अवकल समीकरण

Ex 12.1

निम्नलिखित अवकल समीकरण की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + \cos 2x$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + \cos 2x$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^1 y}{dx^1}\right)^1$$

अत: कोटि = 1, घात = 1

प्रश्न 2.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + \cos x$$

हल :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + \cos x$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^1$$

अत: कोटि = 2, घात = 1

प्रश्न 3.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

हल :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

अत: कोटि = 2, घात = 2

प्रश्न 4.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=2$$

हल :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+1=2\frac{dy}{dx}$$

y का उच्चतम अवकलज

$$=\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=\left(\frac{d^1y}{dx^1}\right)^4$$

अत: कोटि = 1, घात = 4

प्रश्न 5.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

हल :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

$$a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^3$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

अत: कोटि = 2, घात = 2

प्रश्न 6.

xdx + ydy = 0

हल :

xdx + ydy = 0

$$\Rightarrow \quad x + \frac{ydy}{dx} = 0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{dy}{d^1x} = \left(\frac{d^1y}{dx^1}\right)^1$$

अत: कोटि = 1, घात = 1

प्रश्न 7.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^5 = 0$$

हल :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^5 = 0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

अत: कोटि = 2, घात = 3

प्रश्न 8.

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{3}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y^2$$

हल :

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{3}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y^2$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3 = y^2\frac{dy}{dx}$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d^1y}{dx^1}\right)^2$$

अत: कोटि = 1, घात = 2

Ex 12.2

प्रश्न 1. वक्र कुल y = ax + $\frac{b}{x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : y = a + $\frac{b}{x}$ ....(i)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a + b\,(-1)\,x^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a - \frac{b}{x^2} \qquad \text{...(ii)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 - b\,[(-2)\,x^{-3}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x^2} \qquad \text{...(iii)}$$

समीकरण (iii) है।

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x} \qquad \text{...(iv)}$$

समीकरण (ii) से,

$$x\frac{dy}{dx} = ax - \frac{b}{x} \qquad \text{...(v)}$$

समीकरण (iv) व (v) को जोड़कर (i) घटाने पर

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} - y = \frac{2b}{x} + ax - \frac{b}{x} - ax - \frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} - y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 2. वक्र कुल $x^2 + y^2 = a^2$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 3. वक्र कुल $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ ....(i)

$$\frac{dy}{dx} = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x} \qquad \text{...(ii)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9Ae^{3x} + 25Be^{5x} \qquad \text{...(iii)}$$

समीकरण (i) का 15 गुना करके समीकरण (ii) में जोड़ने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 15y = 15Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 15Be^{5x} + 25Be^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 15y = 24Ae^{3x} + 40Be^{5x} \qquad \text{...(iv)}$$

समीकरण (iv) में से (ii) का 8 गुना घटाने पर,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 15y\right) - 8\frac{dy}{dx} = (24Ae^{3x} + 40Be^{5x}) - 8(3Ae^{3x} + 5Be^{5x})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 15y = 24Ae^{3x} - 24Ae^{3x} + 40Be^{5x} - 40Be^{5x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 15y = 0$$

यहीं अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 4. वक्र कुल $y = e^x(A \cos x + B \sin x)$

हल : $y = e^x(A \cos x + B \sin x)$ ......(i)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x(A \cos x + B \sin x) + e^x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y + e^x(-A \sin x + B \cos x) \qquad \text{...(ii)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - e^x(-A \cos x - B \sin x) + e^x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^x(A \cos x + B \sin x)$$
$$+ e^x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - y + \frac{dy}{dx} - y \qquad \text{(समीकरण (ii) से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 5. वक्र कुल y = a cos (x + b), जहाँ a और b स्वेच्छा अचर है, की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : y = a cos(x + b)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -a \sin(x + b)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos(x + b)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

Ex 12.3

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $y^2 = 4a(x + 1)$ अवकल समीकरण

$$y = \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$$

का हल है।

हल : $y^2 = 4a(x + 1)$ ...(i)

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad \text{...(i)}$$

$$\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 1 -. \left(\frac{2a}{y}\right)^2$$

$$= \frac{y^2 - 4a^2}{y^2} \quad \text{...(i)}$$

$$\left[2x\frac{dy}{dx}\right] = 2x.\frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \left[2x\frac{dy}{dx}\right] = \frac{4ax}{y} \quad \text{...(ii)}$$

$$y = \sqrt{4a(x+1)} \quad \text{...(iii)}$$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $y = ae^{-2x} + be^x$ अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

का हल है।

हल : $y = ae^{-2x} + be^x$ ....(i)

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{-2x} . -2 + be^x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -4ae^{-2x} + be^x \quad ...(ii)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -4a.e^{-2x} . (-2) + be^x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 8ae^{-2x} + be^x \quad ...(iii)$$

L.H.S.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y$$

$= (8ae^{-2x} + be^x) + (-4ae^{-2x} + be^x) - 2(2ae^{-2x} + be^x)$
$= (8ae^{-2x} - 4ae^{-2x} - 4ae^{-2x}) + (be^x + be^x - 2be^x)$
$= 0 + 0 = 0$
= R.H.S.
इति सिद्धम्

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{c-x}{1+cx}$ अवकल समीकरण $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + (1 + y^2) = 0$ का हल है।

हल :

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + (1 + y^2) = 0$$

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = -(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = -\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = -\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y = -\tan^{-1}x + \tan^{-1}c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y = \tan^{-1}c - \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{c-x}{1+cx}$$

तुलना करने पर,

y = $\frac{c-x}{1+cx}$

इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि y = a cos (log x) + b sin (log x) अवकल समीकरण

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

का हल है।

हल : दिया गया फलन

y = a cos (log x) + b sin (log x) ...(1)

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a\sin(\log x)}{x}+\frac{b\cos(\log x)}{x}$$

या $$x\frac{dy}{dx}=-a\sin(\log x)+b\cos(\log x)\quad ...(2)$$

समीकरण (2) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=-\frac{a\cos(\log x)}{x}-\frac{b\sin(\log x)}{x}$$

या $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=-[a\cos(\log x)+b\sin(\log x)]$$

$$=-y \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

या $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

∴ $$y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$$

अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ का हल है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि xy = log y + c अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}\,(xy\neq 1)$$

का हल है।

हल : दिया गया फलन

xy = log y + c ....(i)

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad xy\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - xy\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Rightarrow \quad (1 - xy)\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

अतः दिया गया फलन xy + log y + c,

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$ का हल है।

इति सिद्धम्

Ex 12.4

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1. $(e^y + 1) \cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

हल : दिया गया अवकल समीकरण

$(e^y + 1) \cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

या $$\frac{\cos x}{\sin x} dx + \frac{e^y}{e^y + 1} dy = 0$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int \cot x\, dx + \int \frac{e^y}{e^y + 1} dy = 0$$

या $\log \sin x + \log(e^y + 1) = \log C$

या $\log (\sin x(e^y + 1)) = \log C$

या $\sin (e^y + l) = C$

ओं अवकलन समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2. $(1 + x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

हल : $(1 + x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{y - x}{1 + xy} = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \frac{y - x}{1 + xy} = C \text{ तुलना से}$$

$\Rightarrow$ y − x = C(1 + xy)
यही अभीष्ट व्यापक हल है।

प्रश्न 3.
$(x + 1)\frac{dy}{dx} = 2xy$
हल :
$(x + 1)\frac{dy}{dx} = 2xy$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \frac{2x}{x+1}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \frac{2x+2-2}{x+1}dx$$

समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{y}dy = \int 2dx - \int\frac{2}{x+1}dx$$

log y = 2x − 2log (x + 1)+C
log y = 2[x − log (x + 1)] + C
अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x - x^2)$$

$$\Rightarrow \quad e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int e^y dy = \int\left(e^x + x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C$$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5. (sin x + cos x)dy + (cos x − sin x)dx = 0

हल : (sin x + cos x)dy + (cos x − sin x)dx = 0

$$\Rightarrow \quad dy = -\frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)}dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy = - \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}dx$$

⇒ y + log (cos x + sin x) = log C

⇒ log e^y + log (cos x + sin x) = log C

⇒ e^y + (sin x + cos x) = C

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{3\left(e^{2x} + e^{4x}\right)}{e^x + e^{-x}}dx$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{3\left(\frac{e^{2x} + e^{4x}}{2}\right)}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}dx$$

$$\Rightarrow \quad dy = 3\left(\frac{e^{3x}}{1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = 3\int e^{3x}dx = \frac{3e^{3x}}{3} + C$$

y = e^{3x} + c

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7. $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$

हल : $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$

$\Rightarrow \sec^2 x \tan y dy = -\sec^2 y \tan x dx$

$$\Rightarrow \frac{\tan y}{\sec^2 y} dy = -\frac{\tan x}{\sec^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{1}{\cos^2 y}} dy + \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = 0$$

$\Rightarrow \sin y \cos y \, dy + \sin x \cos x \, dx = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 y}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} = C_1$$

$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = 2C1$

$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = C$

प्रश्न 8.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$$

$(\sin y + y \cos y) dy = x (2 \log x + 1) dx$

$\Rightarrow \int \sin y dy + \int y \cos y dy = 2 \int x \log x dx + \int x dx$

$\Rightarrow -\cos y + y \sin y - \int 1.\sin y dy$

$$= 2\left[\log x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2} dx + \int x\, dx\right]$$

$\Rightarrow -\cos y + y \sin y + \cos y = x^2 \log x - \int x dx + \int x dx$

$\Rightarrow y \sin y = x^2 \log x + C$

यहीं अभीष्ट व्यापक हल है।

प्रश्न 9. $(1 + \cos x)\, dy = (1 - \cos x)\, dx$

हल : $(1 + \cos x)\, dy = (1 - \cos x)\, dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\tan^2\frac{x}{2}=\sec^2\frac{x}{2}-1$$

या $$dy=\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int dy=\int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\int\sec^2\frac{x}{2}dx-\int dx$$

या $$y=2\tan\frac{x}{2}-x+C$$

यही अवकल समीकरण का व्यापक हुल है।

प्रश्न 10.

$$\sqrt{1-x^6}\,dy=x^2dx$$

हल :

$$\sqrt{1-x^6}\,dy=x^2dx$$

$$\Rightarrow \quad dy=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$$

$$\Rightarrow \quad dy=\frac{x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int dy=\int\frac{x^2}{\left(1-\left(x^3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$\Rightarrow \quad y=\sin^{-1}(x^3)\times\frac{1}{3}+C$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)+C$$

यहीं अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

Ex 12.5

निम्नलिखित अवकलन समीकरण को हल कीजिए :

प्रश्न 1.

$$(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$$

हल :

दी गई अवकल समीकरण

$$(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 \qquad \ldots(1)$$

माना $x + y = u$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

समीकरण (1) से

$$u^2 \cdot \left(\frac{du}{dx} - 1\right) = a^2$$

$$\Rightarrow \quad u^2 \frac{du}{dx} - u^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad u^2 \frac{du}{dx} = a^2 + u^2$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u^2}{u^2 + a^2}\, du = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u^2 + a^2 - a^2}{u^2 + a^2}\, du = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \int 1 \cdot du - \int \frac{a^2}{u^2 + a^2}\, du = x + C$$

$$\Rightarrow \quad u-a^2\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)=x+C$$

$$\Rightarrow \quad u-a\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)=x+C[u=x+y \text{ रखने पर}]$$

$$\Rightarrow \quad x+y-a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)=x+C$$

$$\Rightarrow \quad y-a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)=C$$

$$\Rightarrow \quad y=a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)+C$$

$$\Rightarrow \quad y-C=a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-C}{a}=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y-C}{a}\right)=\frac{x+y}{a}$$

$$\Rightarrow \quad a\tan^{-1}\left(\frac{y-C}{a}\right)=x+y$$

या $$x+y=a\tan\left(\frac{y-C}{a}\right)$$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$$

माना $x+y+1=t$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{dy}{dx}+0=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t}{t+1}\, dt = dx$$

$$\Rightarrow \quad dt - \frac{1}{t+1}\, dt = dx$$

$$\Rightarrow \quad \int dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt = \int dx$$

$\Rightarrow t - \log(t + 1) = x + C_1$
$\Rightarrow (x + y + 1) - \log(x + y + 1 + 1) = x + C_1$
$\Rightarrow y + 1 - \log(x + y + 2) = C_1$
$\Rightarrow \log(x + y + 2) = (y + 1) + C_1$
$\Rightarrow \log(x + y + 2) = y + (C_1 + 1)$
$\Rightarrow e^{\log(x+y+2)} = e^{y+(C_1+1)}$
$\Rightarrow x + y + 2 = e^y(e^{(C_1+1)})$
$\Rightarrow x + y + 2 = e^y.C$

जहाँ $C = e^{(C_1+1)}$

अत: अभीष्ट हल $x + y + 2 = Ce^y$ है।

प्रश्न 3. cos (x + y)dy = dx

हल : माना $x + y = v$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos v \cdot \left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos v \,\frac{dv}{dx} = 1 + \cos v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos v\, dv}{1 + \cos v} = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+\cos v)-1}{1+\cos v}\, dv = dx \qquad \text{(ध्यान दें)}$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{1}{(1+\cos v)}\right] dv = dx$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2}v}\right] dv = dx$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}v\right] dv = dx$$

∴ समाकलन करने पर,

$$v - \tan \frac{1}{2} v = x + C$$

या $$x + y - \tan \frac{1}{2} v = x = C \qquad [\because v = x + y]$$

या $$y = \tan \frac{1}{2}(x+y) + C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$e^{x+y} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

हल : माना x + y = v

तब $$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = e^v$$

$$\Rightarrow \quad e^{-v}\, dv - dx = 0$$

∴ समाकलन करने पर,

$- e^{-v} - x = C_1$

$x + e^{-(x+y)} = C$

($\because$ v = x+y तथा $C = -C_1$)

यही अभीष्ट हुल हैं।

प्रश्न 5.

$(x + y) (dx - dy) = dx + dy$

हल :

$\Rightarrow (x + y) (dx - dy) = dx + dy$
$\Rightarrow (x + y)dx - (x + y)dy = dx + dy$
$\Rightarrow dy + (x + y)dy = (x + y) dx - dx$
$\Rightarrow [(1 + (x + y)]dy = (x + y - 1) dx$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

माना $x + y = v$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v-1}{v+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{v-1}{v+1} = \frac{v+1+v-1}{v+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v+1}{2v} dv = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} dv + \frac{1}{2v} dv = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \log v = x + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2} \log (x+y) = x + C_1$$

$\Rightarrow x + y + \log (x + y) = 2x + 2C_1$
$\Rightarrow \log (x + y) = 2x - x - y + 2C_1$
$\Rightarrow \log (x + y) = x - y + 2C_1$
$\Rightarrow \log (x + y) = x - y + C_1$

जहाँ $C = 2C_1$ है।

अत: अभीष्ट हल $x - y + C = \log (x + y)$ है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y}$$

हल : माना

x + y + 1 = v

$$1+\frac{dy}{dx}+0=\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}-1=\frac{v}{v-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{v-1}+1$$

$$=\frac{v+v-1}{v-1}=\frac{2v-1}{v-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v-1}{2v-1}\ dv=dx$$

$$\Rightarrow \frac{(v-1/2)-1/2}{(2v-1)}\ dv=dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{(2v-1)}{(2v-1)}dv-\frac{1}{2}\frac{1}{(2v-1)}dv=dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{2}dv-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(v-1/2)}dv=\int dv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v-\frac{1}{4}\log(v-1/2)=x+C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{2}-\frac{\log(v-1/2)}{4}=x+C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y+1}{2}-x=\log\frac{x+y+1-1/2}{4}+C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\log(x+y+1/2)}{4}+C$$

$$2(y-x)=\log(1+2x+2y)+C_1$$

जहाँ $C_1=4C-2$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$x + y = \sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

हल : दी गई अवकल समीकरण

$$x + y = \sin^{-1}\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \quad \sin(x + y) = \frac{dy}{dx} \quad \ldots(1)$

माना $\quad x + y = u$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

समीकरण (1) से

$$\sin u = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \sin u$$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+\sin u}\, du = \int dx$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1-\sin u}{1+\sin^2 u}\, du = x + c_1$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1-\sin u}{\cos^2 u}\, du = x + C_1$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 u} du - \int \frac{\sin u}{\cos^2 u} = x + C_1$

$\int \sec^2 u\, du - \int \sec u \tan u\, du = x + C_1$

$\tan u - \sec u = x + C_1$ [$u = x + y$ रखने पर]

$\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + C_1$

या $x = \tan(x + y) - \sec(x + y) + C$

जहाँ $C = -C_1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y}+1$$

माना $$x-y=v$$

$$1-\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1-\frac{dv}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$1-\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}+1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{-dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$\Rightarrow$ $$-v\,dv = dx$$

$\Rightarrow$ $$-\int v\,dv = \int dx$$

$\Rightarrow$ $$\frac{-v^2}{2} = x + C_1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{-(x-y)^2}{2} = x + C_1$$

$2x + (x - y)^2 + 2C_1 = 0$

$2x + (x - y)^2 = -2C_1$

अतः अभीष्ट हल $2x + (x - y)^2 = C$ है, जहाँ $C = -2C_1$ है।

प्रश्न 9.

$$\frac{dy}{dx} = \sec(x+y)$$

हल : इसी अभ्यास का प्रश्न 3 पर देखें।

प्रश्न 10.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5}$$

माना $x - y = v$

$$1-\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1-\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 1-\frac{v+3}{2v+5} = \frac{2v+5-v-3}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v+5}{v+2}\, dv = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(v+2)+1}{(v+2)}\, dv = dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\, dv + \frac{1}{v+2}\, dv = dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\int dv + \int \frac{1}{v+2}\, dv = dx$$

$\Rightarrow 2v + \log(v + 2) = x + C$

$\Rightarrow 2(x - y) + \log(x - y + 2) = x + C$

यहीं अभीष्ट हल है।

Ex 12.6

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

प्रश्न 1. $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

हल : $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3} \quad ...(1)$$

जो समघातीय हैं।

∴ $y = vx$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ...(2)$$

अब समीकरण (1) तथा (2) से,

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{vx^3}{x^3+v^3x^3} = \frac{x^3}{x^3(1+v^3)}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v-v^4}{1+v^3} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^4}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+v^3}{v^4}dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$-\int\frac{1+v^3}{v^4}dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\int\frac{1}{v^4}-\int\frac{1}{v}dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3v^3}-\log v = \log x + \log C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3v^3} = \log x + \log v + \log C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3v^3} = \log (C_1 vx)$$

$$\Rightarrow \quad \log (Cy) = \frac{x^3}{3y^3}$$

$$\Rightarrow \quad Cy = e^{x^3/3y^3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{C_1}e^{x^3/3y^3}$$

$$\Rightarrow \quad y = Ce^{x^3/3y^3} \qquad \text{जहाँ } C = \frac{1}{C_1} \text{ है।}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x, y) = \frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x}-\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$= \lambda^{\circ}\left\{\frac{y}{x}-\sin\frac{y}{x}\right\}$$

$$= \lambda^{\circ} f(x, y)$$

अतः f(x,y) शून्य घात का समघातीयफलन है।

y = vx रखने पर, ...(ii)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{...(iii)}$$

अब समीकरण (i),(ii) तथा (iii) से,

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = v + \sin v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \sin v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\sin v} = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dv}{\sin v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{cosec} v \, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log|\operatorname{cosec} v - \cot v| = \log|x| + \log c$$

$$\Rightarrow \log|\operatorname{cosec} v - \cot v| = \log|Cx|$$

तुलना से,

$$\operatorname{cosec} v - \cot v = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin v} - \frac{\cos v}{\sin v} = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \cos v}{\sin v} = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sin^2\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}} = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{v}{2} = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{y}{2x} = Cx \qquad \left(\because \frac{y}{x} = v\right)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$x\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y$$

हल :

$$x\frac{dy}{dx} = y-\frac{y^2}{x} = \frac{xy-y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy-y^2}{x^2},$$

यह समघात समी. है।

y = vx रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x.vx-v^2x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{v^2}\,dv = -\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -\log x + C$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y/x} = -\log x + C$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = -\log x + C$$

⇒ -x = − y log x + Cy

⇒ x + Cy = y logx

प्रश्न 4.

$$x\sin\left[\frac{y}{x}\right]\frac{dy}{dx}=y\sin\left[\frac{y}{x}\right]-x$$

हल :

दिया हुआ अवकल समीकरण

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \qquad \ldots(1)$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{x}}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots(2)$$

यह $\frac{dy}{dx}$= F(x, y) के रूप का अवकल समीकरण है।

अब $$F(x, y) = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\therefore \quad F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\frac{\lambda y}{\lambda x} \sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^0 \left\{\sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right\}}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$= \lambda^0 F(x, y)$$

अत: F(x, y) शून्य घात का समघातीय फलन है।

इसलिए दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है। माना

माना $$y = vx \qquad \ldots(3)$$

तब $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (2), (3) तथा (4) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v} - v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1 - v\sin v}{\sin v} = \frac{-1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{-1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \quad \sin v\, dv = -\frac{dx}{x} \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \sin v\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\cos v = -\log|x| - \log|C|$$

$$\Rightarrow \quad -\cos v = -\log|Cx|$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$$

$$\Rightarrow \quad \log|C_1 x| = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 x = e^{\cos(y/x)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{C_1} e^{\cos(y/x)}$$

$$\Rightarrow \quad x = Ce^{\log(y/x)} \qquad \left(\text{जहाँ } C = \frac{1}{C_1}\right)$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हुल है।

प्रश्न 5.

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

हल:

$$x\,dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad \ldots(1)$$

माना $\quad f(x, y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

तब $\quad f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}}{\lambda x}$

$$= \frac{\lambda y + \lambda\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{\lambda x}$$

$$= \lambda^0 \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{x}$$

⇒ या $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0(x, y)$

अतः $f(x, y)$ शुन्य घात का समघार्तीय फलन है।

∴ दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

अब $\quad y = vx \quad \ldots(2)$

तब $\quad \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx} \quad \ldots(3)$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + x\sqrt{1 + v^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(v + \sqrt{1 + v^2})}{x}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\log|v+\sqrt{1+v^2}| = \log|x| + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right| = \log|x| + \log C \quad (\because y = vx)$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right| = \log|x| + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right| - \log|x| = \log C$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x \times x}\right| = \log C$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right| = \log C$$

$$\Rightarrow \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = C$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$(x^2 + y^2)\,dx = 2xydy$

हल :

$(x^2 + y^2)\,dx = 2xydy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad \ldots(1)$$

जो समघातीय है।

$\therefore$ $y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरण (1) तथा (2) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2x^2v} = \frac{x^2(1+v^2)}{x^2 \times 2v}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\frac{2v}{1-v^2}dv = \int\frac{2x}{x}$$

$$-\log(1-v^2) = \log x + \log C$$

$$-\log(1-v^2) = \log(Cx)$$

$$\log(Cx) + \log(1-v^2) = 0$$

$$\log\{(Cx)(1-v^2)\} = 0$$

$$Cx(1-v^2) = e^0 = 1$$

$$Cx\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = 1 \qquad \left(\because v = \frac{y}{x}\right)$$

$$x = C(x^2 - y^2)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

हल :

$$(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}+\frac{e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+e^{x/y}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+e^{x/y}} \quad \ldots(1)$$

माना $\quad f(x, y) = -\dfrac{e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+e^{x/y}}$

तब $\quad f(\lambda x, \lambda y) = -\dfrac{e^{\lambda x/\lambda y}\left(1-\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)}{1+e^{\lambda x/\lambda y}}$

$$= -\lambda^0 \frac{\left\{e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)\right\}}{1+e^{x/y}}$$

$$= \lambda^0 f(x, y)$$

अत: f(x, y) शून्य घात का समघी फलन है।

∴ दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय हैं।

$x = vy$ रखने पर, $\quad \ldots(2)$

तब $\quad \dfrac{dx}{dy} = v + y\dfrac{dv}{dy} \quad \ldots(3)$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{1+e^v}$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{1+e^v} - v$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v + ve^v - v - ve^v}{1+e^v}$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{-(v+e^v)}{(1+e^v)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\frac{dy}{y}$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1+e^v}{v+e^v}\, dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\begin{aligned}[\quad v + e^v &= t \\ (1 + e^v)\, dv &= dt \\ \therefore \int \frac{1+e^v}{v+e^v}\, dv &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log t]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \log (v + e^v) = -\log y + \log C$$

$$\Rightarrow \quad \log (v + e^v) = \log \left(\frac{C}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v + e^v = \frac{C}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} + e^{x/y} = \frac{C}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y\left(\frac{x}{y} + e^{x/y}\right) = C$$

$$\Rightarrow \quad x + ye^{x/y} = C$$

अवकल समीकरण (1) का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 8. (3xy + y²) dx + (x² + xy) dy = 0

हल : $(3xy + y^2)\, dx + (x^2 + xy)\, dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3xy + y^2}{x^2 + xy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{xy(3 + y/x)}{x^2(1 + y/x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y(3 + y/x)}{x(1 + y/x)} \qquad \ldots(1)$$

यह समघात अवकल समीकरण है।

माना $y = vx$

तब $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$$

समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v(3+v)}{(1+v)}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v+v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{3v+v^2}{1+v} - v$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{-3v-v^2-v-v^2}{1+v}$$

$$= \frac{-4v-2v^2}{1+v}$$

$$\therefore \quad \frac{(1+v)dv}{-4v-2v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+v)dv}{2v+v^2} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+v}{v(v+2)}dv = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2(v+2)}\right)^{dv} = -2\log x + \log C1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\log v + \log(v+2)] = \log\frac{1}{x^2} + \log C1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[\log v(v+2)] = \log\frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \log[v(v+2)] = 2\log\frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \log v(v+2) = \log\frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}+2\right) = \log \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}+2\right) = \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y(y+2x)}{x^2} = \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4 y(y+2x)}{x^2} = C_1{}^2 = C \qquad \text{(माना)}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y(y+2x) =$$

$$\Rightarrow \quad x^2y^2 + 2x^3y = C$$

यह दी हुई अवकल समीकरण का अभीष्ट हुल है।

प्रश्न 9.

$$x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

हल:

$$x^2\,\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

यह समधातीय समी. है।

y = vx रखने पर।

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + x.vx + v^2x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = (1 + v + v^2) - v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{1+v^2}\,dv = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} v = \log x + C$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} \frac{y}{x} = \log x + C$$

यहीं अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10. x(x − y) dy = y(x + y) dx

हल : x(x − y) dy = y(x + y) dx

इस समीकरण को इस प्रकार भी लिख सकते है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y)}{x(x-y)}$$

यह समघातीय समीकरण है।

∴ माना y = vx, तब

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x \cdot vx + v^2x^2}{x^2 - x \cdot vx} = \frac{v+v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v+v^2}{1-v} - v = \frac{2v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1-v}{v^2}\,dv = \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{v^2}\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{v} - \log v = 2\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y/x} - \log\left(\frac{y}{x}\right) = 2\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} - \log y + \log x = 2\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \log x + \log y + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \log(xy) + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \log(xy) + c = 0.$$

Ex 12.7

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3x-2y-5}{2x+3y-5}=0$$

हल :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3x+2y-5}{2x+3y-5}=0$$

यहाँ $\quad \frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$

तब $\quad x=X+h$ तथा $y=Y+k$

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{3(X+h)+2(Y+k)-5}{2(X+h)+3(Y+k)-5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dX}=-\frac{3X+2Y+(3h+2k-5)}{2X+3Y+(2h+3k-5)} \quad \ldots(1)$$

h तथा k इस प्रकार हैं कि

3h + 2k − 5 = 0 तथा 2h + 3k − 5 = 0

हल करने पर, h = 1, k = 1

समीकरण (1) में h व k के मान रखने पर,

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{3X+2Y}{2X+3Y}$$

यह एक समधातीय समीकरण है।

तब $Y = vX$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{-3X + 2vX}{2X + 3vX}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dV}{dX} = \frac{-3 + 2V}{2 + 3V} - V$$

$$= -\frac{3 + 4V + 3V^2}{2 + 3V}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-dX}{X} = \frac{2 + 3V}{3V^2 + 4V + 3}dV$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(6V + 4)\,dV}{3V^2 + 4V + 3}$$

$$\Rightarrow \quad -2\frac{dX}{X} = \frac{6V + 4}{3V^2 + 4V + 3}dV$$

$\Rightarrow -2 \log X + \log c = \log (3V^2 + 4V + 3)$

$\Rightarrow \log \{(3V^2 + 4V + 3)X^2\} - \log C$

$\Rightarrow x^2[3(x^2/x^2) + 4(Y/X) + 3] = C$

$\Rightarrow 2Y^2 + 4XY + 3X^2 = C$

$\Rightarrow 3(y - 1)^2 + 4(y - 1)(x - 1) + 3(x - 1)^2 = C$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4xy - 10x - 10y + 10 = C$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) + 4xy - 10(x + y - 1)\text{-}C$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$$

हल : यहाँ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2(x - y) + 5}$$

$x - y = v$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{dv}{dx}=\frac{v+3}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=1-\frac{v+3}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=\frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \quad dx=\frac{2v+5}{v+2}\ dV$$

$$\Rightarrow \quad dx=\left(2+\frac{1}{v+2}\right)\ dV$$

x + C = 2v + log (v + 2)
x + C = 2(x − y) + log (x − y + 2)
x − 2y + log (x − y + 2) = C,
यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.
(2x + y + 1) dx + (4x + 2y − 1) dy = 0
हल :
(2x + y + 1) dx + (4x + 2y − 1) dy = 0

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y+1}{4x+2y-1}$$

यहाँ $\quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$

$\therefore$ माना $\quad 2x+y=v$

तब $\quad 2+(dy/dx)=dv/dx$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}-2=-\frac{v+1}{2v-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=2-\frac{v+1}{2v-1}=\frac{3v-3}{2v-1}$$

$$\Rightarrow \quad 3dx=\frac{2v-1}{v-1}\ dv=\frac{2(v-1)+1}{v-1}\ dv$$

$$=\left(2+\frac{1}{v-1}\right)\ dv$$

समाकलन करने पर,
⇒ 3x + C = 2v + log (v − 1)
⇒ 3x + C = 2(2x + y) + log (2x + y − 1), [∵ v = 2x + y]
⇒ x + 2y + log (2x + y − 1) = C,
यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x-3y}{2(x+y)}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3x-3y}{2(x+y)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-3(x+y)}{2(x+y)}$$

यहाँ $$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$$

तब माना x + y = v
⇒ 1 + (dy/dx) = (dv/dx)

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}-1=\frac{1-3v}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=\frac{1-3v}{2v}+1=\frac{1-v}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad dx\ \frac{2v\,dv}{1-v}=\left[-2+\frac{2}{1-v}\right]dv$$

∴ समाकलन करने पर,
x + C = -2v − 2 log (1 − v)
या x + C + 2(x + y) + 2 log (1 − x − y) = 0 [∵ v = x + y]
या 3x + 2y + 2 log (1 − x − y) + C = 0,
यहीं अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-2y-7}{2x+3y-6}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x-2y-7}{2x+3y-6}$$

यहाँ $\quad \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$

तब $\quad x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6(X+h)-2(Y+k)-7}{2(X+h)+3(Y+k)-6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = \frac{6X-2Y+(6h-2k-7)}{2X+3Y+(2h+3k-6)} \qquad \ldots(1)$$

h व k इस प्रकार हैं कि

$6h - 2k - 7 = 0$ तथा $2h + 3k - 6 = 0$

दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$h = \frac{2}{3}, k = 1$

h व k के मान समी. (1) में रखने पर

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6X-2Y}{2X+3Y}$$

यह एक समघातीय समीकरण है तब Y = vX रखने पर,

$$\Rightarrow 3(y-1)^2 + 4\left(x-\frac{3}{2}\right)(y-1) - 6\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = c$$

$\Rightarrow 2 \log X = -\log(3v^2 + 4v - 6) + \log c$

$\Rightarrow \log X^2 + \log(3v^2 + 4v - 6) = \log c$

$\Rightarrow \log X^2 (3v^2 + 4v - 6) = \log c$

$\Rightarrow X^2 (3V^2 + 4v - 6) = c$

$\Rightarrow 3Y^2 - 4XY + 6X^2$

Ex 12.8

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4x \qquad \ldots\text{(i)}$$

समी. (i) को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना करने पर,

P = 2, Q = 4x

I.F = $e^{\int 2dx} = e^{2x}$

समी. (i) को e^{2x} से गुणा करने पर

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 4xe^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 4xe^{2x}$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}(ye^{2x})\right]dx = 4\int \underset{\text{I}}{x}\, \underset{\text{II}}{e^{2x}}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad ye^{2x} = 4\left[x\int e^{2x}\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}x\cdot\int e^{2x}\,dx\right]dx + c\right]$$

$$\Rightarrow \quad ye^{2x} = 4\left[x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\,dx\right] + C$$

$$\Rightarrow \quad ye^{2x} = 4\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right] + C$$

$$\Rightarrow \quad ye^{2x} = 4 \times \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C$$

$$\Rightarrow \quad ye^{2x} = e^{2x}(2x-1) + C$$

$$\Rightarrow \quad y = (2x-1) + Ce^{-2x}$$

यही अभीष्ट हुल है।

प्रश्न 2.

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x.$$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

या $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

या $$\frac{dy}{dx} + \sec^2 x\ y = \tan x \sec^2 x \quad ...(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$\therefore P = \sec^2 x$, $Q = \sec^2 x \tan x$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \sec^2 x\, dx} = e^{\tan x}$

समीकरण (1) को $e^{\tan x}$ से गुणा करने पर,

$$e^{\tan x}\frac{dy}{dx} + e^{\tan x}(\sec^2 x)y = e^{\tan x} \times \tan x \sec^2 x$$

या $$\frac{d}{dx}(ye^{\tan x}) = \tan x \sec^2 x\, e^{\tan x}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$ye^{\tan x} = \int \tan x \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx + C$$

या $$ye^{\tan x} = \int t\, e^t\, dt + C \qquad \left[\begin{array}{l}\because \tan x = t \\ \therefore \sec^2 x\, dx = dt\end{array}\right]$$

$$= t \int e^t - \int \left\{\frac{d}{dt}(t) \int e^t\, dt\right\} + C$$

$$= t\, e^t - \int 1.e^t\, dt + C$$

$$= t\, e^t - \int e^t\, dt + C$$

$$= t\, e^t - e^t + C$$

या $$ye^{\tan x} = \tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + C$$

या $$ye^{\tan x} = e^{\tan x}(\tan x - 1) + C$$

$\Rightarrow$ $$y = (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2yx = 4x^2.$$

हल :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2yx = 4x^2.$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x^2}{1+x^2} \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2x}{1+x^2};\ Q = \frac{4x^2}{(1+x^2)}$$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1+x^2$$

समीकरण (1) को (1 + x^2) से गुणा करने पर,

$$y(1+x^2) = \int 4x^2\, dx + C$$

(1 + x^2) से भाग करने पर,

$$y = \frac{4x^3}{3(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x^2)}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$y(1+x^2) = \int 4x^2\, dx + C$$

(1 + x^2) से भाग करने पर,

$$y = \frac{4x^3}{3(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x^2)}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$(2x - 10y^3)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

हल :

$$(2x - 10y^3)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$y\frac{dx}{dy} + 2x - 10y^3 = 0$$

or $$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} \cdot x = 10y^2 \qquad \left[\frac{dx}{dy} + Px = Q \text{ से}\right]$$

यहाँ $P = (2/y)$,

तब $\int P\,dy = \int(2/y)\,dy = 2 \log y$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int p\,dy} = e^{2 \log y}$

$= e^{\log y2}$

$= y^2$

$\therefore x(\text{I.F.}) = \int\{Q(\text{I.F})\}dy + C$

i.e., $x.y^2 = \int 10y^2.y^2 dy + C$, $[\therefore Q = 10y^2]$

$= \int 10y^4\,dy + C = 10.\ \frac{1}{5}y^5 + C$

अतः $xy^2 = 2y^5 + C$,

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x.$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$p = \cot x$, $Q = \sin x$

$\therefore IF = e^{\int \cot x\,dx}$

$\Rightarrow$ I.F. $= e^{\log \sin x} = \sin x$

समीकरण (i) में $\sin x$ की गुणा करने पर,

$$\sin x \frac{dy}{dx} + \sin x \cdot \cot xy = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sin x \frac{dy}{dx} + \cos xy = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\sin x \cdot y) = 1 - \cos^2 x$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}(\sin x \cdot y)\right] dx = \int 1\, dx - \int \cos^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad y \sin x = x - \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$\Rightarrow \quad y \sin x = x - \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad y \sin x = x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$\Rightarrow \quad y \sin x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$\mathbf{(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1 - x^2}}$$

हल :

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + 2dy = x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{(1 - x^2)}y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 - x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2x}{1-x^2},\ Q = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}$$

$$\Rightarrow \quad \text{I.F.} = e^{\log \frac{1}{t}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{I.F.} = \frac{1}{t} = \frac{1}{(1-x^2)}$$

समीकरण (i) में दोनों और $\frac{1}{(1-x^2)}$ की गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x^2)}\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}\, y = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1-x^2)} \cdot y\right] = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1-x^2)} y\right] dx = \int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x^2)} y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)C$$

यहीं अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y\right] = x$$

हल :

$$\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y\right] = x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \sin x \qquad \ldots(\text{i})$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2}{x},\ Q = \sin x$$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x} dx}$$

$\Rightarrow$ $$\text{I.F.} = e^{\log(x^2)}$$

$\Rightarrow$ $$\text{I.F.} = x^2$$

समीकरण (i) को x^2 से गुणा करने पर,

$$x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} x^2 y = x^2 \sin x$$

$\Rightarrow$ $$\left[x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy\right] = x^2 \sin x$$

$\Rightarrow$ $$\int \frac{d}{dx}(x^2.y)\, dx = \int x^2.\sin x\, dx \qquad \ldots(ii)$$

माना $$I = \int x^2 \sin^2 x\, dx$$

$\Rightarrow$ $$I = x^2 \int \sin x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2. \int \sin x\, dx\right] dx$$

$\Rightarrow$ $$I = -x^2 \cos x + 2 \int \underset{\text{I}}{x} \underset{\text{II}}{\cos x}\, dx$$

$\Rightarrow$ $$I = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int 1 \sin x\, dx\right]$$

$\Rightarrow$ $$I = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx\right]$$

$\Rightarrow$ $$I = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x\, dx$$

$\Rightarrow$ I = $-x^2\cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ …(iii)

समी. (ii) व (iii) से,

$x^2y = -x^2\cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

$x^2y = C + (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$

यह अभीष्ट हल है।

प्रश्न 8.

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

हल :

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

या $$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x \log x \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2}{x},\ Q = x\log x$$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$$

समीकरण (1) को x^2 से गुणा करने पर,

$$x^2\frac{dy}{dx} + x^2 \times \frac{2}{x}y = x^3 \log x$$

या $$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3 \log x$$

या $$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^3 \log x$$

दोनों पक्षों का x के साक्ष समाकलन करने पर,

$$x^2 y = \int x^3 \log x\, dx + C$$

$$= \log x \int x^3\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\log x) \int x^3\, dx\right\} dx + C$$

($\log x$ को प्रथम फलन लेने पर)

$$= \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^4}{4}\, dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{4} + C$$

या $$x^2 y = \frac{1}{16}x^4[4\log x - 1] + C$$

$$16x^2 y = 4x^4 \log x - x^4 + C$$

जो अभीष्ट हल है।

प्रश्न 9. $dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y\, dy$

हल : $dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y\, dy$

$$[\frac{dx}{dy} + px = Q \text{ से}]$$

$$\frac{dy}{dx} + 1 \cdot x = e^{-y} \sec^2 y$$

यहाँ P = 1,

तब $\int Pdy = \int 1.dy = y$

$\therefore$ समाकलन गुणांक = $e^{\int p.dy} = e^y$

$\therefore x\,.\,(I.F) = \int\{Q(I.F.)\}\,dy + C$

i.e., $xe^y = \int e^{-y} \sec^2 y.e^y\,dy + C$ [$\because Q = e^{-y}\ \sec^2 y$]

$= \int \sec^2 y\,dy + C = \tan y + C$

अत: $xe^y = \tan y + C$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10.

$$(1+y^2)+(x-e\ \tan^{-1} y)\frac{dy}{dx}=0$$

हल:

$$(1+y^2)+(x-e\ \tan^{-1} y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2} \qquad \left[\frac{dx}{dy}+Px=Q \text{ से}\right]$$

यहाँ $\quad P = 1/(1+y^2)$

तब $\quad \int P\,dy = \int\{1/(1+y^2)\}\,dy = \tan^{-1} y$

$\therefore$ समाकलन गुणांक $= e^{\int P\,dy} = e^{\tan^{-1} y}$

$$x\cdot(\text{I.F.}) = \int Q\cdot(\text{I.F.})\,dy + C$$

i.e., $\quad xe^{\tan^{-1} y} = \int \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2}\cdot e^{\tan^{-1} y}\,dy + C$

$$\left[\because Q = \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2}\right]$$

$$= \int e^{2t}\,dt + C,$$

माना $\quad \tan^{-1} y = t$

तब $\quad dy/(1+y^2) = dt$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}+c = \frac{1}{2}e^{2\tan^{-1} y}+C$$

$$[\because t = \tan^{-1} y]$$

अत: $\quad xe^{\tan^{-1} y} = \frac{1}{2}e^{2\tan^{-1} y}+C$

$$x = \frac{1}{2}\ e^{\tan^{-1} y} + ce^{-\tan xy}$$

यही अभीष्ट हल है।

Ex 12.9

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3 \quad \ldots(i)$$

या $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{y^2} = x^3 \quad \ldots(1)$

माना $1/y^2 = v,$

तब $(-2/y^3)(dy/dx) = (dv/dx)$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + x \cdot v = x^3$

या $\frac{dv}{dx} - 2x \cdot v = -2x^3$

यह चर राशि में एक रैखिक समी. है।

यहाँ $P = -2x$ और $Q = -2x^3$

$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\int -2x\,dx}$

$= e^{-2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = e^{-x^2}$

$\therefore \quad v \cdot (\text{I.F.}) = \int [Q.(\text{I.F.})]\,dx + C$

i.e., $v \cdot e^{-x^2} = \int -2x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx + C$

$= -\int (-x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)\,dx + C$

$= -\int te^t\,dt + C$

माना $-x^2 = t$ और $-2x\,dx = dt$

$= -\left[t \cdot e^t - \int e^t\,dt\right] + C$

$= (1 - t)e^t + C$

$= (1/y^2)e^{-x^2} \quad [\because t = -x^2]$

$(1/y^2)\,e{-}x^2 = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C,$

v = रखने पर

$y^{-2} = 1 + x^2 + ce^{x^2}$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y).$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y)$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^x e^x - e^x e^y$$

$$\Rightarrow \quad e^y \frac{dy}{dx} + e^x \cdot e^y = e^{2x}$$

माना $\quad e^y = v,$

तब $\quad e^y(dy/dx) = (dv/dx)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + e^x \cdot v = e^{2x}$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी. है।

यहाँ $P = e^x$ और $Q = e^{2x}$

यहाँ $\quad P = e^x$ और $Q = e^{2x}$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int e^x \, dx} = e^{e^x}$$

$$\therefore \quad v \cdot e^{e^x} = \int e^x e^{e^x} \cdot e^x \, dx + C \qquad \text{(Note)}$$

$$= \int t \cdot e^t \, dt + c$$

माना $\quad e^x = t$ और $e^x \, dx = dt$

$$= \left[te^t - \int e^t \, dt\right] + c = (t-1)e^t + c$$

या $\quad e^y \cdot e^{e^x} = (e^x - 1)e^{e^x} + c \quad [\because t = e^x \text{ and } v = e^y]$

$$\Rightarrow \quad e^y = e^x - 1 + ce^{-(e^x)}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = - y^2 \sec x.$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = - y^2 \sec x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\tan x = - \sec x \qquad \ldots(1)$$

माना $\qquad - 1/y = v$

तब $\qquad (1/y^2)\ (dy/dx) = (dv/dx)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} + \tan x \cdot v = - \sec x$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी. है।

यहाँ P = tan x और Q = − Sec x

$$\therefore \qquad \text{I.F.} = e^{\int P\, dx} = e^{\int \tan x\, dx}$$

$$= e^{\log \sec x} = \sec x \qquad \ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad -(1/y) \cdot \sec x = - \int \sec^2 x\, dx + C \qquad [\because v = - 1/y]$$

$$\Rightarrow \qquad -(\sec x)/y = - \tan x + C$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{y} = \frac{\tan x - C}{\sec x} = \frac{\sin x - C \cos x}{\cos x \sec x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{y} - \sin x + C \cos x = 0$$

प्रश्न 4.

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y + e^{\sin x} = 0.$$

हल :

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y + e^{\sin x} = 0$$

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y = - e^{\sin x}$$

समीकरण को tan x से भाग देने पर

$$\cos y \frac{dy}{dx} + \cot x (\sin y) = -e^{\sin x} \cdot \cot x \qquad ...(1)$$

अब माना $\quad z = \sin y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$

तब समीकरण (1)

$$\frac{dz}{dx} + \cot x \cdot (z) = -\cot x \, e^{\sin x}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \cot x \, dx}$$
$$= e^{\log \sin x}$$
$$= \sin x$$

$$\therefore \qquad z \cdot \sin x = \int -\cot x \, e^{\sin x} \cdot \sin x \, dx + C$$
$$= -\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx + C$$
$$= -\int e^t \, dt + C \qquad [\text{माना } \sin x = t \text{ से}]$$

$\sin y \,.\, \sin x = -e^t + c$

$\sin x \sin y = -e^{\sin x} + c$

या $\sin x \sin y + e^{\sin x} = c$

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2x = x^3 \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \cdot \tan y = x^3 \qquad ...(1)$$

माना $\quad \tan y = v$

तब $\quad \sec^2 y(dy/dx) = dv/dx$

$$\frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = x^3$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी है।

यहाँ $P = 2x$ और $Q = x^3$

$\therefore \qquad \text{I.F.} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

$\therefore \qquad v \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx + C$

या $\qquad v \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{x^2} 2x\, dx + C$

$$= \frac{1}{2}\int t \cdot e^t\, dt + C$$

$x^2 = t$ और $2x\, dx = dt$ रखने पर

$$= \frac{1}{2}\left[t \cdot e^t - \int e^t\, dt\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}e^t(t-1) + C$$

या $\qquad \tan y e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$

$[\because v = \tan y \text{ and } t = x^2]$

अतः $\tan y = \frac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x}$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\log y = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\log y = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$$

$$\frac{1}{y(\log y)^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log y} = \frac{1}{x^2} \qquad \ldots(1)$$

माना। $1/\log y = v$

$-\{1(\log y)^2\} . (1/y) . (dy/dx) = dv/dx$

$\Rightarrow \qquad -\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = +\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}\cdot v = -\frac{1}{x^2}$

यह चर राशि v में एक रैखिक समीकरण है।

यहाँ P = − 1/x और Q = − 1/x²

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{-\int (1/x)\,dx}$$

$$= e^{-\log x} = e^{\log (1/x)} = 1/x$$

$$\therefore \quad v/x = \int (-1/x^2).(1/x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad (1/\log y)\,(1/x) = -\int x^{-3}\,dx + C \qquad [\because v = 1/\log y]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x \log y} = \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\log y} = \frac{1}{2x} + Cx$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7. अवकल समीकरण

$$\mathbf{(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy + \frac{1}{1+x^2},}$$

यदि x = 1, y = 0 का हल दीजिए।

हल :

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

तब, $$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

जहाँ $$P = \frac{2x}{1+x^2} \text{ तथा } Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{t}\,dt} \qquad \text{माना } 1 + x^2 = t$$

$$= e^{\log t} \qquad 2x\,dx = dt$$

$$= t$$

$$= 1 + x^2$$

अवकल समीकरण का हल

y.(I.F) = ∫Q(I.F.)dx + c

$$y.(1+x^2) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)\, dx + c$$

$$y(1+x^2) = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx + c$$

$$y(1+x^2) = \tan^{-1} x + c$$

अब x = 1 तथा y = 0 रखने पर।

$$0 = \tan^{-1}(1) + c$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + c$$

$$c = \frac{-\pi}{4}$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1.

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=1$$

का हल है

(a) $y = \cot^{-1}x + C$
(b) $y = \tan^{-1}x + C$
(c) $y = \sin^{-1}x + C$,
(d) $y = \cos^{-1}x + C$

हल :

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x^2+1)}$$

$$dy=\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$$\int dy=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$y=\tan^{-1}x+C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 2. समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$$

का हल है

(a) $y+x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ **(b)** $y+x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$

(c) $y-x^2=\frac{1}{3}e^{2x}+C$ **(d)** $y-x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$

हल : समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

$$dy + 2x\,dx = e^{3x} \cdot dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy + \int 2x\,dx = \int e^{3x}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad y + \frac{2x^2}{2} = e^{3x} \times \frac{1}{3} + C$$

$$\Rightarrow \qquad y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

अतः उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 3. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \cos x \tan y = 0$$

का हल है

(a) log sin y + sin + C
(b) log sin x sin y = C
(c) sin y + log sin x + C
(d) sin x sin y + C

हल : समीकरण

$$\text{समीकरण } \frac{dy}{dx} + \cos x \tan y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad dy + \cos x \tan y\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\tan y}\,dy + \cos x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cot y\,dy + \cos x\,dx = 0$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$$\int \cot y\,dy + \int \cos x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \log \sin y + \sin x + C = 0$$

अब उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 4. समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

का हल है

(a) $y = \log (e^x + e^{-x}) + C$
(b) $y = \log (e^x - e^{-x}) + C$
(c) $y = \log (e^x + 1) + C$
(d) $y = \log (1 - e^{-x}) + C$

हल :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$dy=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

समाकलन करने पर,
$\Rightarrow y = \log (e^x - e^{-x}) + C$
अत: उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 5. समीकरण

$$e^{-x+y}\,\frac{dy}{dx}=1$$

का हल है

(a) $e^y = e^x + C$
(b) $e^y = e^{-x} + C$
(c) $e^{-y} = e^{-x} + C$
(d) $e^{-y} = e^x + C$

हल :

$$e^{-x+y}\,\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^y}{e^x}\,\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \quad e^y\,dy=e^x\,dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int e^y\,dy = \int e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad e^y = e^x + C$$

अत: उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 6. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} + y = 0$$

का हल है

(a) $x + \frac{1}{2}\log(1+y) + C$ **(b)** $x + \frac{1}{2}\log(1+y^2) = C$

(c) $x + \log(1+y) = C$ **(d)** $x + \log(1+y^2) = C$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{y} = 0$$

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy + dx = 0$$

समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \int dx + \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{1}{2}\log(1+y^2) = C$$

अत: उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 7. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

का हल है

(a) x + tan y = C
(b) tan y = x + C
(c) sin y + x = C
(d) sin y − x = C

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = dx$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2 y \, dy = dx$$

समाकलन करने पर,

tan y = x + C

अत: उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 8. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = e^{y+x} + e^y x^2$$

का हल है

(a) $e^x + e^y = \frac{x^3}{3} + C$ (b) $e^{-x} + e^y + \frac{x^3}{3} = C$

(c) $e^{-x} + e^{-y} = \frac{x^3}{3} + C$ (d) $e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{y+x} + e^y x^2$$

$\Rightarrow dy = e^y(e^x + x^2)dx$

$\Rightarrow e^{-y}\, dy = e^x\, dx + x^2\, dx$

समाकलन करने पर,

$$\int e^y \, dy = \int e^x \, dx + \int x^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y} + c = e^x + \frac{x^{2+1}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$$

अत: उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 9. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$

में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा रैखिक समीकरण में परिवर्तित होगी ?

(a) $y = t$ (b) $y^2 = t$

(c) $\frac{1}{y} = t$ (d) $\frac{1}{y^2} = t$

हल : उत्तर (c) सही है।

प्रश्न 10. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^{-x}y^3$$

में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा अवकल समीकरण में परिवर्तित होगी

(a) $\frac{1}{y} = v$
(b) $y^{-2} = v$
(c) $y^{-3} = v$
(d) $y^3 = v$

हल : उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 11. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

$$dy + 2x\,dx = e^{3x}\,dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy + \int 2x\, dx = \int e^{3x}\, dx$$

$$\Rightarrow \qquad y + \frac{2x^2}{2} = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\Rightarrow \qquad y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

यही अभीष्ट व्यापक हुल है।।

प्रश्न 12.

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$$

समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$$

इसकी तुलना

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

P = tan x, Q = sin x

समाकलन गुणांक (I.F.) = $e^{\int p\, dx}$

= $e^{\int \tan x\, dx}$

= $e^{\log \sec x}$

= sec x

प्रश्न 13. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sin x} y = e^x$$

का सभाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sin x} y = e^x$$

इसकी तुलना समी. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{1}{\sin x},\ Q = e^x$$

समाकलन गुणांक (I.F.) = $e^{\int p\, dx}$

$= e^{\int \frac{1}{\sin x} dx} = e^{\int \operatorname{cosec} x\, dx}$

$= e^{\log|\operatorname{cosec} x - \cot x|}$

$= |\operatorname{cosec} x - \cot x|$

$= \left|\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right|$

$= \left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| = \left|\frac{1 - 2\sin^2 x/2 - 1}{2\sin x/2 \cos x/2}\right|$

$= \left|\tan\frac{x}{2}\right|$ या $\tan\frac{x}{2}$

प्रश्न 14. अवकल समीकरण

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} = 1$$

किस रूप की है ?

हल: चरों को पृथक-पृथक परिवर्तित करने वाली समीकरण के रूप की है।

प्रश्न 15. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} - y\tan x = e^x \sec x$$

किस रूप की है ?

हल : रैखिक समीकरण।

प्रश्न 16. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+3y+1}{3x+2y+1}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+3y+1}{3x+2y+1}$$

यहाँ $\quad \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$

$\therefore$ x = X + h तथा y = Y + k

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4(X+h)+3(Y+k)+1}{3(X+h)+2(Y+k)+1}$$

$$= \frac{4X+3Y+(4h+3k+1)}{3X+2Y+(3h+2k+1)} \qquad \ldots(i)$$

h व k इस प्रकार है कि

4h + 3k + 1 = 0

तथा 3h + 2k + 1 = 0

हल करने पर, h = − 1, k = 1

h वे k हैं के मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X+3Y}{3X+2Y} \qquad \ldots(ii)$$

यह एक समघातीय समी. है।

$\therefore \qquad Y = vx$

$$\frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \qquad \ldots(iii)$$

समी. (i) व (i) से,

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{4X+3Y}{3X+2Y}$$

$$\Rightarrow \quad v + X\frac{dv}{dX} = \frac{4X+3vX}{3X+2vX}$$

$$\Rightarrow \quad v + X\frac{dv}{dX} = \frac{4+3v}{3+2v}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{4+3v}{3+2v} - v$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{4+3v-3v-2v^2}{3+2v}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{2(2-v^2)}{(3+2v)}$$

$$\frac{3+2v}{(2-v^2)}\, dv = \frac{2}{X} dX$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2v}{v^2-2} + \frac{3}{v^2-2}\right) dv = \frac{-2}{X}\, dX$$

समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \log(v^2-2) + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}} = -2\log X + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y^2}{X^2}-2\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{\frac{Y}{X}-\sqrt{2}}{\frac{Y}{X}+\sqrt{2}}\right) = \log\left(\frac{C}{X^2}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y^2-2X^2}{X^2}\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{Y-\sqrt{2}X}{Y+\sqrt{2}X}\right) = \log\left(\frac{C}{X^2}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y^2-2X^2}{X^2}\right) + \log\left(\frac{Y-\sqrt{2}X}{Y+\sqrt{2}X}\right)^{3/2\sqrt{2}} = \log\left(\frac{C}{X^2}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y-\sqrt{2}X}{Y+\sqrt{2}X}\right)^{3/2\sqrt{2}} = \log\left(\frac{C}{X^2}\right) - \log\left(\frac{Y^2-2X^2}{X^2}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{Y-\sqrt{2}X}{Y+\sqrt{2}X}\right)^{3/2\sqrt{2}} = \log\left\{\frac{C/X^2}{\left(\frac{Y^2-2X^2}{X^2}\right)}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Y-\sqrt{2}X}{Y+\sqrt{2}X}\right)^{3/2\sqrt{2}} = \frac{C}{Y^2-2X^2}$$

इसमें Y = y − 1 तथा X = x + 1 रखने पर

$$\left(\frac{y-1-\sqrt{2}(x+1)}{y-1+\sqrt{2}(x+1)}\right) = \left[\frac{C}{(y-1)^2-2(x+1)^2}\right]^{2\sqrt{2}/3}$$

यहीं अभीष्ट हल है।

प्रश्न 17.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left\{\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\log y - \log x + 1)}{x} \quad \ldots(1)$$

माना $y = vx$ तब $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ समी. (1) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx\{(vx) - \log x + 1\}}{x}$$
$$= v(\log v + \log x - \log x + 1)$$
$$= v(\log v + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v \log v + v - v = v \log v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{x \log v}$$

समाकलन करने पर,

$$\log x + \log c = \int \frac{dv}{v \log v}$$

माना $\log v = t$ तब $\frac{1}{v}\, dv = dt$

$$\Rightarrow \quad \log(cx) = \int (1/t)\, dt = \log t = \log(\log v)$$
$$[\because t = \log v]$$

$$\Rightarrow \quad cx = \log v = \log(y/c)$$

$$\Rightarrow \quad y = xe^{cx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = e^{cx}$$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 18.

$$x\frac{dy}{dx} = y + 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2\sqrt{(y^2 - x^2)}}{x},$$

यह समघातीय समी. है। ...(1)

$\therefore$ माना $y = vx$ तब $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ समी. (1) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + 2\sqrt{(v^2x^2 - x^2)}}{x}$$

$$= v + 2\sqrt{(v^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = 2\sqrt{(v^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{(v^2 - 1)}} = \frac{2dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\log [v(v^2 - 1) = 2 \log x + \log C = \log (Cx)^2$$

$$\Rightarrow \quad v + \sqrt{(v^2 - 1)} = Cx^2$$

$$\Rightarrow (y/x) + \sqrt{(y^2/x^2)} - 1\} = Cx^2$$

$$\Rightarrow \quad y + \sqrt{(y^2 - x^2)} = Cx^3$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 19.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^y - e^x)$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^y - e^x)$$

$$\Rightarrow \quad e^y\frac{dy}{dx} = e^x e^y - e^x.e^x$$

$$\Rightarrow \quad e^y\frac{dy}{dx} = e^x.e^y - e^{2x} \quad \ldots(1)$$

माना $e^y = v$ तथा $e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

समी. (1) से,

$$\frac{dv}{dx} = e^x \cdot v - e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - e^x v = - e^{2x}$$

यह आश्रित चर v के साथ रैखिक समी. हैं।

$$\text{यहाँ} \qquad P = -e^x \text{ और } Q = e^{2x}$$

$$\therefore \quad v \cdot e^{-e^x} = \int e^x . e^{-e^x} . e^x \, dx + C$$

$$= \int t . e^{-t} \, dt + C \qquad \text{माना } e^x = t, \; e^x \, dx = dt$$

$$= -te^{-t} + \int e^t \, dt + C$$

$$= -e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow \quad e^y . e^{-e^x} = (e^x + 1) \, e^{-e^x} + C \quad [\because t = e^x \text{ तथा } v = e^y]$$

अतः $e^y = e^x + 1 + Ce^{(e^x)}$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 20.

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \cdot \tan y = x^3 \qquad \ldots(1)$$

माना $\tan y = v$, तब $\sec^2 y \, (dy/dx) = dv/dx$, समी. (1) से,

$\frac{dv}{dx} + 2x . v = x^3$, यह आश्रित चर v के साथ रैखिक समी. है।

यहाँ $P = 2x$ और $Q = x^3$

$$\therefore \qquad \text{I.F.} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore \quad v \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2}\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad v \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{x^2}\; 2x\,dx + C \qquad \text{(ध्यान दें)}$$

$$= \frac{1}{2}\int t \cdot e^t\,dt + c, \text{ माना } x^2 = t \text{ और } 2x\,dx = dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t \cdot e^t - \int e^t\,dt\right] + c = \frac{1}{2}e^t\,(t-1) + C$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2}\,\tan y = \frac{1}{2}e^{x^2}\,(x^2-1) + C$$

$$[\because v = \tan y \text{ और } t = x^2]$$