10

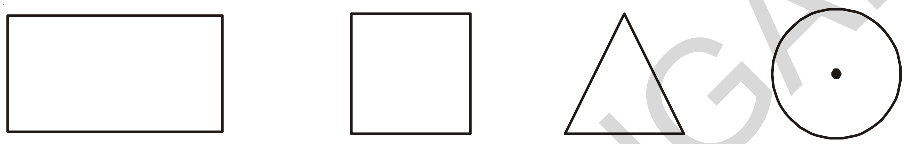
समतलीय क्षेत्रफल एवं आयतन

(Surface Areas and Volumes)

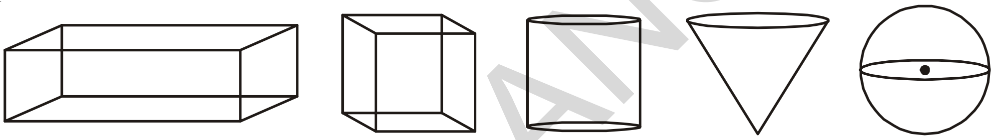
10.1 प्रस्तावना

निम्न आकृतियों को ध्यान से देखिए:

(a)



(b)

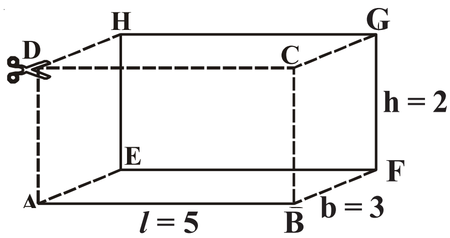


समूह (a) और (b) की आकृतियों मे क्या कोई अंतर आपने देखा?

ऊपर दी हुई आकृतियों में, समूह (a) की आकृतियाँ आसानी से हम अपनी कापी में उतार सकते हैं। इन आकृतियों की केवल लम्बाई और चौड़ाई हैं। इन्हें द्विविमीय आकृतियाँ अथवा 2-D वस्तुएं कहते हैं। समूह (b) की आकृतियाँ जिनकी लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई हैं, त्रिविमीय आकृतियाँ अथवा 3-D वस्तुएं कहलाती हैं। ये ठोस आकृतियाँ कहलाती हैं। सामान्यतः हम अपने चारों ओर ठोस आकृतियाँ देखते है। तुमने अबतक समतलीय आकृतियाँ और उनके क्षेत्रफलों के बारे मे सीखा है? अब हम 3-D वस्तुओं जैसे बेलन, शंकु और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करना सीखेंगे।

10.2 घनाभ के समतल का क्षेत्रफल (Surface Area of Cuboid)

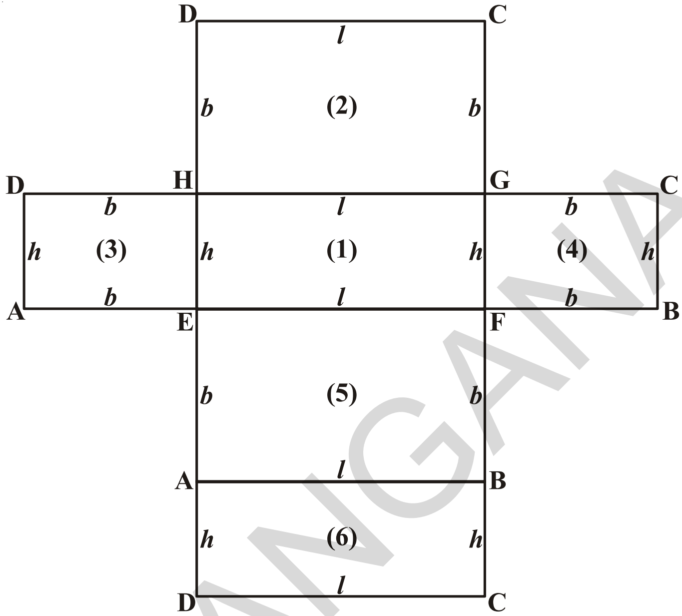
घनाभ को ध्यनपूर्वक देखिए । इसके कितने फलक हैं ज्ञात कीजिए? इसके कितने कोनें और कितनी भुजाएँ है? क्या इसके फलक, समतल है? कोनसे फलकों के युग्म माप मे बराबर है? क्या तुम्हे इसके पृष्टीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कोई विचार आता है?



अब हम धनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात करते है।

ऊपर दी हुई आकृति मे लम्बाई $(l) = 5$ से.मी.; चौडाई $(b) = 3$ से.मी.; उँचाई $(h) = 2$ से.मी.

यदि हमने CD, ADHE और BCGF. के साथ दिए गए घनाभ को काटक और खोल दिया तो हमे प्राप्त हुई आकृति निम्न प्रकार जैसे होगीः



यह दर्शाता है कि घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल, तीन तद्रूप आयतों के युग्मो से अर्थात् छः आयतों सें बना है। घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें छः आयताकर फलकों के क्षेत्रफलों को जोडना हौगा । इन क्षेत्रफलों का योग हमे घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल देता है ।

EFGH आयत का क्षेत्रफल $= l \times h = lh$ .....(1)

HGCD आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$ .....(2)

AEHD आयत का क्षेत्रफल $= b \times h = bh$ .....(3)

FBCG आयत का क्षेत्रफल $= b \times h = bh$ .....(4)

ABFE आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$ .....(5)

DCBA आयत का क्षेत्रफल $= l \times h = lh$ .....(6)

ऊपर के क्षेत्रफलों को जोडने पर, हमे घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल प्रप्त होगाा ।

घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल $=$ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) का क्षेत्रफल

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) मे घनाभ के पार्श्व पृष्ट है ।

घनाभ का पार्शतल का क्षेत्रफल = Area of (1) + (3) + (4) + (6) का क्षेत्रफल

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

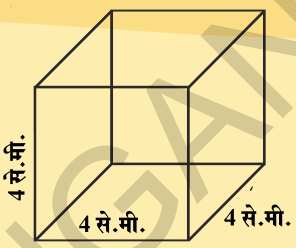
अब, ऊपर दी गई आकृति के लिए घनाभ का पृष्टीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे। इस तरह संपूर्ण पृष्ट 62 से.मी.^{2} और पार्श्व तल 32 से.मी.^{2} है।

इसकी कोशिश कीजीए

'l' से.मी. भुजा वाला लीजिए और इसके पहले जैसे काटा था वैसे काटिए। घन का संपूर्ण पृष्ट और पार्श्व पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए

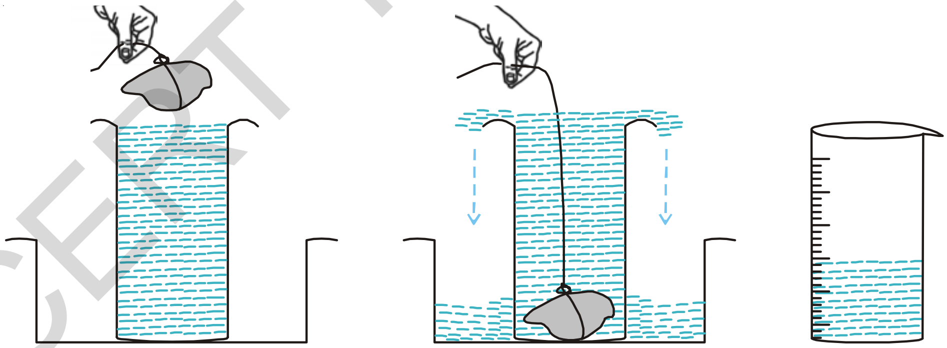
1. ऊपर की गई कोशिश मे व्युत्पन्न सूत्र का उपयोग करते हुए 4 से.मी. भुजा के घन का संपूर्ण तल और पार्श्व तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. घन की प्रत्येक कोर 50% से बढाई गई। इसके संपूर्णतल क्षेत्रफल मे प्रतिशत की बढत ज्ञात कीजिए।



10.2.1 आयतन (Volume)

आयतन की संकल्पना याद करने का लिए, निम्न लिखित क्रिया कलाप करते है।

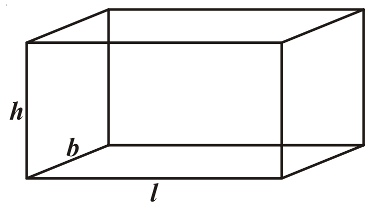
एक कांच का जार लेकर, उसे एक पात्र मे रखिए। काँच के जार मे डालिए ऊपर के किनारे तक पानी भरीए। धीरेसे एक ठोस वस्तु (पत्थर) उसमे डालिए। जार से कुछ पानी पात्र मे छलता है। छलका हुआ पानी मापक जार मे लीजिए। इससे ठोस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान के बारे मे जानकारी मिलती है। यही आयतन कहलाता है।



10.2.2 पात्र की धारिता (क्षमता) (Capacity of Container)

यदि वस्तु खोखली है, तब अंतरिक भाग रिक्त रहता है और वह हवा अथवा किसी दूसरे द्रव पदार्थ से भर सकते है, यह पदार्थ इसके पात्र का आकार धारण करता है। पदार्थ का आयतन जो पात्र के आंतरिक भाग मे भर सकते है, पात्र की धारिता कहलाती है।

घनाभ का आयतन: किसी गत्ते से एक समान माप वाले कुछ आयत काटिए और उन्हे एक दूसरे के ऊपर रखिए। बने हुए आकार के बारेमे तुम क्या कह सकते हो?



यह आकार घनाभ है ।

अब हम घनाभ का आयतन ज्ञात करते है ।

इसकी लम्बाई, आयत की लम्बई के समान है, और चौडाई, आयत की चौडाई के समान है । उँचाई जहाँतक आयत की धूरी बनी है, वही घनाभ की उँचाई 'h' है ।

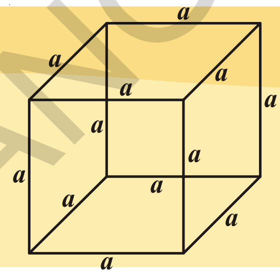
घनाभ द्वारी घिरी हुई जगह = आयत द्वारा घिरे हुए समतल भाग का क्षेत्रफल × उँचाई

घनाभ का आयतन $= l\,b \times h = l\,bh$

$\therefore$ घनाभ का आयतन $= l\,bh$

जहाँ l, b, h घनाभ की लम्बाई, चौडाई और उँचाई है ।

इसकी कोशिश कीजीए



(a) घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 'a' इकाई है ।

(b) घन की कोर ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 1000 से.मी.^{3} है ।

मानिए कि घनाभ और घन ठोस हैं ।क्या हम इन्हे लम्ब प्रिज्म कह सकते है? ध्यानपूर्वक देखनेपर तुम्हे मालुम हुआ कि इन्हे लम्ब प्रिज्म भी कहते है? क्यों कि इनके पार्श्व फलक आयताकार है और आधार पर लम्ब रहते है ।

हम जानते है कि घनाभ का आयतन, उसके आधार का क्षेत्रफल और उँचाई का गुणनफल होता है ।

स्मरण कीजिए कि घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × उँचाई

$= lb \times h$

$= lbh$

घन में, $= l = b = h = \mathrm{s}$ (सभी परिमाण एक समान रहते है)

घन का आयतन $= \mathrm{s}^2 \times \mathrm{s}$

$= \mathrm{s}^3$

हम अनुमान लगाते है कि धनाभ के आयतन का सूत्र सभी लम्ब प्रिज्म के लिए सही है ।

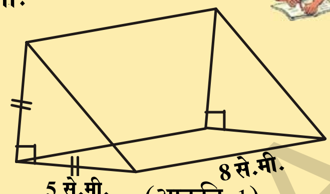
अतः लम्ब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × उँचाई

विशेषतः यदि लम्ब प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज हो तो, इसका आयतन $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \mathrm{h}$ धन इकाइयाँ.

जहाँ आधार के प्रत्येक भुजा की लम्बाई 'a' और प्रिज्म की उँचाई 'h' है ।

इन्हे हल कीजीए

1. घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए यदि $l = 12$ से.मी., $b = 10$ से.मी. और $h = 8$ से.मी.
2. घन का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी भुजा 10 से.मी. है ।
3. समद्विबाहु समकोण त्रिभुजाकार प्रिज्म (आकृति1) का आयतन ज्ञात कीजिए ।



(आकृति 1)

प्रिज्म (समपार्श्व) के समान पिरामिड (सूचीस्तम्भ) भी त्रिविमीय ठोस आकृति है । प्राचीन काल से ही यह आकृति मानवजाती को सम्मोहित्त करते आयी है । तुमने इजिप्त के पिरामिड के बारे मे पढा होगा जो दुनिया के सात आश्चर्यो में से एक है । ये, वर्ग आधार पर बनाए गए पिरामिड के यथार्थ उदाहरण है । वे कैसे बनाये है? यह रहस्य है । कैसे ये भारी -भरकम ढांचे बनाये है, कोई भी नही जानता ।

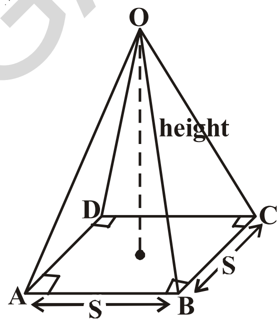
क्या तूम पिरामिड का आकार बना सकते हो?

तुमने प्रिज्म और पिरामिड मे क्या अंतर पाया?

वर्ग आधार के पिरामिड को तुम क्या कहोगे?

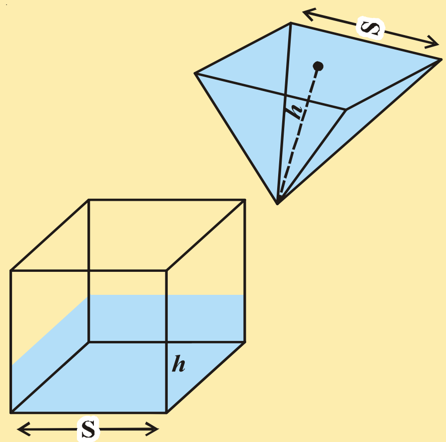
यहाँ OABCD यह 'S' भुज का वर्ग पिरेमिड है जिसकी उँचाई 'h' है ।

क्या तुम वर्ग पिरामिड के आयतन को घन के आयतन के पदो में अनुमान लगा सकते हों यदि दोनों के आधार और उँचाई समान है?



क्रियाकलाप

वर्ग पिरामिड और घन आकार के दो पात्र लीजिए जिनके आधार समान है और दोनों की उँचाई बराबर है । पिरामिड द्रव पदार्थ से भरीए और इसे घनाकार पात्र (पिज्म) मे पूर्णतः उंडेल दिया । घनाकार पात्र भरने के लिए कितनी बार यह क्रिया करनी होगी? इससे तुम क्या निष्कर्ष निकालते हो?



इस तरह, पिरामीड का आयतन

$= \frac{1}{3}$ लम्ब प्रिज्म के आयतन

$= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ उँचाई

नोटः एक लम्ब प्रिज्म का आधार, इसके पार्श्व भुजाओं को लम्ब रहते है और सभी पार्श्व फलक आयत रहते हों ।

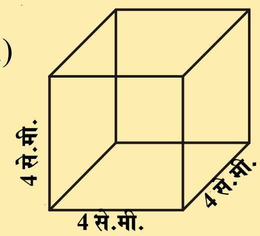
इन्हें हल कीजिए

1. पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका आधार 10 से.मी. का वर्ग और उँचाई 8 से.मी. है ।
2. एक घन का आयतन 1200 घन से.मी. है । समान उँचाई के वर्ग पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए?

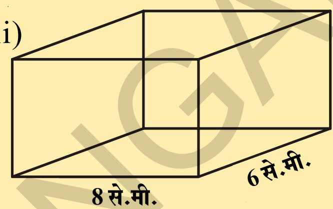
अभ्यास - 10.1

1. नीचे दर्शाये गये लम्ब प्रिज्म के संपूर्ण तल और पार्श्व तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)



(ii)



2. एक घन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल 1350 वर्ग मीटर हो तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए ।
3. एक कक्ष के चार दीवारों का क्षेत्रफल (मानिए कि इसमे दरवाजे और खिडकीयाँ नही है) ज्ञात कीजिए यदि इसकी लम्बाई 12 मी., चौडाई 10 मी. और उँचाई 7.5 मी. है ।
4. एक घनाभ का आयतन 1200 से.मी^{3} है । इसकी लम्बई 15 से.मी. और चौडाई 10 से.मी. है । इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए ।
5. एक डिब्बे का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल कैसे बदलेगा यदि

(i) प्रत्येक भुजा को दुगुना किया हो ? (ii) प्रत्येक भुजा को तीन गुणा किया गया?

शब्दोमें व्यक्त कीजीए? यदि प्रत्येक भुजा को n बार बढ़ाया गया तो उसका संपूर्ण तल का क्षेत्रफल कितने गुना बढ़ जाएगा ।

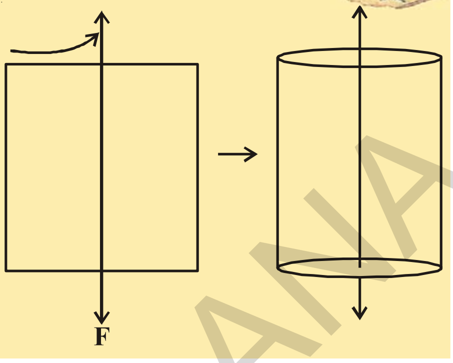
6. प्रिज्म का आधार त्रिभुजाकार है जिसकी भुजाएं 3 से.मी., 4 सी.मी. और 5 से.मी. है । प्रिज्म का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी उँचाई 10 से.मी.
7. एक 3 मी. ऊँचा नियमित वर्ग पिरामिड है जिसके आधार का परिमाप 16 मी है । पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजीए ।
8. ऑलिम्पिक खेल में एक तैरने का तालाब घनाभ के आकार मे है जिसकी भुजाएँ 50 मी. लम्बा और 25 मी. चौडा और 3 मी. गहरा है । यदि इसमे सभी जगह 3 मी. गहरा पानि है तो इसमे कितने लीटर पानी होगा?

क्रियाकलाप

एक आयताकार कागज का टुकडा काटिए । आकृति मे दिखाए जैसे एक मोटा तार चिपकाईए । आयत के दोनो ओर तार को तुम्हारे हाथ से कसकर पकडिए और जितना तेज तुम घुमा सकते हो उतना तेज तार को अक्ष मानकर घुमाईए ।

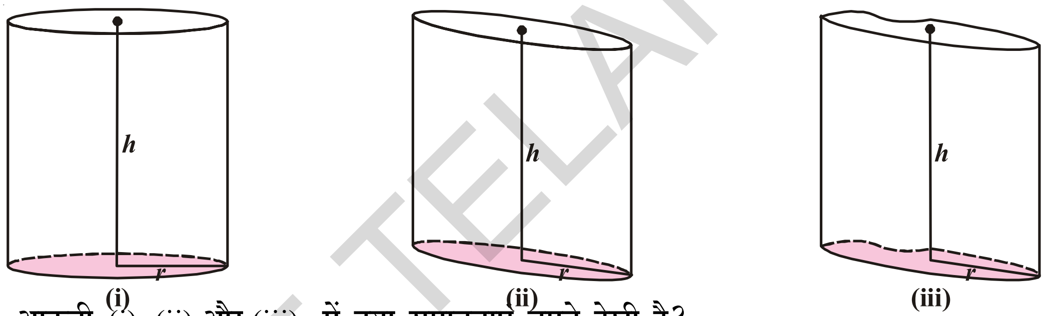
घुमता हुआ आयत कौनसा आकार बना रहा है, क्या तुम पहचानते हो?

क्या यह तुम्हे बेलन के आकार का स्मरण कराता है?



10.3 लम्ब वृत्तीय बेलन (Right Circular Cylinder)

निम्न बेलनों को ध्यानपूर्वक देखिएः



(i) आकृती (i), (ii) और (iii) में क्या समानताएं तुमने देखी है?

(ii) तुमने आकृति (i), (ii) और (iii) में क्या अंतर पाया है?

(iii) कौनसी आकृति में, रेखाखण्ड इसके आधार का लम्ब है?

प्रत्येक बेलन, एक पार्श्वपृष्ठ और दोनों सिरोंपर दो सर्वसमान वृत्ताकार फलकों से बना है । यदि वृत्ताकार पृष्टों के केंद्र को जोडने वाला रेखाखण्ड, इसके आधार का लम्ब है, ऐसा बेलन, लम्बाकार बेलन कहलाता है।

ऊपर दी हुई आकृतियों मे कौनसा लम्ब वृत्तीय बेलन है, ज्ञात कीजिए? कौनसे नही है? कारण दीजिए।

बेलन उत्पन्न करनेके लिए कुछ क्रिया करते है ।

10.3.1 बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल

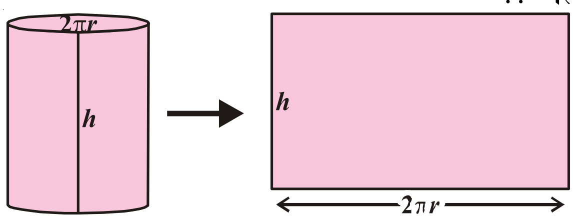
गत्ते से बनाया हुआ एक लम्ब वृत्तीय बेलन लीजिए । वक्र फलक ऊर्ध्वाधर दिशामें काटिए और सीधा कीजिए । सीधा करते समय इसकी उँचाई और वृत्ताकार आधार के रूपांतरण की ओर ध्यान दीजिए ।

बेलन को सीधा करने के पश्चात तुम कौनसा आकार पाओगे?

तुम इसे आयत के आकार मे पाओगे । आयत का क्षेत्रफल और बेलन का वक्रपृष्ट बराबर रहते है । बेलन की उँचाई, आयत की चौडाई के बराबर, और इसके आधार का परिमाप आयत की लम्बाई के बराबर रहता है ।

बेलन की उँचाई = आयत की चौडाई ($h = b$)

बेलन के आधार की परिधि जिसका आर्धव्यास 'r' = आयत की लम्बाई ($2\pi r = l$)



$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ट = आयत का क्षेत्रफल

= लम्बाई × चौडाई

$= 2\ \pi r \times h$

$= 2\pi rh$

इसीलिए, बेलन का वक्रपृष्ट **= 2πrh**

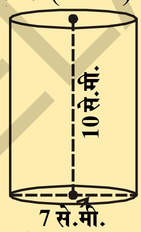
इन्हें हल कीजीए

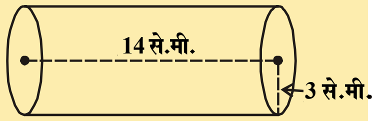
निम्न लिखित बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA) ज्ञात कीजिए ।

(i) $r = x$ से.मी., $h = y$ से.मी.

(ii) $d = 7$ से.मी., $h = 10$ से.मी.

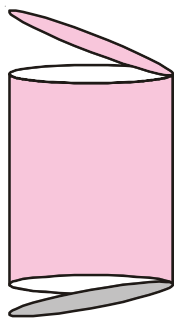
(iii) $r = 3$ से.मी., $h = 14$ से.मी.





10.3.2 बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल

(Total Surface Area of a Cylinder)



संलग्न आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए ।

क्या यह लम्ब वृत्तीय बेलन है? इसका संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इसमे कौनसे पृष्टों का क्षेत्रफल मिलाना होगा? ये वक्र धरातल का क्षेत्रफल और दो वृत्तीय फलकों का क्षेत्रफल है ।

अब बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ट + ऊपरी तह का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\ (h + r)$

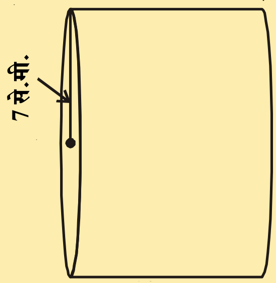
$= 2\pi r\ (r + h)$

$\therefore$ बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (r + h)$ जहाँ बेलन का अर्धव्यास 'r' और इसकी उँचाई 'h' है ।

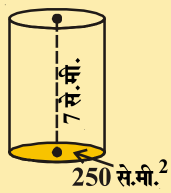
इन्हें हल कीजीए

निम्न लिखित बेलन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)



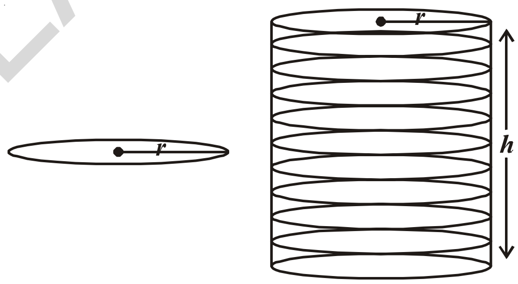
(ii)



10.3.3 बेलन का आयतन (Volume of the Cylinders)

समान अर्धव्यास के वृत्त लीजिए और इन्हे एक के ऊपर एक इस प्रकार रखिए । यह क्रिया कीजिए और यह बेलन बना था नही, ज्ञात कीजिए ।

संलग्न आकृतिमें, वृत्त का अर्धव्यास 'r' है । जिस ऊँचाई तक वृत्तों की धूरी बनी है। वही बेलन की उँचाई 'h' है ।



बेलन का आयतन $= \pi r^2 \times$ उँचाई

$= \pi r^2 \times h$

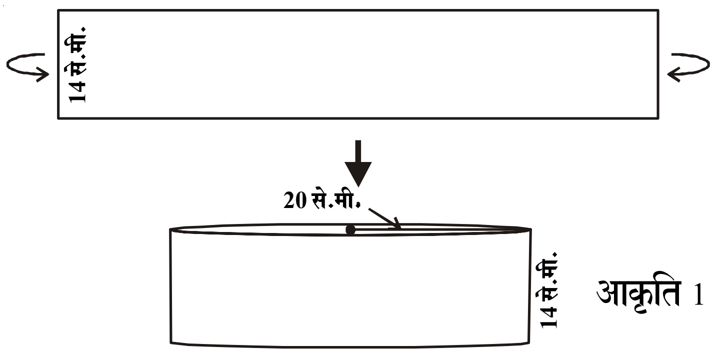
$= \pi r^2 h$

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \boldsymbol{\pi r^2 h}$.

जहा बेलन का अर्धव्यास 'r' और उँचाई 'h' है ।

उदाहरण-1. एक 14 से.मी. चौडे आयताकार कागज के टुकडे को, इसकी चौडाई को अक्ष मानकर मोडने से 20 से.मी. अर्धव्यास का बेलन बना। बेलन (आकृति1) का आयतन ज्ञात कीजिए? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : आयत को चौडाई मे मोडकर बेलन बनाया गया । इसलिए कागज के टुकडे की चौडाई, बेलन की उँचाई होगी। बेलन का अर्धव्यास = 20 से.मी. है।



आकृति 1

बेलन की उँचाई $= h = 14$ से.मी.

अर्धव्यास $(r) = 20$ से.मी.

बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$$= 17600 \text{ से.मी.}^3$$

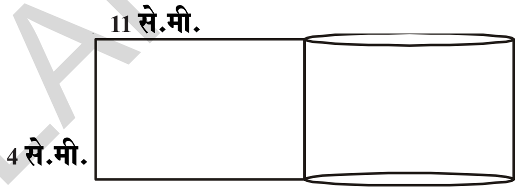
अतः बेलन का आयतन 17600 से.मी.^{3}

उदाहरण-2. एक 11 से.मी. × 4 से.मी. आयताकर कागज के टूकडे को एक कोर दूसरी कोर को न ढँकते हुए 4 से.मी. उँचाई के बेलन के रूप मे मोडा गया । बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए ।

हल : कागज के टुकडे की लम्बाई, बेलन के आधार की परिधि होगी और इसकी चौड़ाई, बेलन की उँचाई होगी।

माना कि बेलन का अर्धव्यास $= r$, और उँचाई $= h$

बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r = 11$ से.मी.



$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$\therefore \quad r = \frac{7}{4} \text{ से.मी.}$$

$$h = 4 \text{ से.मी.}$$

बेलन का आयतन $(V) = \pi r^2 h$

$$= \; = \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ से.मी}^3$$

$$= 38.5 \text{ से.मी}^3$$

उदाहरण–3. एक 44 से.मी. × 18 से.मी. आयताकर कागज के टुकडे को बेलन बनाने के लिए लम्बाई मे मोडा गया। माना कि बेलन ठोस (पूर्णतः भरा हुआ), इसका संपूर्ण तल का क्षेत्रफल और अर्धव्यास ज्ञात कीजिए ।

हल : बेलन की उँचाई $= 18$ से.मी.

बेलन का आधार की परिधि $= 44$ से.मी.

$$2\pi r = 44 \text{ से.मी.}$$

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ से.मी.}$$

बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + \text{h})$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(7+18) \text{ से.मी}^2$$

$$= 1100 \text{ से.मी}^2$$

उदाहरण-4. 5 मि.मी. मोटे वृत्ताकार चक्र (dices) एक के ऊपर एक इस प्रकार रखे कि 462 से.मी.^{2} वक्र धरातल का बेलन बना। यदि चक्र का अर्धव्यास 3.5 से.मी. हो तो चक्रोंकी संख्या बताईए।

हल : चक्र की मोटाई $= 5$ मि.मी. $= \frac{5}{10} = 0.5$ से.मी.

चक्र का अर्धव्यास = 3.5 से.मी.

बेलन का धरातल का क्षेत्रफल = 462 से.मी^{2}

$\therefore\ 2\pi\text{rh} = 462$ ..... (i)

माना कि, चक्रों की संख्या $= x$

$\therefore$ बेलन की उँचाई = h = चक्र की मोटाई × चक्रों की संख्या

$= 0.5\,x$

$\therefore\ 2\,\pi\text{rh} = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x$ ..... (ii)

(i) और (ii) से, हमें प्राप्त होता है

$$2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x = 462$$

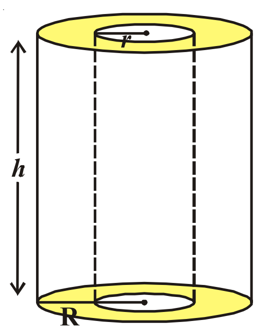
$$\therefore\ x = \frac{462 \times 7}{2 \times 22 \times 3.5 \times 0.5} = 42 \text{ चक्र}$$

उदाहरण-5. एक खोखले बेलन की बाहरी त्रिज्या 8 से.मी. और उँचाई 10 से.मी. तथा संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल 338 π से.मी.^{2} है। खोखले धातु के बेलन की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल : बाह्य त्रिज्या = R = 8 से.मी.

भीतरी त्रिज्या = r

उँचाई = 10 से.मी.



संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) = 338π से.मी.^{2}

परंतु संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) = बाह्य बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA)

+ भीतरी बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल (CSA)

+2+ आधार के बलय (ring) का श्रेत्रफल

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi\,(R^2 - r^2)$

$= 2\pi\,(Rh + rh + R^2 - r^2)$

$\therefore\ 2\pi\,(Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\,\pi$

$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Rightarrow\ (r - 5)^2 = 0$

$\therefore\ r = 5$

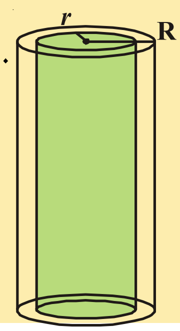
$\therefore$ धातु की मोटाई $= R - r = (8 - 5)$ से.मी. $= 3$ से.मी.

इन्हें हल कीजिए

1. बेलन की त्रिज्या दुगुना कर इसका वक्रतल का क्षेत्रफल वही रखते हुए, इसकी उँचाई में हुए अंतर को ज्ञात कीजिए । क्या होगा ?
2. एक गर्म पानी के निकाय (गिसर) 14 मी. लम्बाई के और 5 मी. व्यास के बेलनाकर पाईप से बना है। गर्म पानी के निकाय के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

अभ्यास - 10.2

1. एक बंद बेलनाकार टंकी जिसकी उँचाई 1.4 मी. आधार की त्रिज्या 56 से.मी. है, मोटे धातु के चादर (sheet) से बनी है । इसे कितनी धातु की चादर लगेगी? (वर्ग मीटर मे व्यक्त कीजिए)
2. एक बेलन का आयतन 308 से.मी^{3} और उँचाई 8 से.मी. है । इसका वक्र पृष्ठ और संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए ।
3. एक 22 से.मी. × 15 से.मी. × 7.5 से.मी. भुजाओं वाले धातु के घनाभ को गलाकर 14 से.मी. ऊँचा बेलन बनाया जाता है । इसकी त्रिज्या क्या हीगी?
4. एक ऊपरी पानी की टंकी बेलनाकार है जिसकी क्षमता 61.6 क्यु. मी. लीटर है । टंकी का व्यास 5.6 मी. है । टंकी की उँचाई ज्ञात कीजिए ।
5. एक धातु की नली 77 से.मी. लम्बी है । इसके अनुप्रस्थ का भीतरी व्यास 4 से.मी. और बाहरी व्यास 4.4 से.मी. (आकृती देखिए) इसको ज्ञात कीजिए।



   (i) भीतरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) बाहरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (iii) संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

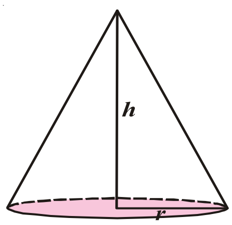
6. एक 56 से.मी. व्यास का बेलनाकार स्तम्भ 35 मी. ऊँचा है। एक इमारत के चारों ओर 16 स्तम्भ है। Rs. 5.50 प्रतिवर्म मी^{2}. की दर से सभी स्तम्भों के पार्श्व धरातल के क्षेत्रफल को रंगने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. एक रोलर का व्यास 84 से.मी. और लम्बाई 120 से.मी. है। एक खेल के मैदान को समतल बनाने के लिए यह 500 परिक्रमा करता है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल वर्ग मीटर मे ज्ञात कीजिए।
8. एक वृत्ताकार कूप (कुआँ) का भीतरी व्यास 3.5 मीटर और गहराई 10 मी. है। तो
   (i) इसका भीतरी वक्र धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) Rs. 40 प्रती वर्ग मी की दर से इस वक्रपृष्ट को प्लास्टर (पुताई) करने का व्यय ज्ञात कीजिए।
9. ज्ञात कीजिए :
   (i) एक बंद बेलनाकार पेट्रोल संग्रह - टंकी जिसका व्यास 4.2 मी. और उँचाई 4.5 मी. है, टंकी के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल
   (ii) यदि टंकी बनाते समय स्टील की चादर का $\frac{1}{12}$ भाग व्यर्थ हुआ है तो वास्तविक रूप से कितनी चादर का उपयोग हुआ।
10. एक बेलनाकार ड्रम की भीतरी त्रिज्या 28 से.मी. और उँचाई 2.1 मी. है और यह एकओर से खुला है। ड्रम मे तुम कितना पानी संग्रह कर सकते हो। लीटर मे व्यक्त कीजिए। (1 लीटर = 1000 cc.)
11. एक बेलन का वक्र धरातल का क्षेत्रफल 1760 से.मी.^{2} और आयतन 12320 से.मी.^{3} है। इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए।

10.4 लम्ब वृत्तिय शंकु (Right Circular Cone)

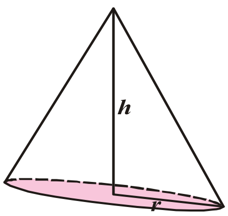



ऊपर की आकृतीयों को ध्यान में देखिए और इसका कौनसे ठोस आकार के साथ साम्य पाया जाता है।यह शंकु के आकार मे है।

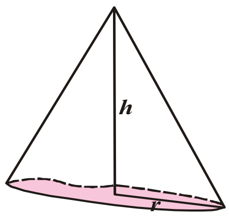
निम्न शंकुओं को ध्यानपूर्वक देखिए :



(i)



(ii)



(iii)

(i) इन शंकुओं मे कौन से समान गुणधर्म तुम्हे ज्ञात है?

(ii) तुमने इन शंकुओं मे क्या अंतर पाया?

आकृति (i) मे पार्श्व पृष्ट वक्र है और आधार वृत्ताकार है। शंकु का शीर्ष और वृत्ताकार आधार का केंद्र जोडनेवाला रेखाखण्ड (ऊर्ध्वाधर उँचाई), इसके आधार के अर्धव्यास का लम्ब होता है। इस प्रकार का शंकु, लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

आकृती (ii) में यद्यपि इसका आधार वृत्ताकार है, परन्तु इसकी ऊर्ध्वाधर उँचाई शंकु के अर्धव्यास पर लम्ब नही है।

इस प्रकार के शंकु लम्ब वृत्तीय शंकु नही होते है।

आकृति (iii) में यद्यपि ऊर्ध्वाधर उँचाई, आधार पर लम्ब है परन्तु आधार वृत्ताकार नही है।

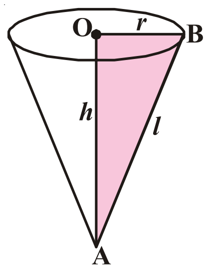
इसलिए यह शंकु, लम्ब वृत्तीय शंकु नही है।

10.4.1 शंकु की तिर्यक उँचाई (Slant Height of the Cone)

संलग्न आकृती (शंकु) में, $\overline{OB}$ पर $\overline{AO}$ लम्ब है।

ΔAOB समकोण त्रिभुज है।

शंकु की उँचाई (h) $\overline{AO}$ है और शंकु का अर्धव्यास (r) $\overline{OB}$ है।



ΔAOB से

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (AB तिर्यक उँचाई = l कहलाती है)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

क्रियाकलाप

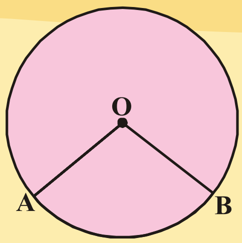
वृत्तखण्ड से शंकु बनाना

सुचनाओं को समझिए और आकृति मे बताये जैसे कीजिए।

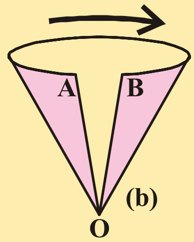
(i) मोटे कागज पर वृत्त बनाईए। आकृति (a)

(ii) इसमे से वृत्तखण्ड AOB काटिए। आकृती (b).

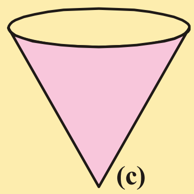
(iii) A, B सिरों के एक दूसरे के नजदीक धीरेसे मोडिए और AB मिलाईए। स्मरण रखिए, A और B एक ऊपर दूसरे से नही ढंकना चाहिए। A, B जोडने पर उन्हे सेलो टैप से चिपकाईए। आकृति (c).



(a)



(b)

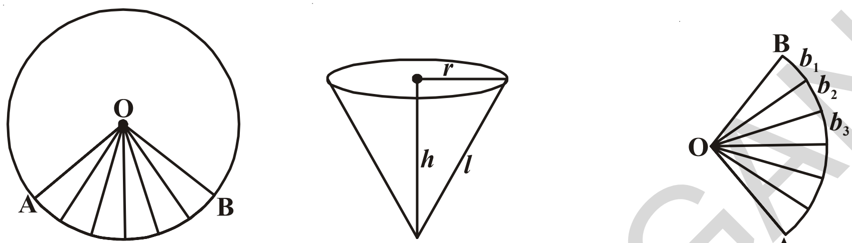

(c)

(iv) कौनसा आकार तुम्हे प्राप्त हुआ?

क्या वह लम्ब वृत्तीय शंकु है?

शंकु बनाते समय 'OA' और 'OB' भुजा का क्या हुआ, ध्यान से देखिए। और वृत्तखण्ड के चाप AB की लम्बाई के भी ध्यानपूर्वक देखिए।

10.4.2 शंकु का वक्रतल का क्षेत्रफल (Curved Surface Area of the Cone)



(i) (ii) (iii)

क्रिया कलाप मे हमने कागज से बनाया हुआ लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ट ज्ञात करेंगे।

वृतखण्ड के शंकु मे मोडते समय तुमने देखा कि वृतखण्ड के OA, OB एक दूसरे से जुडते है और वह शंकु की तिर्यक उँचाई बनती है, जब कि $\overset{\frown}{AB}$ की लम्बाई शंकु के आधार की परिधि होती है।

अब शंकु को खोलिए और वृत्तखण्ड AOB को आकृति मे बताये जैसा जितना तुम कर सकते हो, उतना काटिए। तत्पश्चात तुम देख सकते हो कि काटा हुआ प्रत्येक भाग एक छोटा त्रिभुज है जिसका आधार b_1, b_2, b_3 .... अदि है और उँचाई 'l' तिर्यक उँचाई के बराबर होगी।

यदि हम इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते है और इन्हे मिलाने पर, यह वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल रहता है। हमे पता है कि वृत्तखण्ड से शंकु बना,

अतः वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल, इससे बनाये गये शंकु के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

शंकु का क्षेत्रफल = त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

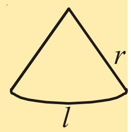
$= \frac{1}{2}l$ (A से B तक के वक्रीय भाग की लम्बाई

अथवा शंकु के आधार की परिधि)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ $(\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, जहाँ जैसे $\overset{\frown}{AB}$ से वृत्त बनता है।

इसकी कोशिश कीजीए

वृत्ताकार कागज के टुकडे से एक 'r' त्रिज्या का वृत्तखण्ड काटिए जिसके चाप की लम्भाई 'l' है। इसे शंकु के आकार मे मोडिए। इसके वक्रपृष्ट के क्षेत्रफल का सूत्र $A = \pi rl$ को तुम कैसे व्युत्पन्न कर सकते हो?



इस तरह शंकु का पार्श्व तलीय क्षेत्रफल अथवा वक्रतल का क्षेत्रफल $= \pi rl$

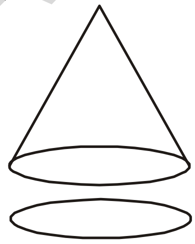
जहाँ शंकु की तिर्यक उँचाई 'l' और त्रिज्या 'r' है ।

10.4.3 शंकु का संपूर्ण तलीय क्षेत्रफल (Total Surface Area of the Cone)

यदि शंकु के आधार को उसके आकार के रूप मे सम्मिलित करना है, हमे एक वृत्त की आवश्यकता है जिसकी त्रिज्या, शंकु के त्रिज्या के बराबर हो ।

शंकु का संपूर्ण तल कैसे प्राप्त करते है? संपूर्ण तल प्राप्त करने के लिए कितने तल तुम्हे मिलाना होंगे?

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$



शंकु का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = इसके आधार का क्षेत्रफल + वक्र तल का क्षेत्रफल

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r\,(l + r)$$

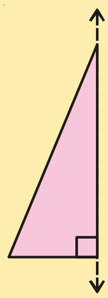
शंकु का संपूर्णतल का क्षेत्रफल= $\pi r\,(l + r)$

जहाँ शंकु की त्रिज्या 'r' और तिर्यक उँचाई 'l' है ।

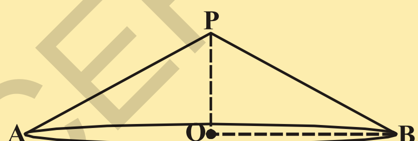
प्रयत्न कीजीए

1. एक समकोण काटिए । समकोण बनाने वाली भुजाओं में से किसी एक भुजा के साथ तार बाँधिए, आकृति मे दिखाये जैसे तार के दोनों ओर कसकर तुम्हारे हाथो से पकडिए और निश्चित वेग से घुमाईए ।

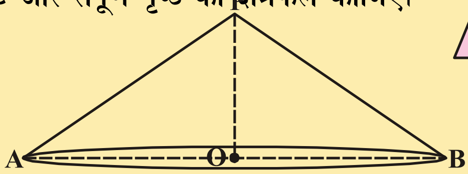
   तुम क्या देखते हो?



2. निम्न में से प्रत्येक लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ट और संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल कीजिए।



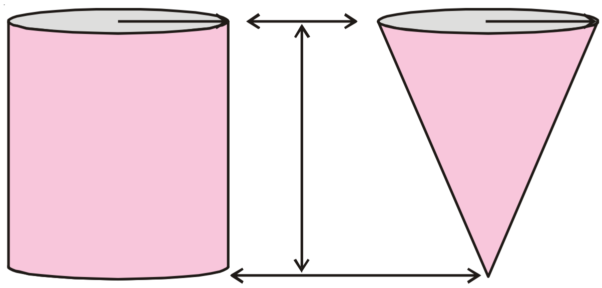
OP = 2 से.मी. OB = 3.5 से.मी.



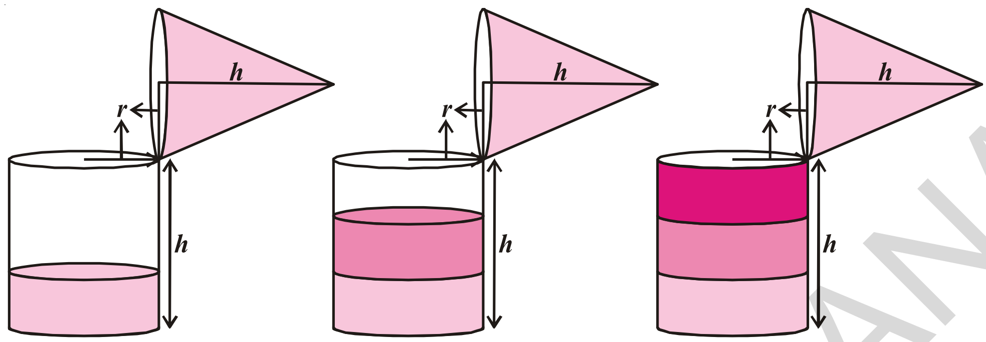
OP = 3.5 से.मी. OB = 10 से.मी.

आकृति (i)

10.4.4 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन (Volume of a right circular cone)



बराबर (एक समान) अर्धव्यास और उँचाई वाले खोखला बेलन और खोखला शंकु बनाईए और निम्न लिखित प्रयोग कीजिए जो हमे शंकु का आयतन ज्ञात करने में उपयुक्त होगा ।



i. शंकुआकार पात्र मे पानी किनारे तक लबालब भरिए और खोखले बेलन मे उंडेल दीजिए जिस से बेलनाकार पात्र का केवल कुछ भाग भरोगा ।

ii. पुनः शंकु पानी से लबालब भरिए और बेलन मे उंडेलिए, हम देखते है कि अभी भी बेलनाकार पात्र भरा नही ।

iii. जब शंकु तीसरी बार पानी से भरा और बेलनाकार पात्र में रिक्त किया, बेलनाकार पात्र पूर्णतः भरा या नही, ध्यानपूर्वक देखिए ।

ऊपरोक्त प्रयोग से क्या तुम शंकु के आयतन और बेलन के आयतन मे कुछ संबंध ज्ञात करते हो?

हम कह सकते कि तीन बार शंकु का आयतन से बेलन का एक आयतन होता है जब दोनों का एक समान आधार और समान उँचाई होती है ।

अतः शंकु का आयतन, बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है ।

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

जहाँ शंकु के आधार की त्रिज्या 'r' और उँचाई 'h' है ।

उदाहरण-6. एक शकुआकार भुट्टे (आकृति देखिए) के चौडे सिरे की त्रिज्या 1.4 से.मी. और लम्बाई (उँचाई) 12 से.मी. है । यदि भुट्टे के प्रत्येक 1से.मी.^{2} पृष्ट पर औसत चार मकई के दाने हो तो पूरे भुट्टे पर लगभग कितने दाने होंगे?

हल : यहा $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}\, cm.$

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ cm. (से.मी.)

इसलिए भट्टे का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08$ से.मी.^{2}

$= 53.15$ से.मी.^{2}

$= 53.2$ से.मी.^{2} (लगभग)

भुट्टे के 1 से.मी.^{2} पृष्ठ पर मकई के दानों की संख्या $= 4$.

इसलिए भट्टे के पूर्ण वक्रीय पृष्ट पर दानों की संख्या

$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ (लगभग)

अतः भुट्टे पर मकई के दाने लगभग 213 रहेंगे ।

उदाहरण-7. शंकु का अर्धव्यास 5.6 से.मी. और 158.4 से.मी.^{2} है तो इसकी तिर्यक उँचाई और ऊर्ध्वाधर उँचाई ज्ञात कीजिए ।

हल : अर्धव्यास $= 5.6$ से.मी., ऊर्ध्वाधर उँचाई $= h$, तिर्यक उँचाई $= l$

शंकु का वक्र पृष्ट (CSA) $= \pi r l = 158.4$ से.मी.^{2}

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ से.मी.}$$

हम जानते है $l^2 = r^2 + h^2$

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05$ से.मी. (लगभग)

उदाहरण-8. एक तंबू का नीचे का हिस्सा बेलनाकार और ऊपरी भाग शंकु के आकार का है । इसके आधार का व्यास 24 मी. और बेलन की उँचाई 11 मी. तथा शंकु का शीर्ष बेलन से 5 मी. ऊपर है । यदि कैनवस का दर ₹10 प्रति वर्ग मीटर हो तो तंबू बनाने के लिए कितना खर्च होगा?

हल : बेलन के आधार का व्यास = शंकु का व्यास = 24 मी.

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $= 12$ मी.

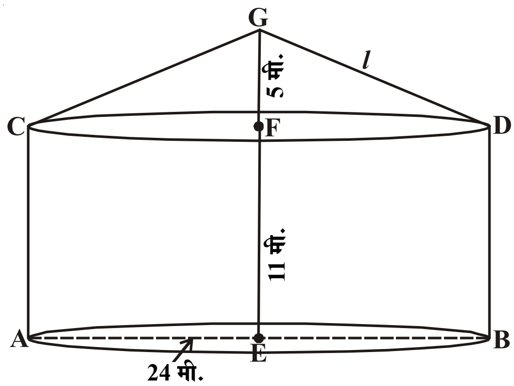
बेलन की उँचाई $= 11$ मी. $= h_1$

शंकु की उँचाई $= 5$ मी. $= h_2$

माना कि शंकु की तिर्यक उँचाई 'l' है ।

l = GD = $\sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{12^2+5^2}$ = 13 मी.

अभीष्ट कैनवस का क्षेत्रफल = बेलन का वक्र तल + शंकु का वक्र तल



$= 2\pi r h_1 + \pi r l$

$= \pi r\,(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2\times11+13)$ मी.^{2}

$= \frac{22\times12}{7} \times 35$ मी.^{2}

$= 22 \times 60$ मी^{2}

= 1320 मी.^{2}

कैनवस कादर = ₹10 प्रती वर्ग मी^{2}

$\therefore$ कैनवस का का मूल्य = दर × कैनवस का क्षेत्रफल

= ₹10 × 1320

= ₹13,200.

उदाहरण-9. शिविर के लिए सेना द्वारा 3 मी. ऊँचा शंकुआकार डेरा खडा किया गया जिसके आधार का व्यास 8 मी. है।

(i) यदि कैनवस का मूल्य ₹ 70 प्रति वर्ग मी 1 हो तो डेरा बनाने के लिए लगनेवाले कैनवस का मूल्य

(ii) यदि प्रत्येक व्यक्ति को 3.5 मी^{3} हवा लगती हो तो डेरे मे कितने व्यक्ति बैठ सकते है?

हल: डेरे का व्यास = 8 मी.

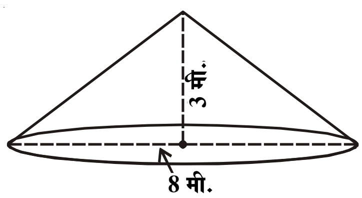
$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ मी.

उँचाई = 3 मी.

तिर्यक उँचाई (l) = $\sqrt{h^2+r^2}$

$= \sqrt{3^2+4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ मी.



$\therefore$ डेरे का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}$ मी.^{2}

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{352}{7} \text{ मी.}^3$$

(i) डेरा बनाने के लिए लगने वाले कैनवस का मूल्य

= वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल × प्रति इकाई मूल्य

$$= \frac{440}{7} \times 70$$

= ₹4400

(ii) डेरे में बैठ सकने वाले व्यक्तिओं की संख्या

$$= \frac{\text{शंकुआकार डेरे का आयतन}}{\text{प्रत्येक व्यक्ति के लिए लगनेवाली हवा}}$$

$$= \frac{352}{7} \div 3.5$$

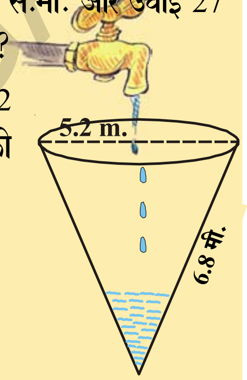
$$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$$

= 14 व्यक्ति (लगभग)

अभ्यास - 10.3

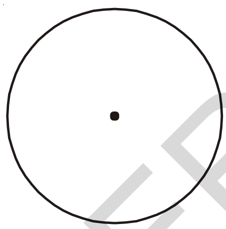
1. एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 38.5 से.मी.^{2} और आयतन 77 से.मी.^{3} है। इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक शंकु का आयतन 462 मी.^{3} और आधार की त्रिज्या 7 मी. है। इसकी उँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक शंकु का वक्र पृष्ट 308 से.मी.^{2} और तिर्यक उँचाई 14 से.मी. है। ज्ञात कीजिएः
   (i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल
4. एक शंकु के संपूर्णतल के रंगाई का मुल्य, 25 पैसे प्रती से.मी.^{2} की दर से ₹176 लगता है। यदि इसकी तिर्यक उँचाई 25 से.मी. होतो शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
5. एक 15 से.मी. अर्धव्यास के वृत्त मे से 216° कोण का वृत्तखण्ड काटा गया और इसकी परिबन्ध त्रिज्याओं को शंकु आकार में मोडा गया। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक डेरे की उँचाई 9 मी. और आधार का व्यास 24 मी. है। इसकी तिर्यक उँचाई क्या होगी? इसे बनाने के लिए लगनेवाले कैनवस कपडे का मूल्य ज्ञात कीजिए यदी इसका दर ₹14 प्रती वर्ग मीटर है।

7. एक शंकु का वक्र पृष्ट $1159\frac{5}{7}$ से.मी.^{2} और इसके आधार का क्षेत्रफल $254\frac{4}{7}$ से.मी.^{2} है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
8. एक डेरा 4.8 मी. ऊँचाई तक बेलन के आकार का है और इसके ऊपर शंकु के आकार का है। आधार की त्रिज्या 4.5 मी. और डेरे की कुल उँचाई 10.8 मी. है। डेरा बनाने के लिए कितने वर्ग मी. कैनवस लगेगा, ज्ञात कीजीए।
9. एक 8 मी. ऊँचा और जिसके आधार का आर्धव्यास 6 मी. है ऐसा शंकुआकार तंबू बनाने के लिए 3 मी. चौडाई के कपड़े की कीतनी आवश्यकता होगी? मानिए की किनारों की सिलाई के लिए और कटाई के समय अपव्यय होनेवाला कुल कपडा लगभग 20 से.मी. ($\pi = 3.14$ लीजिए)
10. एक जोकर की टीपी लम्ब वृत्तीय शंकु के आकार की है जिसके आधार की त्रिज्या 7 से.मी. और ऊँचाई 27 से.मी. है। ऐसी 10 टोपियाँ बनाने केलिए कितने क्षेत्रफल का शीट (कपडा) लगेगा ?
11. संलग्न आकृति में बताये जैसा एक शंकुआकार पात्र जिसके आधार का व्यास 5.2 से.मी. तथा उसकी तीर्यक ऊँचाई 6.8 से.मी. है जिसमें 1.8 मी.^{3} प्रती मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यह पात्र कितने समय मे भरेगा?



12. दो सादृश शंकु के आयतन 12π घन इकाईयाँ और 96π घन इकाईयाँ है। यदी छोटे शंकु का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 15π वर्ग इकाईयाँ है, तो बडे शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.5 गोला (Sphere)


(i)


(ii)


(iii)

ऊपर की सभी आकृतियों से तुम भली-भांति परिचित हो। क्या तुम इनमे अंतर जानते हो?

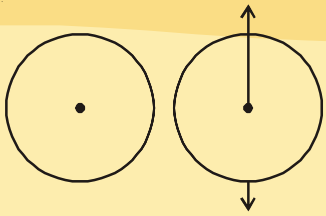
आकृति (i) वृत्त है। इसे तुम आसानी से कागज पर उतार सकते है। क्योंकि यह समतलीय आकृती है।

वृत्त समतलीय बंद आकृती है जिसका प्रत्येक बिंदु किसी निश्चित बिंदु (केंद्र) से समदूरी पर (अर्धव्यास) होता है।

ऊपर की शेष आकृतियाँ ठोस है। ये ठोस आकार मे वृत्ताकार है और यह गोले कहलाते है। गोला एक त्रिविमीय आकृति है जिसके सभी बिंदु अवकाश में रहते है और जो किसी निश्चित बिंदु से, निश्चत दूरी पर रहते है। यह निश्चत बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। गोले के पृष्ट पर स्थित किसी भी बिंदु की केंद्र से दूरी, इसकी त्रिज्या होती है।

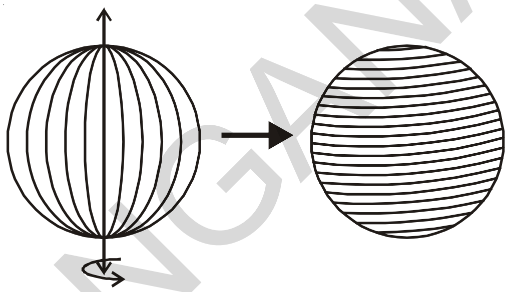
क्रिया कलाप

एक मोटे कागज पर वृत्त खींचिए और इसे निपुणता से काटीए। इसके व्यास के साथ एक तार चिपकाईए अपने हाथों से तार के दोनों सिरे कसकर पकडिए और निश्चित वेग के साथ घुमाईए और इस तरह बनी हुई आकृति को ध्यान से देखिए।



10.5.1 गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल

(Surface Area of a Sphere)



निम्न लिखित क्रिया कलाप द्वारा आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

आकृति मे बताये जैसा टेनिस का गेंद लीजिए और गेंद के चारों ओर तार लपेटिए,तार को स्थान पर रखने के लिए अलपीन का उपयोग कीजिए। तार को प्रारंभिक और अंतिम सिरे को चिन्हित कीजिए। धीरे से गोले के पृष्ठ से तार को निकाल लीजिए।

गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। चित्रों मे बताये जैसे गेंद के त्रिज्या के बराबर त्रिज्या के चार वृत्त बनाईए। गेंद के चारों ओर लपेटे हुए तार से एक
के बाद एक वृत्त भरना शुरु कीजिए।

तुम क्या देखते हो?

तार, जो गोले के पृष्ठ पर (गेंद पर) पूर्णरूप से आच्छादित थी, चारों वृत्तों को पूरा भरने के लिए उपयोग मे लायी गई। सभी वृत्तों की त्रिज्या, गोले की त्रिज्या के समान ली गई।

इस से हम समझते है कि त्रिज्या (r) के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल, त्रिज्या (r) के वृत्त के क्षेत्रफल के चौगुना है।

गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल $= 4 \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 4\pi r^2$

$\therefore$ **गोले का वक्रधरातल क्षेत्रफल** $= 4\pi r^2$

जहाँ गोले की त्रिज्या 'r' है।

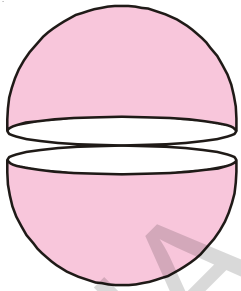
इसकी कोशिश कीजीए

क्या तुम किसी दूसरे विधि से गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है?

10.5.2 अर्ध गोला (Hemisphere)

एक ठोस गोला लीजिए और इसके केंद्र से गुजरने वाले किसी समतल से काटिए। चित्र की भांति, गोला दो बराबर भागों मे विभाजित होता है। प्रत्येक भाग अर्धगोला कहलाता है।

गोले का केवल एक वक्रतल रहता है । यदि यह दो बराबर भागों मे विभाजित कियागया, तब इसका वक्रीय फलक भी दे बराबर वक्रीय फलकों मे विभाजित होता है ।



अर्ध गोले के वक्र तल का क्षेत्रफल के बारे मे तुम क्या सोचते हो?

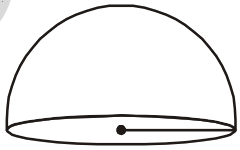
स्पष्टतः,

अर्ध गोले के वक्र धरातल का क्षेत्रफल, गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के आधे के बराबर है ।

इसलिए अर्ध गोले का वक्र तल $= \frac{1}{2}$ गोले का वक्र पृष्ठ

$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

$= 2\pi r^2$



$\therefore$ **अर्ध गोले का वक्रतल का क्षेत्रफल** $= 2\pi r^2$

अर्ध गोले का आधार एक वृत्ताकार क्षेत्र होता है ।

इसका क्षेत्रफल $= \pi r^2$

दोनों, वक्रतल और आधार का क्षेत्रफल का योग करने से, हमें अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ट प्राप्त होता है ।

अर्ध गोले का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल= इसका वक्र पृष्ठ + इसके आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$.

$\therefore$ **अर्ध गोले का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$.

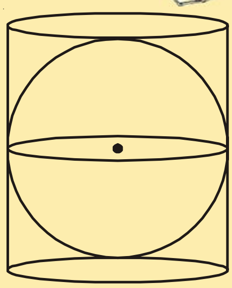
इन्हें हल कीजीए

1. एक लम्ब वृत्तीय बेलन पूर्णतः (just) आबद्ध है ।

ज्ञात कीजिए (i) गोले का वक्र तल का क्षेत्रफल

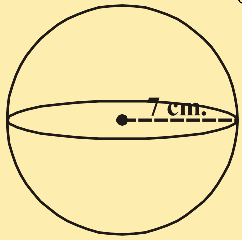
(ii) बेलन का वक्र तल का क्षेत्रफल

(iii) (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों मे अनुपात

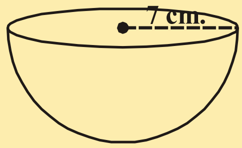


2. निम्न लिखित आकृतियों मे प्रत्येक का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i)

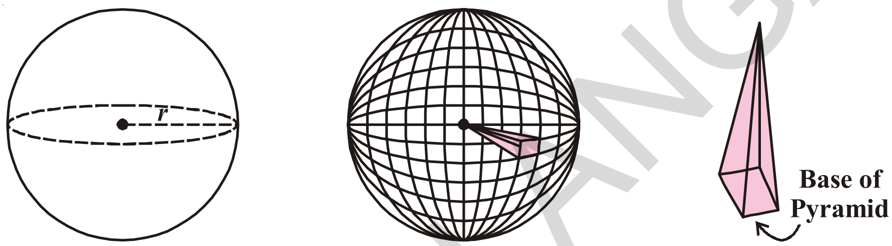


(ii)



10.5.3 गोले का आयतन (Volume of a Sphere)

गोले का आयतन ज्ञात करने के लिए, कल्पना कीजिए कि गोला, बहुत अधिक संख्या में सर्वांगसम पिरामिड से बना हुआ है, जहाँ सभी पिरामिड के शीर्ष, गोले के केंद्र पर मिलते है जैसे कि आकृति मे दर्शाया है ।



(i) (ii) (iii)

निम्न सोपानों को समझिए:

1. आकृति (i) के अनुसार माना कि ठोस गोले की त्रिज्या 'r' है ।
2. कल्पना कीजिए कि त्रिज्या 'r' का गोला, आकृति (ii) मे बताए जैसे बराबर माप के (n) पिरामिडो से बना हुआ है ।
3. इनमे से एक भाग (पिरामिड) लीजिए । प्रत्येक पिरामिड का आधार होता है और माना कि पिरामिड के आधार A_1, A_2, A_3 ..... है ।

   पिरामिड की उँचाई, गोले की त्रिज्या के बराबर होती है, तब

   एक पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार क्षेत्रफल $\times$ उँचाई

   $$= \frac{1}{3} A_1 r$$

4. जैसे कि कुल पिरामिडों की संख्या 'n' है, तब

   'n' पिरामिडों का आयतन $= \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + \ldots\ldots$ n बार

   $= \frac{1}{3} r\,[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots$ n बार$]$

$$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots.. n$ बार
$= $ 'n' पिरामिड के पृष्ठीय क्षेत्रफल

5. ये सभी पिरामिडों के आयतन का योग, गोले के आयतन के बराबर है और सभी पिरामिडों के आधार के क्षेत्रफलों का योग, गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के निकटतम है। (अर्थति $4\pi r^2$).

इसलिए, गोले का आयतन $= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाईयाँ

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ गोले का अर्धव्यास 'r' है।

तुम कैसे अर्ध गोले का आयतन ज्ञात करोगे? यह गोले के आयतन के आधा होता है।

$\therefore$ **अर्ध गोले का आयतन** $= \frac{1}{2}$ x गोले का आयतन

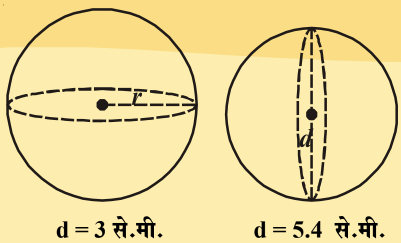
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

[**संकेत** : तरबुज अथवा इसके जैसे और किसी का उपयोग करते हुए तुम इन सूत्रों को व्युत्पन्न करने की कोशिश कीजिए]

इन्हें हल कीजिए

1. संलग्न आकृतियों मे दिए हुए गोले का आयतन ज्ञात कीजीए।
2. 6.3 से.मी. अर्धव्यास के गोले का आयतन ज्ञात कीजीए।



उदाहरण-10. यदि गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 से.मी.^{2}, है तो इसका अर्धव्यास ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ से.मी.}$$

उदाहरण-11. एक अर्ध गोलाकार कटोरी पत्थर से बनी हुई है जिसकी मोटाई 5 से.मी. है। यदि भीतरी त्रिज्या 35 से.मी. है, कटोरी का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि बाहरी अर्धव्यास R और भीतरी अर्धव्यास r है।

वलय की मोटाई $= 5$ सी.मी.

$\therefore \ R = (r + 5)$ से.मी. $= (35 + 5)$ से.मी. $= 40$ से.मी.

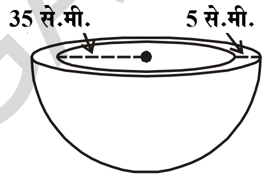
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाहरी अर्धगाले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + भीतरी अर्ध गोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्र फल + वलय का क्षेत्रफल

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$

$\frac{22}{7}(3R^2 + R^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2)$

$\frac{6025 \times 22}{7} = 18935.91$ से.मी.^{2} (लगभग).



उदाहरण-12. एक भवन के गुम्बद को रंगना है (आकृति 1 देखिए). यदि गुम्बद के आधार की परिधि 17.6 मी. है तो इसको रंगने का खर्च ज्ञात कीजीए यदि रंगने की दर 5 रु. प्रती 100 से.मी.^{2} है।

हल : चूँकि गुम्बद को केवल गोलाकार तल को रंगना है, हमे अर्ध गोले का वक्रिय तल का क्षेत्रफल, जहाँ तक रंगाई करना जरूरी है वहाँ तक, ज्ञात करना आवश्यक है।

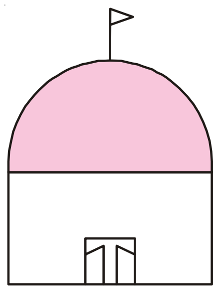
इसलिए, गुम्बद का अर्धव्यास $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$

$= 2.8$ मी.

गुम्बद का वक्रतल का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$

$= 49.28$ मी.^{2}



आकृति 1

अब, 100 से.मी.^{2} रंगने के लिए खर्च = ₹ 5

इसलिए 1मी.^{2} रंगने के लिए लिए खर्च= ₹ 500

अतः पूर्ण गुम्बद की रंगने के लिए खर्च

= ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24640

उदाहरण-13. एक खोखले गोला, जिसमे सर्कस मोटर साइकिल चालक उसके करतब प्रदर्शित करता हे, का व्यास 7 मी. है। मोटर साइकिल चालक को दौडने के लिए उपलब्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का व्यास = 7 मी. इसलिए, अर्धव्यास 3.5 मी.

अतः मोटर साइकिल चालक को दौडने के लिए उपलब्ध जगह है। गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा और वह,

$$4\pi r^2 = 4\times\frac{22}{7}\times3.5\times3.5 \text{ मी}^2.$$

$$= 154 \text{ मी}^2.$$

उदाहरण-14. एक यूँकी शॉटपुट (गेंद) 4.9 से.मी. अर्धव्यास वाला धातु का बना गोला है। यदि धातु का घनत्व 7.8 ग्राम प्रती से.मी.^{3} है तो शॉटपुट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : यूँकी शॉटपुट एक धातु का बना टोस गोला है, इसका द्रव्यमान, इसके आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होगा। गोले का आयतन ज्ञात करना, हमे आवश्यक है।

अब, गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times4.9\times4.9\times4.9 \text{ से.मी.}^3$$

$$= 493 \text{ से.मी.}^3 \text{ (निकटतम)}$$

1 से.मी.^{3} धातु का द्रव्यमान 7.8 ग्राम है।

इसलिए, शॉटपुट का द्रव्यमान = 7.8×493 ग्राम

$= 3845.44g = 3.85$ कि. ग्राम (निकटतम)

उदाहरण-15. एक अर्ध गोलाकार कटोरी का अर्धव्यास 3.5 से.मी. है। कटोरी मे भरे हुए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए?

हल : कटोरी मे भरे हुए पानी का आयतन = अर्ध गोले का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times3.5\times3.5\times3.5 \text{ से.मी.}^3$$

$$= 89.8 \text{ से.मी.}^3 \text{ (लगभग)}.$$

अभ्यास - 10.4

1. एक गोले का अर्धव्यास 3.5 से.मी. है । इसका पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक गोले का पृष्ठ $1018\frac{2}{7}$ वर्ग से.मी. है । इसका आयतन कीजिए ।
3. मानचित्र (ग्लोब) के भूमध्य विश्व की लम्बई 44 से.मी. है । इसका पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
4. एक गोलाकार गेंद का व्यास 21 से.मी. है । ऐसे 5 गेंद बनाने के लिए कितना चमडा (leather) लगेगा?
5. दो गोलें के त्रिज्याओं मे अनुपात 2 : 3 है । उनके पृष्टें मे और आयतनों मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
6. 10 से.मी. अर्धव्यास के अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)
7. एक गोलाकार गुब्बारे का व्यास, उसमे हवा भरने के कारण, 14 से.मी. से to 28 से.मी. बढता है । दोनों स्थितियों मे गुब्बारे के पृष्ठों का क्षेत्रफल मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
8. एक अर्ध गोलाकार पीतल की कटोरी 0.25 से.मी. मोटाई की बना है । कटोरी की भीतरी त्रिज्या 5 से.मी. है । कटोरी के बाहरी पृष्ठ और भीतरी पृष्ठ मे अनुपात ज्ञात कीजिए ।
9. एक शीश के गेंद का व्यास 2.1 से.मी. है । उपयोग मे लाये हुए शीशे का घनत्व 11.34 ग्राम प्रति से.मी.^{3} है । गेंद का वजन क्या होगा?
10. एक 5 से.मी. व्यास और $3\frac{1}{3}$ से.मी. ऊँचे धातु को बेलन के रूप में उसे गोले मे ढाला गया । गोले का व्यास क्या होगा?
11. 10.5 से.मी. व्यास के अर्ध गोलाकार बर्तन में कितने लीटर दूध रख सकते है ।
12. एक अर्ध गोलाकार कटोरी का व्यास 9 से.मी. है । 3 से.मी. व्यास और 3 से.मी. ऊँचाई वाले बेलनाकार बोतल में द्रव पदार्थ उंडेला गया । यदि द्रव पदार्थ से पूर्ण रूप से भरी हुई कटोरी से द्रव बोतल मे उंडेला गया तो कितनी बोतलो की आवश्यकता होगी।

हमने क्या सीखा?

1. घनाभ और घन यह नियमित सम पार्श्व (प्रिज्म) है जिसके 6 फलकोंमे से 4 पार्श्व फलक और आधार और शिर्ष रहते है ।
2. यदि घनाभ की लम्बाई l, चौडाई 'b' और उँचाई 'h' है तब

   घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + lh)$

   घनाभ का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\,h\,(l + b)$

   घनाभ का आयतन $= lbh$

3. यदी घन के कोर की लम्बाई 'l' इकाईयाँ है, तब

घन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$

घन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4l^2$

घन का आयतन $= l^3$

4. पिरामिड का आयतन, लम्ब प्रिज्म के आयतन का एक तिहाई रहता है यदि दोनों के आधार और उँचाई एक समान है।

5. बेलन एक ठोस है जिसमे वक्रीय पृष्ट के साथ दो वृत्ताकार सिरे रहते है।

6. यदि लम्ब वृतीय बेलन का अर्धव्यास 'r' और उँचाई 'h' है तब,

- बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
- बेलन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r (r + h)$
- बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

7. शंकु एक ज्यामितीय आकार की वस्तु है जिसमे आधार एक वृत्त है और ऊपरी सिरे पर शीर्ष है। यदि आधार के केंद्र और शीर्ष को जोडनेवाला रेखाखण्ड आधार पर लम्ब हो तो यह लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

8. शंकु के वृत्ताकार आधार पर स्थित किसी भी बिंदु से जोडनेवाली रेखा की लम्बाई, तिर्यक उँचाई (l) कहलाता है।

$l^2 = h^2 + r^2$

9. यदि शंकु का अर्धव्यास 'r', उँचाई 'h', तिर्यक उँचाई 'l' है तब,

- शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l$
- शंकु का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r (r + l)$

10. यदि बेलन और शंकु का समान आधार और समान उँचाई हो तब, शंकु का आयतन, बेलन के आयतन के एक तिहाई रहता है। अर्थात्

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

11. गोला एक बनायी हुई ज्यामितीय वस्तु है जहाँ अवकाश मे एक निश्चित बिंदु से, सभी बिंदुओं का समुच्चय सम दूरी पर रहते है। निश्चित बिंदु, गोले का केंद्र कहलाता है और निश्चित दूरी, गोले का अर्धव्यास कहलाती है।

12. यदि गोले का अर्धव्यास 'r' है तब,
   - गोले का पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$
   - गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

13. गोले के केंद्र से गुजरने वाला कोई समतल गोले को दो समान (बराबर) भागों मे विभाजित करता है, प्रत्येक भाग अर्ध गोला कहलाता है ।
   - अर्ध गोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$
   - अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3\pi r^2$
   - अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

क्या तुम जानते हो ?

8 × 8 जादूई वर्ग बनाना

बाँये आकृती मे समझाए जैसे, वर्गाकार ग्रिड मे, केवल 1 से 64 तक की संख्याएं अनुक्रम के रखिए। संकेतानुसार रेखा से चिन्हित कीजिए। नीचे का जादूई वर्ग प्राप्त करने के लिए रेखापर चिन्हित कोई भी अंक, उसके पूरक अंक के स्थान अदल-बदल कीजिए। (जादूई वर्ग के दो अंक पूरक कहलाते है यदि जादूई वर्ग के न्यूनतम और अधिक तम अंको के योग के समान इन दो अंको का योग होता है।)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

* जादूई वर्ग एक अंको की वर्ग के आकार में (array) है जिसमे प्रत्येक पंक्ति और स्तंभ के अंको का योग समान होता है। ऐसे और जादूई वर्गों को बनाने का प्रयत्न कीजिए।