इण्टरमीडिएट परीक्षा, 2013

गणित—प्रथम प्रश्नपत्र

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] 334 (CV) **[पूर्णांक : 50**

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल $(1-i)$ है। 1

(ख) एक समान्तर श्रेढ़ी के चौथे एवं सोलहवें पदों का योगफल 8 है। इस श्रेढ़ी के 19 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। 1

(ग) θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए यदि $\tan 3\theta = \cot\theta$. 1

(घ) सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{(1-i)^2} - \frac{1}{(1+i)^2} = i. \quad 1$$

(ङ) किसी समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$ तो $\vec{BD}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $(3\vec{a} - 2\vec{b})$ समरेखीय हैं। 2

(ख) यह $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 7\}$ तथा $C = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, तो $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ को सत्यापित कीजिए। 2

(ग) $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ को आंशिक भिन्नों में वियोजित कीजिए। 2

(घ) बिना विस्तार किए सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 2$$

(ङ) सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \sin 9\theta - i\cos 9\theta. \quad 2$$

3. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) एक पासे को यदृच्छया पाँच बार फेंका जाता है। कोई एक निश्चित अंक कम-से-कम चार बार ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$^{2n}P_n = 2^n\ [1.3.5.7......(2n-1)]. \quad 2$$

(ग) यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\log a, \log b, \log c$ समान्तर श्रेणी में होंगे। 2

(घ) यदि $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 2$$

(ङ) यदि प्रतिचित्रण $f: R \to R, f(x) = \sin x$ से परिभाषित हो और प्रतिचित्रण $g: R \to R, g(x) = x^2$ तो सिद्ध कीजिए कि $gof \neq fog$. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{3x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में अचर पद का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ख) श्रेणी $1 + 2.\dfrac{1}{3} + 3.\dfrac{1}{3^2} + 4.\dfrac{1}{3^3} = ...$ के अनन्त पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए। 3

(ग) यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई में घनमूल हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5 = 32. \quad 3$$

(घ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएँ $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ तथा $(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ हैं। 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) वेन आरेख की सहायता से सिद्ध कीजिए कि

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C). \quad 3$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\dfrac{2}{\lfloor 1} + \dfrac{6}{\lfloor 2} + \dfrac{12}{\lfloor 3} + \dfrac{20}{\lfloor 4} + \ldots \infty = 3e.$ 3

(ग) समीकरण $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = \tan\theta \tan 2\theta \tan 3\theta$ को हल कीजिए। 3

(घ) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z). \quad 3$$

6. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, तो A का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\log(1 + 3x + 2x^2) = 3x - \frac{5x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} + ... \infty. \quad 4$$

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) x मीटर ऊँची दीवार पर खड़ा एक आदमी देखता है कि किसी खंभे के शिखर का उन्नयन कोण α है। दीवार के जड़ (foot) से उसी खंभे के शिखर का उन्नयन कोण β है।

दिखाइए कि खंभे की ऊँचाई $\dfrac{x\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ मीटर है। 4

(ख) बिन्दु $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ तथा समतलों $\vec{r}.(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 1$ एवं $\vec{r}.(\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}. \quad 4$$

(ख) किसी ΔABC में सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{64R^3}{a^2b^2c^2}. \quad 4$$