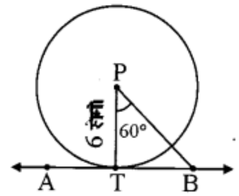
Circles

Ex. 2.1

1. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, P हा वर्तुळाचा केंद्र आहे आणि रेषा AB ही त्याची स्पर्शिका असून बिंदू T मध्ये ती वर्तुळास स्पर्श करते. वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. जर $\angle TPB = 60°$, तर रेख PB ची लांबी काढा.** **[2 गुण]**



उकल:

ΔPTB मध्ये,

$\angle PTB = 90°$ ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

$\angle TPB = 60°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle PBT = 30°$ ---- [ΔPTB चा उर्वरित कोन]

$\therefore$ ΔPTB हा a $30° - 60° - 90°$ त्रिकोण आहे.

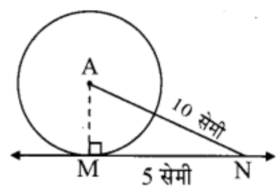
$PT = \frac{1}{2} PB$ ---- [30° कोनासमोरील बाजू]

$\therefore$ $6 = \frac{1}{2} PB$ ---- [त्रिज्या PT ही 6 सेमी आहे.]

$\therefore$ $PB = 6 \times 2$

$\therefore$ **PB = 12 सेमी**

2. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, बिंदू A हा वर्तुळाचा केंद्र आहे. AN = 10 सेमी. रेषा NM ही बिंदू M मध्ये वर्तुळास स्पर्श करते. जर MN = 5 सेमी असेल, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.** **[मार्च 13] [1 गुण]**



रचना: त्रिज्या AM काढा.

उकल:

रेख AM $\perp$ रेषा MN ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

$\therefore$ काटकोन ΔAMN मध्ये,

$AM^2 + MN^2 = AN^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $AM^2 = AN^2 - MN^2$

$\therefore$ $AM^2 = (10)^2 - (5)^2$

$= 100 - 25$

$= 75$

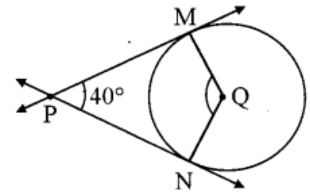
$\therefore$ $AM = \sqrt{75}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore$ $AM = \sqrt{25 \times 3}$

$\therefore$ $AM = 5\sqrt{3}$ सेमी

$\therefore$ **वर्तुळाची त्रिज्या $5\sqrt{3}$ सेमी**

3. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, Q हा वर्तुळाचा केंद्र आहे. PM आणि PN ह्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका आहेत. जर ∠MPN = 40°, असेल तर ∠MQN चे माप काढा.**



[मार्च 14, 15; जुलै 15] [3 गुण]

उकल:

∠MPN = 40° ---- [दिलेले]

∠QMP = 90°
∠QNP = 90° } ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

□MQNP मध्ये,

∠MPN + ∠QMP + ∠QNP + ∠MQN = 360° ---- [चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.]

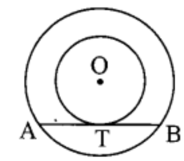
∴ 40° + 90° + 90° + ∠MQN = 360°

∴ 220° + ∠MQN = 360°

∴ ∠MQN = 360° – 220°

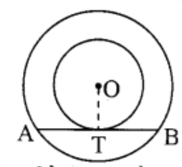
∴ **∠MQN = 140°**

4. **सोबत दिलेल्या आकृतीत, दोन एककेंद्री वर्तुळे दिलेली आहेत आणि रेषा AB ही लहान वर्तुळाची स्पर्शिका त्या वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. सिद्ध करा, की बिंदू T हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.** **[ऑक्टोबर 14] [2 गुण]**



रचना: रेख OT काढा.

सिद्धता:



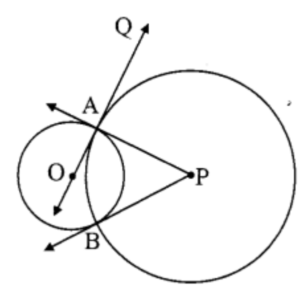
रेख AB ही 'O' केंद्र असलेल्या लहान वर्तुळाची T स्पर्शबिंदू असलेली स्पर्शिका आहे. ---- [पक्ष]

∴ रेख OT ⊥ रेख AB ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

∴ AT = BT ---- [वर्तुळाच्या केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेस दुभागतो.]

∴ **बिंदू T हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.**

5. **O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला बिंदू A व B मधून जाणाऱ्या स्पर्शिका परस्परांना P या बिंदूमध्ये छेदतात. P हा केंद्र घेऊन A मधून जाणारे एक वर्तुळ काढले. सिद्ध करा, की P केंद्र असलेल्या वर्तुळाला A बिंदूशी काढलेली स्पर्शिका बिंदू O मधून जाते.** **[3 गुण]**



पक्ष: O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या PA व PB ह्या स्पर्शिका आहेत.
P केंद्र असलेले वर्तुळ बिंदू A मधून जाते.
QA ही P केंद्र असणाऱ्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

साध्य: स्पर्शिका QA बिंदू O मधून जाते.

सिद्धता:

O केंद्र आणि OA स्पर्शत्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची PA ही स्पर्शिका आहे.

∴ रेख OA ⊥ रेख AP ---- (i) [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

P केंद्र आणि PA स्पर्शत्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची QA स्पर्शिका आहे.

∴ रेख QA ⊥ रेख AP ---- (ii) [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

∴ विधान (i) आणि (ii) वरून,

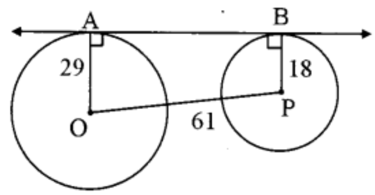
रेख OA आणि रेख QA ह्या A या एकाच बिंदूतून रेख AP ला लंब आहेत.

परंतु, कोणत्याही रेषेला तिच्यावरील बिंदूतून फक्त एक आणि एकच लंब काढता येतो.

∴ रेख OA आणि रेख QA या एकाच रेषेवर आहेत.

∴ **स्पर्शिका QA बिंदू O मधून जाते हे सिद्ध झाले.**

6. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेषा AB ही स्पर्शिका दोन्ही वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A आणि बिंदू B मध्ये स्पर्श करते. OA = 29, BP = 18, OP = 61, तर AB ची लांबी काढा. **[3 गुण]**



रचना: रेख PM $\perp$ रेख OA काढा.

उकल:

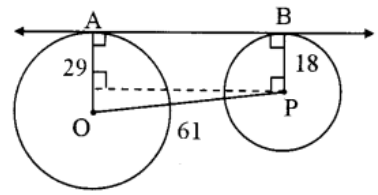
□MABP मध्ये,

$\angle A = \angle B = 90°$ ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

$\angle M = 90°$ ---- [रचना]

$\therefore$ $\angle P = 90°$ ---- [□MABP चा उर्वरित कोन]

$\therefore$ □MABP हा आयत आहे. ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]



$\therefore$ AB = PM ---- (i) } [आयताच्या संमुख बाजू]

AM = BP = 18 ---- (ii)

AM + OM = OA ---- [A–M–O]

$\therefore$ 18 + OM = 29 ---- [दिलेल्या किमती ठेवून व विधान (ii) वरून]

$\therefore$ OM = 29 – 18

$\therefore$ OM = 11 एकक ---- (iii)

ΔOMP मध्ये, $\angle OMP = 90°$ ---- [रचना]

$\therefore$ $OM^2 + PM^2 = OP^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $(11)^2 + PM^2 = (61)^2$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून व विधान (iii) वरून]

$\therefore$ $PM^2 = (61)^2 - (11)^2 = 3721 - 121$

$\therefore$ $PM^2 = 3600$

$\therefore$ $PM = \sqrt{36 \times 100}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

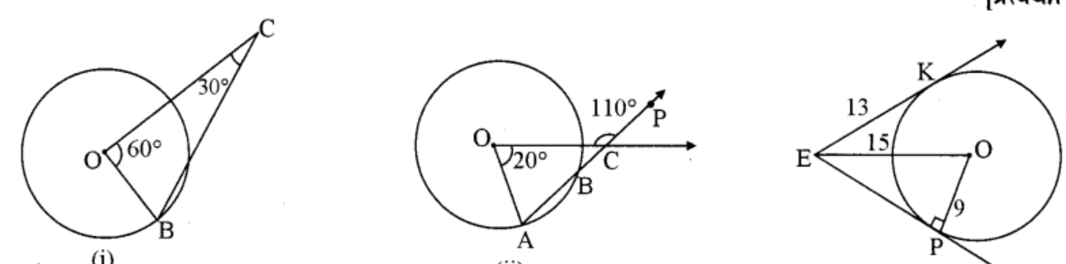
$\therefore$ PM = 6 × 10 = 60 एकक

AB = PM = 60 एकक ---- [(i) वरून]

$\therefore$ **AB = 60 एकक**

7. खालील आकृत्यांमध्ये, दिलेल्या माहितीमध्ये काय चूक आहे ते स्पष्ट करा. (O वर्तुळकेंद्र आहे.)

[प्रत्येकी 2 गुण]



(i) (ii) (iii)

उकल:

i. ΔOBC मध्ये,

$\angle O = 60°$ ---- [दिलेले]

$\angle C = 30°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle B = 90°$ ---- [ΔABC चा उर्वरित कोन]

$\therefore$ बाजू BC $\perp$ त्रिज्या OB

$\therefore$ बाजू BC ही बिंदू B ला स्पर्शिका असलीच पाहिजे. ---- [वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी व त्रिज्येला लंब असणारी रेषा ही स्पर्शिका असते.]

परंतु, आकृतीत BC ही वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूंत छेदते असे दाखवले आहे जे चुकीचे आहे.

ii. $\angle OCP + \angle OCA = 180°$ ---- [रेषीय जोडीतील कोन]

∴ $110° + \angle OCA = 180°$

∴ $\angle OCA = 180° - 110°$

∴ $\angle OCA = 70°$ ---- (i)

ΔOCA मध्ये,

$\angle OCA = 70°$ ---- [विधान (i) वरून]

$\angle AOC = 20°$ ---- [दिलेले]

∴ $\angle OAC = 90°$ ---- [ΔOCA चा उर्वरित कोन]

∴ रेषा $AC \perp$ त्रिज्या OA

∴ रेषा AC ही स्पर्शिका असली पाहिजे. ----[वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी व त्रिज्येला लंब असणारी रेषा ही स्पर्शिका असते.]

परंतु, दिलेल्या आकृतीत AC ही वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूत छेदते असे दर्शविले आहे. जे चुकीचे आहे.

iii. EK = EP ---- (i) [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

ΔOPE मध्ये,

$\angle OPE = 90°$ ---- [दिलेले]

∴ $OP^2 + EP^2 = OE^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $(9)^2 + EP^2 = (15)^2$

∴ $81 + EP^2 = 225$

∴ $EP^2 = 225 - 81$

∴ $EP^2 = 144$

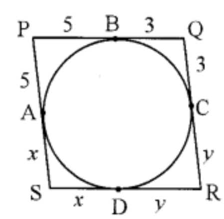
∴ $EP = \sqrt{144}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

∴ EP = 12 ---- (ii)

∴ EK ची किंमत 12 हवी. ---- [विधान (i) आणि (ii) वरून]

परंतु, दिलेल्या आकृतीत EK = 13 दिले आहे जे चुकीचे आहे.

8. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, बिंदू A, B, C आणि D मधून जाणाऱ्या चार स्पर्शिका आहेत. या चारही स्पर्शिका PQRS हा समांतरभुज चौकोन तयार करतात. जर PB = 5 आणि BQ = 3 असेल, तर PS काढा. **[4 गुण]**



उकल:

PB = PA = 5
QB = QC = 3
SA = SD
RD = RC

---- [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

समजा, SA = SD = x आणि

RD = RC = y

□PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे. ---- [दिलेले]

∴ SR = PQ ---- [समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू]

∴ SD + DR = PB + BQ ---- [S–D–R, P–B–Q]

∴ $x + y = 5 + 3$

∴ $x + y = 8$ ---- (i)

तसेच, PS = QR ---- [समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू]

∴ PA + AS = QC + CR ---- [P–A–S, Q–C–R]

∴ $5 + x = 3 + y$

∴ $x - y = 3 - 5$

∴ $x - y = -2$ ---- (ii)

समीकरण (i) आणि (ii) ची बेरीज करून,

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x - y &= -2 \\ \hline 2x &= 6 \end{aligned}$$

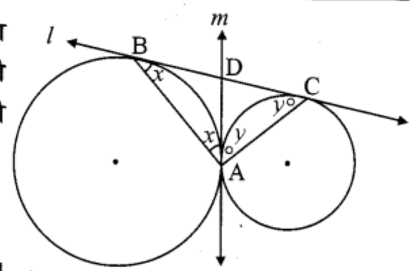
∴ $x = 3$

PS = PA + AS ---- [P–A–S]

∴ PS = 5 + 3

∴ **PS = 8 एकक**

9. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, बिंदू A हा एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा सामाईक बिंदू आहे. रेषा *l* ही दोन्ही वर्तुळांची स्पर्शिका आहे व ती B व C या बिंदूंमध्ये वर्तुळांना स्पर्श करते. रेषा m ही बिंदू A मधून जाणारी सामाईक स्पर्शिका BC ला D मध्ये छेदते.



सिद्ध करा:

i. m∠BAC = 90°

ii. बिंदू D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे. **[4 गुण]**

सिद्धता:

i. ΔBDA मध्ये,

DB = DA ---- (i) [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

∴ ∠DBA = ∠DAB = x° (समजा) ---- (ii) [समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय]

ΔDCA मध्ये,

DC = DA ---- (iii) [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

∴ ∠DCA = ∠DAC = y° (समजा) ---- (iv) [समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय]

ΔBAC मध्ये,

∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180° ---- [त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.]

∠DBA + ∠DCA+ (∠DAB + ∠DAC) = 180° ---- [B–D–C आणि कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

∴ $x + y + x + y = 180°$ ---- [विधान (ii) व (iv) वरून]

∴ $2x + 2y = 180°$

∴ $2(x + y) = 180°$

∴ $x + y = 90°$

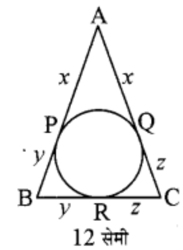
∴ ∠DAB + ∠DAC = 90° ---- [विधान (ii) व (iv) वरून]

∴ **m∠BAC = 90°** ---- [कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

ii. DB = DC ---- [विधान (i) आणि (iii) वरून]

∴ **बिंदू D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.** ---- [B–D–C]

10. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण असून त्याची परिमिती 44 सेमी आहे. त्रिकोणाचा पाया BC ची लांबी 12 सेमी आहे. बाजू AB आणि बाजू AC या एकरूप आहेत. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक वर्तुळ तिन्ही बाजूंना स्पर्श करते. तर बिंदू A पासून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकाखंडांची लांबी काढा. [मार्च 14] [3 गुण]



उकल:

समजा, $AP = AQ = x$ ---- (i)
$BP = BR = y$ ---- (ii)
$CQ = CR = z$ ---- (iii)
[वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

ΔABC ची परिमिती = 44 ---- [दिलेले]

$\therefore$ $AB + BC + AC = 44$

$\therefore$ $(AP + BP) + (BR + CR) + (AQ + CQ) = 44$ ---- [A–P–B, B–R–C, A–Q–C]

$\therefore$ $x + y + y + z + x + z = 44$ ---- [विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून]

$\therefore$ $2x + 2y + 2z = 44$

$\therefore$ $2(x + y + z) = 44$

$\therefore$ $x + (y + z) = 22$

$\therefore$ $x + BC = 22$ ---- [$\because BC = y + z$]

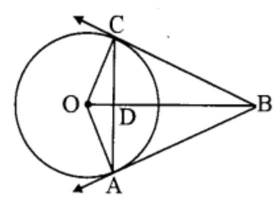
$\therefore$ $x + 12 = 22$ ---- [दिलेल्या किमती ठेवून]

$\therefore$ $x = 10$

$\therefore$ $AP = AQ = 10$ सेमी ---- [(i) वरून]

$\therefore$ **बिंदू A पासून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिका खंडाची लांबी 10 सेमी आहे.**

11. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, BC आणि BA वर्तुळाच्या स्पर्शिका आहेत. सिद्ध करा, की OD हा AC चा लंबदुभाजक आहे. येथे O हा वर्तुळाचा केंद्र आहे. [3 गुण]



सिद्धता:

OA = OC ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

$\therefore$ बिंदू O हा AC च्या लंबदुभाजकावर आहे. ---- (i) [लंबदुभाजकाचे प्रमेय]

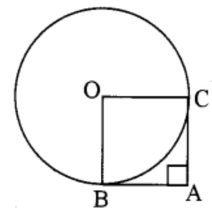
BA = BC ---- [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूपासून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

$\therefore$ बिंदू B हा AC च्या लंबदुभाजकावर आहे. ---- (ii) [लंबदुभाजकाचे प्रमेय]

$\therefore$ रेख OB हा रेख AC चा लंबदुभाजक आहे. ---- [(i) व (ii) वरून]

$\therefore$ **रेख OD हा AC चा लंबदुभाजक आहे.** ---- [O–D–B]

12. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, O हा वर्तुळाचे केंद्र आहे. AB आणि AC या बिंदू A मधून काढलेल्या स्पर्शिका आहेत आणि $BA \perp CA$. सिद्ध करा, की □BACO हा चौरस आहे. [3 गुण]



सिद्धता:

□BACO मध्ये,

$\angle OBA = \angle OCA = 90°$ ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येस लंब असते.]

$\angle BAC = 90°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle BOC = 90°$ ---- [□BACO चा उर्वरित कोन]

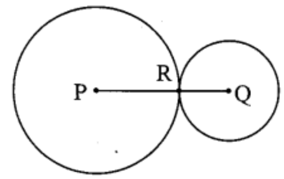
$\therefore$ □BACO हा आयत आहे. ---- [प्रत्येक कोनाचे माप 90°]

तसेच, OB = OC ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

$\therefore$ **□BACO हा चौरस आहे.** ---- [आयताच्या लगतच्या बाजू एकरूप असतील, तर तो चौरस असतो.]

Ex. 2.2

1. जर दोन वर्तुळे बाह्यस्पर्शी असतील, तर सिद्ध करा, की त्यांच्या केंद्रबिंदूंतील अंतर हे त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढे असते. [1 गुण]



पक्ष: P आणि Q ही केंद्र असलेली बाह्यस्पर्शी वर्तुळे परस्परांस R बिंदूत स्पर्श करतात.

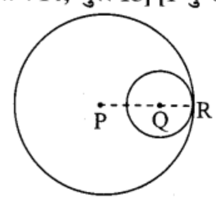
साध्य: PQ = PR + QR

सिद्धता:

P–R–Q ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

∴ **PQ = PR + QR.**

2. जर दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 8 व 3असतील, तर त्यांच्या केंद्रबिंदूंमधील अंतर काढा. [मार्च 14; जुलै 15] [1 गुण]



पक्ष: P आणि Q ही केंद्रे असलेली अंतर्स्पर्शी वर्तुळे परस्परांस R बिंदूत स्पर्श करतात.
PR = 8 आणि QR = 3.

साध्य: PQ = PR – QR

शोधा: PQ

सिद्धता:

P–Q–R ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

∴ PQ + QR = PR

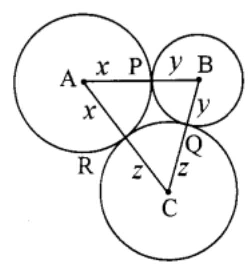
∴ PQ = PR – QR

∴ PQ = 8 – 3 ---- [पक्ष]

∴ PQ = 5 एकक

∴ **दोन वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूंतील अंतर 5 एकक आहे.**

3. समजा, A व B हे केंद्रबिंदू असलेली वर्तुळे परस्परांना बाहेरून स्पर्श करतात व C केंद्र असलेले वर्तुळ दोन्ही वर्तुळांना बाहेरून स्पर्श करते. समजा, AB = 3 सेमी, BC = 3 सेमी, CA = 4 सेमी आहे; तर वर्तुळांच्या त्रिज्या काढा. [4 गुण]



उकल:

A–P–B
A–R–C
B–Q–C } ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

समजा, $AP = AR = x$
$BP = BQ = y$
$CQ = CR = z$ } ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

AP + BP = AB ---- [A–P–B]

∴ $x + y = 3$ ---- (i)

BQ + CQ = BC ---- [B–Q–C]

∴ $y + z = 3$ ---- (ii)

AR + CR = AC ---- [A–R–C]

∴ $x + z = 4$ ---- (iii)

(i), (ii) आणि (iii) यांची बेरीज करून,

∴ $x + y + y + z + x + z = 3 + 3 + 4$

∴ $2x + 2y + 2z = 10$

∴ $2(x + y + z) = 10$

∴ $x + y + z = 5$ ---- (iv)

(i) ला (iv) मध्ये ठेवून,

$3 + z = 5$

$\therefore \quad z = 5 - 3$

$\therefore \quad z = 2$ सेमी

(ii) ला (iv) मध्ये ठेवून,

$x + 3 = 5$

$\therefore \quad x = 5 - 3 \qquad \therefore \quad x = 2$ सेमी

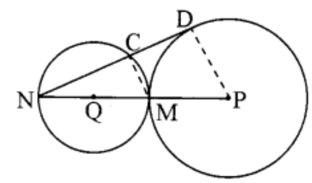
(iii) ला (iv) मध्ये ठेवून,

$y + 4 = 5$

$\therefore \quad y = 5 - 4 \qquad \therefore \quad y = 1$ सेमी

$\therefore$ **A, B, C केंद्रबिंदू असलेल्या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 2 सेमी, 1 सेमी आणि 2 सेमी आहेत.**

4. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, P आणि Q हे वर्तुळांचे केंद्रबिंदू आहेत. त्रिज्या QN = 3, PQ = 9. M हा या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू आहे. रेषा ND ही मोठ्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. ती लहान वर्तुळाला बिंदू C मध्ये छेदते, तर NC, ND आणि CD यांच्या किमती काढा. **[4 गुण]**



रचना: रेख DP व रेख CM काढा.

उकल:

Q–M–P ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

QN = 3 ---- [दिलेले]

$\therefore$ QN = QM = 3 ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

$\therefore$ MN = 6 ---- [$\because$ व्यास हा त्रिज्येच्या दुप्पट असतो.]

PQ = 9 ---- [दिलेले]

PN = PQ + QN ---- [$\because$ P–Q–N]

$\therefore$ PN = 9 + 3

$\therefore$ PN = 12

PM + QM = PQ ---- [$\because$ P–M–Q]

$\therefore$ PM + 3 = 9 ---- [दिलेले]

$\therefore$ PM = 9 − 3

$\therefore$ PM = 6

$\therefore$ PM = PD = 6 ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

ΔNDP मध्ये,

$\angle NDP = 90^\circ$ ---- (i) [स्पर्शिका ही संबंधित त्रिज्येला लंब असते.]

$\therefore \quad PN^2 = ND^2 + PD^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad (12)^2 = ND^2 + (6)^2$

$\therefore \quad 144 = ND^2 + 36$

$\therefore \quad ND^2 = 144 - 36$

$\therefore \quad ND^2 = 108$

$\therefore \quad ND = \sqrt{108}$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$\therefore \quad ND = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ एकक

आता, $\angle NCM = 90°$ ---- (ii) [अर्धवर्तुळात आंतरित झालेला कोन काटकोन असतो.]

$\angle NCM \cong \angle NDP$ ---- [विधान (i) आणि (ii) वरून]

$\therefore$ रेख CM || रेख DP ---- (iii) [संगतकोन कसोटीनुसार]

ΔNDP मध्ये,

रेख CM || रेख DP, ---- [(iii) वरून]

$\therefore \quad \frac{NC}{CD} = \frac{NM}{MP}$ ---- [प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार]

$\therefore \quad \frac{NC}{CD} = \frac{6}{6}$

$\therefore \quad \frac{NC}{CD} = 1$

$\therefore \quad NC = CD$

बिंदू C हा रेख ND चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore \quad NC = CD = \frac{1}{2} \times ND$

$\therefore \quad NC = CD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ एकक

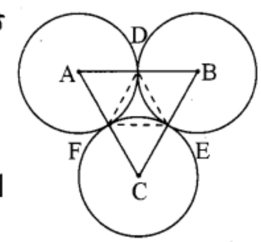
$\therefore$ **$ND = 6\sqrt{3}$ एकक, $NC = 3\sqrt{3}$ एकक, $CD = 3\sqrt{3}$ एकक**

5. प्रत्येकी 5 सेमी त्रिज्या असलेली आणि बिंदू A, B आणि C केंद्रबिंदू असलेली तीन वर्तुळे परस्परांना D, E व F बिंदूत आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बाहेरून स्पर्श करत आहेत, तर

i. ΔABC ची परिमिती किती?

ii. ΔDEF च्या बाजू DE ची लांबी किती?

[4 गुण]



उकल:

i. A–D–B, A–F–C, B–E–C ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

AD = AF = CF = CE = BE = BD = 5 सेमी ---- [एकाच व एकरूप वर्तुळांच्या त्रिज्या]

आता, ΔABC ची परिमिती

= AB + BC + AC

= (AD + BD) + (BE + CE) + (AF + CF) ---- [A–D–B, B–E–C, A–F–C]

= 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 सेमी

$\therefore$ **ΔABC ची परिमिती 30 सेमी आहे.**

ii. ΔABC मध्ये,

बिंदू D आणि E हे अनुक्रमे बाजू AB आणि BC चे मध्यबिंदू आहेत.

$\therefore \quad DE = \frac{1}{2} AC$ ---- [मध्यबिंदूचे प्रमेय]

$\therefore \quad DE = \frac{1}{2}(AF + CF)$ ---- [A–F–C]

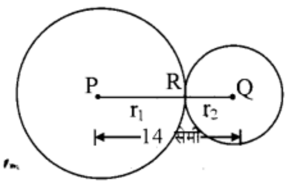
$= \frac{1}{2}(5 + 5) = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ सेमी

$\therefore$ **ΔDEF मध्ये बाजू DE ची लांबी 5 सेमी आहे.**

6. **दोन बाह्यस्पर्शी वर्तुळांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज 130π सेमी^{2} आहे आणि त्यांच्या केंद्रबिंदूंमधील अंतर हे 14 सेमी आहे, तर वर्तुळांच्या त्रिज्या काढा.** **[4 गुण]**

उकल:

समजा, P आणि Q ही केंद्रे असलेली वर्तुळे परस्परांना बाहेरून R या बिंदूमध्ये स्पर्श करतात. r_1 व r_2 या अनुक्रमे त्यांच्या त्रिज्या आहेत.



$\therefore$ P–R–Q ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

$\therefore$ PR + QR = QP

$\therefore$ $r_1 + r_2 = 14$

$\therefore$ $r_2 = 14 - r_1$ ---- (i)

तसेच, वर्तुळांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज = 130π सेमी^{2}

$\therefore$ $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 130\pi$

$\therefore$ $\pi(r_1^2 + r_2^2) = 130\pi$

$\therefore$ $r_1^2 + r_2^2 = 130$ ---- (ii)

$\therefore$ $r_1^2 + (14 - r_1)^2 = 130$ ---- [विधान (i) वरून]

$\therefore$ $r_1^2 + 196 - 28 r_1 + r_1^2 = 130$

$\therefore$ $2r_1^2 - 28r_1 + 196 - 130 = 0$

$\therefore$ $2r_1^2 - 28 r_1 + 66 = 0$

$\therefore$ $r_1^2 - 14r_1 + 33 = 0$ ---- [दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून]

$\therefore$ $r_1^2 - 11r_1 - 3r_1 + 33 = 0$

$\therefore$ $r_1(r_1 - 11) - 3(r_1 - 11) = 0$

$\therefore$ $(r_1 - 3)(r_1 - 11) = 0$

$\therefore$ $r_1 = 3$ सेमी किंवा $r_1 = 11$ सेमी

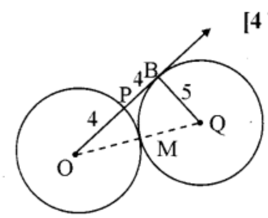
जर $r_1 = 3$, तर $r_2 = 14 - 3$ $\therefore$ $r_2 = 11$ सेमी

जर $r_1 = 11$, तर $r_2 = 14 - 11$ $\therefore$ $r_2 = 3$ सेमी

$\therefore$ **वर्तुळांच्या त्रिज्या 3 सेमी व 11 सेमी किंवा 11 सेमी व 3 सेमी.**

7. **शेजारील आकृतीमध्ये, दिलेल्या माहितीमध्ये काय चूक आहे ते सांगा.(प्रत्यक्ष मापे न घेता). OP = 4, PB = 4, BQ = 5.** **[4 गुण]**

उकल:



समजा, ही वर्तुळे परस्परांस M बिंदूत स्पर्श करतात.

OP = OM = 4
QB = QM = 5 } ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

OB = OP + BP ---- [O–P–B]

$\therefore$ OB = 4 + 4

$\therefore$ OB = 8

O–M–Q ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

$\therefore$ OQ = OM + QM

$\therefore$ OQ = 4 + 5 = 9

समजा, $OB^2 + QB^2 = (8)^2 + (5)^2$

$\therefore$ $OB^2 + QB^2 = 64 + 25$

$\therefore$ $OB^2 + QB^2 = 89$ ---- (i)

तसेच, $OQ^2 = (9)^2$

$\therefore$ $OQ^2 = 81$ ---- (ii)

विधान (i) आणि (ii) वरून,

$OB^2 + QB^2 \neq OQ^2$

$\therefore$ ΔOBQ हा काटकोन त्रिकोण नाही.

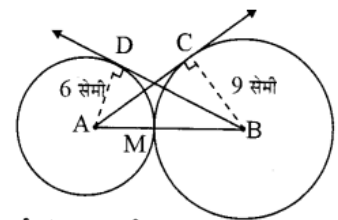
$\therefore$ $\angle OBQ \neq 90°$

$\therefore$ रेषा OB ही केंद्रबिंदू Q असणाऱ्या वर्तुळाची स्पर्शिका नाही.

हे रेषा OB ही स्पर्शिका आहे या दिलेल्या विधानाशी विसंगत आहे.

$\therefore$ **रेख OB शी संबंधित दिलेल्या बाजूंची मापे चुकीची आहेत.**

8. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, A आणि B हे केंद्रबिंदू असलेली वर्तुळे एकमेकांना M बिंदूमध्ये बाहेरून स्पर्श करतात. रेषा AC आणि रेषा BD ह्या त्यांच्या स्पर्शिका आहेत. जर AD = 6 सेमी आणि BC = 9 सेमी असेल, तर रेख AC आणि रेख BD यांची लांबी काढा.** **[4 गुण]**



उकल:

A–M–B ---- [परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचा सामाईक बिंदू हा त्या वर्तुळांच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.]

AD = AM = 6 सेमी
BC = BM = 9 सेमी } ---- [एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या]

AB = AM + BM ---- [A–M–B]

∴ AB = 6 + 9

∴ AB = 15 सेमी ---- (i)

ΔADB मध्ये, ∠ADB = 90° ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येला लंब असते.]

$AD^2 + BD^2 = AB^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $(6)^2 + BD^2 = (15)^2$ ---- [विधान (i)वरून]

∴ $36 + BD^2 = 225$

∴ $BD^2 = 225 - 36 = 189$

∴ $BD = \sqrt{189}$ सेमी ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

∴ $BD = \sqrt{9 \times 21} = 3\sqrt{21}$ सेमी

ΔACB मध्ये,

∠ACB = 90° ---- [स्पर्शिका संबंधित त्रिज्येला लंब असते.]

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $AC^2 + (9)^2 = (15)^2$ ---- [विधान (i)वरून]

∴ $AC^2 + 81 = 225$

∴ $AC^2 = 225 - 81$

∴ $AC^2 = 144$

∴ $AC = \sqrt{144} = 12$ सेमी ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

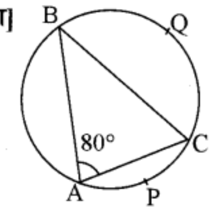
∴ **रेख BD ची लांबी $3\sqrt{21}$ सेमी आणि रेख AC ची लांबी 12 सेमी आहे.**

Ex. 2.3

1. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, जर m(कंस APC) = 60° आणि ∠BAC = 80° तर [प्रत्येकी 1 गुण]
[मार्च 13]

i. ∠ABC

ii. m(कंस BQC) काढा.



उकल:

i. $\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंस APC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

∴ $\angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ$ ---- [दिलेले]

∴ **$\angle ABC = 30^\circ$**

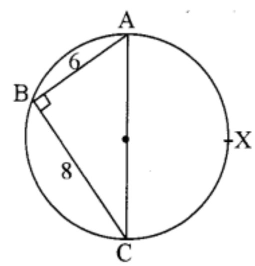
ii. $m\angle BAC = \frac{1}{2}$ m(कंस BQC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

∴ $80^\circ = \frac{1}{2}$ m(कंस BQC) ---- [दिलेले]

∴ m(कंस BQC) = $80^\circ \times 2$

∴ **m(कंस BQC) = 160°**

2. जर काटकोन त्रिकोणाच्या परस्पर लंब बाजूंची लांबी 6 आणि 8 असेल, तर त्या काटकोन त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंमधून जाणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा. [2 गुण]



उकल:

AB = 6 आणि BC = 8

ΔABC मध्ये,

$\angle ABC = 90^\circ$ ---- [दिलेले]

∴ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

∴ $AC^2 = (6)^2 + (8)^2$

∴ $AC^2 = 36 + 64$

∴ $AC^2 = 100$

∴ AC = 10 एकक ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

$m\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंस AXC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

∴ $90^\circ = \frac{1}{2}$ m(कंस AXC)

∴ m(कंस AXC) = 180°

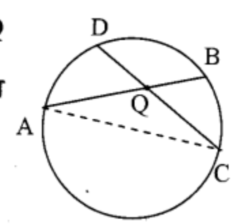
∴ कंस AXC हे अर्धवर्तुळ आहे.

∴ रेख AC हा वर्तुळाचा व्यास आहे.

त्रिज्या = $\frac{1}{2} \times$ व्यास = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$ एकक

∴ **वर्तुळाची त्रिज्या 5 एकक आहे.**

3. सोबत दाखविलेल्या आकृतीमध्ये, वर्तुळाच्या जीवा AB आणि CD या वर्तुळाच्या अंतर्भागात Q या बिंदूमध्ये छेदतात. जर m(कंस AD) = 25° आणि m(कंस BC) = 31°, तर ∠BQC चे माप काढा. [3 गुण]



रचना: रेख AC काढा.

उकल:

$m\angle ACD = \frac{1}{2}$ m(कंस AD) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $\angle ACD = \frac{1}{2} \times 25°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle ACD = 12.5°$

म्हणजेच $\angle ACQ = 12.5°$ ---- (i) [D–Q–C]

$m\angle CAB = \frac{1}{2}$ m(कंस BC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $\angle CAB = \frac{1}{2} \times 31°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle CAB = 15.5°$

म्हणजेच $\angle CAQ = 15.5°$ ---- (ii) [B–Q–A]

ΔAQC साठी, $\angle BQC$ हा बाह्यकोन आहे.

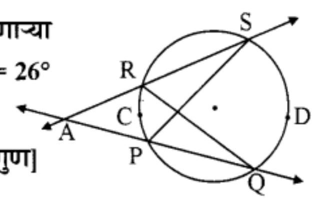
$\therefore$ $\angle BQC = \angle ACQ + \angle CAQ$ ---- [दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय]

$= 12.5° + 15.5°$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ $\mathbf{\angle BQC = 28°}$

4. सोबत दाखविलेल्या आकृतीमध्ये, जीवा RS आणि PQ यांना समाविष्ट करणाऱ्या वृत्तछेदिका परस्परांना A या वर्तुळाबाहेरील बिंदूमध्ये छेदतात. जर m(कंस PCR) = 26° आणि m(कंस QDS) = 48° तर

i. $\angle AQR$ ii. $\angle SPQ$ iii. $\angle RAQ$ काढा. [मार्च 16] [3 गुण]



उकल:

i. $m\angle AQR = \frac{1}{2}$ m(कंस PCR) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $m\angle AQR = \frac{1}{2} \times 26°$ ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\mathbf{\angle AQR = 13°}$ ---- (i)

ii. $m\angle SPQ = \frac{1}{2}$ m(कंस QDS) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $\angle SPQ = \frac{1}{2} \times 48°$

$\therefore$ $\mathbf{\angle SPQ = 24°}$

$\angle SRQ \cong \angle SPQ$ ---- [एकाच कंसाने आंतरित केलेले कोन एकरूप असतात.]

$\therefore$ $\angle SRQ = 24°$ ---- (ii)

iii. ΔARQ साठी, $\angle SRQ$ हा बाह्यकोन आहे.

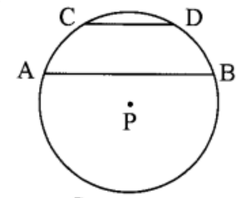
$\therefore$ $\angle SRQ = \angle RAQ + \angle AQR$ ---- [दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $24° = \angle RAQ + 13°$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ $\angle RAQ = 24° - 13°$

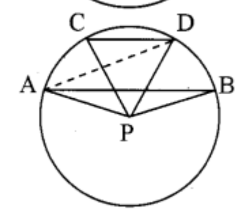
$\therefore$ $\mathbf{\angle RAQ = 11°}$

5. **सोबत दाखविलेल्या आकृतीमध्ये, एकाच वर्तुळाच्या AB आणि CD या दोन जीवा परस्परांना समांतर आहेत. P हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे. सिद्ध करा: $\angle CPA = \angle DPB$.** **[ऑक्टोबर 14] [3 गुण]**



रचना: रेख AD काढा.

सिद्धता:



जीवा AB || जीवा CD, छेदिका AD घेऊन,

$\angle CDA \cong \angle BAD$ ---- (i) [व्युत्क्रम कोन]

$\angle CDA = \frac{1}{2}$ m(कंस AC) ---- (ii)

$\angle BAD = \frac{1}{2}$ m(कंस BD) ---- (iii) } [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

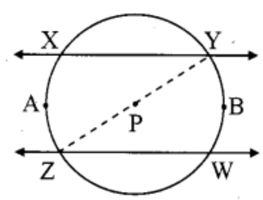
$\therefore$ m(कंस AC) = m(कंस BD) ---- (iv) [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]

तसेच, $\angle CPA$ = m(कंस AC) ---- (v) [लघुकंसाच्या मापाची व्याख्या]

$\angle DPB$ = m(कंस BD) ---- (vi) [लघुकंसाच्या मापाची व्याख्या]

$\therefore$ **$\angle CPA = \angle DPB$** ---- [विधान (iv), (v) व (vi) वरून]

6. **सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, m(कंस XAZ) = m(कंस YBW).**
सिद्ध करा, की रेषा XY || रेषा ZW. **[मार्च 13] [3 गुण]**



रचना: रेख YZ काढा.

सिद्धता:

m(कंस XAZ) = m(कंस YBW) ---- (i) [पक्ष]

m$\angle XYZ = \frac{1}{2}$ m(कंस XAZ) ---- (ii) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

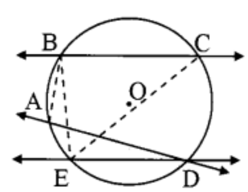
m$\angle WZY = \frac{1}{2}$ m(कंस YBW) ---- (iii) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ m$\angle XYZ$ = m$\angle WZY$ ---- [विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून]

$\therefore$ $\angle XYZ \cong \angle WZY$

$\therefore$ **रेषा XY || रेषा ZW** ---- [व्युत्क्रम कोन कसोटी]

7. **O केंद्र असलेल्या वर्तुळामध्ये, BC || ED, m(कंस BC) = 94°, m(कंस ED) = 86°, $\angle ADE = 8°$. तर**
i. m(कंस AE) ii. m(कंस DC) iii. m(कंस EB).
तसेच $\angle DAB$, $\angle ECB$, $\angle CBE$ काढा. **[5 गुण]**



रचना: रेख AB, BE आणि CE काढा.

उकल:

i. $\angle ADE = \frac{1}{2}$ m(कंस AE) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $8° = \frac{1}{2}$ m(कंस AE) ---- [दिलेले]

$\therefore$ m(कंस AE) = 16°

ii. $\angle BCE = \frac{1}{2}$ m(कंस EB) ---- (i) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\angle CED = \frac{1}{2}$ m(कंस DC) ---- (ii) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

रेषा BC || रेषा ED, EC छेदिका घेऊन

$\therefore$ $\angle BCE = \angle CED$ ---- (iii) [व्युत्क्रम कोन]

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ m(कंस EB) = $\frac{1}{2}$ m(कंस DC) ---- [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]

$\therefore$ m(कंस EB) = m(कंस DC)

समजा, m(कंस EB) = m(कंस DC) = $x°$ ---- (iv)

आता, m(कंस BC) + m(कंस DC) + m(कंस ED) + m(कंस EB) = 360°

---- [वर्तुळाचे माप 360° असते.]

$\therefore$ $94° + x° + 86° + x° = 360°$

$\therefore$ $180° + 2x° = 360°$

$\therefore$ $2x° = 180°$

$\therefore$ $x° = 90°$

$\therefore$ m(कंस DC) = 90° ---- (v) [विधान (iv) वरून]

iii. m(कंस EB) = 90° ---- (vi) [विधान (iv) वरून]

$\angle DAB = \frac{1}{2}$ m(कंस BCD) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BC) + m(कंस CD)] ---- [कंसाच्या बेरजेचा गुणधर्म]

$= \frac{1}{2}(94° + 90°)$ ---- [दिलेले व विधान (v) वरून]

$\therefore$ $\angle DAB = \frac{1}{2}(184°)$

$\therefore$ $\angle DAB = 92°$

$\angle ECB = \frac{1}{2}$ m (कंस BE) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$= \frac{1}{2} \times 90°$

$= 45°$ ---- [विधान (vi)वरून]

$\angle CBE = \frac{1}{2}$ m(कंस CDE) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस CD) + m(कंस DE)] ---- [कंसाच्या बेरजेचा गुणधर्म]

$= \frac{1}{2}(90° + 86°)$ ---- [दिलेले आणि विधान (v) वरून]

$= \frac{1}{2}(176°) = 88°$

$\therefore$ **i. m(कंस AE) = 16°**

ii. m(कंस DC) = 90°

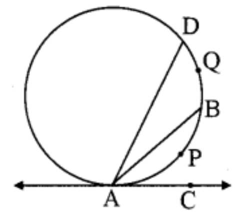
iii. m(कंस EB) = 90°

$\angle DAB = 92°, \angle ECB = 45°, \angle CBE = 88°$

Ex. 2.4

1. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, रेख AB आणि रेख AD वर्तुळाच्या जीवा आहेत. बिंदू C हा A मधून जाणाऱ्या स्पर्शिकेवर आहे. जर m(कंस APB) = 80° आणि ∠BAD = 30°, तर i. ∠BAC ii. m(कंस BQD) काढा.

[ऑक्टोबर 12] [प्रत्येकी 1 गुण]



उकल:

i. $\angle BAC = \frac{1}{2}$ m(कंस APB) ---- [स्पर्शिका–छेदिका प्रमेय]

∴ $\angle BAC = \frac{1}{2} \times 80°$ ---- [दिलेले]

∴ **$\angle BAC = 40°$**

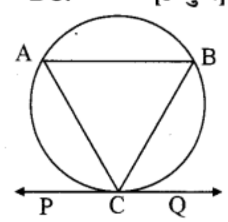
ii. $\angle BAD = \frac{1}{2}$ m(कंस BQD) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

∴ $30° = \frac{1}{2}$ m(कंस BQD) ---- [दिलेले]

∴ m(कंस BQD) = 30° × 2

∴ **m(कंस BQD) = 60°**

2. जर जीवा AB वर्तुळाच्या बिंदू C मधून जाणाऱ्या स्पर्शिकेला समांतर असेल, तर सिद्ध करा AC = BC. **[3 गुण]**



पक्ष: रेषा PQ ही C या स्पर्शबिंदूशी वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. जीवा AB || रेषा PQ.

साध्य: AC = BC

सिद्धता:

जीवा AB || रेषा PQ, छेदिका BC घेऊन ---- [पक्ष]

∠ABC = ∠BCQ ---- (i) [व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास]

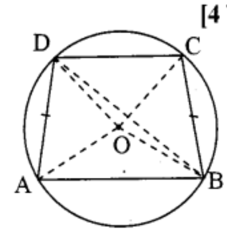
तसेच, ∠BAC = ∠ BCQ ---- (ii) [एकांतर खंडातील कोन]

ΔABC मध्ये,

∠ABC = ∠BAC ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

∴ **AC = BC** ---- [समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास]

3. चक्रीय चौकोन ABCD मध्ये जर संमुख भुजांची एक जोडी जर एकरूप असेल, तर उरलेल्या संमुख भुजा परस्परांना समांतर असतात हे सिद्ध करा. **[4 गुण]**



पक्ष: □ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.

बाजू AD ≅ बाजू BC

साध्य: बाजू AB || बाजू DC

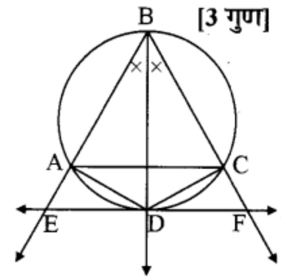
रचना: समजा, O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे.

रेख OA, रेख OB, रेख OC आणि रेख OD जोडा. रेख BD जोडा.

सिद्धता:

	रेख AD ≅ रेख BC	---- [पक्ष]
∴	$\angle AOD \cong \angle BOC$	---- (i) [एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्राशी एकरूप कोन आंतरित करतात.]
∴	$\angle AOD$ = m(कंस AD)	---- (ii) [लघुकंसाची व्याख्या]
	$\angle BOC$ = m(कंस BC)	---- (iii) [लघुकंसाची व्याख्या]
∴	m(कंस AD) = m(कंस BC)	---- (iv) [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]
	$\angle ABD = \frac{1}{2}$ m(कंस AD)	---- (v) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]
	$\angle CDB = \frac{1}{2}$ m(कंस BC)	---- (vi) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]
∴	$\angle ABD \cong \angle CDB$	---- [विधान (iv), (v) व (vi) वरून]
∴	**बाजू AB ∥ बाजू DC**	---- [व्युत्क्रम कोन]

4. समजा, ΔABC हा वर्तुळाने आंतरलिखित केलेला त्रिकोण आहे. ∠ABC चा दुभाजक वर्तुळाला D मध्ये छेदतो. वर्तुळाला बिंदू D मध्ये स्पर्श करणारी स्पर्शिका रेषा BA आणि रेषा BC ला अनुक्रमे बिंदू E व F मध्ये छेदते. सिद्ध करा: ∠EDA = ∠FDC. **[3 गुण]**



पक्ष: किरण BD हा ∠ABC चा दुभाजक आहे.

रेषा EF ही स्पर्शबिंदू D शी असलेली वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

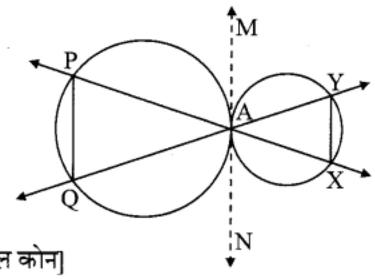
साध्य: ∠EDA = ∠FDC

सिद्धता:

	$\angle EDA = \angle ABD$	---- (i) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]
	$\angle FDC = \angle CBD$	---- (ii) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]
	तसेच, $\angle ABD = \angle CBD$	---- (iii) [किरण BD हा ∠ABC चा कोनदुभाजक आहे.]
∴	**∠EDA = ∠FDC**	---- [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]

5. समजा, दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू A मधून जाणारी दोन रेषा एका वर्तुळाला बिंदू P, Q मध्ये छेदतात, तर दुसऱ्या वर्तुळाला बिंदू X, Y मध्ये छेदतात.

सिद्ध करा: PQ ∥ XY. **[4 गुण]**

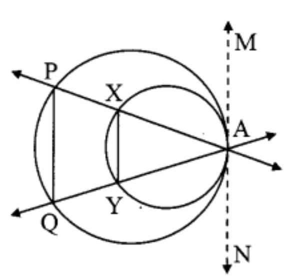


पर्याय I: (दोन्ही वर्तुळे बाह्यस्पर्शी असताना)

रचना: बिंदू A ला MN ही सामाईक स्पर्शिका काढा.

सिद्धता:

	$\angle PQA = \angle PAM$	---- (i) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]
	$\angle XYA = \angle XAN$	---- (ii) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]
	तसेच, $\angle PAM = \angle XAN$	---- (iii) [परस्पर विरुद्ध कोन]
∴	$\angle PQA = \angle XYA$	---- [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]
∴	$\angle PQY = \angle XYQ$	---- [Q–A–Y]
∴	**रेख PQ ∥ रेख XY**	---- [व्युत्क्रम कोन कसोटी]



पर्याय II: (दोन्ही वर्तुळे अंतर्स्पर्शी असताना)

रचना: बिंदू A ला MN ही सामाईक स्पर्शिका काढा.

सिद्धता:

$\angle PQA = \angle PAM$	---- (i) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]
$\angle XYA = \angle XAM$	} [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

म्हणजेच, $\angle XYA = \angle PAM$ ---- (ii) [P–X–A]

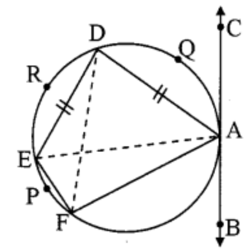
$\therefore$ $\angle PQA = \angle XYA$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ **रेख PQ || रेख XY** ---- [संगतकोन कसोटी]

6. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, बिंदू B आणि C हे वर्तुळाच्या बिंदू A मध्ये स्पर्श करणाऱ्या स्पर्शिकेवर आहेत. जीवा AD ≅ जीवा ED. जर m(कंस EPF) = $\frac{1}{2}$m(कंस AQD) आणि m(कंस DRE) = 84°, तर.

i. $\angle$DAC ii. $\angle$FDA

iii. $\angle$FED iv. $\angle$BAF काढा. [5 गुण]



उकल:

रचना: रेख EA जोडा.

i. ΔDEA मध्ये,

जीवा AD ≅ जीवा ED ---- [दिलेले]

$\therefore$ $\angle DEA = \angle DAE$ ---- (i) [समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय]

$\angle DEA = \frac{1}{2}$ m(कंस AQD) ---- (ii) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\angle DAE = \frac{1}{2}$ m(कंस DRE) ---- (iii) [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ m(कंस AQD) = $\frac{1}{2}$ m(कंस DRE) ---- [विधान (i), (ii) व (iii) वरून]

$\therefore$ m(कंस AQD) = m(कंस DRE) = 84° ---- (iv) [दिलेले]

m(कंस EPF) = $\frac{1}{2}$ m(कंस AQD) ---- [दिलेले]

$\therefore$ m(कंस EPF) = $\frac{1}{2} \times 84°$ ---- [विधान (iv) वरून]

$\therefore$ m(कंस EPF) = 42° ---- (v)

m(कंस DRE) + m(कंस AQD) + m(कंस AF) + m(कंस EPF) = 360° ---- [वर्तुळाचे माप 360^0 असते.]

$\therefore$ 84° + 84° + m(कंस AF) + 42° = 360° ---- [विधान (iv) व (v) वरून]

$\therefore$ 210° + m(कंस AF) = 360°

$\therefore$ m(कंस AF) = 360° – 210°

$\therefore$ m(कंस AF) = 150° ---- (vi)

$\angle DAC = \frac{1}{2}$ m(कंस AQD) ---- [स्पर्शिका छेदिका प्रमेय]

$\therefore$ $\angle DAC = \frac{1}{2} \times 84°$ ---- [विधान (iv) वरून]

$\therefore$ **$\angle$DAC = 42°**

ii. $\angle FDA = \frac{1}{2}$ m(कंस AF) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$\therefore$ $\angle FDA = \frac{1}{2}$ (150°) ---- [विधान (vi) वरून]

$\therefore$ **$\angle$FDA = 75°**

iii. $\angle FED = \frac{1}{2}$ m(कंस FAD) ---- [आंतरलिखित कोनाचे माप]

$\therefore$ $\angle FED = \frac{1}{2}$ [m(कंस AQD) + m(कंस AF)] ---- [कंसाच्या मापाच्या बेरजेचा गुणधर्म]

∴ $\angle FED = \frac{1}{2}(84° + 150°)$ ---- [विधान (iv) व (vi) वरून]

∴ $\angle FED = \frac{1}{2} \times 234°$

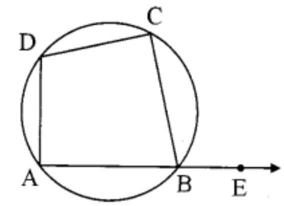
∴ **$\angle FED = 117°$**

iv. $\angle BAF = \frac{1}{2}$ m(कंस AF) ---- [स्पर्शिका छेदिका प्रमेय]

∴ $\angle BAF = \frac{1}{2}(150°)$ ---- [विधान (vi) वरून]

∴ **$\angle BAF = 75°$**

7. □ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे. m(कंस ABC) = 220°. तर ∠ABC, ∠CDA आणि ∠CBE काढा. **[4 गुण]**



उकल:

m(कंस ABC) = 220° ---- (i) [दिलेले]

∴ m(कंस ADC) + m(कंस ABC) = 360° ---- [वर्तुळाचे माप 360° असते.]

∴ m(कंस ADC) = 360° − m(कंस ABC)

∴ m(कंस ADC) = 360° − 220° ---- [विधान (i) वरून]

∴ m(कंस ADC) = 140°

$\angle ABC = \frac{1}{2}$ m (कंस ADC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

$= \frac{1}{2} \times 140° = 70°$

आता, $\angle CDA = \frac{1}{2}$ m (कंस ABC) ---- [आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय]

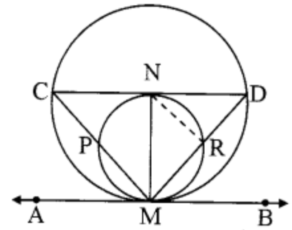
∴ $\angle CDA = \frac{1}{2} \times 220° = 110°$ ---- (ii)

$\angle CBE = \angle CDA$ ---- (iii) [चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन हा त्याच्याशी संलग्न असणाऱ्या कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.]

∴ $\angle CBE = 110°$ ---- [विधान (ii) आणि (iii) वरून]

∴ **$\angle ABC = 70°, \angle CDA = 110°, \angle CBE = 110°$.**

8. M हा दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू आहे. रेषा AMB ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे. मोठ्या वर्तुळाची जीवा CD ही लहान वर्तुळाला बिंदू N मध्ये स्पर्श करते आणि मोठ्या वर्तुळाची जीवा CM व जीवा DM लहान वर्तुळाला अनुक्रमे बिंदू P व R मध्ये छेदतात. सिद्ध करा: ∠CMN ≅ ∠DMN. **[4 गुण]**



पक्ष: रेषा AMB ही M बिंदूला सामाईक स्पर्शिका आहे.

साध्य: ∠CMN ≅ ∠DMN

रचना: रेख NR जोडा.

सिद्धता:

∠CMN + ∠CMA = ∠AMN ---- [कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

∴ ∠CMN = ∠AMN − ∠CMA ---- (i)

∠AMN ≅ ∠NRM ---- [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

∴ समजा, ∠AMN = ∠NRM = $x°$ ---- (ii)

∠CMA ≅ ∠CDM ---- [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

∴ समजा, $\angle CMA = \angle CDM = y°$ ---- (iii)

∴ $\angle CMN = (x - y)°$ ---- (iv) [विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून]

$\angle DMN = \angle DNR$ ---- (v) [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

ΔDNR साठी, $\angle NRM$ हा बाह्यकोन आहे.

∴ $\angle DNR + \angle NDR = \angle NRM$ ---- (vi) [दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय]

∴ $\angle DMN + \angle NDR = \angle NRM$ ---- [विधान (v) आणि (vi) वरून]

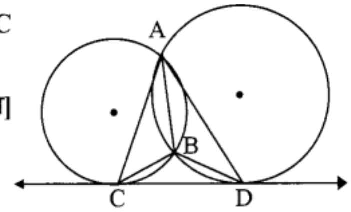
∴ $\angle DMN = \angle NRM - \angle NDR$

∴ $\angle DMN = \angle NRM - \angle CDM$ ---- [C–N–D, M–R–D]

∴ $\angle DMN = (x - y)°$ ---- (vii) [विधान (ii) व (iii) वरून]

∴ $\mathbf{\angle CMN = \angle DMN}$ ---- [विधान (iv) व (vii) वरून]

9. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A आणि B मध्ये छेदतात. सामाईक स्पर्शिका DC वर्तुळांना बिंदू C व D मध्ये स्पर्श करते. सिद्ध करा $\angle CAD + \angle CBD = 180°$. **[3 गुण]**



सिद्धता:

$\angle BCD = \angle CAB$ ---- (i)
$\angle BDC = \angle DAB$ ---- (ii) } [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

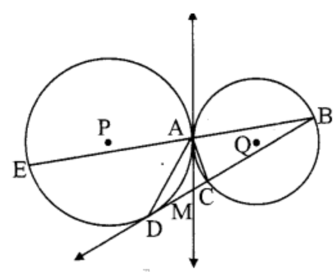
ΔBCD मध्ये,

$\angle BCD + \angle BDC + \angle CBD = 180°$ ---- (iii) [त्रिकोणांच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.]

∴ $\angle CAB + \angle DAB + \angle CBD = 180°$ ---- [(i), (ii) आणि (iii) वरून]

∴ $\mathbf{\angle CAD + \angle CBD = 180°}$ ---- [कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

10. P आणि Q केंद्रबिंदू असणारी वर्तुळे परस्परांना बिंदू A मध्ये स्पर्श करतात. जीवा AB वाढवली असता ती P केंद्र असणाऱ्या वर्तुळाला E मध्ये छेदते आणि जीवा BC ही P केंद्र असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू D मध्ये स्पर्श करते, तर सिद्ध करा: किरण AD हा $\angle CAE$ चा दुभाजक आहे. **[4 गुण]**



सिद्धता:

ΔDAM मध्ये,

$AM = DM$ ---- [वर्तुळाच्या बाह्यबिंदूतून काढलेले स्पर्शिकाखंड समान असतात.]

∴ $\angle DAM \cong \angle ADM$ ---- [समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय]

∴ समजा, $\angle DAM = \angle ADM = x°$ ---- (i)

$\angle CAM \cong \angle ABC$ ---- [एकांतर वर्तुळखंडातील कोन]

∴ समजा, $\angle CAM = \angle ABC = y°$ ---- (ii)

$\angle DAC = \angle DAM + \angle CAM$ ---- [कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म]

∴ $\angle DAC = x° + y°$ ---- (iii) [विधान (i) आणि (ii) वरून]

ΔBAD साठी, $\angle DAE$ हा बाह्यकोन आहे.

∴ $\angle DAE = \angle ADB + \angle ABD$ ---- [दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय]

∴ $\angle DAE = \angle ADM + \angle ABC$ ---- [D–M–B, D–C–B]

∴ $\angle DAE = x + y$ ---- (iv) [विधान (i) आणि (ii) वरून]

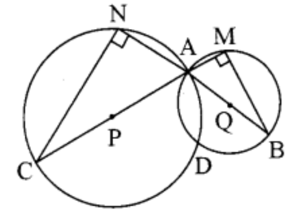
∴ $\angle DAC = \angle DAE$ ---- [विधान (iii) आणि (iv) वरून]

D बिंदू $\angle CAE$ च्या आंतरभागात आहे.

∴ **किरण AD हा $\angle CAE$ चा कोनदुभाजक आहे.**

Ex. 2.5

1. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A व D मध्ये छेदतात. समजा, व्यास AB हा P केंद्रबिंदू असणाऱ्या बिंदू N मध्ये छेदतो व व्यास AC हा Q केंद्रबिंदू असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू M मध्ये छेदतो, तर सिद्ध करा. $AC \times AM = AB \times AN$. [3 गुण]



पक्ष: रेख AC व रेख AB हे व्यास आहेत आणि अनुक्रमे P व Q ही त्यांची केंद्रे आहेत.

साध्य: $AC \cdot AM = AB \cdot AN$

सिद्धता:

AC आणि AB हे वर्तुळांचे व्यास आहेत.

$\therefore$ $\angle ANC = \angle AMB = 90°$ ---- (i) [अर्धवर्तुळात आंतरित झालेले कोन 90° असतात.]

ΔANC व ΔAMB यामध्ये,

$\angle ANC \cong \angle AMB$ ---- [विधान (i) वरून]

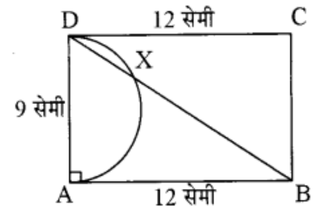
$\angle NAC \cong \angle MAB$ ---- [परस्पर विरुद्ध कोन]

$\therefore$ $\Delta ANC \sim \Delta AMB$ ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या को-को कसोटीनुसार]

$\therefore$ $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AC}{AB}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू]

$\therefore$ $\mathbf{AC \times AM = AB \times AN}$

2. ABCD हा आयत आहे. AD हा व्यास असलेले व कर्ण BD ला X मध्ये छेदणारे AXD हे अर्धवर्तुळ आहे. जर AB = 12 सेमी, AD = 9 सेमी, तर BD आणि BX च्या किमती काढा. [3 गुण]



उकल:

ΔBAD मध्ये,

$\angle BAD = 90°$ ---- [आयताचे कोन]

$\therefore$ $AB^2 + AD^2 = BD^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $(12)^2 + (9)^2 = BD^2$

$\therefore$ $144 + 81 = BD^2$

$\therefore$ $225 = BD^2$

$\therefore$ $BD = 15$ सेमी ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

आता रेख $AD \perp$ बाजू AB

$\therefore$ रेषा AB ही A बिंदूत स्पर्शिका आहे. ---- [वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाहेरील बिंदूवर लंब असणारी रेषा ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.]

रेषा AB ही अर्धवर्तुळाची A स्पर्शिका आहे आणि रेषा BD ही वृत्तछेदिका होय.

$\therefore$ $AB^2 = (BD) \times (BX)$ ---- [स्पर्शिका छेदिका गुणधर्म]

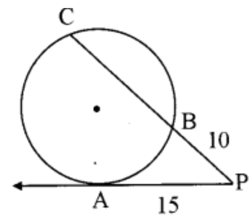
$\therefore$ $(12)^2 = 15 \times (BX)$

$\therefore$ $144 = 15 \times (BX)$

$\therefore$ $BX = \dfrac{144}{15} = 9.6$ सेमी

$\therefore$ **BD ची किंमत 15 सेमी आहे आणि BX ची किंमत 9.6 सेमी आहे.**

3. सोबत दिलेल्या आकृतीमध्ये, स्पर्शिका PA ही वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते आणि वृत्तछेदिका PBC ही वर्तुळाला बिंदू C आणि B मध्ये छेदते. जर AP = 15 आणि BP = 10, तर BC ची लांबी काढा. [2 गुण]



उकल:

रेषा AP ही वर्तुळाची A बिंदूत स्पर्श करणारी स्पर्शिका आहे आणि रेषा PC ही छेदिका आहे.

$AP^2 = CP \times BP$ ---- [स्पर्शिका छेदिका गुणधर्म]

$\therefore$ $(15)^2 = CP \times 10$

$\therefore$ $225 = CP \times 10$

$\therefore$ $CP = \frac{225}{10}$

$\therefore$ CP = 22.5 एकक

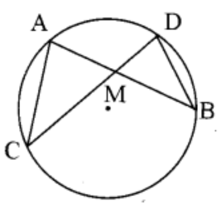
BP + BC = CP ---- [P–B–C]

$\therefore$ 10 + BC = 22.5

$\therefore$ BC = 22.5 – 10

$\therefore$ **BC = 12.5 एकक**

4. जीवा AB आणि CD परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू M मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा. CM × BD = BM × AC. **[3 गुण]**



सिद्धता:

$\angle CAB \cong \angle BDC$ ---- (i) [एकाच कंसाने आंतरित केलेले कोन]

ΔCAM आणि ΔBDM मध्ये,

$\angle CAM \cong \angle BDM$ ---- [विधान (i) वरून व A–M–B व C–M–D]

$\angle AMC \cong \angle DMB$ ---- [परस्पर विरुद्ध कोन]

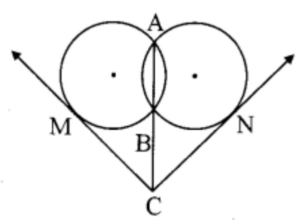
$\therefore$ $\Delta CAM \sim \Delta BDM$ ---- [त्रिकोणांच्या समरूपतेची को-को कसोटी]

$\therefore$ $\frac{AC}{BD} = \frac{CM}{BM}$ ---- [समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.]

$\therefore$ $AC \times BM = CM \times BD$

म्हणजेच, CM × BD = BM × AC

5. सोबत दाखविलेल्या आकृतीमध्ये, दोन वर्तुळे परस्परांना A आणि B बिंदूत छेदतात. रेख AB ही दोन्ही वर्तुळांची जीवा आहे. C हा दोन्ही वर्तुळाबाहेरील रेषा AB वरील बिंदू आहे. बिंदू C मधून वर्तुळांना स्पर्शबिंदू M आणि N मध्ये स्पर्शिका काढल्या, तर सिद्ध करा, की CM = CN. **[जुलै 15] [3 गुण]**



सिद्धता:

रेषा CM ही बिंदू M मधून जाणारी स्पर्शिका आहे आणि रेषा CA ही छेदिका आहे.

$\therefore$ $CM^2 = CA \times CB$ ---- (i) [स्पर्शिका छेदिका गुणधर्म]

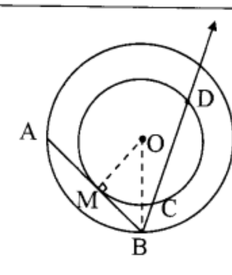
रेषा CN ही बिंदू N मधून जाणारी स्पर्शिका आहे आणि रेषा CA ही छेदिका आहे.

$CN^2 = CA \times CB$ ---- (ii) [स्पर्शिका छेदिका गुणधर्म]

$\therefore$ $CM^2 = CN^2$ ---- [विधान (i) व (ii) वरून]

$\therefore$ **CM = CN** ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

6. 5 सेमी व 3 सेमी त्रिज्या असलेली दोन समकेंद्री वर्तुळे आहेत. लहान वर्तुळाला स्पर्श करणाऱ्या मोठ्या वर्तुळाच्या जीवेची लांबी काढा. जर BD = 5 सेमी, तर BC ची लांबी काढा. **[3 गुण]**



रचना: 'O' केंद्र असलेली दोन समकेंद्री वर्तुळे आहेत आणि AB ही लहान वर्तुळाला बिंदू M मध्ये स्पर्श करते.

OM व OB जोडा.

उकल:

OM = 3, OB = 5 ---- [दिलेले]

ΔOMB मध्ये,

$\angle OMB = 90°$ ---- [स्पर्शिका त्रिज्येस लंब असते.]

$\therefore$ $OM^2 + MB^2 = OB^2$ ---- [पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार]

$\therefore$ $(3)^2 + MB^2 = (5)^2$

$\therefore$ $9 + MB^2 = 25$

$\therefore$ $MB^2 = 25 - 9$

$\therefore$ $MB^2 = 16$

$\therefore$ $MB = 4$ ---- [दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन]

आता, $AB = 2\ MB$ ---- [वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेस दुभागतो.]

$\therefore$ $AB = 2(4) = 8$ एकक

रेषा BM ही बिंदू M मधून जाणारी स्पर्शिका व रेषा BD वृत्तछेदिका आहे.

$\therefore$ $MB^2 = BC \times BD$ ---- [स्पर्शिका छेदिका गुणधर्म]

$\therefore$ $(4)^2 = BC \times 5$

$\therefore$ $16 = BC \times 5$

$\therefore$ $BC = \frac{16}{5}$

$\therefore$ $BC = 3.2$ एकक

$\therefore$ **लहान वर्तुळाला स्पर्श करणाऱ्या मोठ्या वर्तुळाच्या जीवेची लांबी 8 एकक आणि BC ची लांबी 3.2 एकक आहे.**