

आव्यूह

Ex 3.1

प्रश्न 1. यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2 \times 4}$ हो तो A में अवयवों की संख्या लिखिए।

हल : $m \times n$ क्रम वाले आव्यूह में अवयवों की संख्या mn होती है।

अतः दिये गये आव्यूह में अवयवों की संख्या = 8 है।

प्रश्न 2. 4×4 का इकाई का आव्यूह लिखिए।

हल :

4×4 इकाई का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3. यदि

$$\begin{bmatrix} k+4 & 1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$\begin{bmatrix} k+4 & 1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

∴ प्रश्नानुसार दोनों आव्यूह बराबर हैं अतः संगत अवयव भी बराबर होंगे।

$$\therefore k + 4 = a \dots\dots(i)$$

$$k - 6 = -4 \dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) से,

$$k = -4 + 6$$

$$= 2$$

समीकरण (ii) से,

$$a = k + 4 = 6$$

$$\therefore a = 6.$$

प्रश्न 4. 6 अवयवों वाले आव्यूह के सम्भावित क्रम क्या होंगे ?

हल : यदि किसी आव्यूह का क्रम $m \times n$ है तो उसमें mn अवयव होते हैं, अतः 6 अवयवों वाले सम्भावित क्रम 6×1 , 1×6 , 2×3 और 3×2 होंगे।

प्रश्न 5. 2×2 क्रम का आव्यूह $A = [a_{ij}]$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव

$$(i) a_{ij} = \frac{2i-j}{3i+j} \quad (ii) a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2i} \quad (iii) a_{ij} = 2i-3j$$

हल :

$$(i) \quad a_{ij} = \frac{2i-j}{3i+j}$$

$$\therefore a_{11} = \frac{2 \times 1 - 1}{3 \times 1 + 1} = \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{2 \times 1 - 2}{3 \times 1 + 2} = \frac{2-2}{3+2} = 0$$

$$a_{21} = \frac{2 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} = \frac{4-1}{6+1} = \frac{3}{7}$$

$$a_{22} = \frac{2 \times 2 - 2}{3 \times 2 + 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/7 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2i}$$

$$a_{11} = \frac{(1+2 \times 1)^2}{2 \times 1} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1+2 \times 2)^2}{2 \times 1} = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2+2 \times 1)^2}{2 \times 2} = \frac{4^2}{4} = 4$$

$$a_{22} = \frac{(2 + 2 \times 1)^2}{2 \times 2} = \frac{6^2}{4} = 9$$

$$\therefore \text{अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} 9/2 & -25/2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii) } a_{ij} = 2i - 3j$$

$$a_{11} = 2 \times 1 - 3 \times 1 = 2 - 3 = -1$$

$$a_{12} = 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4$$

$$a_{21} = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 4 - 3 = 1$$

$$a_{22} = 2 \times 2 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$$

$$\text{अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $A = a_{ij}$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2} |2i - 3j|$ हैं।

हल : 2×3 के आव्यूह में 2 पंक्तियाँ एवं 3 स्तम्भ होते हैं।

अतः $i = 1, 2$ तथा $j = 1, 2, 3$

$$\therefore a_{ij} = \frac{1}{2} |2i - 3j|,$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} |2 \times 1 - 3 \times 1| = \frac{1}{2} |2 - 3| = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} |2 \times 1 - 3 \times 2| = \frac{1}{2} |2 - 6| = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{13} = \frac{1}{2} |2 \times 1 - 3 \times 3| = \frac{1}{2} |2 - 9| = \frac{7}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} |2 \times 2 - 3 \times 1| = \frac{1}{2} |4 - 3| = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} |2 \times 2 - 3 \times 2| = \frac{1}{2} |4 - 6| = 1$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} |2 \times 2 - 3 \times 3| = \frac{1}{2} |4 - 9| = \frac{5}{2}$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} | 2 \times 2 - 3 \times 3 | = \frac{1}{2} | 4 - 9 | = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } 2 \times 3 \text{ क्रमका आव्यूह} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 7.

यदि

$$\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो a व b का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

दिये हुये आव्यूह समान हैं, अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर

$$a + b = 6 \dots (i)$$

$$ab = 8 \dots (ii)$$

समी. (i) से $b = 6 - a$ समी. (ii) में रखने पर,

$$a(6 - a) = 8$$

$$\Rightarrow 6a - a^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 4a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 4a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a - 4) = 0$$

$$\text{अतः } a = 2, 4$$

$$ab = 8 \text{ तो } b = 4, 2$$

प्रश्न 8. यदि

$$\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

हो, तो x, y, z व p के मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3 \times 2 = 5 - 6 = -1$$

$$-x + z = -4$$

$$\Rightarrow 3y - 2p = -3 \Rightarrow 2p = 3y + 3 = 3 \times -1 + 3 = 0$$

$$\text{अतः } p = 0$$

$$x = 2, y = -1, z = -2, p = 0.$$

प्रश्न 9. a, b व c के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं। जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & 3c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

हल :

दिया है, $A = B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर

$$a - 2 = b \Rightarrow a - b = 2 \dots (i)$$

$$3 = c$$

$$12c = 6b$$

$$\Rightarrow b = \frac{12 \times 3}{6} = 6$$

$$\Rightarrow b = 6$$

$$b + 2 = a$$

$$a - b = 2$$

$$a = 2 + b = 2 + 6 = 8$$

$$\text{अतः } a = 8, b = 6, c = 3$$

Ex 3.2

प्रश्न 1. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

हों, तो $A + B$ व $A - B$ ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + B &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3+3 & 2+5 & 1+(-2) \\ 1+(-1) & -4+4 & 7+(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A - B &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-3 & 2-5 & 1+2 \\ 1+1 & -4-4 & 7+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 2. यदि

$$A + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

हों, तो आव्यूह A व B ज्ञात कीजिए।

हल :

$$A + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर

$$2A = \begin{bmatrix} -7+3 & 0-2 \\ 2+0 & -5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

समी. (i) में A का मान रखने पर

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -7+2 & 0+1 \\ 2-0 & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

हों, तो आव्यूह C ज्ञात कीजिए, जहाँ $A + 2B + C = 0$ तथा 0 शून्य आव्यूह है।

हल :

दिया है,

$$A + 2B + C = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

हों, तो $3A^2 - 2B$ ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रश्नानुसार,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + (-1) \times 3 & 2 \times -1 + (-1) \times 2 \\ 3 \times 2 + 2 \times 3 & 3 \times -1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 3 & -2 - 2 \\ 6 + 6 & -3 + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3A^2 - 2B &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 36 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 36 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & -14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 0 & -12 + (-8) \\ 36 + 2 & 3 + (-14) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 38 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 5. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

हो, तो दिखाओ कि $AB \neq BA$.

हल :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1+4+9 & 0+2+2+0 \\ 0+2+2+0 & 9+4+1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0+9 & 0+6 & 0+3 & 0+0 \\ 0+6 & 1+4 & 2+2 & 3+0 \\ 0+3 & 2+2 & 4+1 & 6+0 \\ 0+0 & 3+0 & 6+0 & 9+0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से स्पष्ट है :

$AB \neq BA$.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. यदि

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो प्रदर्शित कीजिए $f(A)f(B) = f(A+B)$.

हल :

दिया है,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो
$$f(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा
$$f(B) = \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A+B) = \begin{bmatrix} \cos (A+B) & -\sin (A+B) & 0 \\ \sin (A+B) & \cos (A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध करना है।

$$f(A) + f(B) = f(A+B)$$

$$\text{L.H.S.} = f(A) \times f(B)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos A \cos B - \sin A \sin B + 0 & -\cos A \sin B - \sin A \cos B + 0 & 0 + 0 + 0 \\ \sin A \cos B + \cos A \sin B + 0 & -\sin A \sin B + \cos A \cos B & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos (A+B) & -\sin (A+B) & 0 \\ \sin (A+B) & \cos (A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= f(A+B) \\
 &= \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए : $(AB)^T = B^T A^T$

हल : दिया है,

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \therefore AB &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 \times 6 + 2 \times -1 + (-5) \times 1 & 4 \times -7 + 2 \times 2 + (-5) \times 0 & 4 \times 0 + 2 \times 5 + (-5) \times 2 \\ 1 \times 6 + 0 \times -1 + 3 \times 1 & 1 \times -7 + 0 \times 2 + 3 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 5 + 3 \times 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 24-2-5 & -28+4+0 & 0+10-10 \\ 6+0+3 & -7+0+0 & 0+0+6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 17 & -24 & 0 \\ 9 & -7 & 6 \end{bmatrix} \\
(AB)^T &= \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ -24 & -7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
\end{aligned}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \quad \dots(ii)$$

$$\begin{aligned}
B^T &= \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \dots(iii)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore B^T A^T &= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \times 4 + (-1) \times 2 + 1 \times -5 & 6 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 3 \\ -7 \times 4 + 2 \times 2 + 0 \times -5 & -7 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 3 \\ -0 \times 4 + 5 \times 2 + 2 \times -5 & 0 \times 1 + 5 \times 0 + 2 \times 3 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow B^T A^T &= \begin{bmatrix} 24-2-5 & 6+10+3 \\ -28+4+0 & -7+0+0 \\ 0+10-10 & 0+0+6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ -24 & -7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \dots(iv)
\end{aligned}$$

समीकरण (i) और (iv) से

$$(AB)^T = B^T A^T$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए :

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx]$$

हल :

दिया है,

LHS

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= [ax + hy + gz \quad hx + by + fz \quad gx + fy + cz] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= (ax + hy + gz)x + (hx + by + fz)y + (gx + fy + cz)z \\ &= ax^2 + hxy + gzx + hxy + by^2 + fyz + gzx + fyz + cz^2 \\ &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx \\ &= R.H.S. \end{aligned}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा । तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए

$$A^2 - 3A + 9I = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow A^2 &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times (-3) & 1 \times (-2) + (-2) \times 3 + 3 \times 1 & 1 \times 3 + (-2) \times (-1) + 3 \times 2 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 + (-1) \times (-3) & 2 \times (-2) + 3 \times 3 + (-1) \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times (-1) + (-1) \times 2 \\ -3 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-3) & -3 \times (-2) + 1 \times 3 + 2 \times 1 & -3 \times 3 + 1 \times (-1) + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-4-9 & -2-6+3 & 3+2+6 \\ 2+6+3 & -4+9-1 & 6-3-2 \\ -3+2-6 & 6+3+2 & -9-1+4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix} \\
\therefore A^2 - 3A + 9I &= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -6 & -9 & 3 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -12-3+9 & -5+6+0 & 11-9+0 \\ 11-6+0 & 4-9+9 & 1+3+0 \\ -7+9+0 & 11-3+0 & -6-6+9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 10. यदि

$$[a \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

जहाँ 0 शून्य आव्यूह है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$[a \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$[2a+4 \times 1+1 \times 0 \quad 1 \times a+4 \times 0+1 \times 2 \quad 2a+4 \times 2+1 \times -4] \begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$[2a+4 \quad a+2 \quad 2a+8-4] \begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 10a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 3a + 6 = 0$$

$$\Rightarrow a(a+2) + 3(a+2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a+3) = 0$$

$$\Rightarrow a+2=0, a+3=0$$

$$\Rightarrow a = -2, a = -3$$

अतः $a = -2, -3$.

प्रश्न 11. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

तथा $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+a) & 0 \\ (2+b) & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^2 = \begin{bmatrix} (a+1) & 0 \\ (b+2) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+1) & 0 \\ (b+2) & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+1)(a+1) + 0 \times (b+2) & (a+1) \times 0 + 0 \times (-2) \\ (b+2)(a+1) + (-2)(b+2) & (b+2) \times 0 + (-2) \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a + b + 2 - 4 - 2b & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a - b - 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) & 1 \times (-1) + (-1)(-1) \\ 2 \times 1 + 2 \times (-1) & 2 \times (-1) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & -1+1 \\ 2-2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b & a \times 1 + 1 \times (-1) \\ b \times a - b \times 1 & b \times 1 + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b & a-1 \\ ab-b & b+1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a - b - 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 + b & a - 1 \\ ab - b & b + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a - b - 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b - 1 & a - 1 \\ ab - b & b \end{bmatrix}$$

संगत पदों की तुलना करने पर

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + b - 1$$

$$\Rightarrow 2a = b - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 4.$$

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{x}{2} \\ \tan \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $I, 2 \times 2$ क्रम का इकाई आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

हल

$$\text{माना } \tan \frac{x}{2} = t$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S.} = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \cos x = \frac{1 - \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{और } \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S.} &= (I - A) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{1-t^2+2t^2}{1+t^2} & \frac{-2t+t(1-t^2)}{1+t^2} \\ \frac{-t(1-t^2)+2t}{1+t^2} & \frac{2t^2+1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} = \text{L.H.S.} \quad \text{इति सिद्धम्।}
\end{aligned}$$

प्रश्न 13. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2 = 8A + KI$

हल : दिया है, $A^2 = 8A + KI$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 0 \times 7 \\ -1 \times 1 + 7 \times (-1) & -1 \times 0 + 7 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8-0 & 56+k \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8 & 56+k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

दोनों पक्षों में a_{11} की तुलना करने पर।
 $\Rightarrow 8 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 8 = -7$

प्रश्न 14. यदि

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

हो, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

माना आव्यूह

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} - a_{21} & 2a_{12} - a_{22} & 2a_{13} - a_{23} \\ -3a_{11} + 4a_{21} & -3a_{12} + 4a_{22} & -3a_{13} + 4a_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों के संगत अवयवों की तुलना से,

$$a_{11} = 1, a_{12} = -4, a_{13} = 3$$

$$2a_{11} - a_{21} = -2 \Rightarrow 2 \times 1 - a_{21} = -2 \Rightarrow a_{21} = 4$$

$$2a_{12} - a_{22} = -10 \Rightarrow 2(-4) - a_{22} = -10 \Rightarrow a_{22} = 2$$

$$2a_{13} - a_{23} = 6 \Rightarrow 2(3) - a_{23} = 6 \Rightarrow a_{23} = 0$$

अतः आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

ता सिद्ध काजी

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

जहा n धन पूर्णकि है।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & \cos 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha \\ -\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha & -\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha & \cos 3\alpha \sin \alpha + \sin 3\alpha \cos \alpha \\ -\sin 3\alpha \cos \alpha - \cos 3\alpha \sin \alpha & -\sin 3\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \\ -\sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{bmatrix}$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \text{ इति सिद्धम्।}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

हल:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 2. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो $(A - 2I) \cdot (A - 3I)$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-0 \\ -1-0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 2-0 \\ -1-0 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$\therefore (A-2I)(A-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 2 \times (-1) & 2 \times 2 + 2 \times (-2) \\ -1 \times 1 + (-1) \times (-1) & -1 \times 2 + (-1) \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 4-4 \\ -1+1 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

हो, तो AB ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times -1 \\ -3 \times 5 + 4 \times -1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5-2 \\ -15+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$$

हो, तो BA ज्ञात कीजिए जहाँ $i = \sqrt{-1}$

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \times -i + i \times 0 & 0 \times 0 + i \times i \\ i \times -i + 0 \times 0 & i \times 0 + 0 \times i \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5. यदि

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

हो, तो आव्यूह A तथा B ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(ii)$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} 2A &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+1 & 5+1 & -7-1 \\ -1+1 & 1+1 & 4+0 \\ 11+1 & 8+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) और (ii) को घटाने पर

$$\begin{aligned} 2B &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-1 & 5-1 & -7+1 \\ -1+(-1) & 1+(-1) & 4-0 \\ 11+(-1) & 8-0 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. यदि

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -y-x & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

हल : हल : संगत अवयवों की तुलना करने पर

$$x + 2 = -2$$

$$\therefore x = -4$$

$$-y - x = 5 \Rightarrow y = -x - 5 = -(-4) - 5 \\ = 4 - 5 = -1$$

$$\text{अतः } x = -4, y = -1$$

प्रश्न 7. आव्यूह A का क्रम 3×4 है तथा B इस प्रकार का आव्यूह है कि $A^T B$ एवं AB^T दोनों ही परिभाषित हैं तो B का क्रम लिखिए।

हल :

$\therefore A$ का क्रम 3×4 है।

$\therefore A^T$ का क्रम 4×3 होगा

परन्तु $A^T B$ तथा AB^T परिभाषित हैं

अतः B का क्रम भी 3×4 ही होगा।

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 1 & -x & -3 \end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 1 & -x & -3 \end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह है,

अतः $a_{ij} = a_{ji}$, की तुलना करने पर

$$a_{32} = a_{23} \Rightarrow -x = 4$$

$$\therefore x = -4$$

प्रश्न 9. एक 3×3 क्रम को आव्यूह $B = [b_{ij}]$ लिखिए जिनके अवयव $b_{ij} = (i) (j)$ हैं।

हल : $B_{11} = 1 \times 1 = 1$

$B_{12} = 1 \times 2 = 2$

$B_{13} = 1 \times 3 = 3$

$B_{21} = 2 \times 1 = 2$

$B_{22} = 2 \times 2 = 4$

$B_{23} = 2 \times 3 = 6$

$B_{31} = 3 \times 1 = 3$

$B_{32} = 3 \times 2 = 6$

$B_{33} = 3 \times 3 = 9$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

तो $A + B^T$ ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+3 & -4+(-5) \\ -1+2 & 2+4 & 3+(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11. आव्यूह A को सममित व विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

हल :

$$\text{दिया है, } A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } A + A^T &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+6 & 2+5 \\ 5+2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (A + A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} A - A^T &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6-6 & 2-5 \\ 5-2 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ +3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (A - A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } A &= \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{(सममित) (विषम सममित)} \end{aligned}$$

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

हो तो सिद्ध कीजिए ।

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

(iii) $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) AA^T तथा $A^T A$ सममित आव्यूह है।

हल : (i) $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

इति सिद्धम्।

(ii) $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + A^T &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2 & 1+(-1) & 1+0 \\ -1+1 & 0+0 & 2+1 \\ 0+1 & 1+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(A + A^T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + A^T) = A + A^T$$

अतः $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम्।

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 1-(1-) & 1-0 \\ -1-1 & 0-0 & 2-1 \\ 0-1 & 1-2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A - A^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(A - A^T)$$

$$\therefore (A - A^T)^T = -(A - A^T)$$

अतः $A - A^T$ सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम्

(iv)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 2 \times -1 + 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ -1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 1 & -1 \times -1 + 0 \times 0 + 2 \times 2 \\ 0 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 1 & -1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2+0+2 & 0+1+3 \\ -2+0+2 & 2+0+4 & 0+0+6 \\ 0+1+3 & 0+0+6 & 0+1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots(i)$$

यहाँ $a_{21} = a_{12} = 0$

$$a_{31} = a_{13} = 4$$

$$a_{23} = a_{32} = 6$$

अतः $A^T A$ सममित आव्यूह है।

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + (-1)(-1) + 0 \times 0 & 2 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

यहाँ $a_{12} = a_{21} = 2$

$$a_{13} = a_{31} = 0$$

$$a_{32} = a_{23} = 4$$

अतः $A^T A$ सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 13. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा $3A - 2B + C$ एक अशून्य आव्यूह है तो आव्यूह C लिखिए।

हल :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } 3A - 2B + C = 0$$

$$\therefore C = 2B - 3A + 0$$

$$= 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4-12+0 & 2-6+0 \\ 6-3+0 & 4-9+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 14. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $B = [b_{ij}]$ लिखिए जिसके अवयव हैं,

$$b_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$$

हल : दिया है, $B = [b_{ij}]$ जिसके अवयव हैं।

$$b_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$$

$$b_{11} = \frac{(1+2 \times 1)^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$b_{12} = \frac{(1+2 \times 2)^2}{2} = \frac{(5)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$b_{13} = \frac{(1+2 \times 3)^2}{2} = \frac{(7)^2}{2} = \frac{49}{2}$$

$$b_{21} = \frac{(2+2 \times 1)^2}{2} = \frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2}$$

$$b_{22} = \frac{(2+2 \times 2)^2}{2} = \frac{(6)^2}{2} = \frac{36}{2}$$

$$b_{23} = \frac{(2+2 \times 3)^2}{2} = \frac{(8)^2}{2} = \frac{64}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः वांछित आव्यूह } B_{ij} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \\ 8 & 18 & 32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हों, तो ABC का प्रथम पंक्ति के अवयव ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & -1 \times 0 + 0 \times -1 + 1 \times 5 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 + (-2) \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times -1 + (-2) \times 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} -1 \times 0 + 0 \times 2 + 1 \times 7 \\ 2 \times 0 + 3 \times 2 - 2 \times 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & -13 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \times -1 + 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ 2 \times -1 + (-13) \times 0 + (-8) \times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 0 + 7 \\ -2 + 0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

अतः पहली पंक्ति का अवयव 8 है।

प्रश्न 16. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

हो तो AA^T ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

प्रश्न 17. यदि

$$[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [1 \times 1 + x \times 4 + 1 \times 3 \quad 1 \times 2 + 5x + 1 \times 2$$

$$3 \times 1 + 6x + 1 \times 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [1 + 4x + 3 \quad 2 + 5x + 2 \quad 3 + 6x + 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [4x + 4 \quad 5x + 2 \quad 6x + 8] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (4x + 4) \times 1 + (5x + 2) \times 2 + (6x + 8) \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 4 + 10x + 8 + 18x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 32x + 36 = 0 \Rightarrow 32x = -36$$

$$\Rightarrow x = \frac{-9}{8}$$

प्रश्न 18. यदि

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$B^2 - (a + d)B = (bc - ad)I_2, \text{ जहाँ}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हल :

दिया है,

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S.} = B^2 - (a + d)B$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - (a + d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad & ab + bd - ba - bd \\ ac + cd - ac - cd & bc + d^2 - ad - d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{bmatrix} \\
&= (bc - ad) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (bc - ad)I_2$$

$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 19. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

हो तो $(aA + bB)(aA - bB)$ को आव्यूह के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } aA + bB = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

...(i)

$$aA - bB = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

...(ii)

$$\therefore (aA + bB)(aA - bB)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & b^2 + a^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\
&= (a^2 + b^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (a^2 + b^2)A.
\end{aligned}$$

प्रश्न 20. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2.$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (A - B) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-3) \times 0 & 1 \times -3 + (-3) \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times -3 + 1 \times 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
\end{aligned}$$

$$A^2 - 2AB + B^2$$

$$= A \cdot A - 2 \cdot A \cdot B + B \cdot B$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times -1 & 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ -1 \times 2 + 2 \times -1 & -1 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times -1 & 2 \times 4 + 1 \times 1 \\ -1 \times 1 + 2 \times -1 & -1 \times 4 + 2 \times 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 4 \times -1 & 1 \times 4 + 4 \times 1 \\ -1 \times 1 + 1 \times -1 & -1 \times 4 + 1 \times 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4-1 & 2+2 \\ -2-2 & -1+4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2-1 & 8+1 \\ -1-2 & -4+2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1-4 & 4+4 \\ -1-1 & -4+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 18 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3-2-3 & 4-18+8 \\ -4+6-2 & 3+4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \dots(i)
\end{aligned}$$

समीकरण (i) और (ii) से
 $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.
 इति सिद्धम्।

प्रश्न 21. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

तो k का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2 = kA - 2I_2$

हल : दिया है,

$$\text{दिया है, } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{तथा } A^2 = kA - 2I_2$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \times 3 + (-2) \times 4 & 3 \times -2 + (-2)(-2) \\ 4 \times 3 + (-2) \times 4 & 4 \times -2 + (-2)(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

अतः $A^2 = kA - 2I_2$ से,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k-0 \\ 4k-0 & -2k-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर

$$3k - 2 = 1 \text{ से,}$$

$$3k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{3} \Rightarrow k = 1.$$

प्रश्न 22. यदि

$$A = \begin{bmatrix} i & o \\ o & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$$

तथा $i = \sqrt{-1}$ निम्नलिखित सम्बन्धों का सत्यापन कीजिए

$$(i) A^2 = B^2 = C^2 = I_2$$

$$(ii) AB = -BA = -C$$

हल :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A^2 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i^2 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + i^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [\because i = \sqrt{-1}] \dots \text{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B^2 &= \begin{bmatrix} 0 \times 0 + 1 \times -1 & 0 \times -1 + (-1) \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times -1 + 0 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(ii)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \times 0 + i \times i & 0 \times i + i \times 0 \\ i \times 0 + 0 \times i & i \times i + 0 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} \quad \because i = \sqrt{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(iii)} \end{aligned}$$

$$-I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(iv)}$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$$A^2 = B^2 = C^2 = -I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ इति सिद्धम्।}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad AB &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} i \times 0 + 0 \times i & i \times -1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 0 + i \times -1 & 0 \times -1 + i \times 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\text{(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -BA &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 \times i + (-1) \times 0 & 0 \times 0 + (-1)i \\ 1 \times i + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times i \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\text{(ii)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -C &= - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\text{(iii)}
 \end{aligned}$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$$AB = -BA = -C = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 23. याद

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा $f(A) = A^2 - 5A + 7I$ हो, तो $f(A)$ ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$\text{दिया है, } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(A) = A^2 - 5A + 7I$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 1 \times -1 & 3 \times 1 + 1 \times 2 \\ 3 \times -1 + 2 \times -1 & -1 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} = 0$$

जबकि $\alpha - \beta = (2m - 1)\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{N}$

$$\text{हल : L.H.S.} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta & \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta + \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \beta \\ \cos^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta & \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ \cos \beta \sin \alpha (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ \cos \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{bmatrix} \\
&= (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \cos (\alpha - \beta) [\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta]$$

$$= \cos (\alpha - \beta) \times 0$$

$$= 0$$

$$= \text{R.H.S.}$$