય (vi) સત્ય
7. અસત્ય 12. આપણે $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}$ લઈ શકીએ.
13. 325 14. 125 15. (i) 52, (ii) 30 16. 11

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $x = 2$ અને $y = 1$ 2. $A \times B$ ના ઘટકોની સંખ્યા 9 છે.
3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$
$H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$
4. (i) અસત્ય
$P \times Q = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$
(ii) સત્ય
(iii) સત્ય
5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$
$A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

6. A = $\{a, b\}$, B = $\{x, y\}$

8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times B$ ને $2^4 = 16$ ઉપગણો છે.

9. A = $\{x, y, z\}$ અને B = $\{1,2\}$

10. $A = \{-1, 0, 1\}$,

$A \times A$ ના બાકીના ઘટકો $(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R નો પ્રદેશ = $\{1, 2, 3, 4\}$

R નો વિસ્તાર = $\{3, 6, 9, 12\}$

R નો સહપ્રદેશ = $\{1, 2, ..., 14\}$

2. $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

R નો પ્રદેશ = $\{1, 2, 3\}$

R નો વિસ્તાર = $\{6, 7, 8\}$

3. $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

4. (i) $R = \{(x, y) : y = x - 2$, જ્યાં $x = 5, 6, 7\}$

(ii) $R = \{(5,3), (6,4), (7,5)\}$. R નો પ્રદેશ = $\{5, 6, 7\}$, R નો વિસ્તાર = $\{3, 4, 5\}$

5. (i) $R = \{(1, 1), (1,2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2\ 4), (2, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

(ii) R નો પ્રદેશ = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) R નો વિસ્તાર = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

6. R નો પ્રદેશ = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$, R નો વિસ્તાર = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

7. $R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

8. A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા = 2^6

9. R નો પ્રદેશ = **Z**, R નો વિસ્તાર = **Z**

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) હા, પ્રદેશ = $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$, વિસ્તાર = $\{1\}$

(ii) હા, પ્રદેશ = $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, વિસ્તાર= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iii) ના

2. (i) પ્રદેશ = **R**, વિસ્તાર = $(-\infty, 0]$

(ii) વિધેયનો પ્રદેશ = $\{x : -3 \leq x \leq 3\}$

વિધેયનો વિસ્તાર= $\{x : 0 \leq x \leq 3\}$

3. (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$

4. (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100

5. (i) વિસ્તાર = $(-\infty, 2)$ (ii) વિસ્તાર = $[2, \infty)$ (iii) વિસ્તાર = **R**

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

2. 2.1

3. વિધેયનો પ્રદેશ 2 અને 6 સિવાયની વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

4. પ્રદેશ $= [1, \infty)$, વિસ્તાર $= [0, \infty)$

5. પ્રદેશ = **R**, વિસ્તાર = અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ

6. $0 \le x < 1$ થાય તેવી કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા

7. $(f+g)(x) = 3x - 2$, $(f-g)(x) = -x + 4$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

8. $a = 2, b = -1$

9. (i) ના (ii) ના (iii) ના

10. (i) હા, (ii) ના

11. ના

12. fનો વિસ્તાર = $\{3, 5, 11, 13\}$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$

2. (i) $39° 22' 30''$ (ii) $-229° 5' 29''$ (iii) $300°$ (iv) $210°$

3. 12π

4. $12° 36'$

5. $\frac{20\pi}{3}$

6. $5 : 4$

7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec x = -2$, $\tan x = \sqrt{3}$, $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$, $\cot x = -\frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sec x = -\frac{5}{3}$, $\tan x = \frac{4}{3}$

4. $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}$, $\cos x = \frac{5}{13}$, $\tan x = -\frac{12}{5}$, $\cot x = -\frac{5}{12}$

5. $\sin x = \frac{5}{13}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}$, $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\sec x = -\frac{13}{12}$, $\cot x = -\frac{12}{5}$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

7. 2

8. $\sqrt{3}$

9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 1

સ્વાધ્યાય 3.3

5. (i) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

સ્વાધ્યાય 3.4

1. $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}; n\pi+\dfrac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

2. $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}; 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

3. $\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}; n\pi+\dfrac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

4. $\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}; n\pi+(-1)^n\dfrac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

5. $x=\dfrac{n\pi}{3}$ અથવા $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

6. $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, અથવા $2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \dfrac{7\pi}{6}$ અથવા $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

8. $x=\dfrac{n\pi}{2}$, અથવા $\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$

9. $x=\dfrac{n\pi}{3}$, અથવા $n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

સ્વાધ્યાય 3.5

1. $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0$

2. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 1$

14. $35\sqrt{2}m$

15. 86.4 કિમી (આશરે)

16. 215.5 મીટર

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

8. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}, 2$

9. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$

10. $\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$

સ્વાધ્યાય 5.1

1. 3

2. 0

3. i

4. $14+28i$

5. $2-7i$

6. $-\dfrac{19}{5}-\dfrac{21i}{10}$

7. $\dfrac{17}{3}+i\dfrac{5}{3}$

8. -4

9. $-\dfrac{242}{27}-26i$

10. $\dfrac{-22}{3}-i\dfrac{107}{27}$

11. $\dfrac{4}{25}+i\dfrac{3}{25}$

12. $\dfrac{\sqrt{5}}{14}-i\dfrac{3}{14}$

13. i

14. $\dfrac{-7\sqrt{2}}{2}i$

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $2, \frac{-2\pi}{3}$ **2.** $2, \frac{5\pi}{6}$ **3.** $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

6. $3(\cos\pi + i\sin\pi)$ **7.** $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **8.** $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $\pm\sqrt{3}\,i$ **2.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{4}$ **3.** $\frac{-3\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$ **4.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{-2}$

5. $\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$ **6.** $\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$ **7.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$ **8.** $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}\,i}{2\sqrt{3}}$

9. $\frac{-1\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\,i}{2}$ **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. $1-4i, -1+4i$ **2.** $1-3i, -1+3i$

3. $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$ **4.** $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

5. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ **6.** $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

1. $2-2i$ **3.** $\frac{307+599i}{442}$

5. (i) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

6. $\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}i$ **7.** $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ **8.** $\frac{5}{27}\pm\frac{\sqrt{2}}{27}i$ **9.** $\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{14}}{21}i$

10. $\sqrt{2}$ **12.** (i) $\frac{-2}{5}$, (ii) 0 **13.** $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$ **14.** $x=3, y=-3$ **15.** 2 **17.** 1

18. 0 **20.** 4

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1,2,3,4,\}$

2. (i) ઉકેલ નથી. (ii) $\{\ldots -4, -3\}$

3. (i) $\{\ldots -2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$

4. (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ii) $(-2, \infty)$

5. $(-4, \infty)$ **6.** $(-\infty, -3)$ **7.** $(-\infty, -3]$ **8.** $(-\infty, 4]$

9. $(-\infty, 6)$ **10.** $(-\infty, -6)$ **11.** $(-\infty, 2]$ **12.** $(-\infty, 120]$

13. $(4, \infty)$ **14.** $(-\infty, 2]$ **15.** $(4, \infty)$ **16.** $(-\infty, 2]$

17. $x < 3$,

18. $x \geq -1$,

19. $x > -1$,

20. $x \geq -\frac{2}{7}$,

21. 35 અથવા તેથી વધુ

22. 82 અથવા તેથી વધુ

23. (5,7), (7,9)

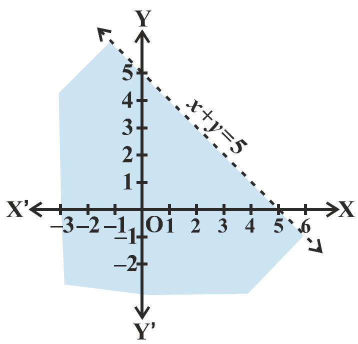
24. (6,8), (8,10), (10,12)

25. 9 સેમી

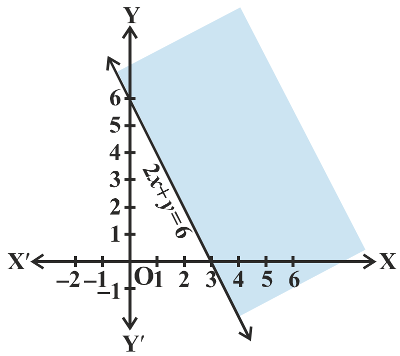
26. 8 અથવા તેથી વધુ પરંતુ 22 અથવા તેનાથી ઓછું

સ્વાધ્યાય 6.2

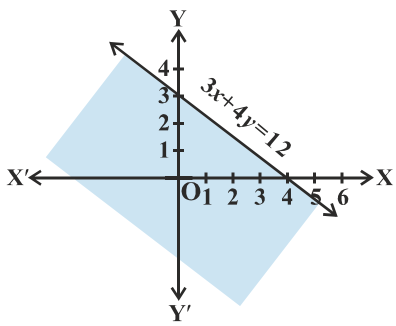
1.



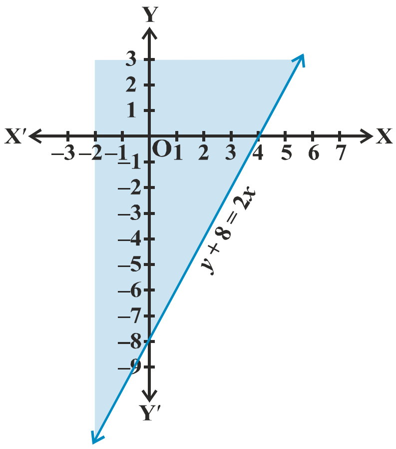
2.



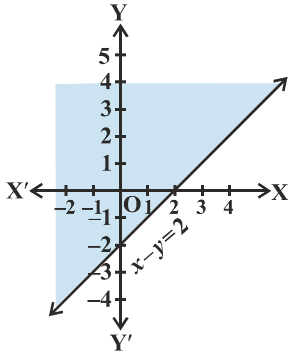
3.



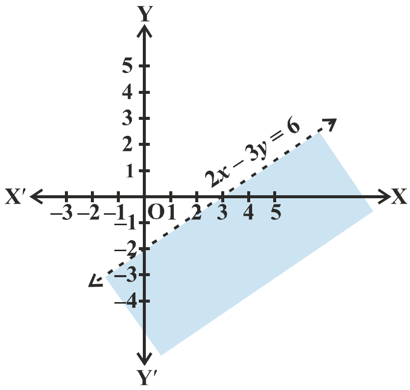
4.



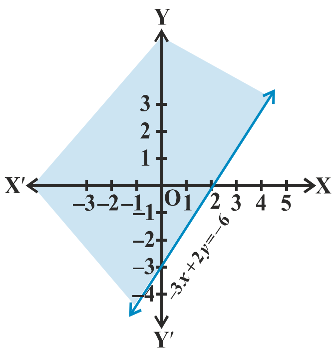
5.



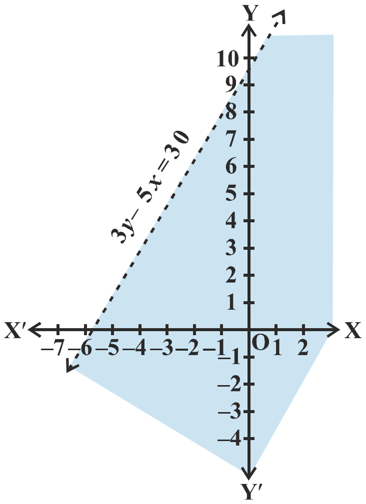
6.



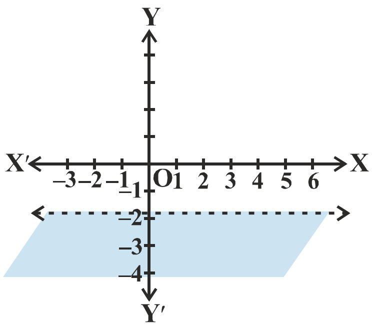
7.



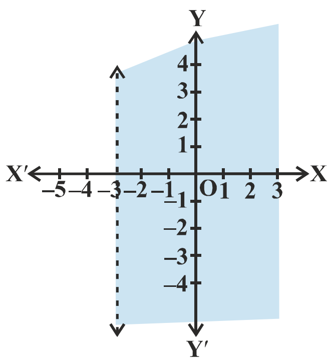
8.



9.

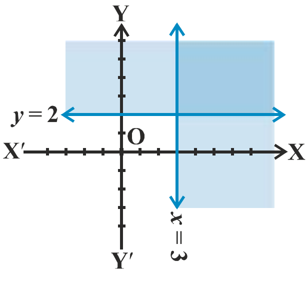


10.

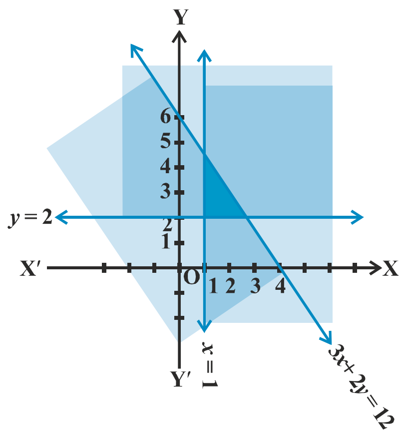


સ્વાધ્યાય 6.3

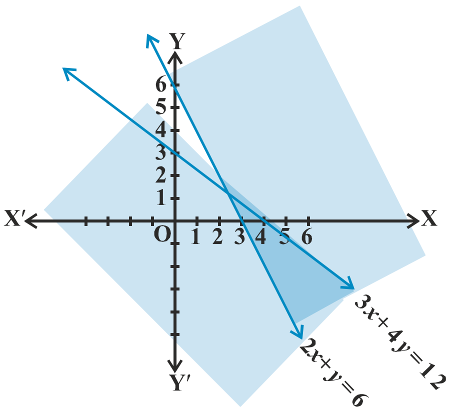
1.



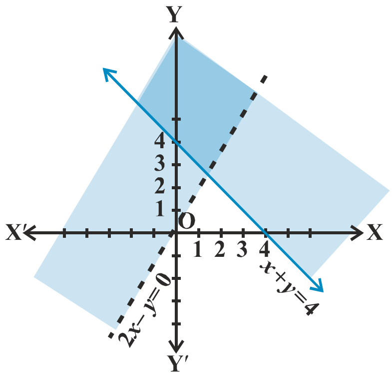
2.



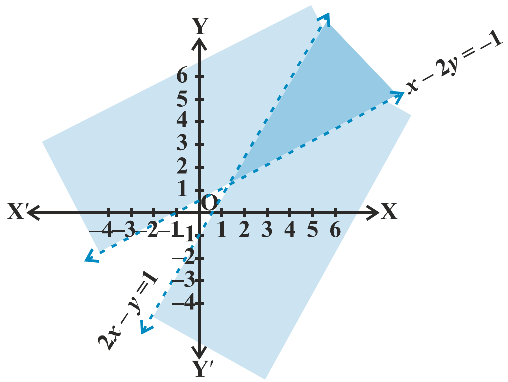
3.


X′
X
Y
Y′
O
3x + 4y = 12
2x + y = 6

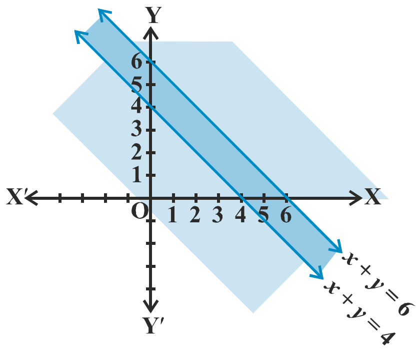
4.


X′
X
Y
Y′
O
x + y = 4
2x – y = 0

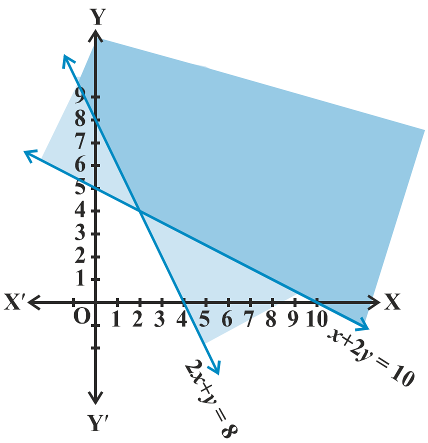
5.


X′
X
Y
Y′
O
x – 2y = –1
2x – y = 1

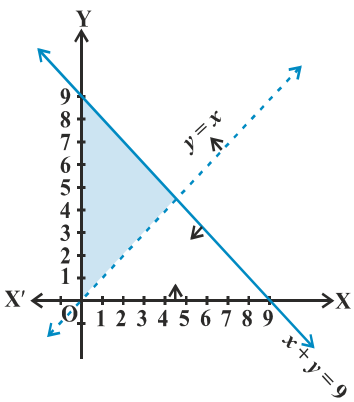
6.


X′
X
Y
Y′
O
x + y = 6
x + y = 4

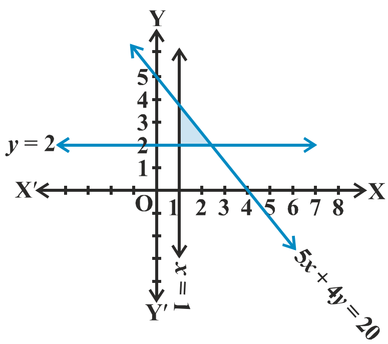
7.


X′
X
Y
Y′
O
x + 2y = 10
2x + y = 8

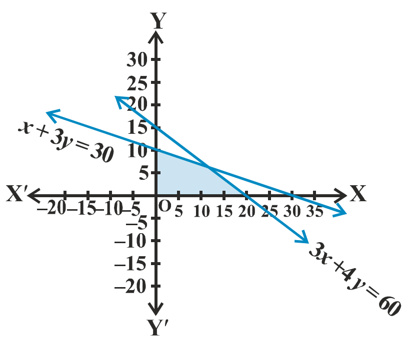
8.


X′
X
Y
O
y = x
x + y = 9

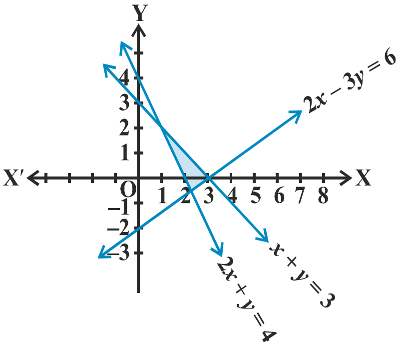
9.


X′
X
Y
Y′
O
y = 2
x = 1
5x + 4y = 20

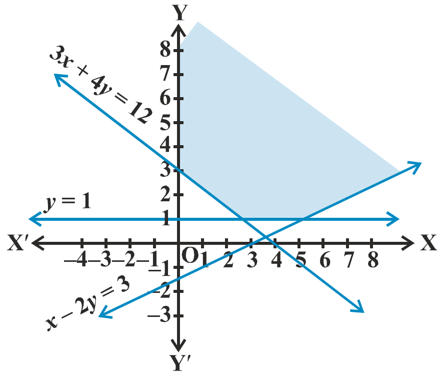
10.


X′
X
Y
Y′
O
x + 3y = 30
3x + 4y = 60

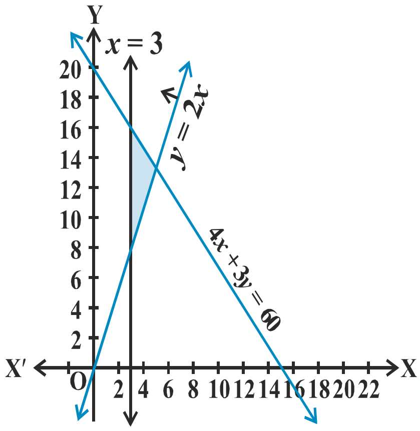
11.



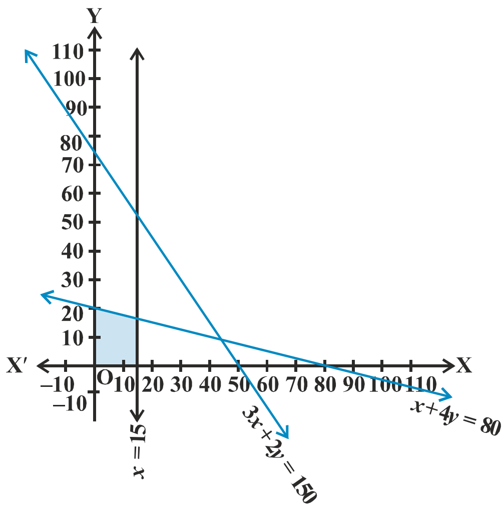
12.



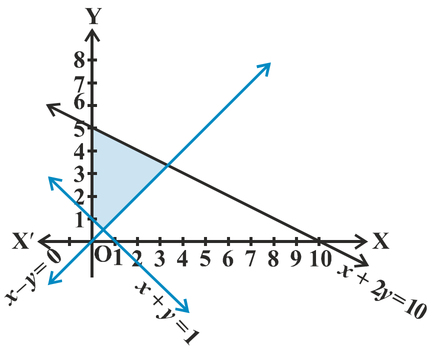
13.



14.



15.



પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. [2, 3]

2. (0, 1]

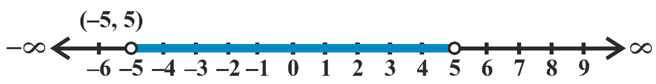
3. [– 4, 2]

4. (– 23, 2]

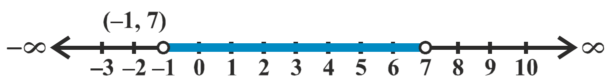
5. $\left(\frac{-80}{3}, \frac{-10}{3}\right]$

6. $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

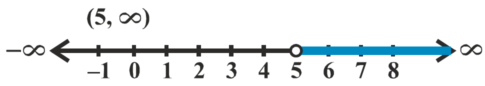
7. (–5, 5)



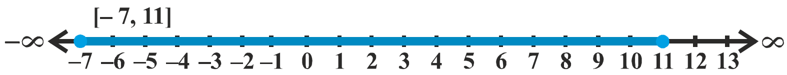
8. (–1, 7)



9. (5, ∞)



10. [– 7, 11]



11. 20°C અને 25° ની વચ્ચે

12. 320 લિટરથી વધુ પરંતુ 1280 લિટરથી ઓછું

13. 562.5 લિટરથી વધુ, પરંતુ 900 લિટરથી ઓછું

14. $9.6 \le MA \le 16.8$

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (i) 125, (ii) 60. **2.** 108 **3.** 5040 **4.** 336 **5.** 8 **6.** 20

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (i) 40320, (ii) 18 **2.** 30, ના **3.** 28 **4.** 64

5. (i) 30, (ii) 15120

સ્વાધ્યાય 7.3

1. 504 **2.** 4536 **3.** 60 **4.** 120, 48 **5.** 56

6. 9 **7.** (i) 3, (ii) 4 **8.** 40320 **9.** (i) 360, (ii) 720, (iii) 240

10. 33810 **11.** (i) 1814400, (ii) 2419200, (iii) 25401600

સ્વાધ્યાય 7.4

1. 45 **2.** (i) 5, (ii) 6 **3.** 210 **4.** 40 **5.** 2000

6. 778320 **7.** 3960 **8.** 200 **9.** 35

પ્રકરણ 7 નું પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય

1. 3600 **2.** 1440 **3.** (i) 504, (ii) 588, (iii) 1632 **4.** 907200

5. 120 **6.** 50400 **7.** 420 **8.** ${}^{4}C_{1} \times {}^{48}C_{4}$ **9.** 2880

10. ${}^{22}C_{7} + {}^{22}C_{10}$ **11.** 151200

સ્વાધ્યાય 8.1

1. $1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$

2. $\frac{32}{x^5}-\frac{40}{x^3}+\frac{20}{x}-5x+\frac{5}{8}x^3-\frac{x^5}{32}$

3. $64x^6-576x^5+2160x^4-4320x^3+4860x^2-2916x+729$

4. $\frac{x^5}{243}+\frac{5x^3}{81}+\frac{10}{27}x+\frac{10}{9x}+\frac{5}{3x^3}+\frac{1}{x^5}$

5. $x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$

6. 884736 **7.** 11040808032 **8.** 104060401

9. 9509900499 **10.** $(1.1)^{10000} > 1000$ **11.** $8(a^3b+ab^3)$; $40\sqrt{6}$

12. $2(x^6+15x^4+15x^2+1)$, 198

સ્વાધ્યાય 8.2

1. 1512 **2.** -101376 **3.** $(-1)^r\,{}^6C_r.x^{12-2r}.y^r$

4. $(-1)^r\,{}^{12}C_r\cdot x^{24-r}\cdot y^r$ **5.** $-1760\,x^9y^3$ **6.** 18564

7. $\frac{-105}{8}x^9;\ \frac{35}{48}x^{12}$ **8.** $61236\,x^5y^5$ **10.** $n=7;\ r=3$

12. $m=4$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 8

1. $a=3;\ b=5;\ n=6$ **2.** $a=\frac{9}{7}$ **3.** 171 **5.** $396\sqrt{6}$

6. $2a^8+12a^6-10a^4-4a^2+2$ **7.** 0.9510 **8.** $n=10$

9. $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$

10. $27x^6-54ax^5+117a^2x^4-116a^3x^3+117a^4x^2-54a^5x+27a^6$

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35 **2.** $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ **3.** 2, 4, 8, 16 અને 32

4. $-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}$ અને $\frac{7}{6}$ **5.** 25, –125, 625, –3125, 15625

6. $\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{21}{2},21$ અને $\frac{75}{2}$ **7.** 65, 93 **8.** $\frac{49}{128}$

9. 729 **10.** $\frac{360}{23}$

11. 3, 11, 35, 107, 323; 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ...

12. $-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}; -1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{24}\right)+\left(\frac{-1}{120}\right)+...$

13. 2, 2, 1, 0, –1; 2 + 2 + 1 + 0 + (–1) + ... **14.** $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ અને $\frac{8}{5}$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. 1002001 **2.** 98450 **4.** 5 અથવા 20 **6.** 4 **7.** $\frac{n}{2}(5n+7)$

8. $2q$ **9.** $\frac{179}{321}$ **10.** 0 **13.** 27 **14.** 11, 14, 17, 20 અને 23

15. 1 **16.** 14 **17.** ₹ 245 **18.** 9

સ્વાધ્યાય 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}}, \frac{5}{2^n}$ **2.** 3072 **4.** -2187

5. (a) 13મું, (b) 12મું, (c) 9મું **6.** ± 1 **7.** $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$

8. $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ **9.** $\frac{\left[1-(-a)^n\right]}{1+a}$ **10.** $\frac{x^3\left(1-x^{2n}\right)}{1-x^2}$

11. $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$ **12.** $r=\frac{5}{2}$ અથવા $\frac{2}{5}$; પદો $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ અથવા $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$

13. 4 **14.** $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}\left(2^n-1\right)$ **15.** 2059

16. $\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}, ...$ અથવા $4, -8, 16, -32, 64, ..$ **18.** $\frac{80}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{8}{9}n$

19. 496 **20.** rR **21.** 3, –6, 12, –24 **26.** 9 અને 27

27. $n=\frac{-1}{2}$ **30.** 120, 480, 30 (2^n) **31.** ₹ 500 $(1.1)^{10}$ **32.** $x^2 - 16x + 25 = 0$

સ્વાધ્યાય 9.4

1. $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ **2.** $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ **3.** $\frac{n}{6}(n+1)\left(3n^2+5n+1\right)$

4. $\frac{n}{n+1}$ **5.** 2840 **6.** $3n(n+1)(n+3)$

7. $\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ 8. $\dfrac{n(n+1)}{12}\left(3n^2+23n+34\right)$ 9. $\dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2\left(2^n-1\right)$

10. $\dfrac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

સ્વાધ્યાય 9.5

1. 1.5 2. 7.5 3. $\dfrac{35}{3}$ 4. $\dfrac{-3}{5}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 9

2. 5, 8, 11 4. 8729 5. 3050 6. 1210 7. 4 8. 160; 6

9. ± 3 10. 8, 16, 32 11. 4 12. 11

21. (i) $\dfrac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\dfrac{5n}{9}$, (ii) $\dfrac{2n}{3}-\dfrac{2}{27}\left(1-10^{-n}\right)$ 22. 1680 23. $\dfrac{n}{3}\left(n^2+3n+5\right)$

25. $\dfrac{n}{24}\left(2n^2+9n+13\right)$ 27. ₹ 16680 28. ₹ 39100 29. ₹ 43690 30. ₹ 17000; 20,000

31. ₹ 5120 32. 25 દિવસ

સ્વાધ્યાય 10.1

1. $\dfrac{121}{2}$ ચોરસ એકમ

2. (0, a), (0, – a) અને $\left(-\sqrt{3}a,0\right)$ અથવા (0, a), (0, – a) અને $\left(\sqrt{3}a,0\right)$

3. (i) $|y_2-y_1|$, (ii) $|x_2-x_1|$ 4. $\left(\dfrac{15}{2},0\right)$ 5. $-\dfrac{1}{2}$

7. $-\sqrt{3}$ 8. $x = 1$ 10. 135°

11. 1 અને 2, અથવા $\dfrac{1}{2}$ અને 1, અથવા – 1 અને –2, અથવા $-\dfrac{1}{2}$ અને – 1 14. $\dfrac{1}{2}$, 104.5 કરોડ

સ્વાધ્યાય 10.2

1. $y = 0$ અને $x = 0$ 2. $x - 2y + 10 = 0$ 3. $y = mx$

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)x-\left(\sqrt{3}-1\right)y=4\left(\sqrt{3}-1\right)$ 5. $2x + y + 6 = 0$

6. $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 7. $5x + 3y + 2 = 0$

8. $\sqrt{3}x+y=10$ 9. $3x - 4y + 8 = 0$ 10. $5x - y + 20 = 0$

11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ 12. $x + y = 5$

13. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$ 14. $\sqrt{3}x+y-2=0$ અને $\sqrt{3}x+y+2=0$

15. $2x - 9y + 85 = 0$

16. $L = \frac{192}{90}(C - 20) + 124.942$

17. 1340 લિટર

19. $2kx + hy = 3kh.$

સ્વાધ્યાય 10.3

1. (i) $y = -\frac{1}{7}x + 0, -\frac{1}{7}, 0$; (ii) $y = -2x + \frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$

2. (i) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, 4, 6;$ (ii) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-2} = 1, \frac{3}{2}, -2;$

(iii) $y = -\frac{2}{3}$, y-અક્ષ પરનો અંતઃખંડ = $-\frac{2}{3}$ અને x-અક્ષ પરનો અંતઃખંડ ન મળે.

3. (i) $x \cos 120° + y \sin 120° = 4, 4, 120°$ (ii) $x \cos 90° + y \sin 90° = 2, 2, 90°$;

(iii) $x \cos 315° + y \sin 315° = 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 315°$

4. 5 એકમ

5. $(-2, 0)$ અને $(8, 0)$

6. (i) $\frac{65}{17}$ એકમ, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right|$ એકમ

7. $3x - 4y + 18 = 0$

8. $y + 7x = 21$

9. 30° અને 150°

10. $\frac{22}{9}$

12. $(\sqrt{3}+2)x + (2\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{3}+1$ અથવા $(\sqrt{3}-2)x + (1+2\sqrt{3})y = -1+8\sqrt{3}$

13. $2x + y = 5$

14. $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$

15. $m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$

17. $y - x = 1, \sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 10.4

1. $35x - 7y + 18 = 0$

2. $15x + 12y - 7 = 0$

3. $10x + 93y + 40 = 0$

4. $63x + 105y - 781 = 0$

સ્વાધ્યાય 10.5

1. (i) (4, 3) (ii) (3, 3) (iii) (8, 2) (iv) (2, 0) (v) (6, –3)

2. (i) $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$ (ii) $xy - y^2 = 0$ (iii) $xy = 0$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 10

1. (a) 3, (b) ± 2, (c) 6 અથવા 1

2. $\frac{7\pi}{6}, 1$

3. $2x - 3y = 6, -3x + 2y = 6$

4. $\left(0, -\frac{8}{3}\right), \left(0, \frac{32}{3}\right)$

5. $\dfrac{|\sin(\phi-\theta)|}{2\left|\sin\dfrac{\phi-\theta}{2}\right|}$

6. $x=-\dfrac{5}{22}$

7. $2x-3y+18=0$

8. k^2 ચોરસ એકમ

9. 5

11. $3x-y=7,\quad x+3y=9$

12. $13x+13y=6$

14. 1 : 2

15. $\dfrac{23\sqrt{5}}{18}$ એકમ

16. રેખા x - અક્ષ અથવા y - અક્ષને સમાંતર છે.

17. $x=1,\quad y=1.$

18. $(-1,-4)$.

19. $\dfrac{1\pm5\sqrt{2}}{7}$

21. $18x+12y+11=0$

22. $\left(\dfrac{13}{5},0\right)$

24. $119x+102y=125$

સ્વાધ્યાય 11.1

1. $x^2+y^2-4y=0$
2. $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
3. $36x^2+36y^2-36x-18y+11=0$
4. $x^2+y^2-2x-2y=0$
5. $x^2+y^2+2ax+2by+2b^2=0$
6. $C(-5, 3), r=6$
7. $C(2, 4), r=\sqrt{65}$
8. $C(4,-5), r=\sqrt{53}$
9. $C\left(\dfrac{1}{4},0\right); r=\dfrac{1}{4}$
10. $x^2+y^2-6x-8y+15=0$
11. $x^2+y^2-7x+5y-14=0$
12. $x^2+y^2+4x-21=0$ અને $x^2+y^2-12x+11=0$
13. $x^2+y^2-ax-by=0$
14. $x^2+y^2-4x-4y=5$
15. બિંદુથી વર્તુળના કેન્દ્રનું અંતર વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતા ઓછુ હોવાથી વર્તુળની અંદર.

સ્વાધ્યાય 11.2

1. F (3, 0), અક્ષ x - અક્ષ, નિયામિકા $x=-3$, નાભિલંબની લંબાઈ $=12$
2. F $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$, અક્ષ y - અક્ષ, નિયામિકા $y=-\dfrac{3}{2}$, નાભિલંબની લંબાઈ $=6$
3. F $(-2, 0)$, અક્ષ x - અક્ષ, નિયામિકા $x=2$, નાભિલંબની લંબાઈ $=8$
4. F $(0,-4)$, અક્ષ y - અક્ષ, નિયામિકા $y=4$, નાભિલંબની લંબાઈ $=16$
5. F $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$, અક્ષ x - અક્ષ, નિયામિકા $x=-\dfrac{5}{2}$, નાભિલંબની લંબાઈ $=10$
6. F $\left(0,\dfrac{-9}{4}\right)$, અક્ષ y - અક્ષ, નિયામિકા $y=\dfrac{9}{4}$, નાભિલંબની લંબાઈ $=9$
7. $y^2=24x$
8. $x^2=-12y$
9. $y^2=12x$
10. $y^2=-8x$
11. $2y^2=9x$
12. $2x^2=25y$

સ્વાધ્યાય 11.3

1. F $(\pm\sqrt{20}, 0)$; V $(\pm 6, 0)$; પ્રધાન અક્ષ = 12; ગૌણ અક્ષ = 8 , $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$, નાભિલંબ = $\frac{16}{3}$

2. F $(0, \pm\sqrt{21})$; V $(0, \pm 5)$; પ્રધાન અક્ષ = 10; ગૌણ અક્ષ = 4 , $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$; નાભિલંબ = $\frac{8}{5}$

3. F $(\pm\sqrt{7}, 0)$; V $(\pm 4, 0)$; પ્રધાન અક્ષ = 8; ગૌણ અક્ષ = 6 , $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$; નાભિલંબ = $\frac{9}{2}$

4. F $(0, \pm\sqrt{75})$; V $(0, \pm 10)$; પ્રધાન અક્ષ = 20; ગૌણ અક્ષ = 10 , $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; નાભિલંબ = 5

5. F $(\pm\sqrt{13}, 0)$; V $(\pm 7, 0)$; પ્રધાન અક્ષ =14 ; ગૌણ અક્ષ = 12 , $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$; નાભિલંબ = $\frac{72}{7}$

6. F $(0, \pm 10\sqrt{3})$; V $(0, \pm 20)$; પ્રધાન અક્ષ =40 ; ગૌણ અક્ષ = 20 , $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; નાભિલંબ = 10

7. F $(0, \pm 4\sqrt{2})$; V $(0, \pm 6)$; પ્રધાન અક્ષ =12 ; ગૌણ અક્ષ = 4 , $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; નાભિલંબ = $\frac{4}{3}$

8. F $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$; V $(0, \pm 4)$; પ્રધાન અક્ષ = 8 ; ગૌણ અક્ષ = 2 , $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$; નાભિલંબ = $\frac{1}{2}$

9. F $(\pm\sqrt{5}, 0)$; V $(\pm 3, 0)$; પ્રધાન અક્ષ = 6 ; ગૌણ અક્ષ = 4 , $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; નાભિલંબ = $\frac{8}{3}$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
11. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$
12. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$
13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
14. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$
15. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$
16. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
18. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
19. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$
20. $x^2 + 4y^2 = 52$ અથવા $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

સ્વાધ્યાય 11.4

1. નાભિઓ $(\pm 5, 0)$, શિરોબિંદુઓ $(\pm 4, 0)$; $e = \frac{5}{4}$; નાભિલંબ $= \frac{9}{2}$

2. નાભિઓ (0 ± 6), શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 3)$; $e = 2$; નાભિલંબ = 18

3. નાભિઓ $(0, \pm\sqrt{13})$, શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 2)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; નાભિલંબ = 9

4. નાભિઓ $(\pm 10, 0)$, શિરોબિંદુઓ $(\pm 6, 0)$; $e = \frac{5}{3}$; નાભિલંબ $= \frac{64}{3}$

5. નાભિઓ $(0, \pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}})$, શિરોબિંદુઓ $(0, \pm\frac{6}{\sqrt{5}})$; $e = \frac{\sqrt{14}}{3}$; નાભિલંબ $= \frac{4\sqrt{5}}{3}$

6. નાભિઓ $(0, \pm\sqrt{65})$, શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 4)$; $e = \frac{\sqrt{65}}{4}$; નાભિલંબ $= \frac{49}{2}$

7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 8. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$ 9. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

10. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 11. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ 12. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$

13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 14. $\frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$ 15. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

1. નાભિ એ આપેલ વ્યાસનું મધ્યબિંદુ છે.

2. 2.23 મી (આશરે) 3. 9.11 મી (આશરે) 4. 1.56 મી (આશરે)

5. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ 6. 18 ચો એકમ 7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

8. $8\sqrt{3}a$

સ્વાધ્યાય 12.1

1. y અને z - યામ શૂન્ય છે. 2. y - યામ શૂન્ય છે.

3. I, IV, VIII, V, VI, II, III, VIII

4. (i) XY - સમતલ (ii) $(x, y, 0)$ (iii) આઠ

સ્વાધ્યાય 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

4. $x - 2z = 0$ 5. $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$ (ii) $(-8, 17, 3)$ 2. 1 : 2

3. 2 : 3 5. $(6, -4, -2), (8, -10, 2)$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 12

1. (1, – 2, 8) **2.** $7, \sqrt{34}, 7$ **3.** $a = -2, \quad b = -\frac{16}{3}, \quad c = 2$

4. (0, 2, 0) અને (0, – 6, 0)

5. (4, – 2, 6)

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$

સ્વાધ્યાય 13.1

1. 6 **2.** $\left(\pi - \frac{22}{7}\right)$ **3.** π **4.** $\frac{19}{2}$

5. $-\frac{1}{2}$ **6.** 5 **7.** $\frac{11}{4}$ **8.** $\frac{108}{7}$

9. b **10.** 2 **11.** 1 **12.** $-\frac{1}{4}$

13. $\frac{a}{b}$ **14.** $\frac{a}{b}$ **15.** $\frac{1}{\pi}$ **16.** $\frac{1}{\pi}$

17. 4 **18.** $\frac{a+1}{b}$ **19.** 0 **20.** 1

21. 0 **22.** 2 **23.** 3, 6

24. $x = 1$ આગળ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

25. $x = 0$ આગળ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. **26.** $x = 0$ આગળ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

27. 0 **28.** $a = 0, b = 4$

29. $\lim_{x \to a_1} f(x) = 0$ અને $\lim_{x \to a} f(x) = (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_x)$

30. પ્રત્યેક $a \neq 0$ માટે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે. **31.** 2

32. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ના અસ્તિત્વ માટે $m = n$ થાય તે જરૂરી છે; કોઈપણ પૂર્ણાંક m અને n માટે $\lim_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે :

સ્વાધ્યાય 13.2

1. 4 **2.** e^2 **3.** e^5 **4.** 1 **5.** e^3

6. 2 **7.** 2 **8.** 1

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 20 **2.** 99 **3.** 1

4. (i) $3x^2$ (ii) $2x - 3$ (iii) $\frac{-2}{x^3}$ (iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

6. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

7. (i) $2x - a - b$ (ii) $4ax(ax^2 + b)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

8. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

9. (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\frac{-3}{x^4}(5+2x)$ (iv) $15x^4 + \frac{24}{x^5}$

(v) $\frac{-12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$ (vi) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ **10.** $-\sin x$

11. (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $5 \sec x \tan x - 4 \sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$

(v) $-3 \operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5 \cos x + 6 \sin x$

(vii) $2 \sec^2 x - 7 \sec x \tan x$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 13

1. (i) -1 (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) $\cos(x+1)$ (iv) $-\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ **2.** 1

3. $\frac{-qr}{x^2} + ps$ **4.** $2c(ax+b)(cx+d) + a(cx+d)^2$

5. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **6.** $\dfrac{-2}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1$ **7.** $\dfrac{-(2ax+b)}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

8. $\dfrac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{\left(px^2+qx+r\right)^2}$ **9.** $\dfrac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$ **10.** $\dfrac{-4a}{x^5}+\dfrac{2b}{x^3}-\sin x$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **12.** $na(ax+b)^{n-1}$

13. $(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}\left[mc(ax+b)+na(cx+d)\right]$ **14.** $\cos(x+a)$

15. $-\ cosec^3\ x-cosec\ x\ cot^2\ x$ **16.** $\dfrac{-1}{1+\sin x}$

17. $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ **18.** $\dfrac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ **19.** $n\sin^{n-1}x\cos x$

20. $\dfrac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$ **21.** $\dfrac{\cos a}{\cos^2 x}$

22. $x^3(5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x)$ **23.** $-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$

24. $-q\sin x\left(ax^2+\sin x\right)+(p+q\cos x)(2a\,x+\cos x)$

25. $-\tan^2 x(x+\cos x)+(x-\tan x)(1-\sin x)$

26. $\dfrac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$

27. $\dfrac{x\cos\frac{\pi}{4}(2\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$ **28.** $\dfrac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

29. $(x+\sec x)\left(1-\sec^2 x\right)+(x-\tan x).(1+\sec x\tan x)$

30. $\dfrac{\sin x-n\,x\cos x}{\sin^{n+1}x}$

સ્વાધ્યાય 14.1

1. (i) આ વાક્ય હંમેશાં અસત્ય છે, કારણ કે કોઈ પણ મહિનામાં દિવસોની મહત્તમ સંખ્યા 31 છે. આથી આ વિધાન છે.

(ii) આ વિધાન નથી, કારણ કે કેટલાંક માણસો માટે ગણિત સહેલું હોઈ શકે અને બીજા કેટલાંક માણસો માટે તે અઘરું પણ હોય.

(iii) આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે, કારણ કે સરવાળો 12 છે અને તે 10 થી વધુ છે. આથી આ વિધાન છે.

(iv) આ વાક્ય ક્યારેક સત્ય છે અને ક્યારેક સત્ય નથી. ઉદાહરણ તરીકે 2 નો વર્ગ યુગ્મ સંખ્યા છે અને 3 નો વર્ગ અયુગ્મ સંખ્યા છે. આથી આ વિધાન નથી.

(v) આ વાક્ય ક્યારેક સત્ય છે અને ક્યારેક અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે ચોરસ અને સમભુજની બાજુને સમાન લંબાઈ હોય છે અને લંબચોરસ તથા સમલંબની બાજુને અસમાન લંબાઈ હોય છે. આથી આ વિધાન નથી.

(vi) આ આજ્ઞાર્થ છે અને તેથી વિધાન નથી.

(vii) આ વાક્ય અસત્ય છે, કારણ કે ગુણાકાર (–8) થાય છે. આથી આ વિધાન છે.

(viii) આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે અને તેથી તે વિધાન છે.

(ix) કયા દિવસનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવ્યો છે તે સંદર્ભ પરથી સ્પષ્ટ થતું નથી. આથી આ વિધાન નથી.

(x) આ વાક્ય સત્ય છે, કારણ કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને $a + i \times 0$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

2. ત્રણ ઉદાહરણ આ પ્રમાણે હોઈ શકે :

(i) આ ઓરડામાં બધાં બહાદુર છે. આ વિધાન નથી,કારણ કે કયા ઓરડાનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવ્યો છે તે સંદર્ભ પરથી સ્પષ્ટ થતુ નથી તથા બહાદુર એ સ્પષ્ટપણે વ્યાખ્યાયિત નથી.

(ii) તે ઈજનેરી શાખાની વિદ્યાર્થી છે. આ પણ વિધાન નથી કારણ કે 'તે' એટલે કોણ ?

(iii) "$cos^2 \theta$ એ હંમેશા $\frac{1}{2}$ કરતાં મોટો છે." θ ની કિંમત જાણ્યા વગર આપણે આ વાક્ય સત્ય છે કે નહિ તે કહી શકીએ નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. (i) ચેન્નાઈ તમિલનાડુનું પાટનગર નથી.

(ii) $\sqrt{2}$ સંકર સંખ્યા છે.

(iii) બધા ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iv) 2 એ 7 કરતાં મોટી સંખ્યા નથી.

(v) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

2. (i) પ્રથમ વિધાનનું નિષેધ : "સંખ્યા x એ સંમેય સંખ્યા છે." આ બીજું વિધાન જ છે, કારણ કે જો સંખ્યા અસંમેય ન હોય તો તે સંમેય હોય. આથી આપેલ વિધાનની જોડ પરસ્પર નિષેધ છે.

(ii) પ્રથમ વિધાનનું નિષેધ : ''સંખ્યા x એ અસંમેય સંખ્યા છે.'' આ બીજું વિધાન જ છે. આથી આપેલ વિધાનની જોડ પરસ્પર નિષેધ છે.

3. (i) 3 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે; 3 એ અયુગ્મ સંખ્યા છે. (સત્ય)

(ii) બધા પૂર્ણાંકો ધન છે; બધા પૂર્ણાંકો ઋણ છે. (અસત્ય)

(iii) 100 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે; 100 એ 11 વડે વિભાજ્ય છે અને 100 એ 5 વડે વિભાજ્ય છે. (અસત્ય)

સ્વાધ્યાય 14.3

1. (i) "અને". ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

બધી સંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક છે.

બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંકર સંખ્યાઓ નથી.

(ii) "અથવા". ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

કોઈપણ પૂર્ણાંકનો વર્ગ ધન છે.

કોઈપણ પૂર્ણાંકનો વર્ગ ઋણ છે.

(iii) "અને". ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

રેતી સૂર્યના પ્રકાશમાં ઝડપથી ગરમ થાય છે.

રેતી રાત્રીના સમયે ઝડપથી ઠંડી થતી નથી.

(iv) "અને". ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

$x = 2$ એ સમીકરણ $3x^2 - x - 10 = 0$ નું બીજ છે.

$x = 3$ એ સમીકરણ $3x^2 - x - 10 = 0$ નું બીજ છે.

2. (i) "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે".

નિષેધ : કોઈક સંખ્યાઓનો વર્ગ તે સંખ્યા જેટલો જ હોય તેવી કોઈ સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવતી નથી.

(ii) "પ્રત્યેક માટે".

નિષેધ : કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી અસ્તિત્વ ધરાવે છે જેથી x એ $x + 1$ કરતાં નાની ન હોય.

(iii) "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે".

નિષેધ : ભારતમાં એક એવું રાજ્ય અસ્તિત્વ ધરાવે છે જેને રાજધાની નથી.

3. ના. વિધાન (i) નું નિષેધ : "એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y અસ્તિત્વ ધરાવે છે જેથી $x + y \neq y + x$". આ વિધાન (ii) થી ભિન્ન છે.

4. (i) નિવારક વિકલ્પ (ii) સમાવેશ વિકલ્પ (iii) નિવારક વિકલ્પ

સ્વાધ્યાય 14.4

1. (i) કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ હોય તો તેનો વર્ગ પણ અયુગ્મ હોય.

(ii) કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ હોય તો જ તેનો વર્ગ અયુગ્મ હોય.

(iii) કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ હોય તેની આવશ્યક શરત તેનો વર્ગ અયુગ્મ હોય તે છે.

(iv) કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ અયુગ્મ હોય એ માટે પર્યાપ્ત છે કે તે સંખ્યા અયુગ્મ હોય.

(v) જો કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ અયુગ્મ ન હોય તો તે પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ ન હોય.

2. (i) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો સંખ્યા x અયુગ્મ ન હોય તો x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા ન હોય.
પ્રતીપ : જો x અયુગ્મ હોય તો તે અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય.

(ii) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો એક જ સમતલની બે રેખાઓ છેદે તો તે સમાંતર ન હોય.

પ્રતીપ : જો એક જ સમતલની બે રેખાઓ ન છેદે તો તે સમાંતર હોય.

(iii) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો કંઈક નીચા તાપમાને ન હોય તો તે ઠંડુ ન હોય.

પ્રતીપ : જો કંઈક નીચા તાપમાને હોય તો તે ઠંડુ હોય.

(iv) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો તમે તાર્કિક સાબિતી આપવાનું જાણતા હોય તો તમે ભૂમિતિ સમજી શકો.

પ્રતીપ : જો તમે તાર્કિક સાબિતી આપવાનું ન જાણતા હો તો તમે ભૂમિતિ ન સમજી શકો.

(v) આ વિધાન આ પ્રમાણે લખી શકાય : "જો x યુગ્મ સંખ્યા હોય તો તે 4 થી વિભાજ્ય છે."

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો x એ 4 થી વિભાજ્ય ન હોય તો તે x યુગ્મ સંખ્યા થશે.

પ્રતીપ : જો x એ 4 થી વિભાજ્ય હોય તો તે x યુગ્મ સંખ્યા હોય.

3. (i) જો તમને નોકરી મળે તો તમારાં પ્રમાણપત્રો સારા છે.

(ii) જો કેળાના ઝાડ એક મહિના માટે હૂંફવાળા રહે તો તે ખીલે છે.

(iii) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iv) જો તમે વર્ગમાં A+ મેળવ્યો હોય તો તમે પુસ્તકના બધા જ સ્વાધ્યાય કર્યા હોય.

4. **a** (i) સમાનાર્થી પ્રેરણ (ii) પ્રતીપ

b (i) સમાનાર્થી પ્રેરણ (ii) પ્રતીપ

સ્વાધ્યાય 14.5

5. (i) અસત્ય : જીવાની વ્યાખ્યા પરથી તે વર્તુળને બે બિંદુઓમાં છેદે છે.

(ii) અસત્ય : પ્રતિઉદાહરણ આપીને આ બતાવી શકાય. વ્યાસ સિવાયની જીવા એ પ્રતિઉદાહરણ થશે.

(iii) સત્ય, ઉપવલયના સમીકરણમાં જો $a = b$ લઈએ તો તે વર્તુળ બને. (પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ)

(iv) સત્ય, અસમતાના નિયમ પરથી

(v) અસત્ય, 11 અવિભાજ્ય સંખ્યા હોવાથી $\sqrt{11}$ અસંમેય થશે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 14

1. (i) જેથી $x-1$ ધન સંખ્યા ન હોય તેવી કોઈક વાસ્તવિક ધન સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(ii) ચટાપટાવાળી ન હોય તેવી બિલાડી અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iii) $x > 1$ કે $x < 1$ ન હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iv) $0 < x < 1$ હોય તેવી કોઈ સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવતી નથી.

2. (i) વિધાન આ રીતે લખી શકાય : ''જો ધન પૂર્ણાંક અવિભાજ્ય હોય તો તેને 1 અને તે સંખ્યા સિવાય બીજા કોઈ અવયવો ન હોય.''

પ્રતીપ : જો કોઈક ધન પૂર્ણાંકને 1 અને તે સંખ્યા સિવાય બીજો કોઈ ન અવયવ હોય તો તે અવિભાજ્ય હોય.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો કોઈક ધન પૂર્ણાંકને 1 અને તે સંખ્યા સિવાય બીજા કોઈ અવયવ હોય તો તે અવિભાજ્ય ન હોય.

(ii) વિધાન આ રીતે લખી શકાય : ''જો દિવસ સૂર્ય પ્રકાશિત હોય તો હું દરિયા કિનારે જઈશ.''

પ્રતીપ : જો હું દરિયા કિનારે જઈશ તો દિવસ સૂર્ય પ્રકાશિત હશે.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો હું દરિયા કિનારે નહીં જઉ તો દિવસ સૂર્ય પ્રકાશિત નહીં હોય.

(iii) પ્રતીપ : જો તમને તરસ હોય તો બહાર ગરમી હોય.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો તમને તરસ ન લાગે તો બહાર ગરમી ન હોય.

3. (i) જો તમે સર્વર પર પ્રવેશ કરો તો તમારી પાસે પાસવર્ડ છે.

(ii) જો વરસાદ પડે તો ટ્રાફિક જામ થાય.

(iii) જો તમે વેબસાઈટમાં પ્રવેશ કરી શકો તો તમે લવાજમની રકમ ચૂકવી હોય.

4. (i) તમે ટેલિવિઝન નિહાળો તો અને તો જ તમારૂ મન મુક્ત હોય.

(ii) તમે A ગ્રેડ મેળવ્યો હોય તો અને તો જ બધુ ગૃહકાર્ય નિયમિત કર્યુ હોય.

(iii) ચતુષ્કોણના બધા ખૂણાઓ સમાન હોય તો અને તો જ તે લંબચોરસ હોય.

5. ''અને'' વડે જોડીને સંયુક્ત

વિધાન : 25 એ 5 અને 8 નો ગુણિત છે. આ અસત્ય વિધાન છે.

''અથવા'' વડે જોડીને સંયુક્ત

વિધાન : 25 એ 5 અથવા 8 નો ગુણિત છે. આ સત્ય વિધાન છે.

7. સ્વાધ્યાય 14.4 ના પ્રશ્ન.1 પ્રમાણે

સ્વાધ્યાય 15.1

1. 3 **2.** 8.4 **3.** 2.33 **4.** 7 **5.** 6.32

6. 16 **7.** 3.23 **8.** 5.1 **9.** 157.92 **10.** 11.28

11. 10.34 **12.** 7.35

સ્વાધ્યાય 15.2

1. 9, 9.25 **2.** $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$ **3.** 16.5, 74.25 **4.** 19, 43.4 **5.** 100, 29.09

6. 64, 1.69 **7.** 107, 2276 **8.** 27, 132 **9.** 93, 105.52, 10.27

10. 5.55, 43.5

સ્વાધ્યાય 15.3

1. B **2.** Y **3.** (i) B, (ii) B **4.** A **5.** વજન

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 15

1. 4, 8 **2.** 6, 8 **3.** 24, 12 **5.** (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98

6. રસાયણ શાસ્ત્રમાં સૌથી વધુ અને ગણિતમાં સૌથી ઓછું. **7.** 20, 3.036

સ્વાધ્યાય 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}

2. $\{(x, y) : x, y = 1,2,3,4,5,6\}$

અથવા {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6,6)}

3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}

6. $\{XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5\}$

7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}

8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}

9. {RW, WR, WW}

10. [HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}

12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}

13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}

14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$

16. {6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), ..., (1,5,6), (2,1,6). (2,2,6), ..., (2,5,6), ..., (5,1,6), (5,2,6), ...}

સ્વાધ્યાય 16.2

1. ના

2. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) ϕ (iii) {3, 6} (iv) {1, 2, 3} (v) {6}

(vi) {3, 4, 5, 6}, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \phi$, $B \cup C = \{3, 6\}$, $E \cap F = \{6\}$, $D \cap E = \phi$,

$A - C = \{1, 2,4,5\}$, $D - E = \{1,2,3\}$, $E \cap F' = \phi$, $F' = \{1, 2\}$

3. A = {(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)}

B = {(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}

C ={(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)} A અને B, B અને C પરસ્પર નિવારક છે.

4. (i) A અને B; A અને C; B અને C; C અને D (ii) A અને C (iii) B અને D

5. (i) "ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે", અને "ઓછામાં ઓછા બે કાંટા મળે"

(ii) "એક પણ છાપ ન મળે", "બરાબર એક છાપ મળે" અને "ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે."

(iii) "વધુમાં વધુ બે કાંટા મળે", અને "બરાબર બે કાંટા મળે"

(iv) "બરાબર એક છાપ મળે" અને "બરાબર બે છાપ મળે"

(v) "બરાબર એક કાંટો મળે", "બરાબર બે કાંટા મળે", અને "બરાબર ત્રણ કાંટા મળે"

નોંધ : ઉપરના પ્રશ્નનો જવાબ આપવા માટે બીજી ઘટનાઓ પણ હોઈ શકે.

6. A = {(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

B = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

C = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

(i) A′ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} = B

(ii) B′ = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = A

(iii) $A \cup B$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = S

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) A – C = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

(vi) $B \cup C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

(vii) $B \cap C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)}

(viii) $A \cap B' \cap C'$ = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

7. (i) સત્ય (ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) અસત્ય (v) અસત્ય (vi) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 16.3

1. (a) હા (b) હા (c) ના (d) ના (e) ના

2. $\frac{3}{4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$

4. (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$

5. (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{12}$

6. $\frac{3}{5}$

7. ₹ 4.00 મળે, ₹ 1.50 મળે, ₹ 1.00 ગુમાવે, ₹ 3.50 ગુમાવે, ₹ 6.00 ગુમાવે.

P (₹ 4.00 મળે) $= \frac{1}{16}$, P(₹ 1.50 મળે) $= \frac{1}{4}$, P (₹ 1.00 ગુમાવે) $= \frac{3}{8}$

P (₹ 3.50 ગુમાવે) $= \frac{1}{4}$, P (₹ 6.00 ગુમાવે) $= \frac{1}{16}$.

8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $\frac{1}{8}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{3}{8}$ (viii) $\frac{1}{8}$ (ix) $\frac{7}{8}$

9. $\frac{9}{11}$

10. (i) $\frac{6}{13}$ (ii) $\frac{7}{13}$

11. $\frac{1}{38760}$

12. (i) ના, કારણ કે $P(A \cap B)$ એ હંમેશા P(A) તથા P(B) થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય. (ii) હા

13. (i) $\frac{7}{15}$ (ii) 0.5 (iii) 0.15

14. $\frac{4}{5}$

15. (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$

16. ના

17. (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74

18. 0.6

19. 0.55

20. 0.65

21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 16

1. (i) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ (ii) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$ **2.** $\frac{^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ (c) $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ **6.** $\frac{2}{3}$

7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 **8.** $\frac{4}{5}$

9. (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{1}{5040}$

— ❖ —

BE A STUDENT OF STUDENTS

A teacher who establishes rapport with the taught, becomes one with them, learns more from them than he teaches them. He who learns nothing from his disciples is, in my opinion, worthless. Whenever I talk with someone I learn from him. I take from him more than I give him. In this way, a true teacher regards himself as a student of his students. If you will teach your pupils with this attitude, you will benefit much from them.

Talk to Khadi Vidyalaya Students, Sevagram
Harijan Seva, 15 February 1942 (CW 75, p. 269)

USE ALL RESOURCES TO BE CONSTRUCTIVE AND CREATIVE

What we need is educationists with originality, fired with true zeal, who will think out from day to day what they are going to teach their pupils. The teacher cannot get this knowledge through musty volumes. He has to use his own faculties of observation and thinking and impart his knowledge to the children through his lips, with the help of a craft. This means a revolution in the method of teaching, a revolution in the teachers' outlook. Up till now you have been guided by inspector's reports. You wanted to do what the inspector might like, so that you might get more money yet for your institutions or higher salaries for yourselves. But the new teacher will not care for all that. He will say, '1 have done my duty to my pupil if I have made him a better man and in doing so I have used all my resources. That is enough for me'.

Harijan, 18 February 1939 (CW 68, pp. 374-75)