14 प्रायिकता
(Probability)

प्रायिकता सिद्धांत गणनाओं को सरल बनाने वाली सहज बुद्धि है।

- Pierre-Simon Laplace

14.1 परिचय

सिद्‌दू और विवेक दोनों सहपाठी हैं। एक दिन भोजन के समय आपस में बातचीत कर रहे थे। उनके संभाषण पर ध्यान दीजिए।

सिद्‌दू : हेलो विवेक आज शामको आप क्या करने वाले हैं?

विवेक : संभवतः मैं भारत और आस्ट्रेलिया के बीच खेले जारहे क्रिकेट मैच देखूँगा।

सिद्‌दू : आप क्या सोंचरहे हैं, टॉस कौन जीतेगा?

विवेक : दोनों टीमों को बराबर-बराबर संयोग है।
क्या आप अपने घर में क्रिकेट मैच देखते हैं?

सिद्‌दू : मुझे अपने घर में टी.वी. देखने का संयोग नहीं है, क्यों की अपने टी.वी. मरम्मत के लिए दी गई है।

विवेक : ओह! तो आप हमारे घर पर आजायेंगे, हम दोनों साथ में मैच देखेंगे?

सिद्‌दू : मैं अपना होमवर्क पूरा करके आऊँगा।

विवेक : कल अक्तूबर 2तारीख़ है। गाँधी जी के जन्मदिन के अवसर पर हमें छुट्टी है।इसलिए आप होमवर्क क्यों नहीं करते?

सिद्‌दू : नहीं, पहले मैं अपना होमवर्क करके ही आपके घर आऊँगा।

विवेक : ठीक है।

ऊपर के संभाषण के अनुसार निम्न कथनों पर ध्यान दीजिए।

अधिक संभवतः, मैं भारत और के आस्ट्रेलिया के बीच खेले जारहे क्रिकेट मैच देखूँगा।

मुझे क्रिकेट मैच देखने का अवसर नहीं है।

टॉस जीतने का संभावना दोनों टीमों के लिए समान है।

यहाँ, विवेक और सिद्‌दू सहीं संभावना का फ़ैसला कर रहे थे।

अनेक संदर्भों में निर्णय लेने के लिए हम अपने पिछले अनुभव और तर्क प्रयोग करके बयान निर्णय लेते हैं।

यह एक उज्वल और मनोहर दिन है। हमें छाता लेजाने की आवश्यकता नहीं है और मैं जाने का एक मौका लूँगा।

लेकिन निर्णय हमेशा हमारा साथ नहीं देगा। एक ऐसी स्थिति को ध्यान दीजिए कि मेरि बरसात के समय अपनी रैनकोट को हरदिन लेकर जाती थी। उन्होंने इस प्रकार रैनकोट को बहुत सारे दिन लेकर गई थी लेकिन एक दिन भी बारिश नहीं हुई थी। पर जिस दिन वह अपना रैनकोट भूल गई थी, उसी दिन तेज़ बारिश हुई थी।

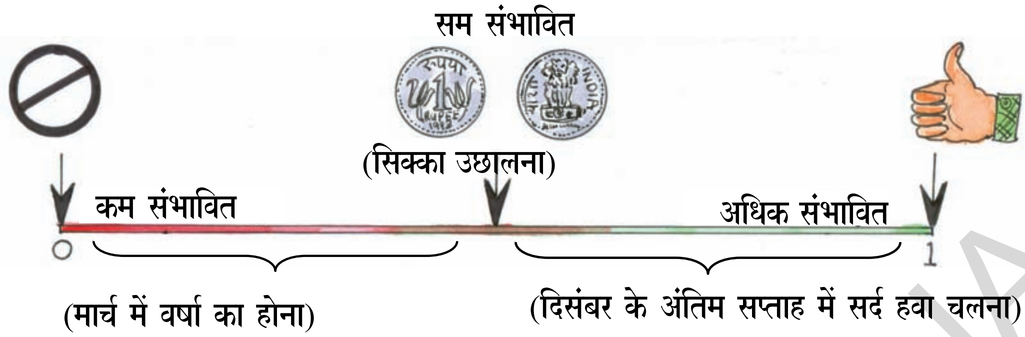
साधारणतः गर्मी के मौसम मार्च से शुरू होता है। लेकिन उस मास के एक दिन शाम में तेज़ बारिश हुई। सौभाग्य से मैं भीगने से बच गई थी, क्यों कि हमेशा की तरह उस दिन भी छाता लेकर गई थी।

इस प्रकार अनुमान लगा कर निर्णय ले सकते हैं कि भविष्य में घटना घटने की कितनी संभावना है। ऊपर के दोनों स्थितियों में मेरि ने अनुमान लगाया कि उस दिन बारिश होना या न होने की संभावना है या नहीं। (क्यों?)

घटना की संभावना को हम संख्यात्मक रूप से मापने का प्रयत्न करते हैं, जैसा हम अपने दैनंदिक जीवन के अनेक वस्तुओं को मापते हैं। इस प्रकार के मापन हमें क्रम पद्धति में निर्णय लेने में सहायता देगी। इस लिए किसी घटना घटने के संयोग को संख्यात्मक रूप में लिखने के लिए प्रायिकता का अध्ययन करते हैं।

ऊपर विचार करने वाले स्थितियों को संख्यात्मक रूप से मापने से पहले हम इनको नीचे की तालिका में दिये गए शब्दों से ग्रेडिंग करते हैं। अब आप नीचे दिये गए तालिका पर ध्यान दीजिए।

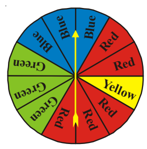
पद	संयोग	संभाषण से उदाहरण
निश्चित	ज़रूर कुछ होने वाला है।	गाँधी जी का जन्मदिन अक्तूबर 2को है।
अधिक संभावित	कुछ होने का ज्यादा संयोग है।	विवेक क्रिकेट मैच देख रहा है।
सम संभावित	कुछ होने या न होना का समान संयोग।	दोनों टीमों की टॉस जीतने की समान संभावना।
कम संभावित	कुछ होने का कम संयोग।	विवेक का मैच के दिन होमवर्क करने की संभावना।
असंभव	कुछ हो नहीं सकना।	सिद्दू का अपने घर क्रिकेट मैच देखना।



इसे कीजिए

1. पिछले पन्ने में दिये गए तालिका के ध्यान में रख कर प्रत्येक पद को कुछ और उदाहरण दीजिए।
2. निम्न कथनों को कम संभावित, सम संभावित और अधिक संभावित में वर्गीकृत कीजिए।
   अधिक संभावित
   a) एक पॉसा फेंकने पर ऊपरी सतह पर 5 आना।
   b) आपके गाँव में नवंबर में सर्द हवाएँ चलना।
   c) भारत का अगले फ़ुटबाल (विश्वकप) का जीतना।
   d) सिक्के को उछालने पर चित या पट का आना।
   e) एक लाटरी टिकेट खरीद कर जॉकपाट जीतना।

14.2 प्रायिकता



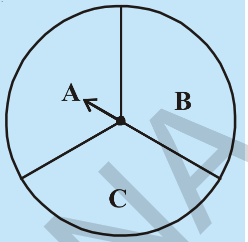
14.2.1 ऐच्छिक प्रयोग और परिणाम (Random experiment & Outcomes)

संयोग को समझने के लिए और मापने के लिए हम सिक्के उछालना, पासा फेंकना, चक्र घुमाना आदि प्रयोग करते हैं। जब हम सिक्का उछालते हैं तो दो संभव परिणाम, चित या पट का परिणाम पाते हैं। समझो आप एक क्रिकेट टीम के कप्तान और आपका मित्र दूसरे टीम का कप्तान तो आप सिक्का उछाल कर अपने मित्र से पूछो कि उसे चित या पट में से क्या चाहिए? क्या आप टॉस के परिणाम को नियंत्रित कर सकते हो? क्या आप अपने इच्छा से चित या पट पा सकते हो? यह एक साधारण सिक्के से संभव नहीं है। दोनो में कोई एक पाने का संयोग समान है और हम कुछ नहीं कह सकते कि क्या पाएँगे। इस तरह सिक्का फेंकने का प्रयोग एक एच्छिक प्रयोग कहलाता है। इस प्रकार के प्रयोगों में संभव परिणाम को जानते हुए भी विशेष समय का सही परिणाम पहले ही प्राप्त नहीं कर सकते। एच्छिक प्रयोग में परिणाम सम संभव होगा या नहीं। सिक्के को उछालने के प्रयोग में दो संभव परिणाम है, चित या पट का।

* पासा एक संतुलित घन होता है जिस में छे फ़लक होते हैं जिन पर 1 से 6 तक की संख्या अंकित होती है। कभी कभी संख्या के स्थान पर उतने ही बिंदु होते हैं।

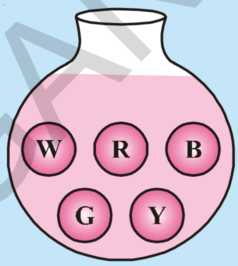
प्रयत्न कीजिए

1. यदि आप एक स्कूटर चालू करना चाहते हो तो, संभव परिणाम क्या हैं?
2. यदि आप एक पासा फेंके तब उसके छे संभव परिणाम क्या हैं?
3. चित्र में दिखाये गए पहिए को घुमाने पर क्या परिणाम होंगे? (यहाँ परिणाम अर्थात वह क्षेत्र जहाँ सूचक हो)



4. एक जार में विभिन्न रंगों की पाँच समरूप गेंद हैं।

   (सफेद,लाल,नीला,घूसर और पीला) और आप को बिना देखे एक गेंद को चुनना है। तो संभव परिणाम लिखिए।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक पासा फेंकिए।

- क्या पहला खिलाड़ी को ऊपरी सतह पर छे अंक पाने की संभावना अधिक है?
- क्या उसके बाद खेलनेवाले खिलाड़ी को ऊपरी सतह पर 6 अंक पाने की संभावना कम है?
- मान लीजिए कि दूसरे खिलाड़ी ने ऊपरी सतह पर 6 अंक पाया। क्या इसका अर्थ यह है कि तीसरे खिलाड़ी को 6 अंक पाने की कोई संभावना नहीं है?

14.2.2 सम संभावित परिणाम

(Equally likely *outcomes*)

मानलीजिए कि हम एक सिक्का उछालते या पासा फेंकते हैं तो सिक्का या पासा अच्छा और निष्पक्ष है। और सिक्के या पासा को प्रयोग करने पर सभी का परिणाम समान होगा। हम एक प्रयोग करते हैं, एक सिक्के को बार-बार उछाल कर चित या पट का परिणाम लिखिए। इल आंकड़ों के प्रदत्त से हम परिणाम में होने वाले परिवर्तन को जान सकते हैं।

एक सिक्के को बार-बार उछालने पर हमें चित और पट के परिणाम अंकित करें। अब परिणाम सूचि देखें जहाँ सिक्का उछालने की संख्या बढते जाती है।

सिक्का उछालने की संख्या	मिलान चिन्ह (H)	चितों की संख्या	मिलान चिन्ह (T)	पटों की संख्या
50	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
60 卌 |	卌 卌 卌 卌	26 卌 卌 ||||	卌 卌 卌 卌	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

ऊपर की तालिका से यह मालूम होता है कि उछालों की संख्या जितनी बढेगी चितों और पटों की संख्या भी उतनी ही बढेगी।

इसे हल कीजिए

नीचे दिये गए तालिका के संख्या के अनुसार सिक्के को उछालिए और प्रश्नों को तालिका में लिखिए।

सिक्का उछालने की संख्या	चित की संख्या	पट की संख्या
10		
20		
30		
40		
50		

यदि सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाने पर क्या होगा।

इसे आप पासा अधिक बार फेंक कर भी ध्यान दे सकते हैं।

पासा फेंकने की संख्या	प्रत्येक परिणाम आने की संख्या (i.e. प्रत्येक अंक ऊपरी सते पर दिखाई देने की संख्या)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

ऊपर दी गई तालिका से आप देखेंगे कि जैसे-जैसे पासा फेंके जाने की संख्या बढ़ती जायेगी, वैसे-वैसे छे परिणामों में प्रत्येक परिणाम की संख्या लगभग समान होती जायेगी।

ऊपर के दोनों प्रयोगों से हम यह कह सकते हैं कि प्रयोग में प्रत्येक परिणाम सम संभव है। इस का मतलब है कि प्रत्येक परिणाम आने का संयोग समान है।

14.2.3 अभिप्रयोग और घटनाएँ (Trail and Events)

ऊपर के प्रयोग में एक बार सिक्का उछालना या एक बार पासा फेंकने के प्रयत्न को याद्दच्छिक प्रयोग कहते हैं।

पासा फेंकने के प्रयत्न पर ध्यान दीजिए।

ऊपरी सतह पर 5 अंक से अधिक अंक आने का संभव परिणाम कितना होगा? यह केवल एक है।(i.e., 6)

ऊपरी सतह पर सम संख्या आने का संभव परिणाम कितना होगा?

वह 3 है। (2,4, और 6).

इस प्रकार एक प्रयोग के प्रत्येक सुनिश्चित परिणाम या सुनिश्चित परिणामों के संग्रह से एक घटना बनती है।

ऊपर के प्रयत्न में 5 अंक से अधिक प्राप्त करना और ऊपरी संख्या का प्राप्त करना दो घटनाएँ हैं। ध्यान दीजिए कि घटना एक ही परिणाम होना आवश्यक नहीं। लेकिन प्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक घटना होता है।

यह हम घटना के मूल भाव को समझते हैं। घटना के बारे में और जानकारी अगली कक्षा में सीखते हैं।

14.2.4 संयोग को प्रायिकता से जोडना (Linking the chance to Probability)

सिक्के को एक बार उछालने का प्रयोग पर ध्यान दीजिए। परिणाम क्या है? यहाँ दो ही परिणाम है। चित या पट और दोनों ही परिणाम समप्रायिक है। एक चित पाने का संयोग क्या है? यह दो संभव परिणामों में से एक है।

अर्थात $\frac{1}{2}$ है। इसे हम अन्य शब्दों में भी प्रकट कर सकते हैं। जैसे

जब एक सिक्के को तीन बार ऊछालने पर एक चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि-

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ या } 50\%$$

एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

अब आप एक पासे को फेंकने का उदाहरण पर विचार कीजिए। एक बार फेंकने पर संभव परिणाम कितना होगा? यहाँ छे सम प्रायिक परिणाम 1,2,3,4,5,या 6 है।

ऊपरी सतह पर विषम संख्या पाने का प्रायिकता क्या है? छे संभव परिणामों में तीन अनुकूल परिणाम-

1, 3 या 5 हैं। यह $\frac{3}{6}$ या $\frac{1}{2}$ है।

एक घटना 'A' का प्रायिकता का सूत्र इस प्रकार लिखते हैं-

$$P(A) = \frac{\text{घटना A आने का अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव कुल परिणामों की संख्या}}$$

अब हम कुछ और उदाहरणों पर ध्यान देंगे।

$$P(A) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिसमें घटना घटी है।}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

उदाहरण 1: यदि दो समरूप सिक्के एक ही समय पर उछाले जायें तो ज्ञात कीजिए कि
(a) संभव परिणाम (b) परिणामों की कुल संख्या (c) दो चित आने की प्रायिकता (d) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता (e) एक भी चित न आने की प्रायिकता (f) केवल एक चित आने की प्रायिकता

हल : (a) संभव परिणाम हैं

सिक्का -1	सिक्का 2
चित	चित
चित	पट
पट	चित
पट	पट

b) संभव परणिामों की संख्या 4 है।

c) दो चित आने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{दो चित आने की संभावना}}{\text{संभव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{4}$$

d) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$

[कम से कम एख पित माने एक या अधिक बारचित आने की संख्या]

e) एक चित भी न आने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$.

f) एक दी चित आने की प्रायिकता $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

यह कीजिए।

1. यदि तीन सिक्के एक दो बार उछाल दिये जायें तो परिणामों को ज्ञात कीजिए ।
   a) संभव कुल परिणाम
   b) संभव कुल परिणामों की संख्या
   c) कम से कम एक चित आने की प्रायिकता
      (एक या एक से अधिक चित आने का)
   d) ज्यादा से ज्यादा दो चित आने की प्रायिकता
      (दो या दो से कम चित आना)
   e) एक भी पट नहीं आने की प्रायिकता

उदाहरण 2 : (a) जब एक पासा फेंकतो प्रत्येक अंक ऊफरी सतह पर आने की प्रायिकता को नीचे दिए गए तालिका में लिखिए। (b) सबी परिणामों के प्रायिकता के योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: (a) पूरे छः संभव परिणामों में 4 आने की संभावना केवल एक ही है। इस प्रकार प्रायिकता 1/6 है। इसी प्रकार तालिका के रिक्त स्थानों को भरिए।

परिणाम	1	2	3	4	5	6
प्रायिकता (P)				1/6		

(b) सभी प्रायिकताओं का योगफल

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

अब हम इसका सामान्यीकरण इस प्रकार कर सकते है कि सभी प्रायिकताओं का योगफल हमेशा एक हो।

प्रयत्न कीजिए

जब एक पासें को एक बार फेंकेगे तो प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

घटना	अनुकूल परिणाम	अनुकूल परिणाम या परिणामें की संख्या	कुल संभव परिणाम	कुल संभव परिणाम की संख्या	प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}}$
ऊपरी सतह पर 5 अंक अनेक	5	1	1, 2, 3, 4, 5 और 6	6	1/6
ऊपरी सतह पर 3 अंक से अधिक आना					
ऊपरी सत्ह पर अभाज्य संख्या अनेक					
ऊपरी सतह पर 5 से कम अनेक					
ऊपरी सतह पर 6 के गुणन खण्ड अनेक					
ऊपरी सतह पर 7 से अधिक अनेक पर					
ऊपरी सतह पर 3 के गुणक आने पर					
ऊपर सतह पर 6 या 6 से कम संख्या आने के लिए					

आप यह अवलोकन करेंगे।

प्रत्येक घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होती है। (0 और 1 को मिलाकर)

$$0 \leq \text{प्रत्येक घटना की प्रायिकता} \leq 1$$

a) एक निश्चित घटना की प्रायिकता $= 1$

b) एक घटना की प्रायिकता की असंभावना 0 है।

14.2.5 स्वयं प्रयोग कर देखिए ।

1. आप कक्षा के विद्यार्थियों को 3या 4 के समूह में बाँट दीजिए । सभी समूहों के विद्यार्थी समान मूल्यों के एक जैसे सिक्कों का प्रयोग करेंगे । प्रत्येक समूह का एक विद्यार्थी सिक्के को 20 बार उछालेगा । तथा दूसरा विद्यार्थी परिणामों को रिकार्ड करेगा । सभी समूहों के परिणामों को नीचे दिए गए तालिका में ड़ालिए ।

वर्ग	उछालों की संख्या	उछालों की संययी संख्या	चितों की संख्या	चितों की संययी संख्या	$\frac{\text{चितों की संख्या}}{\text{सिक्का उछलने की कुल संख्या}}$	$\frac{\text{पटों की संचयी संख्या}}{\text{सिक्का उछाले की कुल संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20}=\frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40}=\frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

इस सारणी में आप क्या देखते है? आप देखेंगे कि सिक्के की उछालने की संख्या में वृद्धि होने पर स्तंभ (6) और (7) के भिन्नों के मान निकट होते जाते हैं । अर्थात् जब आप उछालो की संख्या अधिकाधिक बढायेंगे, तब चित या पट प्राप्त करने की प्रायिकता और निकट होती जाती हैं।

2. इस क्रियाकलाप को 3 या 4 समूहों में कर सकते हैं । प्रत्येक समूह के एक विद्यार्थी को एक पासा 30 बार डालने के लिए कहिए । प्रत्येक समूह का दूसरा विद्यार्थी परिणामों को तालिका में लिखेगा । ध्यान दीजिए कि सभी समूह के लोग समरूप पासों का प्रयोग करेंगे । पासे को फेंके जाते समय ऐसा प्रतीत होना चाहिए कि सभी समूहों द्वारा केवल एक ही पासा फेंका जा रहा हैं।

पासों की फेंकने की संख्या	पासे पर इन अंकों के आने की संभावनाएँ					
	1	2	3	4	5	6
30						

सभी समूहों के परिणामों की सहायता से नीचे दिए गए तालिका की पूर्ति कीजिए।

Group(s) समूह(s)	1 आने की संभावना	पासे फेंकने की कुल संख्या	$\frac{\text{1 आने की संभावना}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st} $1^{st}+2^{nd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

इस सारणी में आप क्या देखते है? आप देखेंगे कि पासे की फेंकने की संख्या में वृद्धि होने के साथ-साथ स्तंभ (4) का मूल्य $\frac{1}{6}$ के निकट होते जाएगा है। ऊपरी प्रयोग हमने संख्या 1 केलिए किया है । 2 और 5 के लिए प्रयोग करके परिणामों की जाँच कीजिए।

स्तंभ (4) में प्राप्त भिन्नों के मान के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते है? इसे फेंक कर 1, 2, तथा 5 प्राप्त करने की प्रायिकता से तुलना कीजिए ।

3. यदि दो सिक्कों को एक ही साथ उछालेंगे तो क्या होगा? दोनों सिक्के दो चित या दो पट या एक चित और एक पट बताएगा । क्या इन तीनों की प्रायिकता समान होगी ? जब आप यह सामूहिक क्रिया कलाप करते है । आप इसके बारे में सोचिए ।

आप कक्षा को 4 विद्यार्थीयों के समूह में बाँट दीजिए । प्रत्येक समूह को समान मूल्य और समरूप दो सिक्के दीजिए । प्रत्येक समूह को दोनों सिक्कों को एक ही साथ 20 बार उछालने के लिए कहिए तथा परिणामों को इस तालिका में नोट कीजिए ।

दो सिक्कों को उछालने की संख्या	चित न जाने की संख्या	एक चित आने की संख्या	दो चित आने की संख्या
20			

अब सभी समूह एक संचयी सारणी बनाएँगे ।

वर्ग(s)	दो सिक्कों के उछालने की संख्या	चित न आने की संभावना	एक चित आने की संभावना	दो चित आने की संभावनाएँ
1^{st}				
$1^{st} + 2^{nd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd} + 4^{th}$				
....				

अब हम चित न आने की संभावना और दो सिक्कों की उछालने की संख्या का अनुपात ज्ञात करेंगे । उसी प्रकार एक चित और दो चित आने की संभावनाओं का भी अनुपात ज्ञात करेंगे ।

नीचे दिए गए तालिका की पूर्ति कीजिए ।

वर्ग(s)	$\frac{\text{चित न आने की संख्या}}{\text{कुल उछलों की संख्या}}$	$\frac{\text{एक चित आने की संख्या}}{\text{कुल उछालों की संख्या}}$	$\frac{\text{दो चित आने की संख्या}}{\text{कुल उछालों की संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
समूह 1^{st}			
समूह $1 + 2^{nd}$			
समूह $1 + 2 + 3^{rd}$			
समूह $1 + 2 + 3 + 4^{th}$			
....			

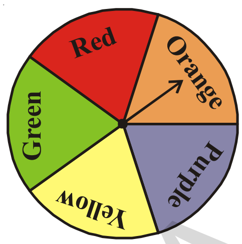
जैसा ही उछालों की संख्या बढ़ती जाएगी, स्तंभ (2), (3) और (4) के मान क्रमशः 0.25, 0.5 और 0.25 के निकट होते जाएंगे ।

उदाहरण-3: एक चक्र को 1000 बार घुमायाँतो निम्नलिखित बारबारिताएँ प्राप्त होती है ।

परिणाम	लाल	नारंगी	बैंगनी	पीला	हरा
बारबारिताएँ	185	195	210	206	204

ज्ञात कीजिए। (a) प्रत्येक घटना में संभव परिणामों को सूची बद्ध कीजिए । (b) प्रत्येक घटना की प्रायिकता अभिलिखित कीजिए ।(c) सारणी से प्रत्येक परिणाम और कुल चक्र को घूमाने कि संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :



(a) संभव परिणाम पाँच है। वे हैं लाल, नारंगी, बैंगनी, पीला और हरा है। चक्र में ये सभी पाँच रंग समान क्षेत्र को घेरेंगे। वे सभी समप्रायिक है।

(b) प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

P(लाल) = $\dfrac{\text{लाल आने की परिणामों की संभावनाएँ}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$

$= \dfrac{1}{5} = 0.2.$

इसी प्रकार

P(नारंगी), P(बैंगनी), P(पीला) और P(हरा) = $\dfrac{1}{5}$ या 0.2 है।

(c) प्रयोग के परिणामों को बारंबारिता तालिका में लिखा जाएगा।

P(लाल) = लाल का अनुपात = $\dfrac{\text{प्रयोग में लाल आने के परिणामों की संख्या}}{\text{चक्र को घुमाने की कुल संख्या}}$

$= \dfrac{185}{1000} = 0.185$

इसी प्रकार, नारंगी, बैंगनी, पीला और हरे रंगों के संबन्धित अनुपात क्रमशः 0.195, 0.210, 0.206 और 0. 204 हो सकते हैं।

हम देखेंगे कि (b) में ज्ञात किया गया प्रायिकता का प्रत्येक अनुपात लगभग समान होगा।[अर्थात् प्रयोग को करने से पहले]

उदाहरण-4. नीचे दिए गए तालिका में एक सिनेमा हॉल के प्रेक्षकों की आयु दी गयी है। प्रत्येक व्यक्ति को एक क्रम संख्या दी गयी है और एक व्यक्ति को क्रम संख्या के आधार पर चुना गया है। अब आप प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(उमर) आयु	पुरुष	स्त्री
वर्ष से 2	3	5
3 - 10 वर्ष	24	35
11 - 16 वर्ष	42	53
17 - 40 वर्ष	121	97
41- 60 वर्ष	51	43
60 वर्ष से ऊपर	18	13

कुल प्रेक्षकों की संख्या : 505

नीचे दिए गए प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल :

a) 10 या इससे कम आयु वाले प्रेक्षकों के प्रायिकता

10 या इस से कम आयु वाले प्रेक्षकों की संख्या = $24 + 35 + 5 + 3 = 67$

कुल प्रेक्षकों की संख्या $= 505$

P(प्रेक्षकों की आयु ≤ 10) $= \dfrac{67}{505}$

b) 16 साल या उस से कम आयु वाले स्त्री प्रेक्षकों की प्रायिकता

16 साल या उस से कम आयु वाले स्त्रीयों की संख्या $= 53 + 35 + 5 = 93$

P(स्त्री प्रेक्षकों की आयु ≤ 16 years) $= 93/505$

c) 17 वर्ष या उस से अधिक आयु वाले पुरुषों की प्रायिकता

$= 121 + 51 + 18 = 190$

P(पुरुष की आयु ≥ 17 वर्ष) $= \dfrac{190}{505} = \dfrac{38}{101}$

d) 40 वर्ष से अधिक आयु वाले प्रेक्षकों की प्रायिकता

$= 51+43+18+ 13 = 125$

P(प्रेक्षकों की आयु > 40 वर्ष) $= \dfrac{125}{505} = \dfrac{25}{101}$

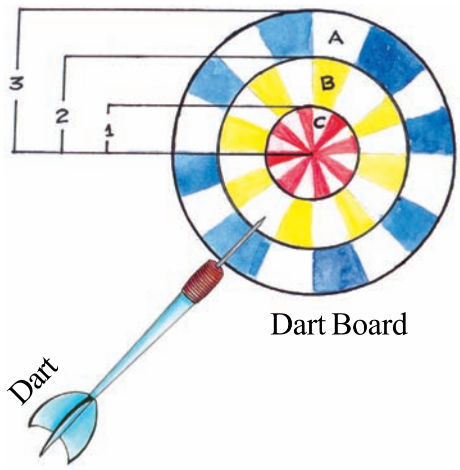
e) सिनेमा देखने वाले प्रेक्षकों में पुरुष न होने वाली प्रायिकता

$= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246$

P(सिनेमा देखने वाला प्रेक्षक जो पुरुष नहीं है।)$= \dfrac{246}{505}$

उदाहरण-5 :मान लीजिए कि एक बाण निशानेवाजी वाले बोर्ड पर निशाना लगाते हुए फेंका जाता है। बोर्ड में तीन एक केंद्रीय वृत्त हैं। जिनकी त्रिया क्रमशः 3 cm, 2 cm और 1 cm है। उन तीनों वृत्तों में बाण लगने की संभावना/प्रायिकता समान है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया हैं -

बाण के A क्षेत्र में लगने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (बाहरी वलय)



हल: यहाँ A के क्षेत्र में बाण लगाने की घटना है।

3 cm त्रिव्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi(3)^2$

वृत्ताकार क्षेत्र A का क्षेत्रफल (अर्थात वलय A) = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

बाण का बोर्ड के क्षेत्रA में लगने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{वृत्ताकार क्षेत्र A का क्षेत्रफल}}{\text{कुल क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi} = \frac{5}{9}$$

याद रखिए

वृत्त के क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वलय के क्षेत्र फल $= \pi R^2 - \pi r^2$

प्रयत्न कीजिए

उदाहरण - 5 में दिए गए चित्र की सहायता से कीजिए ।

1. बाण का क्षेत्र B में लगने की प्रायिकता को ज्ञात कीजिए । (अर्थात् : वलय B).
2. बाण का क्षेत्र C में लगने की प्रायिकता प्रतिशतन ज्ञात कीजिए । (अर्थातः वलय C).

14.3 वास्तविक जीवन में प्रायिकता के उपयोग ।

- मौसम विभाग बीते हुए अनेक वर्षों के आँकडों की प्रवृत्तियों को देखकर मौसम के बारे में भविष्यवाणी (प्रगुप्तियाँ) करता है ।
- बीमा कंपनियाँ बीमा प्रीमियम तय करने के लिए दुर्घटना होने या न होने की प्रायिकता परिकलित करते हैं ।
- चुनाव के बाद एक्जिट पोल किया जाता हैं । इनमें संपूर्ण क्षेत्र में बंटित केन्द्रों में से यदृच्छ रूप से कुछ केन्द्र चुनकर मतदान करके आने वाले व्यक्तियों से यह पूछा जाता है कि उन्होंने किस मत दिया हैं । इससे प्रत्येक प्रत्याशी के जितने की संभावना का अनुमान लगाया जाता है तथा इसी आधार पर प्रागुप्तियाँ (भविष्यवाणियाँ) की जाती हैं ।

अभ्यास - 14.1

1. एक पासे के छः सप्तह पर 1 से 6 तक अंक लिखे हुए है । इस को फेंक कर अपरी सतह के अंक को लिखिए। जब इस को ऐच्छिक अभिप्रयोग माना जाए तो ।

   a) संभव परिणाम क्या है?

   b) क्या वे सम संभावित हैं? क्यों?

   c) अपरी सतह पर संयुक्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. एक सिक्के को 100 बार उछाल कर प्रेक्षणों को लिखिए ।

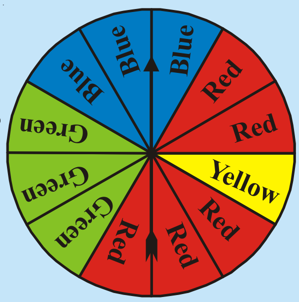
   चितों की संख्या :45 times   पटों की संख्या :55

   a) प्रत्येक परिणाम कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   b) प्रत्येक सभी परिणामों के प्रायिकताओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

3. एक चक्र में चार भिन्न रंग हैं जैसा चित्र में दर्शाया गया है ।

   जब हम एक बार घुमाएँ तो, ज्ञात कीजिए कि ।



   a) (सूचक) किस रंग (के पर पास) रूकने की ज्यादा संभावना हैं?

   b) (सूचक) किस रंग पर रूकने की कम संभावना हैं?

   c) (सूचक) किस रंग के पर रूकने की सम संभावना हैं?

   d) (सूचक) सफ़ेद रंग पर रूकने की सम संभावना हैं?

   e) किस रंग पर (सूचक) निश्चित रूप से रूकेगा?

4. एक थैली में पाँच हरी गेंदें, तीन नीली गेंदें, दो लाल गेंदें और दो पीली गेंदें हैं। इसमें से यादृच्छिक रूप से एक गेंद निकाली जाय तो ।

   a) क्या चार भिन्न रंगों के परिणाम समप्रायिक (सम संभावित) हैं? विवरण दीजिए।

   b) प्रत्येक रंग के गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   अर्थात् P(हरा), P(नीला), P(लाल) और P(पीला)

5. अंग्रेजी अक्षर माला से एक अक्षर चुन लिया गया हैं। निम्न लिखित अक्षर होने का प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

   a) स्वर   b) P के बाद आने वाला एक अक्षर

   c) एक स्वर या एक व्यंजन   d) स्वर न होने की प्रायिकता

6. ग्यारह गेहुँ के आटे की थैलियों पर 5 कि.ग्रा. अंकित किया गया है। वास्तव में इनके यही भार इस प्रकार हैं । (कि.ग्रा.में.)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

इस में से एक थैले को (ऐच्छिक रूप से) चुन लिया जाय तो वह 5 कि.ग्रा. से अधिक भार वाला थैली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. एक बीमा कंपनी ने आयु और दुर्घटनाओं के बीच के संबंध को ज्ञात करने केलिए एक विशेष नगर के 2000 ड्राइवरों का ऐच्छिक चयन किया । (किसी ड्राइवर को कोई विशेष भरपाई दिए बिना) । प्राप्त किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं :

ड्रइवरों की आयु (वर्षों में)	एक वर्ष में घटित दुर्घटनाएँ				
	0	1	2	3	उसे अधिक
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
50 से अधिक	360	45	35	15	9

नगर से यदृच्छ या चुने गए एक ड्रइवर के लिए निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीकजिए:

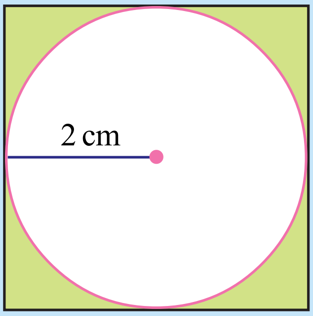
(i) 18-29 वर्ष की आयु का जिसकी एक वर्ष में 3 दृघटनाएँ घटित हुई हो।

(ii) 30-50 वर्ष की आयु का जिसकी एक वर्ष में एक या एक से अधिक दुर्घटनाएँ घटीत हुई हों ।

(iii) जिसके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटीत हुई हो।

8. एक बाण को ऐच्छिक फेंका तो वर्गाकार बोर्ड के छायांकित क्षेत्र में लगने की प्रायिकता क्या होगी?

($\pi = \frac{22}{7}$ लेकर % में व्यक्त कीजिए)



हमने क्या सीखा?

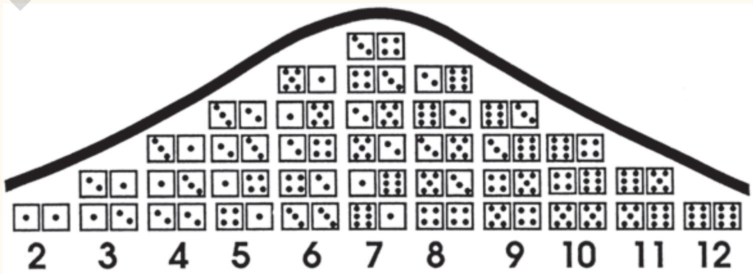
- वास्तविक जीवन में किसी विषय के संबंधित संयोग और निर्णय बताने समय पर अधिक संभावना, कोई मौका नहीं, सम प्रायिक आदि शब्दों का प्रयोग किया जाता हैं ।
- कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने की संभावनाएँ बराबर होती हैं। इस तरह के परिणामों को सम संभावित (सम प्रायिक) परिणाम कहते हैं।
- एक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम या परिणामों के संग्रह से एक घटना बनती हैं।
- कुछ ऐच्छिक प्रयोगों में सभी परिणाम सम संभावित होते हैं।
- अभिप्रयोगें की संख्या बढ़ाते जाएँगे तो सम प्रायिक परिणामों की प्रायिकता परस्पर निकट होती जाएगें।
- घटना A की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

- एक निश्चित घटना की प्रायिकता 1होती हैं ।
- एक असंभव घटना के प्रायिकता 0 है ।
- प्रत्येक घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होती हैं। (0 और 1 को मिलाकर).

क्या आप जानते हैं?

जब दो पासे को एक ही साथ उछाला जाय तो संभव 36 परिणामों को नीचे के चित्र में दर्शाया गया हैं। भिन्न-भिन्न संभव संख्याओं के बारंबरिताएँ देखने में बहुत ही आकर्षित होंगी।(2 से 12 तक) इसे गास्सियन वक्र चित्र द्वारा दर्शाते हैं।



यह गास्सियन वक्र को स्पष्ट करते हैं जो 6वीं शताब्दी के प्रसिद्ध गणितज्ञ के नाम पर हैं । - कॉर्ल फ्रेडरिच गॉस (*Carl Friedrich Gauss*)

15

गणित में उपपत्तियाँ
(PROOFS IN MATHEMATICS)

15.1 प्रस्तावना :

हम अपने दैनिक जीवन में कई कथनो का सामना करते है । प्रत्येक कथन की सच्चाई को जानना चाहते है। कोई कथन सत्य कोई असत्य और कोई बिना अर्थ वाले होते है। किसी कथन के बारे में हम कोई सही जाँच नही कर सकते है। यदि हमें खर्ज लेना है तो बैंक वाले खर्ज की भरपाई के लिए सबूत के रूप में हमसे कुछ बाँड लिखवाते है जो एक भी कथन है। उसके बिना आपकी बात का कोई विश्वास नहीं करता है यदि हम ध्यान पूर्वक सोचे तो अपने दैनिक जीवन में कोई कथन सत्य या असत्य हो सकता है। हम बिना किसी जाँच के किसी भी कथन को सत्य-गठित नहीं कर सकते हैं।

1. सूरज पूर्व से निकलता है ।
2. $3 + 2 = 5$
3. न्यूयार्क USA की राजधानी है ।
4. $4 > 8$
5. आपके कितने बच्चे है ?
6. गोआ की फुटबाल टीम बंगाल से अच्छी है?
7. आयत की चार सममिति रेखाएँ है।
8. $x + 2 = 7$
9. कृपया भीतर आइए ।
10. 6 भुजाओ वाले सिक्के को उछलने पर
11. आप कैसे हो ?
12. सूर्य स्थिर नही है यह तीव्रगति से सदा घूमता रहता है।
13. $x < y$
14. आप कहा रहते हो ?

आप जानते है, उपरोक्त कथनों में से कुछ प्रश्नों के उत्तर असत्य है। उदाः $4>8$ उसी प्रकार हम जानते है कि New York USA. की राजधानी नही है । कुछ प्रश्नो का उत्तर हम अपनी वर्तमान जानकारी से भी बता सकते है ''सूरज पूरब से निकलता है।''

सूरज स्थिर नही है ....

कुछ प्रश्नो के उत्तर सही है। कुछ संदर्भो में कथन सत्य होते है और वही कुछ संदर्भों में असत्य सिद्ध होते हैं। अर्थात् उदा : $x + 2 = 7$ सही है $x = 5$, $x < y$ सही है x और y के लिए जहाँ $x < y$ है । अर्थात् x, y से छोटा होना चाहिए।

कुछ दूसरे वाक्यो को देखिए जो सत्य या असत्य होगे। ये कथन है। इन कथनो को कुछ अवस्थाओ में सत्य या असत्य कथन कहेगे । किसी भी विधि से उस कथन को सत्य या असत्य सिद्ध किया जा सकता है।

सोचिए:

1. इस नोटिस पर ध्यान मत दीजिए ।
2. मै बनाती हूँ वह असत्य कथन है।
3. इस वाक्य में कुछ शब्द है ।
4. शायद चन्द्रमा पर पानी प्राप्त होगा ?

क्या तुम कह सकते हो कि कहे गए वाक्य सत्य या असत्य है। इसे जाँच करने की क्या कोई विधी है।

पहले वाक्य को देखिए, यदि आप कोई नोटिस पर ध्यान नही देते हो, क्यों कि वह ऐसा करने के लिए कहते है। अगर आप इस पर ध्यान देते हो तो आप कुछ तो सोचेंगे। आप उसके सत्य या असत्यता पर भी ध्यान नही देंगे। दूसरा और तीसरा वाक्य कुछ अपने ही बारे में कहते है। चौथा वाक्य सत्य या असत्य दोनो भी हो सकते हैं ।

अतः ऐसे वाक्य जो अपने ही बारे में बताते हो या जो वाक्य संभावना को दर्शाते है तो उन्हे कथन नहीं कहेंगे ।

निम्न करीए :

5 वाक्य बनाइए जाँच कर बताइए की वे कथन है या नही कारण भी बताइए ।

15.2 गणित के कथन (Mathematical Statements)

हम अनन्त वाक्य लिख सकते है। सभी वाक्य सत्य या असत्य नही हो सकते उदाः कृपया भीतर आइए आप कहाँ रहते हो? ऐसे वाक्य बहुत बड़ी संख्या में हो सकते है ।

सभी वाक्य कथन नही होगे । ऐसे वाक्य जिसे सत्य या असत्य परन्तु दोनो नही वही एक कथन होगा। गणितिय कथन के लिए यह भी सत्य है। एक गणित का कथन द्वीअर्थ (ambiguous) नहीं होगा ।

निम्न वाक्य देखिए :

1. 3 एक रूढ संख्या है।
2. दो विषम संख्याओ का गुणा सम हतो है।
3. वास्तविक संख्या x; $4x + x = 5x$
4. पृथ्वी पर एक चाँद है ।
5. रामू अच्छा ड्राइवर (चालक) है ।
6. भास्करा ने ''लीलावती''पुस्तक लिखी है।
7. पूरे सम संख्याएँ सयुक्त है ।
8. समचर्तुभुज को वर्ग भी कह सकते है ।
9. $x > 7$.
10. 4 और 5 संबंधित रूढ संख्याएँ है ।

11. चाँदी की मछली चांदी से बनी है ।

12. मनुष्य पृथ्वी पर राज करते है ।

13. कोई वास्तविक संख्या x, $2x > x$.

14. क्यूबा की राजधानी हवाना है ।

इनमें से कौनसे गणितिय कथन है और कौन से गणितिय कथन नहीं है ?

15.3 कथनो की जाँच :

कुछ वाक्यो पर चर्चा करेगो :

उदाहरण -1 : रूढ़ संख्याओ की परिभाषा अनुसार (1) सत्य है। उपरोक्त वाक्यों में ऐसे कौनसे वाक्य है जो गणितिय पद्धति से सिद्ध किये जा सकते है ? (सिद्ध करने के प्रयास कीजिए)

उदाहरण -2. दो विषम संख्याओ का गुणांक सम संख्या है। 3 और 5 विषम संख्याए है उनका गुणांक 15 जो सम संख्या नहीं है ।

अतः यह एक ऐसा कथन है जो असत्य है। उदाहरण एक के द्वारा हम दर्शा सकते है यहाँ हम कथन के प्रतिकूल उदाहरण देकर उनकी जाँच कर सकते हैं। ऐसे उदाहरण जो कथन के प्रतिकूल होते है उन्हें प्रतिकूल उदाहरण कहते हैं।

प्रयत्न कीजिए :

कौन से कथन प्रतिकूल उदाहरण देकर बताए जाएगे ।

उदाहरण-3.

ऊपर के वाक्यों में कुछ कथन जैसे ''मनुष्य पृथ्वी पर राज करता है'' या ''रामू एक अच्छा ड्राइवर है।''

यह कुछ असस्ष्ट कथन है जैसे पृथ्वी पर राज करना कुछ विशेषता नही बताई गई है। उसी प्रकार अच्छे ड्राइवर की क्या परिभाषा है?

इसलिए हम ऐसे कथनों को गणितीय कथन कहते हैं जो सभी संदर्भो में एक ही अर्थ देता है।

उदाहरण-4. कुछ और कथनों को देखिए जैसे

पृथ्वी पर एक चाँद है ।

भास्कर ने ''लीलावती'' पुस्तक लिखी है।

ये कथन है या नहीं कैसे सिद्ध करोगे ?

इन वाक्यों में संदिग्धता नहीं है इसे सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं होगी ।

ये अस्पष्ट कथन नहीं है फिर भी उनकी जाँच आवश्यक है। उन्हें कुछ ठोस निरीक्षणों या सबूतों की आवश्यकता होगी। इसके अलावा ये पूर्व सिद्‌ध कथन नहीं है। पहले कथन को सौर परिवार तथा पृथ्वी के निरीक्षण की आवश्यकता होगी। दूसरे कथन के लिए दस्तावेज या पुस्तकीय संदर्भो की आवश्यकता होगी।

गणितीय कथनो का अलग स्वभाव होता है। उसे हमे कुछ कारणों की वजह से सिद्ध नही कर सकते उन्हे प्रतिकूल उदाहरणों से समझा सकते है।

प्रतिकूल कथन बताना है। कोई वास्तविक संख्या $2x > x$, $x = -1$ या $-\frac{1}{2}$ .... कथन को सिद्ध न करके प्रतिकूल उदाहरण दे । $2x > x$ सत्य है x N होगा ।

उदाहरण-5.

निम्न कथनो को सही कारणो से सत्य कथन बनाइए ।

i. प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए x, $3x > x$.

ii. प्रत्येक वास्तविक संख्या $x, x^2 \geq x$.

iii. प्रत्येक संख्या को दो विभाजित करने पर संख्या की आधी संख्या आएगी ।

iv. वृत्त के किसी बिन्दु पर चापकर्ण से बनने वाला कोण $90°$ है ।

v. किसी चर्तुभुज की चारो भुजाएँ समान हो तो उसे वर्ग कहते है ।

हल:

i. यदि $x > 0$, तो $3x > x$.

ii. यदि $x \leq 0$ या $x \geq 1$, तो $x^2 \geq x$.

iii. संख्या जो शून्य न हो उसे 2 से विभाजित करने पर, संख्या आधी हो जाती है ।

iv. वृत्त के व्यास से वृत्त पर के बिन्दु पर बनने वाला कोण $90°$ होता है ।

v. यदि चतुर्भुज की चारों भुजाएँ और सभी अतः कोण समान हो तो यह वर्ग होगा ।

अभ्यास 15.1

1. निम्न वाक्य सत्य या असत्य या अस्पष्ट है उत्तर की जाँच कीजिए ।

   i. एक महीने में 27 दिन होते है। ii. मकर संक्रांति शुक्रवार के दिन होती है।

   iii. हैदराबाद का तापमान $2°C$ है। iv. पृथ्वी एक ऐसा ग्रह है जहां जीवन है ।

   v. कुत्ते उड़ सकते है । vi. फरवरी में 28 दिन होते है ।

2. निम्न कथन सत्य या असत्य बताइए कारण लिखिए ।

   i. चर्तुभुज के अतः कोणो का योग $350°$ होता है ।

   ii. प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए $x, x^2 \geq 0$

   iii. एक समचर्तुभुज समानान्तर चतुर्भुज होगा iv. दो सम संख्याओ का योग सम संख्या होगी

   v. वर्गीय संख्याएँ दो विषम संख्याओ के योग के रूप में लिखी जा सकती है ।

3. निम्न कथनो को सत्य कथन बनाने के लिए नए कारण बताओ ।

   i. सभी संख्याएँ रूढ़ संख्याओं को रुढी गुणक खण्ड के रुप में दर्शाया जा सकता है।

   ii. वास्तविक संख्या को दुगना करने पर हमेशा सम संख्या होगी ।

   हो सकती है ।

   iii. कोई x, $3x + 1 > 4$. iv. कोई $x, x^3 \geq 0$.

   v. प्रत्येक त्रिभुज में माध्यिका कोण का समद्विभाजक होता है ।

4. प्रतिकूल उदाहरण देकर सिद्ध करो $x^2 > y^2$ सभी $x > y$ के लिए।

15.4 गणित में तर्क-वितर्क (Reasoning in Mathematics)

मनुष्य स्वभाव से ही जिज्ञासु है। यह जिज्ञासा हमें संसार से भिड़ने की शक्ति देती है। क्या होगा यदि हम उसे आगे ढेकले?इसमें डाले ? कई कारण कई सोचे तो भी हम नही बता सकते, सभी समय हम कह सकते है -

''क्या होगा अगर हम अलग-अलग हाव भाव का उपयोग करें?

इन प्रयोगों के आधार पर हमने भौतिक संसार के कुछ स्थिर चित्रों को चित्रित किया है। अंततः सभी स्थितियों में हम इसका प्रतिस्थापन करते है?

'क्या होगा यदि ऐसा घटता है तो' इस भावना तक हम पहुँचते है

पूर्व समझ का शुद्धिकरण और नये विचारों के उद्भव पर प्रयोग चलते रहते है। इस क्रिडात्मक परिभाषाओं का कल्पनात्मक तथ्यों को सिद्ध करने के लिए उपयोग किया गया।

- कुछ निरिक्षणों से दत्तों को एकत्रित कीजिए।
- आपके निरिक्षण को समझाने वाला निष्कर्ष निकालिए।
- आपकी कल्पना को कुछ और उदाहरणों से जाँच कीजिए।

तब हमें प्राप्त होता हैः

- एक स्वयंतथ्य वह कथन या विचार है जो निरिक्षणों की श्रृंखला को समझाता है।

कभी-कभी किये गये निरिक्षण, कल्पना के शुद्धिकरण या निषेध की आवश्यकता पड़ती है। ऐसा तभी होता है जब निरिक्षण की केवल एक ही प्रतिकुलता पायी जाती है। साधारणतया हम गणित में कल्पना के स्थान पर अनुमान शब्द का प्रयोग करते है। इन दोनों पदों की समानता तथा भिन्नता को आप अगली कक्षाओं में पढेंगे।

15.4.1 कल्पनाओं के जाँच में निगमन कारणों का उपयोग :-

हमेशा उपपत्ति के निकट वाले विचारों में हमेशा असामंजस्य रहता है। जो गणितीय प्रक्रिया है जबकि परिकल्पना की जाँच एक वैज्ञानिक प्रक्रिया है। इनके बीच बहुत ही साधारण अंतर है।

- गणित निगमन कारणों पर आधारित होता हैः उपपत्ति एक तर्क संगत निगमन है जो दिये गए तथ्यों पर बनता है।
- विज्ञान आगमन कारणों पर आधारित होता हैः परिकल्पनाओं को या मजबूती प्रदान करते है या फिर उनका निषेध किया जाता है जो प्रयोगों से एकत्रित प्रमाणों पर आधारित होता है।

विज्ञान में अच्छा सिद्ध होने के लिए आपकों निगमन कारणों पर आधारित होना पड़ता है।

जासूस जैसे शेरलॉक होम तथा हरक्यूल पायराट इतने निपुण थे कि, वे घटना स्थान से प्रमाण एकत्रित कर उनसे तर्क संगत निष्कर्ष निकालते थे। उदाहरणार्थ M व्यक्ति ने कोई जुर्म किया है। वे इस प्रमाण को इस प्रकार तैयार करते है कि कल्पना को प्रमाणित करें जो कि अनुमानित कारणों से ऊपर होगा। यहाँ का मुख्य शब्द कारणवश है।

15.4.2 निगमन कारण (Deductive Reasoning)

स्पष्ट कथनों को तर्क संगत सत्य प्रमाणित करने की विधि को निगमन विधि कहते है। निगमन विधि को समझने के लिए इस पहली को हल करेंगे।

आपको चार कार्ड दिए गए है। प्रत्येक कार्ड पर एक तरफ संख्या तथा दूसरी तरफ अंग्रेजी वर्ण छपा होगा।

A	V	8	5

यदि आपको बताया गया कि ये कार्ड इन नियमों का पालन करते है।

"यदि कार्ड के एक ओर विषम संख्या हो तो दूसरी ओर स्वर होगा।"

इस नियम की सत्यता की जाँच करने के लिए आप कौन-सा कार्ड पलटायेंगे।

सभावतः आप एक-एक कार्ड को पलटाकर जाँच कर सकते है। क्या आप कम कार्डों के साथ इसकी व्यवस्था कर सकते है?

ध्यान दिजिए कि कथन ''काडई की एक ओर विषम संख्या और दूसरी ओर स्वर होना चाहिए। इसका अर्थ या नहीं होता है कि एक ओर स्वर वाले कार्ड पर दूसरी ओर विषम संख्या होनी चाहिए। वह हो भी सकता है नहीं भी हो सकता है? इस नियम का यह भी अर्थ नहीं हो सकता है कि एख ओर सम संख्या हो तो दूसरी ओर व्यंजन होने चाहिए। यह हो भी सकता है नहीं भी हो सकता।

क्या हम 'A' को पलटाएंगे नहीं। उसके पिछे सम या विषम संख्या होने पर भी नियम लागू होता है।

8 के बारे में क्या कहेंगे? उसे फिर से पलटाने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि उसके पिछे स्वर या व्यंजन होने पर भी नियम लागू होता है।

लेकिन आपको V तथा 5 को पलटाना पड़ेगा, यदि V के पिछे विषम संख्या हो तो नियम भंग होता है। उसी प्रकार यदि 5 के पिछे व्यंजन हो तो भी नियम भंग होता है।

इस पहले को सुलझाने के लिए उपयोगी विधि को निगमन कारण कहते है। इसे निगमन इसलिए कहते है क्योंकि हम पहले स्थापित कथन पर तर्क संगति से पहुँचते है। उफरोक्त उदाहरण में हमने देखा कि हमें सिर्फ V और 5 को ही पलटना पड़ेगा।

निगमन कारण किसी कथन को सत्य सिद्ध करने के लिए भी उपयोगी सिद्ध होती है। उदाहरणार्थ एक बार हमने सिद्ध किया कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम संख्या ही होता है तो 56702×19992 का गुणनफल सम संख्या इस निष्कर्ष पर तुरंत पहुँच सकते है। क्योंकि 56702 तथा 19992 सम संख्यायें है।

कुछ और उदाहरणों को देखिए।

i. यदि कोई संख्या '0'पर समाप्त होती है तो वह 5 से विभाजित होती हैं 30, 0 पर समाप्त होता है। इस कथन द्वारा हम यह निष्कर्ष निकालते है कि 5 से 30 विभाजित होता है।

ii. कुछ गायक, कवि होते है, सभी संगीतकार कवि होते हैं।

यहाँ निगमन दो कथनों पर आधारित है सभी संगीतकार कवि होते है (गलत होगा) क्योंकि हम इसे प्रमाण भूत रूप से सिद्ध नहीं कर सकते हैं यहाँ तीन संभावनाएँ है। (i) सभी संगीतकार कवि हो सकते है। (ii) कुछ कवि हो सकते हैं (iii) कोई भी कवि नहीं हो सकता।

आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेगे कि ''यदि तो'' वाले प्रतिबन्ध कथन निगमन कारणों में आते है। गणित में हम इस तर्क को बार-बार उफयोग में लाते है। जैसे रैखिक युग्म कोणों का योग 180° होता हैं तो ही त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होगा। उसी प्रकार जब हम दशमलव संख्या का उपयोग करते हैं स्ख्या 5 लिखते हैं उसी को द्विपद विधि से 101 लिखा जाता है।

दुर्भाग्यवश हमेशा हम अपने जीवन में सहीं कारणों का उपयोग नहीं करते हैं गलत कारणों पर आधारित निष्कर्ष निकालते हैं। उदाहरणार्थ यदि आपका मित्र आपसे बात नहीं करता हैं तो आप निष्कर्ष निकालने है कि वह आप पर क्रोधित है या वह हमसे किसी कारणवश नाराज है । यह सही होगा ''यदि वह गुस्से में हो तो वह मुझसे बात नही करती है'' या यह भी सही हो सकता है ''यदि वह अपने कार्य में व्यस्त है तो बात नही करती है'' इस प्रकार दिन प्रतिदिन के कार्यो में हम किसी भी निष्कर्ष पर नही आ सकते यदि वह गलत कारणो पर आधारित है ।

अभ्यास - 15.2

1. नीचे दिये गये प्रश्नों को निगमन पद्धति से हल कीजिए ।

   i. मनुष्य का अन्त निश्चित है। जीवन एक मनुष्य है। इन दो कथनो के आधार पर आप ''जीवन'' के लिए किस निर्णय पर पहुँचते है ?

   ii. सभी तेलुगु भाषी हिन्दुस्थानी है । X एक भारतीय है। क्या तुम कह सकते हो कि X एक तेलुगु भाषी है ।

   iii. मंगलग्रह वासियों की जीभ लाल है गुलाग एक मंगलग्रह वासी है। इस दो कथनो के आधार पर हम गुलाग के बारे में क्या कह सकते है ?

   iv. राजू नीचे दिए गए कार्टून में क्या अपने बारे में गलत सोच रहा है ।

2. फिर से आपको 4 कार्ड दिए जाय हर पत्ते पर एक ओर छपाई है दूसरी ओर शब्द। ।
यदि पत्ते पर एक ओर स्थिरांक है तो दूसरी ओर एक विषम संख्या होगी ।

B	3	U	8

3. एक पहेली के बारे में सोचो आपको एक वर्ग से चुना गया नम्बर पहचानना है ।
निचे दिए गए संकेतों में चार सही है परन्तु कोई भी सहायक नही है।
संख्या को ज्ञात करने के लिए चार संकेतो की आवश्यकता है।
यहाँ आठ संकेत दिए गए है उनमें से

a. 9 से बड़ी संख्या।

b. संख्या जो कि 10 गुणांक नही है ।

c. संख्या जो 7 का गुणांक है ।

d. संख्या विषम है ।

e. यह 11 के गुणांक नही है ।

f. यह 200 से छोटी है।

g. इसकी इकाई संख्या दहाई से बड़ी होगी ।

h. दहाई संख्या विषम है ।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

संख्या क्या है ?
चार उपयोगी और चार अनउपयोगी संकेतो को बताइए ।
पहले संकेत का उपयोग करो और उसे काट दो जो उपयोगी नही है।
पहले संकेत के अनुसार 1 से 9 तक की संख्याएँ काट दो ।
पहेली पूरा होने के पश्चात देखिए की, कौनसे संकेत आवश्यक थें और कौन से नही ।

15.5 प्रमेय, परिकल्पनाएँ एवं स्वयंतथ्य (Theorems, Conjectures and Axioms)

अब तक हमने कथन के बारे में जानकारी प्राप्त कि है । अब हम तीन प्रकार के कथनो के अन्तर को जानेंगे गणित प्रमुखतः प्रमेय, परिकल्पना और स्वयं तथ्य पर आधारित है।

आपने अब तक कई प्रमेय जाने है। प्रमेय क्या है ? गणितीय कथन जिसको सिद्ध किया जा सकता है उसे प्रमेय कहते है। उदा : निम्न कथन एक प्रमेय है ।

प्रमेय -15.1 : त्रिभुज के अन्तः कोणो का योग 180° है ।

प्रमेय -15.2 : दो विषम संख्याओ का गुणांक एक विषम संख्या है ।

प्रमेय -15.3 : क्रमागत दो सम प्राकृतिक संख्याओ के गुणा 4 से विभाजित है ।

परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो गणितीय प्रकार से सत्य है, यदि हम इसे सत्य प्रमाणित करते है तो यह एक प्रमेय बन जाता है। कुछ रचनात्मक कल्पना करके हम देखेगे ।

राजू ने देखा कि कुछ घन संख्याओ के बारे में जानने पर, ''यदि तीन क्रमागत संख्याओ को गुणा करने पर, और मध्य संख्या को जोड़ने पर, उत्तर मध्य संख्या का घन आएगा । उदाः 3, 4, 5, तो $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$, यह एक धन है । क्या यह सभी संख्याओ के लिए सही है ? देखेगे ।

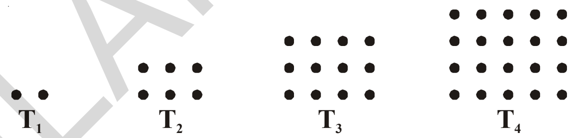
रफी ने 6, 7, 8 तीन संख्या ली $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ यह भी एक पूर्ण धन है। n, $n + 1$, $n + 2$. साधारण संख्याएँ लेकर देखेगे ।

उदाहरण-6. निम्न ज्यामिति ऑरोस संख्याओ को एक क्रम से जमाइए ।

(a) आंगे की तीन पद लो ।

(b) 100^{th} पद ज्ञात करो ।

(c) n वा पद ज्ञात करो ।



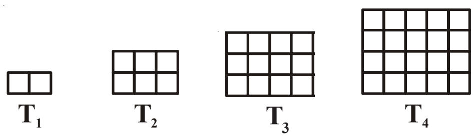
बिन्दुओ को आयताकार रूप में जमाया गया है ।

$T_1 = 2, T_2 = 6, T_3 = 12, T_4 = 20$। T_5 का मूल्य क्या होगा ? T_6, T_n का मूल्य ?

निम्न रूप से हम T_n ज्ञात कर सकते है ।

हल :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....
	+4	+6	+8	+10	



अतः $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7 के लिए कोशिश क

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

$T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

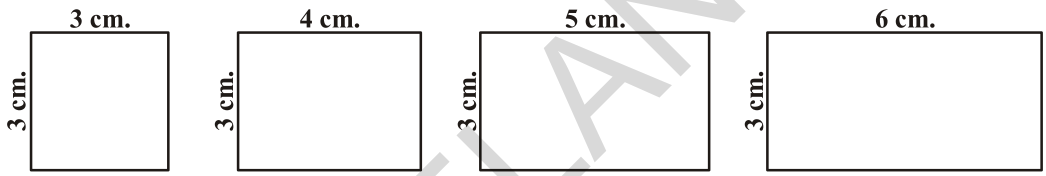
इस प्रकार के तर्क विभिन्न तथ्यों पर या दत्तों के समूहों पर आधारित होते है जो किस संख्या पद्धति या निष्कर्ष निर्माण को प्रधान करते है उन्हें आगमन पद्धति कहते है। आगमन पद्धित परिकल्पनाओं को बनाने में सहयक होती है।

गोल्ड बैच प्रसिद्ध गणितज्ञ, ने एक तरिका (pattern) बताया ?

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 11 + 3$	$16 = 13 + 3 = 11 + 5$

गोल्ड बैच 1743 ने बताया कि प्रत्येक सम संख्या जो 4 से अधिक है दो रूढ़ संख्याओ के योग के रूप में लिखा जा सकता है । उसकी परिकल्पना सिद्ध नहीं करता है कि यह सत्य या असत्य है । यह उत्तर सत्य या असत्य सिद्ध होगा और काफी मशूहर होगा ।

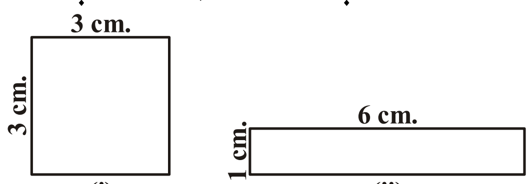
थोड़े प्रतिरूप देखकर हम लगत परिकल्पना पर पहुँच जाते है 8^{th} कक्षा में जानवी और कर्तिक क्षेत्रफल और परिमिती का अध्याय पढ़ रहे थे ....



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Perimeter :	12 cm.	14 cm.	16 cm.	18 cm.
Area :	9 cm^2	12 cm^2	15 cm^2	18 cm^2

इस निषकर्ष पर पहुँचते है कि यदि आयत की परिमिती बढ़ती है तो क्षेत्रफल भी बढ़ता है। आप क्या सोचते हो? क्या वे सही है ।

इस प्रतिरूप पर कार्य करने पर इन्द्र ने कुछ आयत उतारे, उसने इस प्रतिकल्पना को गलत बताया जो कि जानवी और कार्तिक ने बताए थे ।

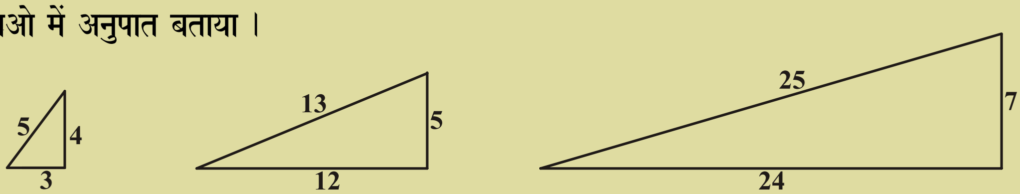


	(i)	(ii)
Perimeter :	12 cm.	14 cm.
Area :	9 cm^2	6 cm^2

अतः कुछ भी कहने से पहले सभी बातों का ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है ।

कोशिश कीजिए -

पायथागोरस की अधिक महत्ता से जलते हुए उसके भाई ने समकोण त्रिभुज के लिए अलग भुजाओ में अनुपात बताया ।



(i) (ii) (iii)

लिथोगोरस प्रमेय (Liethagoras Theorem) : क्रियी समकोण त्रिभुज में छोटी भुजा का वर्ग शेष भुजाओ के योग के बराबर होगा ।

ऊपरी तथ्य का सत्य या असत्य बताओ ।

हम इस बात को गणित के अनुसार सिद्ध करेगे ।

गणित में कुछ कथन सत्य कहे जाते है पर सिद्ध नही किए गए है यह स्वयं के द्वारा कहे गए है और बिना सिद्ध किए उन्हे सत्य कहा गया है । इन्हे हम स्वयं तथ्य कहते है । युक्लीड (Euclid) के अभिधारणा (postulates) और स्वयं तथ्य के बीच ज्यादा अन्तर नही है अतः उन्हे हम अभिधारणा (postulates) ही कहते है ।

उदा : युक्लीड का अभिधारणा 1 :

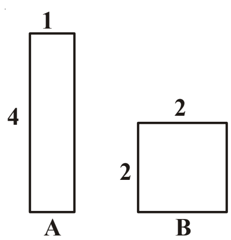
एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक एक सरल रेखा खिची जा सकती है ।

अभिधारणा 3 :

एक वृत्त किसी भी केन्द्र और और अर्धव्यास से खीचा जा सकता है ।

यह कथन पूरी तरह से सत्य है और युक्लीड उन्हे सत्य ही मानता है । क्योंकि प्रत्येक कथन को सिद्ध नही किया जा सकता है हमें कही न कही से आरम्भ करना है, अतः हम कोई सत्य कथन के आधार पर अपनी जानकारी बना पाते है ।

अतः तो हम सभी कथनो को सत्य क्यो नही मानते ?जबकि स्वयं वे अपनी सत्यता बताते है। इसके कई कारण है। कभी २ हमारी कल्पनाएँ गलत भी हो सकती है उसकी सत्यता के लिए सिद्ध करना आवश्यक है । उदाहरण के लिए हम सोचते है कि यदि किसी संख्या में दूसरी संख्या जोड़ी जाए तो वह दी गई संख्या से अधिक होगी। उदाः$5 + (-5) = 0 < 5$.



चित्र देखिए और बताइए किसका क्षेत्रफल अधिक है ?

चूँकि B बड़ा दिखाई देता है परन्तु दोनो का क्षेत्रफल समान हो ।

स्वयं तथ्य की सत्यता पर हमें ध्यान देना है। अपनी कल्पना पर हम स्वयं तथ्य का चुनाव करते है जो कि सत्य है। फिर बाद में हम पाते है कि यह स्वयं तथ्य असत्य है। निम्न बातो पर ध्यान दीजिए ।

i. स्वयं तथ्य (Axioms) जो युक्लीड के पाँच अभिधारणाओं (postulates) पर आधारित है हम 1000 प्रमेय बना सकते है ।

ii. यह निर्धारित कर लिजिए कि स्वयं तथ्य स्थिर है।

यदि हम एक स्वयं तथ्य के सहारे दूसरे स्वयंतथ्य को असत्य बताते है उदा- निम्न दो कथनो पर ध्यान दीजिए हम बतायेगे की वे अस्थिर है।

कथन-1 : कोई भी पूर्ण संख्या आगे की संख्या के बराबर नही होगी ।

कथन -2 : पूर्ण संख्या को शून्य से विभाजित करे तो पूर्ण संख्या ही होगी ।

(याद रखिए शून्य से भाग अपरिभाषित (not defined) नही हो सकता)

कथन-2 $\frac{1}{0} = a,\ a$ कोई पूर्ण संख्या है। अर्थात 1=0. परन्तु यह कथन -1को (असत्य) बताता है। अतः कोई पूर्ण संख्या आगे की संख्या के बराबर नही होगी ।

iii. असत्य कथन जल्दी था देर से हमें असमंज में डाल देता है। ''यदि कथन का नकारात्मक और कथन सत्य हो तो ' उदाः कथन १ कथन २.

कथन-1 - 2 $\neq$ 1.

$$x = y$$
$$x \times x = xy$$
$$x^2 = xy$$
$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$
$$(x+y)\,(x-y) = y\,(x - y)$$
$$x + y = y$$

परन्तु $x = y$

$$x + x = x$$
$$2x = x$$
$$2 = 1$$

दोनो कथन 2 $\neq$ 1 इसका नकारात्मक 2 = 1 सत्य है।

यह विरोधाभास है । कुछ असत्य तथ्य समस्यायें उत्पन्न करते है जैसे किसी पूर्ण संख्या को शून्य से विभाजित करने पर शून्य संख्या ही प्राप्त होती है ।

अतः कथन जो कि स्वयंतथ्य है उसे अधिक सोचना और समझना पड़ेगा।

जो आप स्वयं तथ्य पसन्द करते है उसे अधिक सोचना व समझना पड़ेगा । स्वयं तथ्य को चुनना कभी कभी नये खोज की ओर अग्रसर करा देता है ।

हम इस भाग का स्वयं तथ्य, प्रमेय एवं परिकल्पना के बीच अंतर को याद करते हुए अंत करेंगे। स्वयं तथ्य एक ऐसा गणितीय कथन है जिसे बिना सबूतों के ही सत्य माना जाता है ; परिकल्पना एक ऐसा गणितीय कथन है जिसके सत्य या असत्यता अभी सिद्ध करना बाकी है एवं प्रमेय एक ऐसा गणितीय कथन है जो तर्क के आधार पर सिद्ध किया जाता है।

अभ्यास 15.3

1. (i) किन्ही तीन क्रमागत विषम संख्याओ का गुणा ज्ञात कीजिए ।

   उदा- $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) किन्ही तीन क्रमागत सम संख्याओ का योग, $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$,

   $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ .... ।

   इन तरिका (pattern) को देखकर क्या आप कोई धारणा बना सकते है ?

2. Pascal's triangle पासकल का त्रिभुज

   Line-1 : $1 = 11^0$

   Line-2 : $11 = 11^1$

   Line-3 : $121 = 11^2$

				1				
			1		**1**			
		1		**2**		**1**		
	1		**3**		**3**		**1**	
1		**4**		**6**		**4**		**1**

   क्या आप चौथी, पाँचवी रेखा के बारे में कोई धारणा बना सकते हो ।

3. निम्न तरिका (pattern) पर ध्यान दीजिए ।

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$, खण्डो की संख्या $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

   28 के खण्ड है इन 6 इन संख्याओ से पूर्ण विभाजित हैं । 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ खण्डो की संख्या $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   30 के 8 खण्ड है इन खण्डो से यह पूर्ण विभाजित है । 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   (**Hint :** प्रत्येक प्राकृतिक संख्या के गुणा जिसकी धात +1 है)

4. निम्न तरिका (pattern)को देखिए :

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

प्रत्यक के लिए एक परिकल्पना बनाइए।

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

आपकी मान्यता सही होगी या नही जाँच कीजिए।

5. इस पुस्तक के 5 स्वयं तथ्य बताओ ।

6. बहुपदी $p(x) = x^2 + x + 41$ का मूल्य ज्ञात करो । क्या आप देखते हे विभिन्न x मूल्यो के लिए $p(x)$ एक रूढ़ संख्या है । क्या x N है। $x = 41$ $p(x)$ का मूल्य ज्ञात करो ?

15.6 गणितिय उपपत्ति किसे कहते है ? (Mathematical Proof)

गणित में उपतत्ति जानने से पहले हम कथन को जाँचते है ।

उदाः "दो विषम संख्याओ का गुणा विषम है" उदा 15×2005 $15 \times 2005 = 30075$ (विषम संख्या) इस प्रकार कई उदाहरण किए जाएगे ।

उसी प्रकार आपसे कई त्रिभुज उतारने के लिए कहे जाएगे उनके अतः कोणो का योग 180° उतारने में कुछ गहित हो तो भी उनका योग 180° ही होगा।

इस पद्धति में क्या गलती है? कई गणित के प्रश्न जाँच किए जा सकते है। जिससे हम यह नही कह सकते कि दिया गया। कथन हमेशा सत्य ही होगा। उदाहरण दो सम संख्याओ का गुणा हमेशा सभ ही होगा। हम प्रत्येक संख्या के लिए इसे जाँच नही सकते है क्योंकि कई सम संख्याएँ है। सभी सम संख्याओं का गुणनफल करना संभव नहीं है क्योंकि अनंत सम संख्याएँ होती है। उसी प्रकार कुछ त्रिभुज ऐसे होगे जिसके तीनों कोणो का योग 180° नहीं हो सकता है अभी हमने उनकी जाँच भी नहीं की है।

कभी कभी जाँच करने मे भी कुछ गल्तियाँ हो जाती है, पास्कल का त्रिभुज (Pascal's triangle) पास्कल त्रिभुज के अनुसार $11^5 = 15101051$ वास्तव में $11^5 = 161051$ हैं।

अतः आपको एक ऐसे जाँच पद्धति की आवश्यकता होती तो किसी संदर्भ में दूसरे तथ्यों पर आधारित नहीं होगी। एक ऐसा तरीका जो गणितिय कथन की सत्यता को बताता है उसे ही हम गणितिय उपपत्ति कहते है । जो शुद्ध रूप से कई तार्किक कथनों पर आधारित होता है।

गणितीय कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए एक प्रतिकूल उदाहरण की आवश्यकता होगी। इसलिए जब उसका मूल्यांकन सही सिद्ध करने के लिए पर्याप्त नहीं होगा यदि वह हजारों जाँचों के लिए सत्य सिद्ध नहीं होता है। किसी भी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए केवल एक प्रतिकूल उदाहरण पर्याप्त होता है।

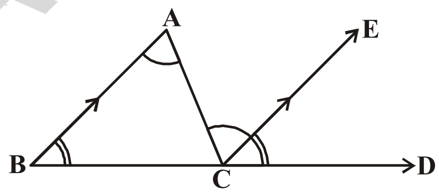
गणितीय कथन यदि असत्य हो तो एक प्रतिकूल उदाहरण दे सकते है ।

i. सर्वप्रथम हम यह देखगे कि कौनसी विधि से हम सिद्ध करेगे कि आगे कैसे बढ़ा जाये ।

ii. गणितीय कथन के अनुसार उपपत्ति कैसे लिखी जा सकती है । प्रत्येक कथन के लिए जब प्रमेय लिखा जाता है तो देखा जाता है क्या दिया गया है। स्वयंतथ्य पर आधारित है या नही ।

iii. गणितिय कथन तार्किक रूप से सत्य है तो हम उपपत्ति द्वारा सिद्ध करके प्रमेय की सत्यता सिद्ध कर सकते है ।

समझने के लिए प्रमेय को उपपत्ति के आधार पर सिद्ध किया जा सकता है। चित्र की सहायता से प्रमेय को भी सिद्ध किया जा सकता है। तर्क की सहायता से भी। यदि दो रेखाओ के मध्य का कोण 90° हो तो रेखाएँ परस्पर लम्ब होगी ।



प्रमेय -15.4 : त्रिभुज के तिनों कोणो का योग 180° होता है ।

उपपत्ति : त्रिभुज ABCमें

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$ (सिद्ध करना है)

CE रेखा BA के समानान्तर खिचो बिन्दु C से BC रेखा बिन्दु D तक बढ़ाओ ।

CE BA तथा AC तिर्थक रेखा है।

$\angle CAB = \angle ACE$, (एकान्तर कोण) ..... (1)

$\angle ABC = \angle DCE$ संगत कोण ..... (2)

eq. (1) और (2) जोड़ने पर

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \quad ..... (3)$$

$\angle BCA$ दोनो ओर जोड़ने पर

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE \quad ..... (4)$$

$$\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180° \quad ..... (5)$$

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

अब हम देखेगे कि प्रत्येक क्रम तार्किक रूप से उपपत्ति से जुड़ा है ।

क्रम-1:हमारा प्रमेय त्रिभुज के गुणो के बारे में बताता है। अतः हम ABC के बारे में जानेगे ।

क्रम-2: प्रमेय को सिद्ध करने के लिए CE *ll* BA और BC को D तक बढ़ाओ ।

क्रम-3:$\angle CAB = \angle ACE$ और $\angle ABC = \angle DCE$, CE *ll* to BA (रचना से) पूर्व प्रमेय के अनुसार यदि दो रेखाएँ समानान्तर है और तिर्थक रेखा काटती है तो एकान्तर कोण, संगत कोण बराबर होते है।

क्रम-4: युक्लीड स्वयं तथ्य के अनुसार ''यदि एक समान दोनों ओर जोड़ा तो पूरे आपस मे बराबर होंगे ।$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$.

अतः त्रिभुज के तीन अंतः कोणो का योग सरल रेखा पर के कोणो के योग के बराबर होगा।

क्रम-5: युक्लीड के स्वयं तथ्य अनुसार कथन ''समान वस्तुएँ एक दूसरे के समान होगे ।

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$ सिद्ध है।

प्रमेय -15.5 :

दो विषम संख्याओ का गुण विषम संख्या होती है।

उपपत्ति: मान लो x और y कोई दो विषम संख्याएँ है।

हमें सिद्ध करना है $x\,y$ एक विषम संख्या है ।

क्योंकि x तथा y विषम संख्या है $x = (2m - 1)$, किसी प्राकृतिक संख्या m के लिए और $y = 2n - 1$ कोई प्राकृतिक संख्या n के लिए

$$\begin{aligned} xy &= (2m-1)(2n-1) \\ &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1 \\ &= 2(2mn - m - n + 1) - 1 \end{aligned}$$

मान लो $2mn - m - n + 1 = l$ कोई प्राकृतिक संख्या

$$= 2l - 1, l \in N$$

यह एक विषम संख्या है ।

(**प्रमेय-15.6 :** क्रमगात दो सम संख्याओ का गुणा 4 से विभाजित है ।)

कोई भी सम संख्या $2m$, $2m + 2$, किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए हमे सिद्ध करना है $2m$ ($2m + 2$) इनका गुणा 4 से विभाजित है ।

इस अध्याय को हम कुछ टिप्पणीयों से निष्कर्षित करेंगे कैसे गणितज्ञों ने परिणामों को प्राप्त किया और हम कैसे स्पष्ट उपपत्तियों को लिखा गया हैं जो ऊपर दर्शाया गया है प्रत्येक उपपत्ति का एक महत्वपूर्ण आरम्भ होता है। गणितज्ञों का विचार करने की पद्धति और परिणामों को खोजने की विधि स्वाभाविक होती है। हमेशा गणितज्ञ अलग-अलग तरीकों से उदाहरण तथा तर्कों को सोचता है। जब वह किसी क्रियात्मक दशा में पहुँचता है तो अपने परिणामों के लिए प्रमाण ढूँढता है।

हमने दोनों आगमन तथा निगमन विधि का विचार कुछ उदाहरणों सहीत किया है।

यहाँ पर यह मूल्यवान बात है कि महान गणितज्ञ रामानुजन को परिणामों पर पहुँचने की सहज सिद्धता प्राप्त थी। जो उन्होंने सत्य सिद्ध किये हैं उनमें से कई सत्य सिद्ध होकर प्रमेय बन चुके है।

अभ्यास - 15.4

1. निम्न में से कौनसे गणितीय कथन है और कौन से नही? कारण बताओ ?
   i. उसकी आँखे नीली है ।
   ii. $x + 7 = 18$
   iii. आज रविवार नही है ।
   iv. प्रत्येक संख्या के लिए x, $x + 0 = x$
   v. अब क्या समय होगा ?
2. निम्न कथनो को असत्य बताने के लिए प्रतिकूल उदाहरण बताइए ।
   i. प्रत्येक आयत वर्ग ही होगा ।
   ii. कोई पूर्ण संख्या x और y, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   iii. यदि n कोई पूर्णांक संख्या हो तो $2n^2 + 11$ एक रूढ़ संख्या है ।
   iv. दो त्रिभुज सर्वसमान होगे यदि क्रम से उनके कोण बराबर है ।
   v. चर्तुभुज जिसकी चारो भुजाएँ बराबर है वह वर्ग है ।
3. दो विषम संख्याओ का योग सम है ।
4. दो सम संख्याओ का गुणा सम संख्या है ।
5. यदि x विषम हो तो x^2 भी विषम होगा सिद्ध करो ।

6. परिक्षण करके देखो

i. कोई संख्या सोचो दुगुना करो ९ जोड़ो अब सोची गई संख्या जोड़ो तीन से भाग दो. अब ४ जोड़ो दी हुई संख्या धटाओ आपका उत्तर सम होगा ।

ii. तीन अंको वाली संख्या लिखो (उदा 425). अब ६ अंको वाली संख्या लिखो इन्ही संख्याओ को क्रमागत लिखो (425425) आपका नया नम्बर 7, 11, और 13 से विभाजित होगा

हमने क्या सीखा?

1. वाक्य जो किसी कारण वश कहे जाए सत्य या असत्य उसे कथन कहेगे ।
2. गणितीय कथन साधारण कथनो से अलग होते है। प्रतिकूल उदाहरण देकर उन्हे सिद्ध नही किया जा सकता है ।
3. तार्किक विचार विमर्श से क्रमशः गणित के प्रमेयों को हल करते समय परिकल्पना का मार्ग खोलते है ।
4. गणितीय कथन जिसे तार्किक रूपसे सत्य बताया जाता है उसे गणितीय उपपत्ति कहते है ।
5. स्वयं तथ्य ऐसे कथन है जो बिना किसी उपपत्ति के सत्य कहे जाते है ।
6. परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो सत्य है गणितीय भावना के अनुसार उसे अभी सिद्ध करना है।
7. गणितीय वाक्य जिसकी सत्यता सिद्ध की जाती है । उसे प्रमेय कहते है ।
8. गणितीय प्रमेयों को तार्किक विधि से हल करने को निगमन विधि कहते हैं ।
9. निरूपण का अर्थ गणित के प्रमेयों को क्रमबद्ध रूप से लिखना होता है ।
10. प्रमेय में शुरु में दिया गया कथन और एक निषकर्ष पर अन्त में तार्किक रुप से सिद्ध करके पहुँचते है ।
11. उपपत्ति में कभी कभी जो दिया गया है उसे न मानकर अलग तरीके से सिद्ध करते है और अन्त में हम इस निषकर्ष पर पहुँचते है कि जो हमने सोचा वह गलत है ।
12. अकल्पनीय कथनों को निगमन पद्धति से सत्यता को तर्क पूर्ण पद्धति से निर्माण किया जा सकता है।
13. विभिन्न घटनाओं की जाँच के द्वारा दत्तों के समूहों की अन्वेषण पद्धति तथा निष्कर्ष प्राप्त करने के विधि को आगमन पद्धति कहते है।