गति के नियम
(LAWS OF MOTION)

4 CHAPTER

4.1 प्रस्तावना (Intoduction)

- पिछले अध्याय में हमने गतिकी के अध्ययन में गति के उन कारणों का अध्ययन नहीं किया जिनके प्रभाव में कोई वस्तु गतिशील होती है। किसी वस्तु की गति को प्रभावित करने वाले कारक द्रव्यमान तथा बल हैं। इस अध्याय में हम गति के कारक बल तथा गति के नियमों का अध्ययन करेंगे। भौतिक विज्ञान की यह शाखा गति विज्ञान (Dynamics) कहलाती है।

4.2 बल की संकल्पना (Concept of Force)

- दैनिक जीवन में हमारा अनुभव है कि कोई वस्तु तब तक स्थिर रहती है जब तक कि उसे खींचा या धक्का नहीं दिया जाये। इसी प्रकार गतिशील वस्तु को रोकने के लिए भी गति के विपरीत धक्का लगाया जाता है या खींचा जाता है। इन सभी स्थितियों में एक बाह्य कारक की आवश्यकता होती है जिसे बल कहते हैं।

  इस प्रकार वह कारक जो स्थिर वस्तु को गतिशील या गतिशील वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करता है अथवा ऐसा करने का प्रयास करता है, बल कहलाता है। बल वह भौतिक राशि है जो किसी वस्तु में त्वरण उत्पन्न करे अथवा त्वरण उत्पन्न करने का प्रयास करे।

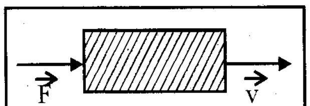
  जब वस्तु पर कार्यरत बल संतुलित होते हैं तब वह स्थिरावस्था में तथा जब असंतुलित बल कार्यरत होते हैं तब वह परिणामी बल की दिशा में गति करती है।

  किसी पिण्ड पर कार्यरत बल की व्याख्या करने के लिए निम्न तथ्यों का निर्धारण आवश्यक होता है–

  (1) कार्यरत बल का परिमाण
  (2) कार्यरत बल की दिशा तथा
  (3) कार्यरत बल के बिन्दु की स्थिति पर

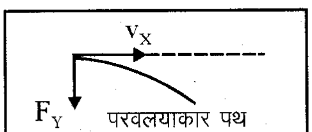
कार्यरत बल की दिशा का गति पर प्रभाव
(Effect on the motion due to direction of applied force)

स्थिति (i) जब कार्यरत बल की दिशा कण के विस्थापन की दिशा में हो–इस स्थिति में कार्यरत बल का परिमाण नियत होने पर कण का त्वरण भी नियत रहता है।



(*a*).

स्थिति (ii) जब नियत परिमाण का बल नियत वेग से गतिशील कण के प्रारंभिक वेग की दिशा के लम्बवत् कार्यरत हो–इस स्थिति में कण परवलयाकार पथ पर गति करता है।



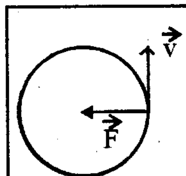
(b).

स्थिति (iii) जब नियत परिमाण का बल गतिशील कण के लम्बवत् कार्यरत हो–इस स्थिति में कण नियत चाल से वृत्ताकार पथ पर गति करता है।

(iii) अनुभव के आधार पर बल दो प्रकार के होते हैं–

1. सम्पर्क बल–वे बाह्य बल जो किसी वस्तु के सम्पर्क में आने पर वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करते हैं या करने का प्रयास करते हैं। सम्पर्क बल कहलाते हैं।

उदाहरण–हाथ से मेज को खींचना, साईकिल पर पैडल मारना आदि।



चित्र 4.1 (c)

2. दूरी पर कार्यरत बल–वे बाह्य बल जो किसी वस्तु के सम्पर्क में आए बिना ही वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करने का प्रयास करते हैं। दूरी पर कार्यरत बल या क्षेत्रीय बल कहलाते हैं।

उदाहरण–गुरुत्वीय बल, चुम्बकीय बल, कूलॉम बल आदि। अतः बाह्य बल किसी पिण्ड के संपर्क में हैं यह आवश्यक नहीं है। बाह्य बल एक दूरी से भी किसी पिण्ड पर बल लगा सकता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. बल के कारण वस्तु में त्वरण या मंदन उत्पन्न होता है।
2. बल के कारण वस्तु की आकृति या आकार में परिवर्तन संभव हैं।
3. वस्तु पर बल लगाने के लिए उसे छूना (सम्पर्क) आवश्यक नहीं है।
4. यदि किसी वस्तु पर एक से अधिक बल कार्यरत हों और वस्तु स्थिरावस्था में हो तो यह बलों की संतुलन की स्थिति कहलाती है।
5. यदि किसी वस्तु पर एक से अधिक बल कार्यरत हों और कार्यरत बल संतुलन की स्थिति में नहीं हों अर्थात् असंतुलित बल कार्यरत हों तो वस्तु परिणामी बल की दिशा में गति करेगी।

4.3 जड़त्व एवं न्यूटन का गति का प्रथम नियम (Inertia and Newton's First Law of Motion)

जड़त्व (Inertia):

(i) वस्तु का वह गुण जिसके कारण वह रेखीय गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है, जड़त्व कहलाता है। यह वस्तु के द्रव्यमान के बराबर होता है।

(ii) यदि कोई वस्तु स्थिर है तो वह स्थिर रहना चाहती है तथा यदि गतिशील है तो एक समान वेग से गतिशील रहना चाहती है। जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं करे। वस्तु के

इस गुण को जड़त्व का गुण कहते हैं।

(iii) यदि नेट बाह्य बल शून्य है तो विरामावस्था में रह रहा,पिण्ड विरामावस्था में रहता है और गतिशील पिण्ड निरंतर एक समान वेग से गतिशील रहता है। पिण्ड के इस गुण को जड़त्व कहते हैं।

(iv) कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा एक समान गति की अवस्था में स्वयं तब तक कोई परिवर्तन नहीं कर सकता जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं कर सकें।

(v) पिण्ड का वह गुण जिसके कारण वह स्थिर अवस्था या एक समान गति अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है जड़त्व कहलाता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(1) जड़त्व एक भौतिक राशि नहीं है, यह केवल वस्तु का अंतर्निहित गुण है जो कि वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है।

(2) जड़त्व का कोई मात्रक अथवा विमा नहीं होती।

(3) समान द्रव्यमान की दो वस्तुओं (जिनमें से एक गतिमान तथा दूसरी स्थिर है) का जड़त्व समान होता है, क्योंकि जड़त्व केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। यह वस्तु के वेग व आकार पर निर्भर नहीं करता।

(4) जड़त्व से तात्पर्य है परिवर्तन के प्रति प्रतिरोध।

(5) **यदि समान बल दो भिन्न-भिन्न द्रव्यमान की वस्तुओं पर आरोपित किया जाता है तब कम द्रव्यमान (हल्की वस्तु) की वस्तु में अधिक त्वरण होगा जबकि अधिक द्रव्यमान (भारी वस्तु) की वस्तु में कम त्वरण होगा। इस प्रकार जिस वस्तु का जड़त्व अपेक्षाकृत अधिक है उस पर बाह्य बल आरोपित करने से अपेक्षाकृत कम त्वरण उत्पन्न होगा।**

न्यूटन का गति का प्रथम नियम (जड़त्व का नियम) (Newton's First Law of Motion)

यह नियम गैलीलियो के प्रायोगिक प्रेक्षणों पर आधारित है।

इस नियम के अनुसार **यदि कोई वस्तु स्थिर है तो वह स्थिर ही रहेगी तथा गतिशील है तो नियत वेग से गतिशील ही रहेगी जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं करता है। इसे जड़त्व का नियम भी कहते हैं।**

इस प्रकार किसी वस्तु की स्थिर अवस्था अथवा एक समान वेग से गतिशील अवस्थाओं में परिवर्तन के लिए बाह्य असंतुलित बल आवश्यक है दोनों ही शून्य त्वरण की अवस्थायें हैं।

यदि किसी वस्तु पर लगने वाला नेट बाह्य बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है। शून्येत्तर त्वरण केवल तभी हो सकता है जब वस्तु पर कोई बाह्य असंतुलित बल अर्थात् नेट बाह्य बल लगता हो।

न्यूटन की गति के प्रथम नियम के उदाहरण–

न्यूटन का प्रथम नियम जड़त्व को परिभाषित करता है। जड़त्व तीन प्रकार का होता है–

विराम का जड़त्व, गति का जड़त्व, दिशा का जड़त्व।

(1) **विराम का जड़त्व (Inertia of rest)**–यह वस्तु का वह गुण है जिसके कारण वस्तु स्वयं अपनी विरामावस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती है। इसका अर्थ है, कि यदि कोई वस्तु विरामावस्था में है, तो वह विरामावस्था में ही रहती है अर्थात् स्वयं गति प्रारंभ नहीं कर सकती।

उदाहरण-(i) यदि हम किसी गिलास के ऊपर रखे एक चिकने कार्ड बोर्ड पर कोई सिक्का रखते हैं तथा उँगलियों की सहायता से कार्ड बोर्ड को एका एक दूर धकेलते हैं, तब कार्ड–बोर्ड दूर गिर जाता है, जबकि सिक्का विराम के जड़त्व के कारण गिलास में गिर जाता है।

(ii) एक आदमी बस में स्वतंत्र रूप से खड़ा है। जब बस अचानक चलना प्रारम्भ करती है, तब वह पीछे की ओर गिरता है।

जब बस अचानक चलना प्रारंभ करती है, तो बस की गति के लिए आवश्यक बल शरीर के निचले भाग में भी संचरित होता है, अतः शरीर का निचला भाग बस के साथ ही गतिमान होता है, जबकि शरीर के ऊपरी भाग में (कमर से ऊपर का भाग) विराम के जड़त्व के कारण कोई बल संचरित नहीं होता, अतः यह हिस्सा अपनी पूर्व अवस्था में ही रहता है। इस प्रकार शरीर के दो हिस्सों के बीच परिणामी विस्थापन होने से शरीर के ऊपरी हिस्से को पीछे की ओर झटका लगता है।

(iii) यदि बस धीमी गति से गतिमान है, तो गति का जड़त्व एकसमान रूप से व्यक्ति के शरीर में संचरित हो जाता है, जिससे व्यक्ति का संपूर्ण शरीर बस के साथ गतिमान हो जाता है तथा व्यक्ति को कोई झटका नहीं लगता।

(iv) जब कोई घोड़ा अचानक दौड़ना शुरू कर देता है, तब घुड़सवार पीछे की ओर गिरने लगता है, ऐसा व्यक्ति के शरीर के ऊपरी हिस्से में विराम के जड़त्व के कारण होता है।

(v) बंदूक की गोली को काँच की खिड़की पर दागने पर यह स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि कोई गेंद पूरी खिड़की के काँच को तोड़ देती है। इसका कारण यह है कि गोली का वेग गेंद की अपेक्षा अत्यधिक होता है, अतः काँच के साथ इसका संपर्क अत्यंत कम समय तक होता है, अतः गोली के कारण गति काँच के केवल छोटे से भाग में ही संचरित होती है। अतः यह काँच की खिड़की से एक स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि गेंद से सम्बन्धित समय तथा संपर्क क्षेत्रफल अधिक होता है। इस समय में गति पूरी खिड़की के काँच में संचरित हो जाती है, अतः यह पूरी खिड़की को तोड़ (Cracks) देती है।

(vi) किसी दरीपट्टी को छड़ से झाड़ने पर इसमें से धूल के कण गिरने लगते हैं, क्योंकि दरीपट्टी को छड़ से झाड़ने पर दरीपट्टी गति में आ जाती है, किन्तु धूल के कण अपनी पूर्वावस्था में ही रहते हैं, अतः दरीपट्टी से अलग हो जाते हैं।

(2) **गति का जड़त्व (Inertia of motion)**–वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वह अपनी एकसमान गति की अवस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती अर्थात् एक समान गति करती हुई वस्तु स्वयं न तो त्वरित होती है अथवा न ही अवमंदित।

उदाहरण (i) जब किसी बस अथवा ट्रेन को अचानक रोक दिया जाता है, तब उसमें बैठे यात्री आगे की ओर झुक जाते हैं, क्योंकि उनके शरीर का निचला हिस्सा बस अथवा ट्रेन के साथ विरामावस्था में आ जाता है, किन्तु ऊपरी हिस्सा गति के जड़त्व के कारण आगे की ओर गतिमान रहता है।

(ii) चलती ट्रेन से कूदने पर व्यक्ति आगे की ओर (रेलगाड़ी की दिशा में) गिरने लगता है।

(iii) लंबी कूद के धावक लंबी कूद से पहले कुछ दूरी तक दौड़ते हैं, क्योंकि दौड़ने पर प्राप्त वेग, लंबी कूद लगाने के वेग में जुड़ जाता है। अतः वह ज्यादा दूरी तक कूद सकता है।

(3) **दिशा का जड़त्व (Inertia of direction)**–वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वह स्वयं की गति की दिशा में परिवर्तन नहीं कर सकती, दिशा का जड़त्व कहलाता है।

उदाहरण-(i) जब कोई कार अचानक वक्राकार मार्ग पर चलने लगती है, तब अंदर बैठे व्यक्ति बाहर की ओर गिरने लगते हैं।

(ii) जब किसी पत्थर को धागे से बाँधकर वृत्तीय मार्ग में घुमाया जाता है अथवा अचानक धागे को छोड़ दिया जाए तो पत्थर दिशा के जड़त्व के कारण वृत्त की स्पर्शज्या के अनुदिश गति करता हुआ गिर जाता है, क्योंकि धागे का खिंचाव बल पत्थर की वृत्तीय गति में सहायक होता है। जैसे ही धागे को छोड़ा जाता है, खिंचाव बल समाप्त हो जाता है तथा पत्थर एक सीधी रेखा के अनुदिश वृत्त की स्पर्श रेखा में गति करता हुआ गिर जाता है।

(iii) किसी वाहन का घूर्णन करता हुआ पहिया कीचड़ को पहिए की स्पर्शज्या के अनुदिश बाहर की ओर फेंकता है, ऐसा दिशा के जड़त्व के कारण होता है।

4.4 संवेग एवं न्यूटन का गति का द्वितीय नियम (Momentum and Newton's Second law of Motion)

संवेग (रेखीय संवेग) (Momentum)

रेखीय गति कर रही वस्तु के द्रव्यमान व वेग के गुणनफल को उसका रेखीय संवेग कहते हैं।

$$\text{संवेग } \vec{p} = m\vec{v} \qquad ...(1)$$

यह सदिश राशि है जिसकी दिशा वेग की दिशा में होती है। यह वस्तु की गति की मात्रा का माप है।

मात्रक–M.K.S. पद्धति में किग्रा.मी./से.

विमा $[M^1 L^1 T^{-1}]$

यदि दो भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुयें नियत वेग से गतिशील हो तो संवेग का मान द्रव्यमान के समानुपाती होता है अर्थात्

$$p \propto m$$

जिससे $m\uparrow$ तब $p\uparrow$ तथा $m\downarrow$ तब $p\downarrow$

इसी प्रकार यदि दो भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुओं का रेखीय संवेग नियत हो तो गतिशील वस्तुओं का वेग उनके द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात्

$$v \propto \frac{1}{m}$$

जिससे $m\uparrow$ तब $v\downarrow$ तथा $m\downarrow$ तब $v\uparrow$

न्यूटन का गति का द्वितीय नियम (Newton's Second Law of Motion)

इस नियम के अनुसार **किसी वस्तु के संवेग में परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बाह्य असंतुलित बल के समानुपाती होती है तथा संवेग में यह परिवर्तन बल की दिशा में होता है** अर्थात्

$$\vec{F} \propto \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{F} = K\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(1)$$

यहाँ K समानुपाती नियतांक है जिसका मान चयनित मात्रकों पर निर्भर करता है। मात्रकों का चयन इस प्रकार करते हैं कि K का मान 1 प्राप्त हो।

$\therefore$ K = 1 मानने पर

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(2)$$

$$\because \text{संवेग } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \because \text{त्वरण } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad ...(3)$$

अतः किसी वस्तु का द्रव्यमान तथा उसमें उत्पन्न त्वरण का गुणनफल उस पर आरोपित बल के बराबर होता है तथा त्वरण की दिशा बल की दिशा में होती है।

वस्तुतः–न्यूटन का प्रथम नियम बल की परिभाषा देता है जबकि न्यूटन का द्वितीय नियम बल का परिमाण निर्धारित करता है।

न्यूटन की गति के द्वितीय नियम के उदाहरण–

(i) क्रिकेट का कोई खिलाड़ी तीव्र गति से आती गेंद को पकड़ते समय अपने हाथ को पीछे की ओर खींचता है। इसका कारण यह है कि प्रारंभ में गेंद गतिशील है तथा खिलाड़ी हाथों से गेंद को रोकने के लिए मंदक बल लगाता है। अब यदि खिलाड़ी गेंद को अचानक पकड़ ले तब गेंद का मंदन बहुत अधिक होने से गेंद को रोकने के लिए बहुत अधिक बल लगाना पड़ेगा जिससे खिलाड़ी की हथेली में चोट लग सकती है।

जब खिलाड़ी अपने हाथ को पीछे की ओर ले जाकर गेंद को धीरे से पकड़े तब मन्दन कम होगा। अतः खिलाड़ी को गेंद पकड़ने में कम बल लगाना पड़ेगा और खिलाड़ी की हथेली में चोट लगने की संभावना नहीं रहेगी।

(ii) जब कोई व्यक्ति किसी ऊँचाई से कठोर फर्श पर कूदता है तब व्यक्ति का वेग तुरन्त ही शून्य हो जाता है और व्यक्ति पर फर्श द्वारा आरोपित बल अत्यधिक होता है जिससे व्यक्ति को चोट लग जाती है। इसके विपरीत यदि व्यक्ति उसी ऊँचाई से रेत में कूदता है तब उसके पैर रेत में धँसने से उसके वेग में परिवर्तन धीरे–धीरे होता है जिससे फर्श द्वारा आरोपित बल कम होने से व्यक्ति को चोट नहीं लगती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. गति के द्वितीय नियम में $\vec{F} = 0$ से यह उपलक्षित होता है कि $\vec{a} = 0$। प्रत्यक्ष रूप से द्वितीय नियम प्रथम नियम के अनुरूप है।
2. गति का द्वितीय नियम एक सदिश नियम है।

न्यूटन का द्वितीय नियम घटकों के रूप में–

$$\because \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \text{ और } \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\because \vec{F} = m\vec{a}$$

$$(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})$$

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = ma_z$$

3. समान समय के लिए लगाया गया समान बल विभिन्न पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन करता है।
4. बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि कितनी तीव्रता से यह परिवर्तन किया जाता है।

समान संवेग परिवर्तन आदि अपेक्षाकृत कम समय में किया जाता

है तो अपेक्षाकृत अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है अर्थात् संवेग परिवर्तन की दर अधिक है तो बल अधिक होगा।

5. न्यूटन का द्वितीय नियम नेट बाह्य बल व वस्तु के त्वरण में सम्बन्ध दर्शाता है।

6. दो पिण्ड जो आरंभ में विराम में हैं, पर कोई नियत बल एक निश्चित समय अंतराल के लिए लगाया जाता है तो हल्का पिण्ड भारी पिण्ड की तुलना में अधिक चाल ग्रहण कर लेता है क्योंकि दोनों पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन होता है।

अत: $m_1 v_1 = m_2 v_2$

यदि $m_1 < m_2$

तब $v_1 > v_2$

7. यदि भिन्न द्रव्यमान वाली वस्तुओं पर समान बल लगाया जाता है तो उनके त्वरणों का अनुपात उनके द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

अत: $a \propto \frac{1}{m}$ F = नियत

माना एक वस्तु का द्रव्यमान m_1 तथा उत्पन्न त्वरण a_1 तथा दूसरी वस्तु का द्रव्यमान m_2 तथा उतना ही बल लगाने पर उत्पन्न त्वरण a_2 हो तो

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

यदि $m_1 < m_2$ तो $a_1 > a_2$

अर्थात् समान बल लगाने पर हल्की वस्तु का त्वरण अधिक भारी वस्तु अर्थात् अधिक जड़त्व वाली वस्तु का त्वरण कम होता है।

8. किसी कण के त्वरण का निर्धारण उसी समय उस पर लगने वाले बल द्वारा किया जाता है।

किसी त्वरित रेलगाड़ी से कोई पत्थर बाहर डालने के क्षण के तुरंत पश्चात् उस पर कोई क्षैतिज त्वरण अथवा बल कार्यरत नहीं होता।

9. **बल के मात्रक (Units of force)**

न्यूटन (M.K.S.), डाइन (C.G.S.) व पाउण्डल (F.P.S.)।

1 न्यूटन बल की परिभाषा

$\because F = ma$ जब $m = 1$ किग्रा. तथा

$a = 1$ मीटर/से.^{2} हो तो F = 1 न्यूटन

वह बल जो कि 1 किग्रा. द्रव्यमान की वस्तु में 1मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न कर दें, 1 न्यूटन बल के बराबर होता है।

1 न्यूटन = 1 किग्रा. × मी./से.^{2}

CGS प्रणाली–

$F = ma$

यदि $m = 1$ ग्राम तथा $a = 1$ सेमी./से.^{2}

तब F = 1 डाइन

अत: "एक डाइन (Dyne) का बल वह बल है जो एक ग्राम द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करने पर उसमें एक सेन्टीमीटर प्रति वर्ग सेकण्ड का त्वरण उत्पन्न कर देता है।

फ. प. स. (F.P.S.) प्रणाली–माना $m = 1$पौण्ड तथा $a = 1$ फुट/से.^{2} तब F = 1 पाउण्डल।

बल का यह मात्रक एक पाउण्डल कहलाता है।

अत: "एक पाउण्डल (Poundal) का बल वह बल है जो एक पौण्ड द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करने पर उसमें एक फुट प्रति वर्ग सेकण्ड का त्वरण उत्पन्न कर देता है।"

इन मात्रकों में परस्पर सम्बन्ध इस प्रकार है–

1 न्यूटन = 1 किग्रा. × 1मी./से.^{2}

= 1000 ग्राम × 100 सेमी./से.^{2}

= 1000 × 100 ग्राम × सेमी./से.^{2}

1न्यूटन = 10^5 डाइन

1 पाउण्डल = 1 पौण्ड × 1 फुट/से.^{2}

= 453.6 ग्राम × 30.48 सेमी./से.^{2}

1 पाउण्डल = 13825.7 डाइन (लगभग)

बल के उक्त तीनों मात्रक डाइन, पाउण्डल तथा न्यूटन निरपेक्ष मात्रक माने जाते हैं क्योंकि इनका मान सर्वत्र स्थिर रहता है। किन्तु कुछ अन्य व्यावहारिक मात्रक हम अपनी सुविधा के लिए और बना लेते हैं। इन्हें गुरुत्वकीय मात्रक (gravitational units) कहते हैं तथा इनका मान निरपेक्ष मात्रकों का g गुना होता है। मात्रक निम्नलिखित है–

स.ग.स. प्रणामी (CGS)

1 ग्राम भार = g डाइन = 981 डाइन

फ.प.स. प्रणाली (FPS)

1 पौण्ड भार = g पाउण्डल = 32.2 पाउण्डल

S.I. प्रणाली

1 किग्रा भार = g न्यूटन = 9.8 न्यूटन

गुरुत्वीय मात्रक का बल वह बल है जो मात्रक द्रव्यमान में g मात्रक का त्वरण उत्पन्न कर सके।

10. **भार (Weight)**

किसी वस्तु का भार उस पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है।

भार $W = mg$

जहाँ g = गुरुत्वीय त्वरण

भार का मात्रक न्यूटन होता है।

1 किलोग्राम भार = 1 किग्रा. × g मी./से.^{2}

= g न्यूटन = 9.8 न्यूटन

4.5 आवेग एवं आवेग-संवेग प्रमेय (Impulse and Impulse Momentum Theorem)

आवेग (Impulse)

किसी वस्तु के वेग में परिवर्तन दो प्रकार से किया जा सकता है–

(i) वस्तु पर एक बड़े परिमाण का बल थोड़े समयान्तराल के लिए लगाकर।

(ii) एक छोटे परिमाण का बल अधिक समयान्तराल के लिए लगाकर।

इस प्रकार वस्तु में उत्पन्न वेग परिवर्तन उस पर लगाये गये बल तथा समयान्तर के गुणनफल पर निर्भर करता है।

जब कोई अधिक परिमाण का नियत बल किसी वस्तु पर अल्प समयान्तर के लिए लगता है (उदाहरण के लिए हथौड़े से कील ठोकना, बल्ले से गेंद मारना आदि।) तो बल तथा समयान्तर के गुणनफल को बल का आवेग कहते हैं।

1. किसी पिण्ड की गति पर बल के कुल प्रभाव को आवेग कहते हैं।

2. किसी वस्तु पर आरोपित बल तथा जितने समयान्तराल के लिए बल कार्यरत है के गुणनफल को उसका आवेग कहते हैं। यह सदिश राशि है तथा इसे $\vec{I}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

आवेग की दिशा बल की दिशा में होती है। इसका मात्रक

न्यूटन–सेकण्ड होता है।

यदि किसी वस्तु पर कोई बल $\vec{F}$ अल्प समय dt के लिए कार्यरत रहता है तो इस बल का आवेग

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \quad ...(1)$$

$$\text{कुल आवेग } \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad ...(2)$$

यदि $\vec{F}$ नियत हो तो

$$\vec{I} = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}(t)_{t_1}^{t_2}$$

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) \quad ...(3)$$

आवेग-संवेग प्रमेय (Impulse-Momentum theorem)

$$\because \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \therefore \vec{F}dt = d\vec{p}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{p_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = (\vec{p})_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} = [\vec{p}_2 - \vec{p}_1]$$

$$\Rightarrow \vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad ...(1)$$

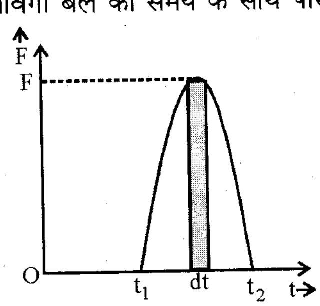
अर्थात् किसी बल का आवेग उस बल के कारण संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है। यही **आवेग-संवेग प्रमेय** है।

समान आवेग की स्थिति में $\vec{F_1}t_1 = \vec{F_2}t_2$

उदाहरण–क्रिकेटर तेजी से आती गेंद को कैच लेते समय अपने हाथ पीछे की तरफ खींचकर गेंद के कैच लेने के समय को बढ़ाता है ताकि हाथ पर आरोपित कम बल के कारण उसे चोट नहीं लगे।

- परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए कम समय के लिए कार्यरत रहने वाले अत्यधिक परिमाण के बल को आवेगी बल कहते हैं।
- आवेगी बल द्वारा किसी वस्तु के संवेग में कुल परिवर्तन की गणना आवेग–संवेग प्रमेय द्वारा भी की जा सकती है।

चित्र में एक आवेगी बल का समय के साथ परिवर्तन आरेख दर्शाया गया है।



चित्र 4.2

बल समय-वक्र तथा समय अक्ष के मध्य घिरे क्षेत्रफल को अनेक पट्टिकाओं के रूप में विभक्त किया जा सकता है। अल्प समय परिवर्तन के dt के संगत बल का मान F लगभग नियत माना जाये तब पट्टिका का क्षेत्रफल = Fdt

$\therefore$ बल का t_1 से t_2 समय तक कुल प्रभाव

$$= \int_{t_1}^{t_2} Fdt = \text{सभी पट्टिकाओं के क्षेत्रफल का योग} =$$

बल–समय आरेख तथा समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल

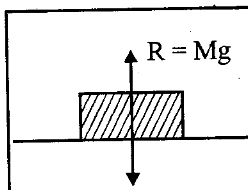
$\because$ आवेग–संवेग प्रमेय से

$$\text{आवेग } I = \int_{t_1}^{t_2} Fdt = p_2 - p_1 = \text{संवेग में परिवर्तन}$$

इस प्रकार बल–समय आरेख तथ समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल वस्तु के संवेग में कुल परिवर्तन के बराबर होता है।

4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम (Newton's Third Law of Motion)

(क्रिया प्रतिक्रिया का नियम)–इस नियम के अनुसार **प्रत्येक क्रिया की समान परिमाण तथा विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है तथा क्रिया व प्रतिक्रिया बल भिन्न-भिन्न पिण्डों पर आरोपित होते हैं।**



चित्र 4.3

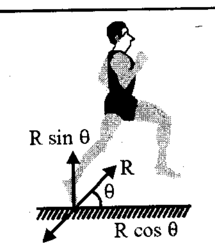
उदाहरण–**(i)** किसी धरातल पर स्थित पिण्ड का भार (क्रिया बल) नीचे का ओर लगता है जबकि धरातल द्वारा प्रतिक्रिया बल R पिण्ड पर ऊपर की ओर लगता है।

$\because$ उपरोक्त निकाय विरामावस्था में है, अतः इस पर कुल बल शून्य होगा। अतः क्रिया बल तथा प्रतिक्रिया बल समान तथा विपरीत दिशा में होने चाहिए।

(ii) तैरने की क्रिया न्यूटन के तृतीय नियम से संभव है।

(iii) जब रायफल चलायी जाती है, तो गोली जिस बल से आगे बढ़ती है (क्रिया), रायफल पर उतना ही बल पीछे की ओर (प्रतिक्रिया) लगता है।

(iv) जब कोई व्यक्ति पृथ्वी पर चलता है, तो वह पैर के पंजों के द्वारा तिर्यक बल F से पृथ्वी को पीछे की ओर दबाता है (क्रिया)। पृथ्वी भी उतना भी बल (प्रतिक्रिया) विपरीत दिशा में लगती है। इस प्रतिक्रिया बल को दो समकोणिक घटकों में वियोजित किया जा सकता है। क्षैतिज घटक व्यक्ति को आगे बढ़ने में मदद करता है, जबकि ऊर्ध्वाधर घटक व्यक्ति के भार को संतुलित करता है।



चित्र 4.4

महत्त्वपूर्ण तथ्य

प्रत्येक क्रिया के लिए, हमेशा एक बराबर (परिमाण में) एवं विपरीत (दिशा में) प्रतिक्रिया होती है।

1. जब एक वस्तु दूसरी किसी वस्तु पर बल लगाती है, तब दूसरी वस्तु भी प्रथम वस्तु पर बराबर तथा विपरीत दिशा में बल आरोपित करती है।
2. प्रकृति में बल हमेशा युग्म के रूप में होते हैं। एक अकेला विलगित बल संभव नहीं हो सकता है।
3. यदि कोई कारक, जो बल लगाता है, तब उस पर स्वयं पर भी बराबर तथा विपरीत दिशा में एक बल लगता है। कारक द्वारा लगाये गये बल को 'क्रिया' तथा कारक पर लगने वाले विपरीत बल को 'प्रतिक्रिया बल' कहते हैं।
4. क्रिया तथा प्रतिक्रिया कभी भी एक ही वस्तु पर नहीं लगती है। यदि ऐसा होता है, तो वस्तु पर कुल बल का मान शून्य होगा अर्थात् वस्तु हमेशा साम्यावस्था में रहेगी।
5. यदि $\vec{F}_{AB}$ = वस्तु B द्वारा वस्तु A पर लगाया गया बल (क्रिया) है तथा $\vec{F}_{BA}$ = वस्तु A द्वारा वस्तु B पर लगाया गया बल (प्रतिक्रिया) है। दोनों एक ही क्षण कार्यरत होते हैं अतः इनमें से किसी भी एक को क्रिया तथा दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जाता है।

   तब न्यूटन के गति के तीसरे नियम से $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$
6. न्यूटन का तीसरा नियम बल के गुण को व्यक्त करता है।
7. न्यूटन का तीसरा नियम स्थिर या गतिशील दोनों स्थितियों में लागू होता है।
8. यह नियम गुरुत्वीय बल, विद्युत बल व चुम्बकीय बल आदि में लागू होता है।
9. क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं। अतः ये बल एक दूसरे को निरस्त नहीं कर सकते परन्तु किसी एक पिण्ड में आंतरिक क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का योग अवश्य ही शून्य होता है।
10. यदि किसी फर्श पर एक गुटका विरामावस्था में हो तो प्रथम नियम के अनुसार गुटके पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। गुटके पर दो बल कार्य करेंगे पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल $W = Mg$ तथा गुटके पर फर्श का अभिलम्ब बल R

    अतः $Mg = R$ क्रिया प्रतिक्रिया युगल नहीं है।
11. तृतीय नियम का उपयोग करने पर गुटके की क्रिया अर्थात् गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल $W = Mg$ जिसकी दिशा ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होगी।
12. क्रिया प्रतिक्रिया युगल–

    (i) पृथ्वी द्वारा गुटके पर आरोपित गुरुत्व बल (क्रिया) तथा गुटके द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया)

    (ii) गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया) फर्श द्वारा गुटके पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

उदा 1. एक कार तथा एक ट्रक के रेखीय संवेग समान है। दोनों में से किसकी चाल अधिक होगी?

हल– संवेग = द्रव्यमान × वेग

$$\text{वेग} = \frac{\text{संवेग}}{\text{द्रव्यमान}} \Rightarrow \quad \text{वेग} \propto \frac{1}{\text{द्रव्यमान}}$$

अर्थात् जिस पिण्ड का द्रव्यमान कम होगा उसका वेग अधिक होगा। इस प्रकार कार का द्रव्यमान ट्रक से कम होने के कारण इसकी चाल अधिक होगी।

उदा 2. द्रव्यमान m के एक कण की गति, $S = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से वर्णित है। उस कण पर लगने वाले बल को ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 4.1)

हल– $\because \quad S = ut + \frac{1}{2}gt^2$

$$\therefore \quad \text{वेग } v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(ut + \frac{1}{2}gt^2)$$

$$= u + \frac{1}{2} \times 2gt = u + gt$$

$$\text{त्वरण } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u + gt)$$

$$= 0 + g = g$$

$$\therefore \quad \text{बल } F = ma = mg$$

उदा 3. क्रिकेट के एक मैच में एक गेंदबाज 50 मी./से. के वेग से 450 ग्राम की एक गेंद एक बल्लेबाज की ओर फेंकता है। बल्लेबाज बल्ले को गेंद के सम्पर्क में 0.6 सेकण्ड रखता हुआ, गेंद को उसी वेग से गेंदबाज की ओर लौटा देता है। बल्लेबाज द्वारा लगाये गये बल की गणना करो।

हल– दिया गया है–

u = 50 मी./से.

m = 450 ग्राम = 0.45 किग्रा.

v = –50 मी./से.

t = 0.6 सेकण्ड

F = ?

संवेग में परिवर्तन $= mv - mu$

$= m[v - u]$

$= 0.45[-50 - 50]$

$= 0.45(-100)$

= –45 किग्रा. × मी./से.

$$F = \frac{\text{संवेग में परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}}$$

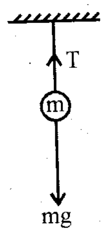
$$= \frac{-45}{0.6} = -75 \text{ न्यूटन}$$

उदा4. एक भारी द्रव्यमान 0.50 किलो ग्राम का पिण्ड, छत पर टंगी डोरी द्वारा लटका हुआ है। डोरी द्वारा पिण्ड पर लगाये गये बल की गणना कीजिए। दिया हुआ है– $g = 9.8\ m/s^2$

(पुस्तक का उदाहरण 4.2)

हल– चित्रानुसार पिण्ड का भार = mg (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

डोरी में तनाव बल = T (ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)



चित्र 4.5

∴ साम्यावस्था की स्थिति में

$T = mg = 0.50 \times 9.8$

$= 4.9$ न्यूटन

अत: डोरी द्वारा पिण्ड पर लगाया गया बल = 4.9 न्यूटन

उदा. 5. 0.2 किग्रा. द्रव्यमान की एक गेंद 10 मी./से. के वेग से गति कर रही है। एक खिलाड़ी उसे 0.5 सेकण्ड में स्थिर अवस्था में लाता है। गेंद के आवेग तथा खिलाड़ी द्वारा लगाया गया बल ज्ञात करो।

हल– दिया गया है– $m = 0.2$ किग्रा.

$u = 10$ मी./से.

$t = 0.5$ से.

$v = 0$

$I = ?$

$F = ?$

आवेग = संवेग में परिवर्तन

$I = mv - mu$

$= m(v - u)$

$= 0.2\,(0 - 10) = -2$ किग्रा.× मी. /से.

आवेग $I = Ft$

$\Rightarrow \quad F = \frac{I}{t} = \frac{-2}{0.5} = -4$ न्यूटन

उदा.6. कोई बल्लेबाज किसी गेंद को आरम्भिक चाल जो 15 m/s है में बिना परिवर्तन किए उस पर हिट लगाकर सीधे गेंदबाज की दिशा में वापस भेज देता है। यदि गेंद का द्रव्यमान 0.12 kg है, तो गेंद को दिया गया आवेग ज्ञात कीजिए।(गेंद की गति रैखिक मानिए)।

(पुस्तक का उदाहरण 4.3)

हल– दिया गया है: $u = 15$ m/s, $v = -15$ m/s

$m = 0.12$ kg, $I = ?$

∵ आवेग-संवेग प्रमेय से

आवेग = संवेग में परिवर्तन

$= mv - mu = m\,(v-u)$

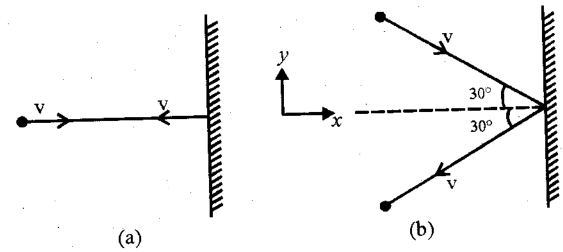
$= 0.12\,(-15-15) = 0.12\,(-30)$

$= -3.6$ किग्रा × मी./से

बल्लेबाज से गेंदबाज की दिशा में

उदा 7. दो सर्वसम बिलियर्ड गेंदें किसी दृढ़ दीवार से समान चाल से, परन्तु भिन्न कोणों पर टकराती हैं तथा नीचे दर्शाए चित्र की भांति चाल में बिना क्षय हुए परावर्तित हो जाती हैं। (i) प्रत्येक गेंद के कारण दीवार पर बल की दिशा क्या है? तथा (ii) दीवार द्वारा दोनों गेंदों पर लगे आवेगों का अनुपात क्या है?

(पुस्तक का उदाहरण 4.4)



चित्र 4.6

हल– माना कि प्रत्येक गेंद का द्रव्यमान m तथा दीवार पर टकराने के पूर्व तथा टकराने के पश्चात् दोनों गेंदों की चाल v है।

(i) (a) गेंद के संवेग को x तथा y घटकों के रूप में वियोजित करने पर

$(p_x)_i = mv, \quad (p_y)_i = 0$

$(p_x)_f = -mv, \quad (p_y)_f = 0$

[∵ गेंद X-अक्ष के अनुदिश गतिशील है।]

∴ X-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन $= -mv - (mv)$

$= -2mv$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन = 0

∵ आवेग = संवेग में परिवर्तन

अतः X-अक्ष के अनुदिश आवेग $= -2mv$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश आवेग = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में है अतः दीवार के कारण गेंद पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की ऋणात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

गति के तृतीय नियम के अनुसार गेंद के कारण दीवार पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

(b) गेंद के संवेग को x तथा y घटकों के रूप में वियोजित करने पर

$(p_x)_i = mv \cos 30°, \quad (p_y)_i = -mv \sin 30°$

$(p_x)_f = -mv \cos 30°, \quad (p_y)_f = -mv \sin 30°$

यहाँ दीवार से टकराने के बाद p_x का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है। जबकि p_y का चिन्ह परिवर्तित नहीं होता है।

∴ X-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन

$= -mv \cos 30° - (mv \cos 30°)$

$= -2\,mv \cos 30°$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन = 0

∵ आवेग = संवेग में परिवर्तन

अतः X-अक्ष के अनुदिश आवेग $= -2\,mv \cos 30°$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश आवेग = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में है अतः दीवार के कारण गेंद पर

लगा बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की ऋणात्मक X-अक्ष के अनुदिश है। गति के तृतीय नियम के अनुसार गेंद के कारण दीवार पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

(ii) प्रश्नानुसार दोनों स्थितियों में दीवार द्वारा दोनों गेदों पर लगे आवेगों का अनुपात

$$= \frac{-2mv}{-2mv\cos 30°} = \frac{1}{\cos 30°}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$$

4.7 संवेग संरक्षण नियम एवं इसके अनुप्रयोग (Law of conservation of momentum and its Applications)

न्यूटन के द्वितीय नियम से किसी निकाय के रेखीय संवेग में परिवर्तन की दर उस पर लग रहे कुल बाह्य बल के बराबर होती है।

अतः $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(1)$$

यदि कुल बाह्य बल $\vec{F}$ अनुपस्थित हो तो $\vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \text{नियतांक}$$

अर्थात् कुल बाह्य बल की अनुपस्थिति में किसी निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है यही रेखीय संवेग संरक्षण का नियम है।

दो कणों के निकाय के लिए संवेग संरक्षण का नियम–माना कि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो कण है। जो एक निकाय की रचना करते हैं तथा किसी क्षण उनके संवेग $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ हैं। m_1 द्रव्यमान के कण पर बाह्य बल $\vec{F_1'}$ तथा m_2 द्रव्यमान के कारण आन्तरिक बल $\vec{F_1''}$ है। इसी प्रकार m_2 द्रव्यमान के कण पर बाह्य बल $\vec{F_2'}$ तथा m_1 द्रव्यमान के कारण आन्तरिक बल $\vec{F_2''}$ है।

तब m_1 द्रव्यमान के कण पर परिणामी बल

$$\vec{F_1} = \vec{F_1'} + \vec{F_1''} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} \qquad ...(1)$$

(न्यूटन के द्वितीय नियम से)

m_2 द्रव्यमान के कण पर परिणामी बल

$$\vec{F_2} = \vec{F_2'} + \vec{F_2''} = \frac{d\vec{p_2}}{dt} \qquad ...(2)$$

∴ समी. (1) व (2) का योग करने पर

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F_1'} + \vec{F_1''} + \vec{F_2'} + \vec{F_2''} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} \qquad ...(3)$$

न्यूटन के तृतीय नियम से

$$\Rightarrow \quad \vec{F_1''} = -\vec{F_2''}$$

$$\vec{F_1''} + \vec{F_2''} = 0$$

∴ समीकरण (3) से

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

यदि कुल बाह्य बल

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} = 0 \text{ हो तो}$$

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{p_1} + \vec{p_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p_1} + \vec{p_2} = \text{नियतांक}$$

अतः किसी निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल शून्य हो तो उस निकाय का परिणामी संवेग नियत रहता है।

आन्तरिक बलों की उपस्थिति से इस नियम पर प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि अन्योन्य क्रिया के कारण लगने वाले आन्तरिक बल न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते हैं।

संवेग संरक्षण नियम के उदाहरण
(Illustrations of law of conservation of momentum)

1. बंदूक से दागी गई गोली–प्रारंभ में बंदूक तथा गोली का वेग शून्य है जिससे प्रारंभिक संवेग शून्य होगा। गोली दागने के बाद बंदूक का प्रतिक्षेप वेग $\vec{V}$ तथा गोली का वेग $\vec{v}$ है तो अन्तिम संवेग $M\vec{V} + m\vec{v}$ होगा।

यहाँ M = बंदूक का द्रव्यमान, m = गोली का द्रव्यमान

∴ संवेग संरक्षण नियम से

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{-m}{M}\vec{v}$$

2 एक विस्फोटक बम जो प्रारम्भ में विराम अवस्था में है। अतः इसका प्रारम्भिक संवेग (mv) स्पष्टतः शून्य है क्योंकि वेग शून्य है। अब यदि यह दो भागों में विस्फोटित हो जाता है। जिनके द्रव्यमान माना 2 : 1 के अनुपात में है तो इनके वेग ठीक एक ही रेखा में किन्तु विपरीत दिशा में इस प्रकार होंगे कि सम्पूर्ण संवेग पुनः शून्य हो जाए (स्पष्टतः बम पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है।)

माना कि $2m$ द्रव्यमान वाले खण्ड का वेग V है तथा m द्रव्यमान वाले खण्ड का वेग v हो तब विस्फोट के बाद भी सम्पूर्ण संवेग शून्य होता है। अतः

$$2mV + mv = 0$$
$$v = -2V$$

अतः m द्रव्यमान वाला खण्ड विपरीत दिशा में 2V वेग से गति करेगा।

3. **दो पिण्डों की टक्कर**–माना कि दो पिण्डों A तथा B का एक निकाय है दोनों पिण्ड अन्योन्य क्रिया कर रहे हैं। पिण्डों का टकराने से पूर्व संवेग क्रमशः $\vec{p_A}$ तथा $\vec{p_B}$ है, जबकि टकराने के बाद संवेग क्रमशः $\vec{p'_A}$ तथा $\vec{p'_B}$ है। तब गति के द्वितीय नियम से

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\vec{p'_A} - \vec{p_A}}{\Delta t} \quad ...(1)$$

$$\text{तथा } \vec{F}_{BA} = \frac{\vec{p'_B} - \vec{p_B}}{\Delta t} \quad ...(2)$$

यहाँ Δt वह समय है जिसमें दोनों पिण्ड सम्पर्क में रहते हैं। गति के तृतीय नियम से–

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

∴ समी. (1) व (2) से

$$\left(\frac{\vec{p'_A} - \vec{p_A}}{\Delta t}\right) = -\left(\frac{\vec{p'_B} - \vec{p_B}}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{p_A} + \vec{p_B}\right) = \left(\vec{p'_A} + \vec{p'_B}\right) \quad ...(3)$$

अर्थात् विलगित निकाय (A+B) का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) यदि किसी निकाय में x कण हों तथा उस पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है तो उस निकाय का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा।

$$\Sigma\vec{p} = \text{नियतांक}$$

या $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n = \text{नियतांक}$

अलग–अलग कणों का रेखीय संवेग यह आवश्यक नहीं कि नियत हो निकाय में आन्तरिक बलों के कारण यदि किसी एक कण का रेखीय संवेग कुछ बढ़ता है तो किसी अन्य कण का उतना ही घटता है इस कारण सम्पूर्ण निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत बना रहता है।

अर्थात् बाह्य बल की अनुपस्थिति में निकाय की रचना करने वाले कणों के संवेगों में परिवर्तन संभव है परन्तु कुल संवेग नियत रहता है।

(2) संवेग संरक्षण का नियम गति के तृतीय नियम पर आधारित है क्योंकि गति के तृतीय नियम के अनुसार किसी निकाय पर क्रिया व प्रतिक्रिया बलों का सदिश योग अर्थात् परिणामी बल शून्य होता है। यह नियम भौतिकी के मूलभूत नियमों में से एक है, जिसका कोई अपवाद नहीं है। इसके द्वारा अज्ञात कणों की खोज में सहायता मिलती है। इसी के द्वारा न्यूट्रिनों, मेसॉन तथा कई अन्य मूल कणों की खोज संभव हो सकी है।

4.8 परिवर्ती द्रव्यमान वाले तन्त्र (Systems with Variable mass)

सामान्यतः किसी निकाय का द्रव्यमान नियत रहता है परन्तु कुछ घटनाओं में द्रव्यमान परिवर्ती होता है जिसमें निकाय की गति का अध्ययन गति के नियमों को प्रयुक्त कर किया जाता है।

न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुसार

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \quad ...(1)$$

समी. (1) के दांये पक्ष से

यदि निकाय का द्रव्यमान m नियत हो तो

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

जिससे बल $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ द्वारा निर्धारित होता है।

इसी प्रकार यदि निकाय का वेग $\vec{v}$ नियत हो तो

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

जिससे बल $\vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt}$ द्वारा निर्धारित होता है। इसके अन्तर्गत निकाय का द्रव्यमान समय के साथ परिवर्तित होता है।

परिवर्तित द्रव्यमान वाले निकाय के रूप में वाहक पट्टा लदान व्यवस्था, रॉकेट नोदन आदि प्रमुख उदाहरण है।

1. जब बरसात की बूंद नीचे गिरती है तो पानी का वाष्पन या बूंद की सतह पर नमी का संघनन हो सकता है जिससे बूंद का द्रव्यमान परिवर्तित हो जाता है।

माना कि m द्रव्यमान की एक पानी की बूंद $\vec{v}$ वेग से गतिशील है जिसकी सतह पर $\vec{u}$ वेग से गतिशील नमी का $\frac{dm}{dt}$ दर से संघनन हो रहा है।

अतः बूँद के संवेग में कुल परिवर्तन की दर = बूंद के त्वरण के कारण संवेग में परिवर्तन की दर + नमी के संघनन के कारण संवेग में परिवर्तन की दर

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$$

∴ बूंद की गति का समीकरण

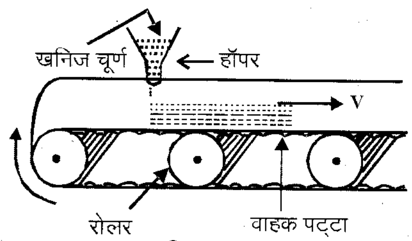
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) \quad ....(1)$$

समी. (1) को विभिन्न स्थितियों में हल किया जा सकता है।

2. वाहक-पट्टा लदान व्यवस्था (Conveyor belt loading system)

यह व्यवस्था परिवर्ती द्रव्यमान निकाय का एक उदाहरण है।

इस व्यवस्था के अन्तर्गत एक स्थिर हॉपर से खनिज चूर्ण एक वाहक पट्टे पर नियत दर द्वारा छोड़ा जाता है।



चित्र 4.7

वाहक पट्टा रोलरों की सहायता से नियत वेग $\vec{v}$ से आगे बढ़ता है। इस स्थिति में खनिज चूर्ण को अभीष्ट स्थान तक पहुँचाने के लिए आवश्यक बल उपलब्ध होता है। यह बल रोलर के साथ लगी मोटर द्वारा उपलब्ध कराया जाता है।

- माना कि वाहक पट्टे पर नियत दर $\frac{dm}{dt}$ से खनिज चूर्ण गिर रहा है। किसी क्षण पट्टे पर उपस्थित पदार्थ का द्रव्यमान m तथा पट्टे का द्रव्यमान M है। अब यदि वाहक पट्टे का नियत वेग $\vec{v}$ हो तो निकाय का कुल संवेग

$$\vec{p} = (m + M)\vec{v} \quad ....(1)$$

∴ पट्टे को गतिशील रखने के लिए आवश्यक बल

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(गति के द्वितीय नियम से)}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}[(m + M)\vec{v}]$$

$$= (m + M)\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt}$$

∵ पट्टे का द्रव्यमान M तथा वेग $\vec{v}$ नियत है–

$$\therefore \quad \frac{dM}{dt} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} \quad ...(2)$$

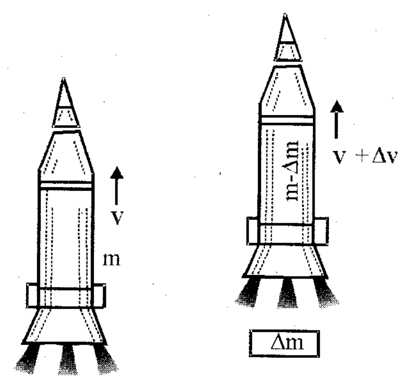
इस प्रकार पट्टे को नियत वेग $\vec{v}$ से गतिशील बनाये रखने के लिए आवश्यक बल का मान द्रव्यमान परिवर्तन $\frac{dm}{dt}$ पर निर्भर करता है।

यह बल पट्टे के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

3. रॉकेट नोदन तथा रॉकेट की गति का समीकरण (Rocket Propulsion and Equation for Rocket Motion)

रॉकेट की गति न्यूटन के गति के तृतीय नियम अथवा संवेग संरक्षण नियम पर आधारित है।

माना कि t = 0 समय पर रॉकेट का ईंधन सहित द्रव्यमान m_0 है। किसी समय t पर रॉकेट का द्रव्यमान m तथा उसका वेग v है। माना कि रॉकेट से एक निश्चित दर $r = \frac{dm}{dt}$ से गैंसे निष्कासित हो रही है। रॉकेट से निष्कासित गैसों के कारण इसका द्रव्यमान घटकर $(m - \Delta m)$ तथा वेग बढ़कर $(v + \Delta v)$ हो जाता है। माना कि निष्कासित गैसों का रॉकेट के सापेक्ष वेग u है।



चित्र 4.8

किसी समय t पर रॉकेट का शेष रहे ईंधन सहित द्रव्यमान $m = m_0 - rt$ होगा।

पृथ्वी के सापेक्ष निष्कासित गैसों का वेग

$$V_{\text{गैस, पृथ्वी}} = V_{\text{गैस, रॉकेट}} + V_{\text{रॉकेट, पृथ्वी}}$$
$$= -u + v$$
$$= v - u$$

इसकी दिशा रॉकेट की गति की दिशा में होगी।

अत: पृथ्वी के सापेक्ष निष्कासित गैसों का वेग $(v - u)$ होगा।

∵ निकाय का प्रारंभिक संवेग = mv

निकाय का अंतिम संवेग = $(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u)$

यहाँ Δt समयान्तराल में रॉकेट से निष्कासित गैसों का द्रव्यमान Δm है जहाँ $\Delta m = r\Delta t$ है।

∴ संवेग संरक्षण के नियमानुसार

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u) = mv$$

$$\Rightarrow \quad mv + m\Delta v - (\Delta m)v - (\Delta m)(\Delta v) + (\Delta m)v - (\Delta m)u = mv$$

$$\Rightarrow \quad m\Delta v - (\Delta m)(\Delta v) = (\Delta m)u$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v(m - \Delta m) = (\Delta m)u$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v = \frac{(\Delta m)u}{m - \Delta m}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{u}{m - \Delta m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{u}{m - r\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ सीमा लेने पर

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \frac{u}{m} = \frac{ru}{m} = \frac{ru}{m_0 - rt}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{ru}{m_0 - rt} \quad \text{....(1)}$$

समीकरण (1) से रॉकेट के त्वरण का मान ज्ञात किया जा सकता है। उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि समय बढ़ने पर रॉकेट का त्वरण भी बढ़ता है। यदि $t = 0$ समय पर रॉकेट गति प्रारंभ करता है तब बाह्य बल जैसे गुरुत्वीय बल आदि को नगण्य मानने पर समी. (1) का समाकलन करने पर

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{ru}{m_0 - rt} dt$$

$$\Rightarrow \quad v = ru\left(-\frac{1}{r}\right)\left[\log_e(m_0 - rt)\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad v = -u\left[\log_e(m_0 - rt) - \log_e m_0\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = -u\log_e\left(\frac{m_0 - rt}{m_0}\right) \quad \text{...(2)}$$

$$\Rightarrow \quad v = u\log_e\left(\frac{m_0}{m_0 - rt}\right) \quad \text{...(3)}$$

समी. (3) द्वारा किसी समय t पर रॉकेट का वेग ज्ञात किया जा सकता है। उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि t का मान बढ़ने पर रॉकेट का वेग v बढ़ता है। उपरोक्त समीकरण रॉकेट की गति का समीकरण कहलाता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

- यदि किसी समय t पर रॉकेट का द्रव्यमान m है तथा रॉकेट से निष्कासित गैसों का द्रव्यमान dm हो तो निष्कासित गैसों का रॉकेट के सापेक्ष वेग u होने पर रॉकेट पर बल

$$F = -u\frac{dm}{dt}$$

- यदि रॉकेट का प्रारंभिक द्रव्यमान m_i, वेग v_i तथा अंतिम द्रव्यमान m_f, वेग v_f होने पर

$$v_f = v_i + u\log_e\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

उदा 8. 10 किग्रा. द्रव्यमान की एक बंदूक से 250 मी./से. के वेग से 20 ग्राम द्रव्यमान की एक गोली दागी जाती है। बंदूक के प्रतिक्षेप वेग की गणना करो।

हल– दिया गया है– $M = 10$ किग्रा., $m = 0.02$ किग्रा.,
$v = 250$ मी./से.

संवेग संरक्षण नियम से

$$MV + mv = 0$$

$$\therefore \quad V = \frac{-mv}{M}$$

$$V = \frac{-0.02 \times 250}{10}$$

$$V = -0.5 \text{ मी./से.}$$

अतः बंदूक 0.5 मी./से. के वेग से पीछे हटेगी।

उदा.9. विस्फोट में एक बम तीन टुकड़ों में विभाजित होता है, जिसके दो टुकड़े, एक-दूसरे के लम्बवत् गतिमान होते हैं। यदि 1kg के टुकड़े का वेग 12m/s, 2kg के टुकड़े का वेग 8m/s जो परस्पर लम्बवत् है तथा तीसरे टुकड़े का वेग 40m/s हो तो इस टुकड़े का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 4.5)

हल– दिया गया है $m_1 = 1$ kg, $v_1 = 12$ m/s,
$m_2 = 2$kg, $v_2 = 8$m/s, $v_3 = 40$m/s, $m_3 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से–

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

प्रश्नानुसार $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ परस्पर लम्बवत् है।

$$\therefore \quad p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos 90^\circ}$$

$$p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$m_3v_3 = \sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}}{v_3}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{(1\times 12)^2 + (2\times 8)^2}}{40} = \frac{\sqrt{144+256}}{40}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{400}}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\text{kg} = 0.5\text{kg}$$

उदा 10. एक कन्वेयर बेल्ट पर प्रति सेकण्ड 100 ग्राम. द्रव्यमान ऊपर से ऊर्ध्वाधर गिर रहा है। यदि बेल्ट 5 सेमी./से. के समान वेग से क्षैतिज दिशा में गतिशील है तो बेल्ट पर लगने वाला बल ज्ञात करो।

हल– बेल्ट पर लगने वाला बल

$$F = u\frac{dm}{dt} \quad \text{...(1)}$$

$\because$ $u = 5$ सेमी./से.

$= 5 \times 10^{-2}$ मी./से.

$$\frac{dm}{dt} = 100 \text{ ग्राम/से.}$$

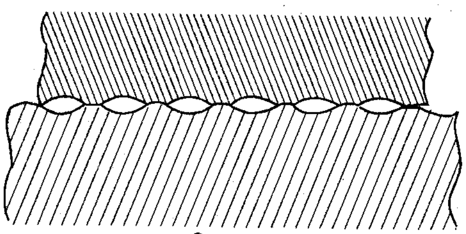
$= 100 \times 10^{-3}$ किग्रा./से.

$\therefore$ समीकरण (1) से

$$F = 5 \times 10^{-2} \times 100 \times 10^{-3}$$
$$F = 5 \times 10^{-3} \text{ न्यूटन}$$

4.9 घर्षण (Friction)

जब किसी पिण्ड को अन्य पिण्ड पर गतिमान किया जाता है या गतिमान करने का प्रयास किया जाता है तब उनके सम्पर्क तलों के मध्य उपस्थित वह बल जो उनकी एक दूसरे के सापेक्ष गति का विरोध करता है, घर्षण बल कहलाता है। पिण्डों के पृष्ठ पूर्णतः चिकने नहीं होते हैं। जब इनको उच्च क्षमता के सूक्ष्मदर्शी से देखा जाता है जब इनमें खुरदरापन होता है तथा कई स्थानों पर अनियमिताएँ होती है।

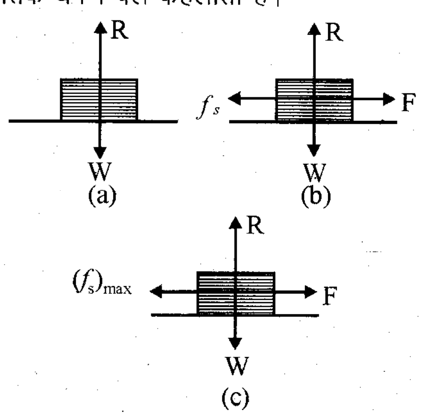


चित्र 4.9

जब एक सतह को दूसरी सतह के ऊपर रखा जाता है तो अणुओं के समूह एक दूसरे को दबाते हैं तथा अनियमिताएँ एक दूसरे में फँस जाती है। जिससे एक प्रकार की अतप्त बेल्डिंग (दो धातुओं को जोड़ने की विधि) हो जाती है। यह स्थिति अन्तरपरमाण्विक बलों के कारण उत्पन्न होती है। जब एक सतह दूसरी सतह पर फिसलती है तब अणुओं के मध्य बने बन्धों को तोड़ने के आवश्यक बल घर्षण बल कहलाता है।

स्थैतिक व गतिक घर्षण (Static and Kinetic Friction)

स्थैतिक घर्षण बल (Static frictional force) : घर्षण बल जो कि सम्पर्क तलों के मध्य सापेक्ष गति होने से पहले कार्य करता है, स्थैतिक घर्षण बल कहलाता है।



चित्र 4.10

माना कि एक लकड़ी का गुटका किसी टेबल पर स्थित है और उस पर कोई तनाव बल (F) (क्षैतिज बाह्य बल) कार्य न करे तब सतह द्वारा केवल अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R ही लगाया जाता है। ऐसी अवस्था में घर्षण बल उत्पन्न नहीं होगा। यदि गुटके पर तनाव बल (F) लगाया जाता है। तब तनाव बल के कम मान के लिए गुटका स्थिर रहता है। इस स्थिति में घर्षण बल इसे सन्तुलित कर देता है। जिसे स्थैतिक घर्षण बल (f_s) कहते हैं। परन्तु तनाव बल बढ़ाने पर एक स्थिति ऐसी प्राप्त होती है तब गुटका गतिमान होने की स्थिति में होता है। इस सीमान्त स्थिति में घर्षण बल अधिकतम होता है। अतः स्थैतिक घर्षण बल के अधिकतम मान को **सीमान्त घर्षण बल** कहते हैं।

सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{max}$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के समानुपाती होता है।

$$(f_s)_{max} \propto R$$

$$\Rightarrow \quad (f_s)_{max} = \mu_s R \qquad ...(1)$$

जहाँ μ_s नियतांक है जिसे स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं।

$$\mu_s = \frac{(f_s)_{max}}{R} \qquad ...(2)$$

अर्थात् किन्हीं दो सम्पर्क तलों के मध्य सीमान्त घर्षण बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के अनुपात को स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s) कहते हैं। इसका मान दोनों सम्पर्कित वस्तुओं के पदार्थ पर निर्भर करता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) μ_s का कोई मात्रक नहीं होता है।

(ii) μ_s का मान 0 तथा 1 के बीच होता है अर्थात् $0 < \mu_s < 1$

(iii) μ_s का मान पदार्थ पर तथा सम्पर्क तलों की प्रकृति पर निर्भर करता है अर्थात् वह सूखी है या गीली, खुरदरी है या चिकनी।

(iv) μ_s का मान तलों के आभासी सम्पर्क क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता।

(v) $$f_s \leq (f_s)_{max} = \mu_s R.$$
इसे स्थैतिक घर्षण नियम कहते हैं।

(vi) घर्षण का कारण पिण्ड के तल में खुरदरापन है जो भिन्न–भिन्न वस्तुओं में भिन्न–भिन्न होता है।

(vii) पिण्ड का तल जितना चिकना होगा घर्षण बल उतना ही कम होगा।

(viii) घर्षण बल के कारण ही समतल धरातल पर किसी पिण्ड को एक समान चाल बनाए रखने के लिए बाह्य बल लगाना पड़ता है।

(ix) घर्षण बल गति का नहीं वरन् आपेक्षिक गति का विरोध करता है।

(x) ऐसी गति जो तभी होगी जब (परंतु वास्तव में होती नहीं) किसी आरोपित बल के अंतर्गत घर्षण अनुपस्थित हो।

(xi) घर्षण बल दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्षिक गति (समुपस्थित अथवा वास्तविक) का विरोध करता है।

(xii) घर्षण बल संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करते हैं।

(xiii) चिकनी सतहों के लिए μ_S का मान कम होता है।

(xiv) स्थैतिक घर्षण पिण्ड की समुपस्थित गति का विरोध करता है।

(xv) त्वरित गति से गतिमान रेलगाड़ी के किसी डिब्बों में रखा एक बॉक्स जो रेलगाड़ी के सापेक्ष स्थिर है तो वास्तव में वह रेलगाड़ी के साथ त्वरित हो रहा है स्थैतिक घर्षण बल, बॉक्स को रेलगाड़ी के सापेक्ष स्थिर रखते हुए रेलगाड़ी के समान त्वरण प्रदान करता है। अतः बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण ही है।

$$ma = f_s \le \mu_S R = \mu_S mg$$

$$a \le \mu_S g$$

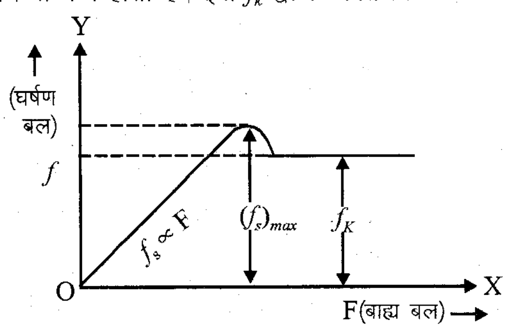
$$a_{max} = \mu_S g$$

गतिक घर्षण बल (Kinetic Frictional force)

घर्षण बल जो कि सम्पर्कित तलों के मध्य सापेक्ष गति उत्पन्न होने के पश्चात् कार्य करता है, गतिक घर्षण बल कहलाता है। गतिक घर्षण संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

जब पिण्ड पर आरोपित बाह्य बल F का मान स्थैतिक घर्षण की अधिकतम सीमा $(f_s)_{max}$ से अधिक हो जाता है तो पिण्ड पृष्ठ पर आरोपित बल की दिशा में गति करने लगता है।

एक बार जब पिण्ड गतिशील हो जाता है तो उस पर गतिक घर्षण बल कार्य करने लगता है जो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है। गतिक घर्षण प्रायः स्थैतिक घर्षण के अधिकतम मान से कम होता है। इसे f_k द्वारा व्यक्त किया जाये तब



चित्र 4.11

$$f_k = \mu_k R$$

इसे गतिक घर्षण नियम कहते हैं।

μ_k गतिक घर्षण गुणांक कहलाता है।

$$\mu_k = \frac{f_k}{R} \quad ...(2)$$

अर्थात् किन्हीं दो सम्पर्क तलों के मध्य गतिक घर्षण बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के अनुपात को गतिक घर्षण गुणांक कहते हैं।

इसका मान सम्पर्क पृष्ठों के युगल की प्रकृति अर्थात् पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

गतिक घर्षण गुणांक (μ_k), स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s) से कम होता है अर्थात् $\mu_k < \mu_s$

जब गुटके पर तनाव बल बढ़ाया जाता है तब

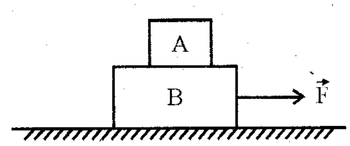
$$F = (f_s)_{max}$$

पर घर्षण बल अधिकतम हो जाता है, इसके बाद भी तनाव बल बढ़ाने पर घर्षण बल कम होकर f_k रह जाता है तथा गतिशील अवस्था में f_k लगभग नियत रहता है।

जैसा कि चित्र में आलेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है। यदि बाह्य आरोपित बल को हटा लिया जाता है तो उसका त्वरण $(-f_k/m)$ होता है और अंत में गुटका स्थिर हो जाता है। गतिक घर्षण भी सम्पर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता तथा यह आपेक्ष गति के वेग पर भी निर्भर नहीं करता है। गतिक घर्षण (f_k) वास्तविक गति का विरोध करता है।

स्थैतिक घर्षण की दिशा ज्ञात करना

किसी वस्तु पर स्थैतिक घर्षण बल की दिशा इस प्रकार होती है कि वस्तु पर आरोपित कुल बल वस्तु के सम्पर्क में रखी वस्तु के सापेक्ष इस वस्तु को स्थिर रख सके। गति के प्रथम व द्वितीय नियम की सहायता से स्थैतिक घर्षण की दिशा ज्ञात की जा सकती है।



चित्र 4.11 (a)

चित्रानुसार दो लकड़ी के गुटके A व B एक मेज पर एक दूसरे के ऊपर व्यवस्थित किये गये हैं। अब गुटके B पर दांयी ओर बाह्य बल $\vec{F}$ आरोपित किया जाता है। कम बल के प्रभाव में दोनों गुटके स्थिर रहते हैं। गुटके A पर कोई बाह्य बल आरोपित नहीं होने से गुटके B द्वारा गुटके A पर लगने वाला घर्षण बल भी शून्य होना चाहिए। अब बाह्य बल $\vec{F}$ बढ़ाने पर एक अवस्था में दोनों गुटके बाह्य बल की दिशा में गतिशील हो जाते हैं। इस स्थिति में गुटके A पर गुटके B के सम्पर्क के कारण केवल क्षैतिज स्थैतिक घर्षण बल लग सकता है। अतः इस बल की दिशा बाह्य बल के अनुदिश होनी चाहिए। इस प्रकार गुटके B पर घर्षण बल गति की विपरीत दिशा में तथा गुटके A पर घर्षण बल गति की दिशा में लगता है। इस प्रकार स्पष्ट होता है कि घर्षण बल सदैव गति का विरोध नहीं करता है बल्कि पिण्ड को त्वरित करने में भी सहायक होता है।

सारणी–1 : घर्षण गुणांक (लगभग)

पृष्ठों के पदार्थ (Materials of surfaces)	घर्षण गुणांक	
	μ_s	μ_k
कांच के ऊपर कांच	0.95	0.40
लकड़ी के ऊपर लकड़ी	0.50	0.30
पत्थर के ऊपर लकड़ी	0.50	0.40
स्टील के ऊपर स्टील	0.15	0.09
स्टील पर ताँबा	0.53	0.36
कंक्रीट पर रबर टायर	1.00	0.70

घर्षण के नियम (Laws of Friction)

(i) घर्षण बल सदैव पिण्ड की गति का विरोध करता है अर्थात् यह पिण्ड पर आरोपित बाह्य बल के विपरीत दिशा में कार्य करता है।

(ii) सम्पर्क में रखे दो पिण्डों के तलों के मध्य सीमान्त घर्षण बल तलों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

(iii) सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{max}$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के समानुपाती होता है अर्थात् $(f_s)_{max} \propto R$

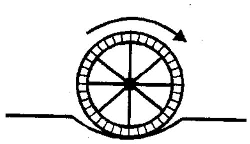
(iv) सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

(v) सीमान्त घर्षण बल से पहले घर्षण बल बाह्य बल से सन्तुलन में रहता है।

(vi) जब पिण्ड सतह पर सरकने लगता है तब घर्षण बल कम होकर गतिक घर्षण (f_k) के बराबर हो जाता है जो सदैव गति का विरोधा करता है।

सर्पी तथा लोटनी घर्षण (Sliding and Rolling Friction)

- **सर्पी घर्षण (Sliding friction)**—वह घर्षण बल जो सम्पर्क में आए दो तलों के परस्पर फिसलने पर उत्पन्न होता है, सर्पी घर्षण कहलाता है।



चित्र 4.12

- **बेलनी या लोटनी घर्षण (Rolling friction)**—वह घर्षण बल जो किसी पिण्ड या वस्तु के किसी तल पर घूर्णन गति करने के कारण उत्पन्न होता है, बेलनी घर्षण कहलाता है। जब कोई पिण्ड किसी पथ पर लुढ़कता है तब सम्पर्क क्षेत्रफल बहुत कम होता है जिससे दाब $\left(\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}\right)$ बहुत अधिक हो जाता है तथा दोनों या कोई एक सम्पर्कित स्थान पर कुछ दब जाते हैं। इस कारण उनकी आकृति में कुछ विकृति उत्पन्न हो जाती है तथा लुढ़कने वाले पिण्ड को लगातार ऊँचाई पर चढ़ना पड़ता है। लोटनी घर्षण गुणांक μ_r का मान μ_s व μ_k से कम होता है।

बेलनी घर्षण < गतिक घर्षण < सर्पी घर्षण

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) बेलनी (लोटनी) घर्षण, सर्पी घर्षण की तुलना में बहुत कम होता है इसलिए भारी वस्तुयें पहिएँ वाली गाड़ी में रखकर ले जायी जाती हैं।

(ii) लुढ़कने में, सम्पर्क तल एक दूसरे से रगड़ते नहीं है।

(iii) सम्पर्क बिन्दु का वेग पृष्ठ के सापेक्ष सदैव शून्य रहता है यद्यपि पहिये का केन्द्र आगे बढ़ता है।

(iv) $\mu_r < \mu_k < \mu_S$

(v) घर्षण बल की अनुपस्थिति में हमारा चलना, लिखना, पकड़ मजबूत होना असंभव है।

(vi) मशीनों तथा यंत्रों में ब्रेक की भांति इसका उपयोग किया जाता है।

(vii) डोरी में गांठ लगाना, ब्रेक लगाने पर वाहन का रूकना, माचिस की तीली का जलना सभी कुछ घर्षण के कारण ही संभव है।

(viii) घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य ऊष्मा आदि में परिवर्तित हो जाता है जिसके कारण मशीनों की दक्षता कम हो जाती है और मशीन गर्म हो जाती है। मशीनों के कल पुर्जे घिस जाते हैं जिससे ऊर्जा क्षय होता है।

(ix) घर्षण बल की अनुपस्थिति में हमारा चलना असंभव है क्योंकि जब हम एक पैर उठाकर आगे की ओर रखते हैं के पिछले पैर को घर्षण बल के कारण उत्पन्न प्रतिक्रिया बल पीछे जाने से रोकता है अन्यथा वह पीछे की ओर फिसलता जायेगा और आगे कभी नहीं चल सकेगा।

(x) घर्षण बल गाड़ी के पहिये व ब्रेक शू के मध्य लगता है यदि घर्षण बल नहीं होता तो गाड़ी को रोकने के लिए लगाये गये ब्रेकों का प्रभाव नहीं होता।

(xi) टायरों के धरातल खुरदरे बनाए जाते हैं जिससे सड़क व पहिए के मध्य घर्षण बल बढ़ाया जा सके।

(xii) किसी भारी वस्तु को घसीट कर ले जाने में अधिक बल लगाना पड़ता है जबकि उसी वस्तु को पहिए वाली गाड़ी में रखकर खींचने में कम बल लगाना पड़ता है क्योंकि घर्षण बल लोटनिक घर्षण में बदल जाता है जिसका मान सबसे कम होता है।

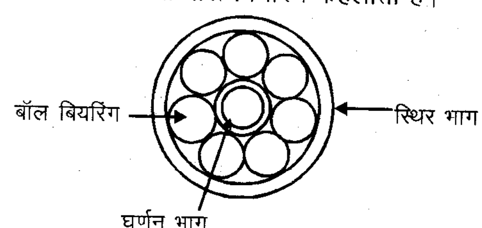
घर्षण बल कम करने की विधियाँ (Methods of Reducing Frictional Force)

घर्षण बल कम करने की सामान्यतः निम्न विधियाँ प्रयुक्त की जाती है–

(1) स्नेहक द्वारा (2) बॉल बियरिंग द्वारा तथा (3) पॉलिश द्वारा

(1) **स्नेहक द्वारा (Using Lubricant)**—घर्षण बल को कम करने के लिए प्रयुक्त किए जाने वाले पदार्थों को स्नेहक कहते हैं। ये पदार्थ सम्पर्क में रखें दो तलों के मध्य पतली परत का निर्माण करते हैं। हल्की मशीनों में कम श्यानता वाले पतले तेलों को घर्षण कम करने के लिए प्रयुक्त करते हैं। जैसे–घड़ियों में, सिलाई मशीन में आदि। भारी तथा तीव्र गतिमान मशीनों में गाढ़ा तेल या ग्रीस का उपयोग किया जाता है। संपीडित वायु का भी उपयोग स्नेहक के रूप में किया जाता है। उच्च दाब पर वायु को मशीनों के गतिशील भाग में प्रवाहित कर घर्षण में कमी की जाती है।

(2) **बॉल बियरिंग द्वारा (Using Ball Bearing)**—गतिशील पहियों शाफ्ट अथवा धुरियों के खाँचों के मध्य लगायी जाने वाली धातु की छोटी–छोटी गोलियाँ बाल बियरिंग कहलाती है।



चित्र 4.13

बाल बियरिंग का उपयोग वस्तु की गति को लोटनी गति में परिवर्तित करने के लिये किया जाता है। इस स्थिति में घर्षण बल का प्रभावी मान बहुत कम हो जाता है।

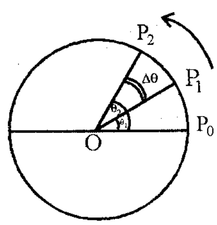
(3) **पॉलिश द्वारा (Using Polish)**–घर्षण बल का मान सम्पर्कित पृष्ठों पर पॉलिश करके कम किया जा सकता है। पॉलिश द्वारा सम्पर्कित पृष्ठों के मध्य उभार तथा गर्त भरकर सपाट हो जाते हैं जिससे अन्तरपरमाण्विक आकर्षक बन्ध अपेक्षाकृत कम बनते हैं तथा घर्षण बल का मान कम हो जाता है।

4.10 वृत्तीय गति (Circular Motion)

वृत्तीय गति से तात्पर्य वृत्ताकार पथ पर गति से है। वृत्तीय गति विभिन्न प्रकार की गतियों में महत्त्वपूर्ण गति होती है। किसी पंखे की गति, कृत्रिम उपग्रह की पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार पथ पर गति, धागे से बंधे पत्थर की किसी अक्ष के चारों ओर गति, सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति आदि वृत्तीय गति के उदाहरण है। वृत्तीय गति का अध्ययन करने के लिए निम्न राशियों की जानकारी होना आवश्यक है।

कोणीय विस्थापन (Angular displacement)–

निश्चित अक्ष के सापेक्ष निश्चित समयान्तराल में किसी कण की कोणीय स्थिति में परिवर्तन को उसका कोणीय विस्थापन कहते हैं। माना कि किसी समय t_1 पर कण की कोणीय स्थिति θ_1 व t_2 समय पर कोणीय स्थिति θ_2 है। तब कोणीय विस्थापन $\Delta\theta = \angle P_1OP_2$



चित्र 4.14

कोणीय विस्थापन का S.I. मात्रक रेडियन होता है।

कोणीय वेग (Angular velocity)– घूर्णन गति कर रहे कण के कोणीय विस्थापन में परिवर्तन की दर को कोणीय वेग कहते हैं। समयान्तराल Δt में कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ व समयान्तराल Δt के अनुपात को कण का औसत (माध्य) कोणीय वेग कहते हैं।

औसत कोणीय वेग $\omega_{av} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ...(1)

किसी क्षण t पर कण के कोणीय वेग को तात्क्षणिक कोणीय वेग कहते हैं।

तात्क्षणिक कोणीय वेग $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$ ...(2)

कण के नियत कोणीय वेग के लिए

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

$\Rightarrow \quad \omega = 2\pi n$ ...(3)

यहाँ T कण का आवर्तकाल तथा n आवृत्ति है।

T = वृत्ताकार पथ पर एक चक्कर लगाने में लगा समय

n = एक सेकण्ड में चक्करों की संख्या

कोणीय त्वरण (Angular acceleration)– घूर्णन गति कर रही वस्तु के कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं। समयान्तराल Δt में कोणीय वेग $\Delta\omega$ व समयान्तराल Δt के अनुपात को औसत कोणीय त्वरण कहते हैं।

औसत कोणीय त्वरण $\alpha_{av} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ....(4)

किसी क्षण t पर कण के कोणीय त्वरण को तात्क्षणिक कोणीय त्वरण कहते हैं।

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$ ...(5)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

कण के नियत कोणीय त्वरण के लिए

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

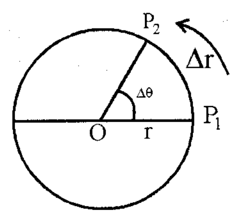
$\Rightarrow \quad \omega = \alpha t$ ...(6)

रेखीय वेग तथा कोणीय वेग में सम्बन्ध

(Relation between linear velocity and angular velocity)

माना किसी समय t व $t + \Delta t$ पर कण की स्थिति क्रमशः P_1 व P_2 है।

$$\therefore \quad \text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$



चित्र 4.15

$$\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r}$$

$\Rightarrow \quad \Delta r = r\Delta\theta$

$\therefore$ Δt समय में कण का औसत रेखीय वेग

$$v_{av} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r.\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$\Rightarrow \quad v = r\omega$ ....(1)

रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध

(Relation between linear acceleration and angular acceleration)

यदि वेग v परिवर्तित होता है तब रेखीय

त्वरण $\quad a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(r\omega)}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha$

$\Rightarrow \quad a = r\alpha$ ....(2)

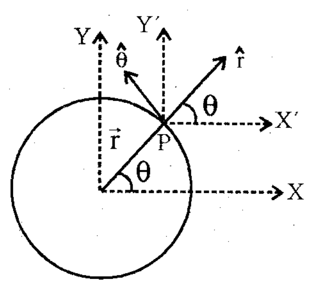
अभिकेन्द्रीय त्वरण अथवा त्रिज्य त्वरण

(Centripetal Acceleration or Radial acceleration)

जब कोई कण एक समान रैखिक चाल v से r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर गति करता है तब इसके रैखिक वेग की दिशा वृत्त के स्पर्शीय रेखीय होने के कारण सदैव परिवर्तित होती रहती है। अतः कण का वेग परिवर्तित होता है। इस प्रकार वेग परिवर्तन यदि केवल दिशा परिवर्तन के कारण हो अर्थात् कण की चाल अपरिवर्तित रहे तो त्वरण की दिशा, वेग की दिशा के लम्बवत्, अर्थात् वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र की ओर होती है। इस प्रकार के त्वरण को अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं। जब कोई कण एक समान चाल से वृत्ताकार पथ पर चलता है तो कण की गति को एक समान वृत्तीय गति कहते हैं।

अभिकेन्द्रीय त्वरण का व्यंजक समतल ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति में-

माना कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है। कण के वेग का परिमाण तथा दिशा समय के साथ परिवर्तनीय है। किसी समय t पर कण P बिन्दु पर है जहाँ उसकी कोणीय स्थिति θ है। बिन्दु P के निर्देशांकों (x, y) को समतल ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) के पदों में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 4.16

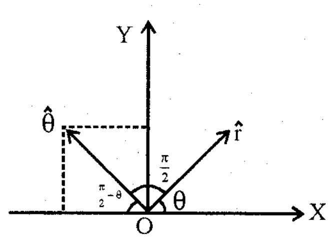
$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

स्थिति सदिश $\vec{r}$ के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{r}$ तथा कोण θ की बढ़ती दिशा अर्थात् स्थिति सदिश $\vec{r}$ के लम्बवत् एकांक सदिश $\hat{\theta}$ हो तो-

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \quad ...(1)$$



चित्र 4.17

चित्र की ज्यामिति से-

$$\hat{\theta} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \quad ...(2)$$

इस प्रकार कण का t समय पर स्थिति सदिश

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) \quad ...(3)$$

कण का t समय पर वेग

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)]$$

$$\vec{v} = r[\hat{i}(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}) + \hat{j}(\cos\theta\frac{d\theta}{dt})]$$

$$\vec{v} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left[-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right] = r\omega\,[-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta] \quad ....(4)$$

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \quad ....(5)$$

इस प्रकार समीकरण (5) से स्पष्ट है कि पद rω समय t पर कण की चाल है तथा वेग की दिशा $\hat{\theta}$ अर्थात् वृत्तीय पथ की स्पर्श रेखीय दिशा में है।

कण का t समय पर त्वरण

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\omega(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)]$$

$$\vec{a} = r\left[\omega\frac{d}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) + \frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\right]$$

$$\vec{a} = r\omega[-\hat{i}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - \hat{j}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}) + r\frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = r\omega[-\hat{i}\cos\theta(\omega) - \hat{j}\sin\theta(\omega)] + r\frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2[\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) + r\alpha(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\theta} \quad ....(6)$$

समी. (6) से स्पष्ट है कि इस स्थिति में कण की सामान्य वृत्तीय गति में त्वरण $\vec{a}$ के दो घटक है-

(i) $\vec{a}_r = -\omega^2 r\hat{r}$

जिसकी दिशा $-\hat{r}$ अर्थात् वृत्त के केन्द्र की ओर होती है इसे अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं।

(ii) $\vec{a}_t = r\alpha\hat{\theta} = r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} = \frac{d}{dt}(r\omega)\hat{\theta} = \frac{dv}{dt}\hat{\theta}$

जिसकी दिशा उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है इसे स्पर्शीय त्वरण कहते हैं।

इस प्रकार समी. (6) से-

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \qquad ...(7)$$

स्थिति-यदि कण एकसमान चाल से वृत्तीय पथ पर गति करता है तो कण की गति एकसमान वृत्तीय गति कहलाती है। इस स्थिति में

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

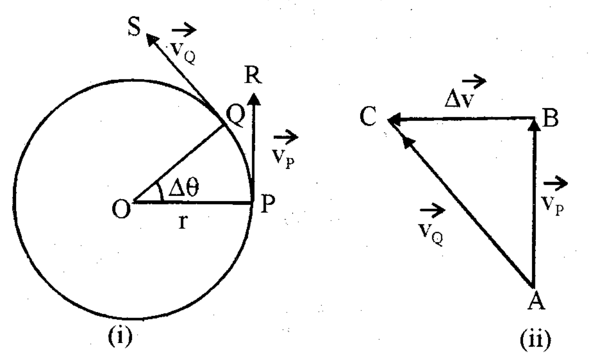
अर्थात् स्पर्शीय त्वरण शून्य होगा तथा केवल अभिकेन्द्रीय त्वरण उपस्थित होगा।

$\therefore$ अभिकेन्द्रीय त्वरण $a = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{r} \qquad ...(8)$$

वैकल्पिक विधि-

माना कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है। कण के वेग का परिमाण नियत है जबकि दिशा समय के साथ परिवर्तनीय है।



चित्र 4.18

माना कि समय t पर कण P बिन्दु पर है तथा वेग $\vec{v}_p$ है जबकि $t + \Delta t$ समय पर कण Q बिन्दु पर है तथा वेग $\vec{v}_Q$ है। कण का त्वरण

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_Q - \vec{v}_P}{\Delta t} \qquad ...(1)$$

वेग $\vec{v}_P$ व $\vec{v}_Q$ का तुल्य सदिश लेने पर (चित्र (ii) से)

सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P \qquad ...(2)$$

समी (1) व (2) से $\quad \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad ...(3)$

चित्र (i) व (ii) की ज्यामिति से

(कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ अल्प होने पर)

$BC = \Delta v, PQ = v\Delta t, AB = v, OP = r$

त्रिभुज POQ व BAC समरूप त्रिभुज है अतः

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{OP}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{v\Delta t} = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$\therefore$ समी. (3) से त्वरण $\vec{a}$ का परिमाण

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a_r = \frac{v^2}{r}} \qquad ...(4)$$

तथा दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर होती है इसी कारण इस प्रकार के त्वरण को अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं।

स्पर्श रेखीय वेग (v) तथा कोणीय वेग (ω) में सम्बन्ध में $v = r\omega$

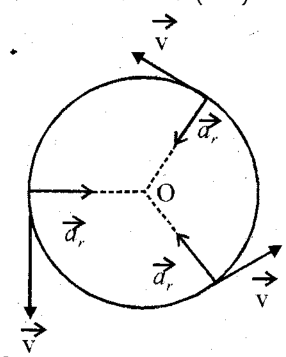
अभिकेन्द्रीय त्वरण कोणीय चाल के रूप में–

$$\Rightarrow \quad a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a_r = r\omega^2} \qquad ...(5)$$

जहाँ कोणीय वेग $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ तथा f = आवृत्ति, T = आवर्तकाल

एकसमान वृत्तीय गति करते हुए कण के वेग की दिशा वृत्त के स्पर्श रेखीय तथा त्वरण की दिशा वेग की दिशा के सदैव लम्बवत्, वृत्त के केन्द्र की ओर होती है (चित्र)



चित्र 4.19

किसी नियत चाल v पर, त्रिज्या r के छोटे होने पर a_r अधिक तथा बड़े होने पर a_r छोटा होता है। किसी नियत कोणीय चाल ω पर r के छोटे होने पर a_r छोटा तथा बड़े होने पर a_r बड़ा होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. अभिकेन्द्रीय त्वरण $\quad a_r = \frac{v^2}{r}$

चूंकि v व r दोनों अचर हैं इसलिए अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण भी अचर होता है। परंतु दिशा बदलती रहती है और सदैव केन्द्र की ओर होती है। अतः अभिकेन्द्रीय त्वरण एक समान सदिश नहीं होता है।

इसकी दिशा परिवर्तित होती रहती है अतः यह एक परिवर्तित त्वरण भी है।

2. r त्रिज्या के एक वृत्ताकार पथ में नियत चाल से गति कर रहे कण

का स्पर्शरेखीय त्वरण (a_t) शून्य होता है। अतः कुल त्वरण

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \quad \text{चूंकि } a_t = 0$$

अतः $a = a_r$

3. जब कण की चाल भी बदल रही हो तो अभिकेन्द्रीय त्वरण के साथ–साथ स्पर्श रेखीय त्वरण भी उत्पन्न हो जाता है।

परिणामी त्वरण $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

अतः परिणामी त्वरण का परिमाण

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

तथा त्वरण की दिशा $\tan\theta = \dfrac{a_r}{a_t}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_r}{a_t}\right)$$

4. **अभिकेन्द्रीय बल**–वह बल जो किसी कण को वृत्ताकार पथ में गति करने को बाध्य करता है और जिसकी दिशा सदैव वृत्ताकार पथ के केन्द्र की ओर होती है, अभिकेन्द्रीय बल कहते हैं।

$F_r = ma_r$ जहां m= कण का द्रव्यमान

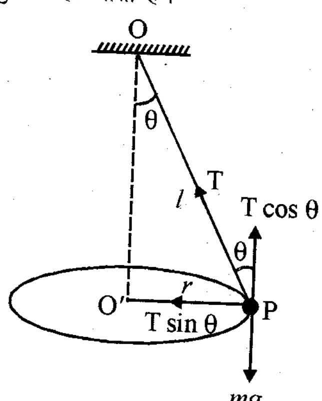
$F_r = \dfrac{mv^2}{r}$ चूंकि $a_r = \dfrac{v^2}{r}$

$\Rightarrow$ $F_r = m\omega^2 r$ $\therefore v = \omega r$

$= m\,4\pi^2 f^2 r$ $\omega = 2\pi f$

4.10.1 क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति (Circular motion in Horizontal and vertical planes)

(i) **क्षैतिज तल में वृत्तीय गति**–चित्रानुसार एक m द्रव्यमान के पिण्ड को l लम्बाई के एक धागे से बाँधकर नियत चाल v से क्षैतिज वृत्त में घुमाया जा रहा है। इस स्थिति में धागा θ कोण के शंकु की सतह को प्रसर्पित करता है। जहाँ θ धागे द्वारा ऊर्ध्व रेखा के साथ बनाया गया कोण है। यदि धागे में तनाव बल T है तो चित्रानुसार बलों को घटकों में वियोजित करने पर तनाव बल का घटक T sin θ अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है जबकि T cos θ घटक पिण्ड के भार से संतुलित हो जाता है।



चित्र 4.20

$$T\cos\theta = mg \quad ...(1)$$

$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad ...(2)$$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{mv^2}{r.mg} = \frac{v^2}{rg} \quad ...(3)$$

माना कि $OO' = h$

$$\tan\theta = \frac{O'P}{OO'} = \frac{r}{h}$$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{h}{l}$

$$h = l\cos\theta$$

$\therefore$ $\tan\theta = \dfrac{r}{l\cos\theta}$

समी. (3) से $\dfrac{v^2}{rg} = \dfrac{r}{l\cos\theta}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{v^2}{r^2} = \dfrac{g}{l\cos\theta}$

$\because$ $v = r\omega$

$\Rightarrow$ $\omega = \dfrac{v}{r}$

$\therefore$ $\omega^2 = \dfrac{g}{l\cos\theta}$

$\Rightarrow$ $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

परिक्रमण काल $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$ ...(4)

समी. (4) से θ कोण का परिक्रमण काल (आवर्त काल) का सम्बन्ध प्राप्त होता है।

स्थिति (i)– समी. (4) के अनुसार θ = 90° संभव नहीं है क्योंकि इस स्थिति में आवर्तकाल T = 0 होगा जिससे v = ∞ जो कि संभव नहीं है।

स्थिति (ii)– समी. (4) के अनुसार $T_{max} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

इस स्थिति में $\theta \approx 0°$

समी. (4) सरल लोलक के आवर्तकाल के व्यंजक के समान है। इस कारण यह व्यवस्था शंकु लोलक (Conical Pendulum) कहलाती है।

(ii) **ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति**–जब किसी वस्तु को डोरी के एक सिरे से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाते हैं तब वृत्तीय पथ के विभिन्न बिन्दुओं पर वस्तु की चाल भिन्न-भिन्न होती है। अतः वस्तु पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल तथा डोरी में तनाव भी लगातार बदलता रहता है।

माना कि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड किसी धागे से बँधा हुआ ऊर्ध्वाधर तल में R त्रिज्या के वृत्त में गति करता है। वृत्त के निम्नतम व उच्चतम बिन्दु क्रमशः A व C है। पिण्ड का वेग वृत्त के निम्नतम

बिन्दु पर अधिकतम तथा उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम होता है।

किसी बिन्दु पर पिण्ड का वेग (Velocity of body at any point)

माना कि बिन्दु P की बिन्दु A से ऊँचाई h है। यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से-

बिन्दु A पर यांत्रिक ऊर्जा = बिन्दु P पर यांत्रिक ऊर्जा

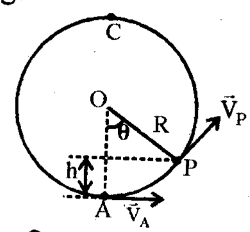
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(0) = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh$$

$$V_A^2 = V_P^2 + 2gh$$

$$\Rightarrow \quad V_P^2 = V_A^2 - 2gh$$

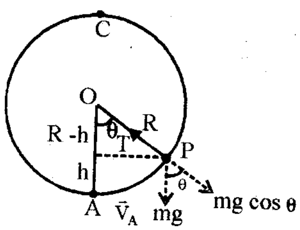
$$\Rightarrow \quad V_P = \sqrt{v_A^2 - 2gh} \quad ....(1)$$



चित्र 4.21

डोरी में तनाव (Tension in the string)

चित्रानुसार वृत्ताकार पथ के केन्द्र की ओर परिणामी बल $(T - mg\cos\theta)$ पिण्ड को अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।



चित्र 4.22

अर्थात् $$T - mg\cos\theta = \frac{mv_P^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T = mg\cos\theta + \frac{mv_P^2}{R}$$

चित्र की ज्यामिति से $\cos\theta = \dfrac{R-h}{R}$

समी. (1) से V_P का मान रखने पर

$$T = mg\left(\frac{R-h}{R}\right) + \frac{m}{R}(v_A^2 - 2gh)$$

$$T = \frac{m}{R}[gR - gh + v_A^2 - 2gh]$$

$$T = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3gh] \quad ...(2)$$

विशिष्ट स्थितियाँ

(i) निम्नतम बिन्दु A पर तनाव

$$T_A = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3g(0)]$$

(∵ बिन्दु A पर h = 0)

$$T_A = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR] \quad ....(3)$$

(ii) उच्चतम बिन्दु C पर तनाव

$$T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3g \times 2R]$$

(∵ बिन्दु C पर h = 2R)

$$T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 - 5gR] \quad ....(4)$$

अत: निम्नतम बिन्दु व उच्चतम बिन्दु के तनावों में अन्तर

$$T_A - T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR] - \frac{m}{R}[v_A^2 - 5gR]$$

$$= \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - v_A^2 + 5gR]$$

$$= \frac{m}{R}6gR = 6mg \quad ...(5)$$

ऊर्ध्ववृत्त पूर्ण करने के लिए निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग-

पिण्ड के ऊर्ध्ववृत्त पूर्ण करने के लिए आवश्यक शर्त

$$T_C \geq 0$$

∴ समी. (4) से-

$$\frac{m}{R}(V_A^2 - 5gR) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A^2 - 5gR \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A^2 \geq 5gR$$

$$\Rightarrow \quad V_A \geq \sqrt{5gR}$$

∴ **निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग**

$$V_A = \sqrt{5gR} \quad ...(6)$$

समी. (3) से-

तनाव $$T_A = \frac{m}{R}(5gR + gR)$$

$$T_A = \frac{m}{R}6gR = 6mg \quad ...(7)$$

उच्चतम बिन्दु C पर न्यूनतम वेग-

समी. (1) से-

$$V_C = \sqrt{5gR - 2g(2R)}$$

(∵ बिन्दु C पर h = 2R)

$$\therefore \quad V_C = \sqrt{5gR - 4gR} = \sqrt{gR}$$

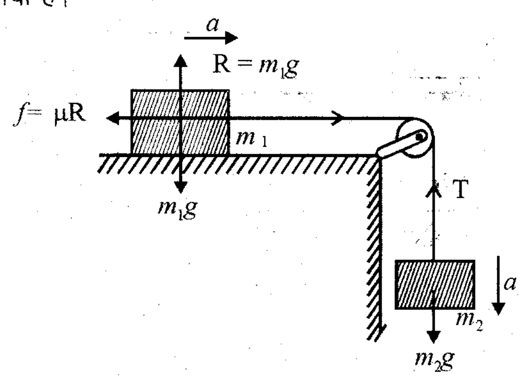
∴ उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग

$$V = \sqrt{gR}$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

घिरनी से गुजरने वाली डोरी से जुड़े पिण्डों की गति
(Motion of Bodies Connected by a String passing over a pulley)

(i) माना m_1 द्रव्यमान का एक पिण्ड एक क्षैतिज तल पर स्थिर है। इस पिण्ड से m_2 द्रव्यमान के अन्य पिण्ड को एक डोरी की सहायता से जोड़कर चित्रानुसार एक हल्की घिरनी पर से लटकाया गया है।



R = प्रतिक्रिया बल
f_s = घर्षण बल
μ = घर्षण गुणांक
यदि डोरी में तनाव T व पिण्डों के त्वरण a हों तो m_1 द्रव्यमान के पिण्ड पर परिणामी बल–

$$T - f = m_1 a$$

$\because$ $\quad f = \mu R = \mu m_1 g$

$\therefore$ $\quad T - \mu m_1 g = m_1 a \quad ...(1)$

m_2 द्रव्यमान के पिण्ड पर परिणामी बल

$$m_2 g - T = m_2 a \quad ...(2)$$

त्वरण *a* ज्ञात करना–
समी. (1) व समी. (2) को जोड़ने पर

$$g(m_2 - \mu m_1) = (m_1 + m_2)a$$

या $\quad a = \dfrac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} \quad ...(3)$

तनाव बल T ज्ञात करना–
समी. (1) में समी. (2) का भाग देने पर

$$\frac{T - \mu m_1 g}{m_2 g - T} = \frac{m_1}{m_2}$$

या $\quad m_2 T - \mu m_1 m_2 g = m_1 m_2 g - m_1 T$

$$T(m_1 + m_2) = m_1 m_2 g(\mu + 1)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\mu + 1)}{m_1 + m_2} \quad ...(4)$$

स्थिति–यदि क्षैतिज तल व पिण्ड के मध्य घर्षण बल नगण्य है तो $\mu = 0$ होगा
अतः समी. (3) से त्वरण

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad ...(5)$$

तथा समी. (4) से तनाव $\quad T = \left(\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g \quad ...(5)$

(ii) जब दो पिण्डों को एक डोरी से जोड़कर चित्रानुसार एक घिरनी से लटकाया जाता है तब भारी पिण्ड (m_1. द्रव्यमान) की गति ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर व हल्के पिण्ड (m_2. द्रव्यमान) की गति ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगी। यदि दोनों पिण्ड के त्वरण 'a' व डोरी में तनाव 'T' है तो पिण्ड m_1 पर परिणामी बल होगा–

$$m_1 g - T = m_1 a \quad ...(7)$$

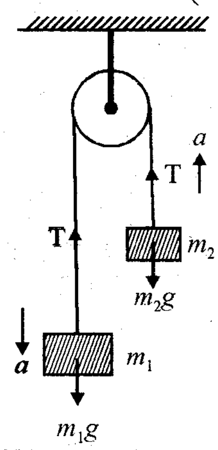
पिण्ड m_2 पर परिणामी बल

$$T - m_2 g = m_2 a \quad ...(8)$$

त्वरण *a* का मान ज्ञात करना–
समी. (7) में समी. (8) को जोड़ने पर

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

या $\quad a = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g \quad ...(9)$



तनाव बल T मान ज्ञात करना–
समी. (7) में समी. (8) का भाग देने पर

$$\frac{m_1 g - T}{T - m_2 g} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$m_1 m_2 g - m_2 T = m_1 T - m_1 m_2 g$$

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

उदा.11. कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.15 है, तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिए आवश्यक है।
(पुस्तक का उदाहरण 4.6)

हल– दिया गया है–$\mu_s = 0.15$, $a_{max} = ?$
प्रश्नानुसार बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण है
अतः

$$ma \leq (f_s)_{max}$$

$\Rightarrow \quad ma \leq \mu_s R$

$\Rightarrow \quad ma \leq \mu_s mg$

$\Rightarrow \quad a_{max} = \mu_s g$

$= 0.15 \times 10$ मी./से.^{2}

$= 1.5$ मी./से.^{2}

उदा 12.एक पिण्ड 5 मी./से. की चाल से एक क्षैतिज धरातल पर फिसल रहा है। यदि धरातल व पिण्ड के मध्य गतिक घर्षण गुणांक 0.2 हो तो स्थिर अवस्था में आने तक पिण्ड द्वारा तय

की गई दूरी ज्ञात करो। (g = 10 मी./से.²)

हल– दिया हुआ है–$u = 5$मी./से., $\mu_k = 0.2$, $v = 0$ मी./से., $g = 10$ मी./से.²

पिण्ड की गति का समीकरण

$$-\mu_k mg = ma$$

(ऋणात्मक चिन्ह पिण्ड के मंदन के कारण प्रयुक्त किया गया है।)

$$a = -\mu_k g \quad ...(1)$$

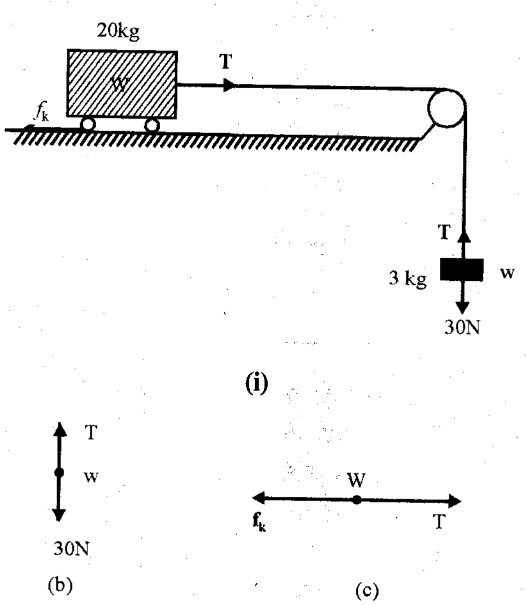
गति के तृतीय समी. से $v^2 = u^2 + 2aS$

$$0 = (5)^2 + 2(-\mu_k g)S$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{25}{2\mu_k g} = \frac{5}{2 \times 0.2 \times 10}$$

$$= \frac{25}{4} = 6.25 \text{ मीटर}$$

उदा.13.चित्र में दर्शाए ब्लॉक-ट्रॉली निकाय का त्वरण क्या है, यदि ट्रॉली और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0.04 है? डोरी में तनाव क्या है? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ लीजिए), डोरी की संहति नगण्य मानिए। (पुस्तक का उदाहरण 4.7)



चित्र 4.23 (ii)

हल– चित्रानुसार ट्रॉली पर परिणामी बल

$$T - f_k = 20 \times a$$

$$\Rightarrow \quad T - f_k = 20a$$

$$\because \quad f_k = \mu_k R = \mu_k mg$$

$$\Rightarrow \quad f_k = 0.04 \times 20 \times 10 = 8$$

$$\therefore \quad T - 8 = 20a \quad ...(1)$$

ब्लॉक पर परिणामी बल

$$30 - T = 3 \times a$$

$$\Rightarrow \quad 30 - T = 3a \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) का योग करने पर

$$\Rightarrow \quad T - 8 + 30 - T = 20a + 3a$$

$$\Rightarrow \quad 22 = 23a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{22}{23} \text{ मी./से.}^2$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.96 \text{ मी./से.}^2$$

समी. (1) में a का मान रखने पर

$$T - 8 = 20 \times 0.96 = 19.1$$

$$\Rightarrow \quad T = 27.1 \text{न्यूटन}$$

4.11 समतल तथा बंकित वृत्ताकार पथ पर वाहन की गति (Motion of a vehicle on a plane and Banked Circular path)

सड़क के मोड़ पर वाहनों को घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने हेतु सड़क के बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षाकृत थोड़ा ऊँचा उठा दिया जाता है। इसे सड़क में करवट (बंकन) कहते हैं। बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षा जिस कोण से उठाया जाता है उसे करवट कोण कहते हैं।

समतल वृत्ताकार सड़क पर वाहन की गति (Motion of a Vehicle on a plan circular road)

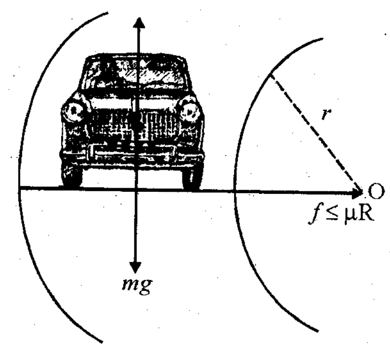
माना कि m द्रव्यमान की कोई कार r त्रिज्या के समतल वृत्ताकार सड़क पर नियत चाल v से गतिशील है।

इस पर चित्रानुसार बल कार्य करते हैं।

कार का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर तथा सड़क के कारण कार पर लगने वाला प्रतिक्रिया बल R ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है। क्षैतिज दिशा में वृत्ताकार मोड़ पर कार के पहिये मोड़ के केन्द्र से दूर जाने का प्रयास करते हैं। तब घर्षण बल (f) कार के पहियों को वृत्ताकार पथ के केन्द्र से दूर जाने से रोकता है। यदि घर्षण गुणांक μ है तो

घर्षण बल $f \le \mu R$

ऊर्ध्व बलों के संतुलन से $mg = R$



चित्र 4.24

यह घर्षण बल f ही वृत्ताकार पथ में गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल $\frac{mv^2}{r}$ प्रदान करता है।

अर्थात् $$f = \frac{mv^2}{r}$$

इस प्रकार समतल वृत्ताकार पथ पर कार की सुरक्षित गति के लिए अभिकेन्द्रीय बल का मान घर्षण बल के बराबर या इससे कम होना चाहिये।

अतः $\frac{mv^2}{r} \le \mu mg$

$\Rightarrow$ $v \le \sqrt{\mu rg}$

अतः कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{\mu rg}$$

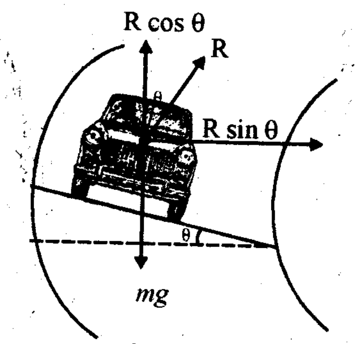
वेग कार के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

बंकित सड़क पर वाहन की गति

(Motion of a vehicle on a banked road)

स्थिति (i)-जब घर्षण द्वारा अभिकेन्द्रीय बल नहीं लगता हो–

माना कि बंकित सड़क का बंकन कोण θ है तथा वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r है।



चित्र 4.25

चित्र की ज्यामिति से– $mg = R\cos\theta$ ...(1)

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta \quad ...(2)$$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta}$$

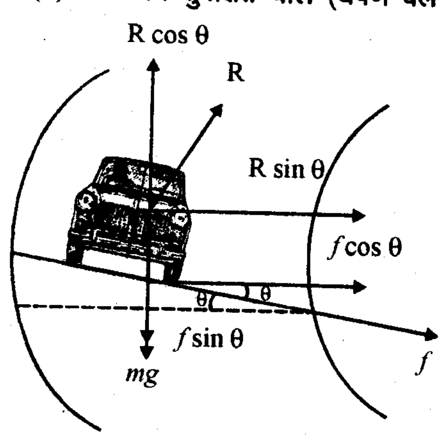
$\Rightarrow$ $\frac{v^2}{rg} = \tan\theta$

$\Rightarrow$ $v^2 = rg\tan\theta$

$\Rightarrow$ $v = \sqrt{rg\tan\theta}$ ...(3)

समी. (3) कार की आदर्श चाल के समीकरण को व्यक्त करता है। इस चाल से ढालू सड़क पर कार चलाने पर कार के टायरों की घिसाई कम होती है।

स्थिति (ii)-अधिकतम सुरक्षित चाल (घर्षण बल प्रभावी हो)–



चित्र 4.26

चित्र की ज्यामिति से–

$$mg + f\sin\theta = R\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $mg = R\cos\theta - f\sin\theta$ ...(

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta + f\cos\theta \quad ...($$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta + f\cos\theta}{R\cos\theta - f\sin\theta}$$

कार की सुरक्षित अधिकतम चाल v_{max} हो तो

$$\frac{v_{max}^2}{rg} = \frac{R\sin\theta + \mu R\cos\theta}{R\cos\theta - \mu R\sin\theta}$$

$\because$ $f = \mu R$

जहां घर्षण बल का अधिकतम मान $f = \mu R$ होता है।

$$\frac{v_{max}^2}{rg} = \frac{R\tan\theta + \mu R}{R - \mu R\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

$\Rightarrow$ $v_{max}^2 = rg\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)}$ ...(3)

ढालू सड़क पर कार की अधिकतम चाल समतल सड़क पर कार की अधिकतम संभव चाल ($v_{max} = \sqrt{\mu rg}$) से अधिक है।

स्थिति (iii)-न्यूनतम सुरक्षित चाल (घर्षण बल प्रभावी हो)–

जब कार की चाल $\sqrt{rg\tan\theta}$ से कम हो तब कार के मोड़ के भीतर की ओर फिसलने की संभावना रहती है तब घर्षण बल f बाहर की ओर लगता है। इस स्थिति में समी. (1) व (2) में f का चिन्ह बदलने पर

$$mg = R\cos\theta + f\sin\theta \quad ...(4)$$

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta - f\cos\theta \quad ...(5)$$

समी. (5) में (4) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta - f\cos\theta}{R\cos\theta + f\sin\theta}$$

$$= \frac{R\tan\theta - f}{R + f\tan\theta}$$

$\Rightarrow$ $\frac{v_{min}^2}{rg} = \frac{R\tan\theta - \mu R}{R + \mu R\tan\theta} = \frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}$

$\Rightarrow$ $v_{min}^2 = rg\left(\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}\right)$

$$\Rightarrow \qquad v_{min} = \sqrt{rg\left(\frac{\tan\theta - \mu}{1+\mu\tan\theta}\right)} \qquad ...(6)$$

महत्वपूर्ण तथ्य

1. यदि घर्षण बल की आवश्यकता नहीं पड़े तो वाहन पर घर्षण बल का प्रभाव नहीं होगा इस स्थिति में वेग का चरम मान होगा अर्थात् अदिश चाल

$$v = \sqrt{rg\tan\theta} \qquad \because \mu = 0$$

इस अवस्था में त्रिज्य दाब नहीं होगा तब ढालू सड़क पर कार चलाने पर टायरों की घिसाई कम होगी।

2. सीमान्त घर्षण की स्थिति में $\mu = \mu_s$

तब
$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\mu_s + \tan\theta}{(1-\mu_s\tan\theta)}\right)}$$

घर्षण का प्रभाव टायरों पर अधिकतम होगा इससे वेग अधिक होने पर वाहन उलट जायेगा।

3. यदि सड़क बंकित न हो तो केवल घर्षण बल ही अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करेगा और कार का अधिकतम वेग

$$v_{max} = \sqrt{\mu_S rg}$$

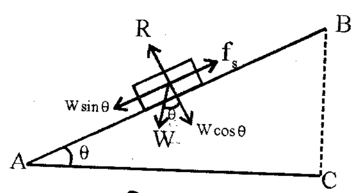
4.12 आनत तल पर गति (Motion on an inclined plane)

- चित्रानुसार m द्रव्यमान का एक पिण्ड झुकाव θ के नत तल पर विराम अवस्था में है। इस स्थिति में पिण्ड पर कार्यरत विभिन्न बल निम्न होंगे–

(i) पिण्ड का भार W = mg

(ii) पिण्ड पर तल के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R

(iii) घर्षण बल f_s



चित्र 4.27

चित्र की ज्यामिति से भार W को घटकों में वियोजित करने पर पिण्ड की स्थिर अवस्था के लिए

$$W\cos\theta = R \qquad ...(1)$$
$$W\sin\theta = f_s \qquad ...(2)$$

अब यदि नत तल के झुकाव कोण का अधिकतम मान θ_s हो जबकि पिण्ड नत तल पर विराम अवस्था में रहे तब कोण θ_s को विश्राम कोण (Angle of Repose) कहते हैं।

इस स्थिति में
$$W\cos\theta_s = R \qquad ...(3)$$
$$W\sin\theta_s = (f_s)_{max} \qquad ...(4)$$

इस अवस्था में स्थैतिक घर्षण बल सीमान्त घर्षण बल होता है।
समी. (4) में समी. (3) का भाग देने पर

$$\tan\theta_s = \frac{(f_s)_{max}}{R} = \mu_s$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta_s = \mu_s \qquad ...(5)$$

उपरोक्त समीकरण से नत तल तथा पिण्ड के पृष्ठ के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक μ_s ज्ञात किया जा सकता है। अब यदि नत तल के झुकाव कोण θ का मान θ_s से कुछ अधिक इस प्रकार बढ़ाते हैं कि पिण्ड नियत वेग से गति करता है तब इस स्थिति में पिण्ड पर गतिज घर्षण बल लगता है। इस स्थिति में

$$W\cos\theta_K = R \qquad ...(6)$$
$$W\sin\theta_K = f_k \qquad ...(7)$$

समी. (7) में समी. (6) का भाग देने पर

$$\tan\theta_k = \frac{f_k}{R} = \mu_k$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta_k = \mu_k \qquad ...(8)$$

इस प्रकार उपरोक्त समीकरण से नत तल तथा पिण्ड के पृष्ठ के मध्य गतिज घर्षण गुणांक μ_k ज्ञात किया जा सकता है। माना कि BC दूरी AC पर अभिलम्ब है तब क्षैतिज तल AC तथा नत तल AB की दूरियाँ ज्ञात होने पर $\tan\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{(AB)^2 - (AC)^2}}{AC}$ सम्बन्ध द्वारा $\tan\theta_s$ तथा $\tan\theta_k$ का मान ज्ञात किया जा सकता है। जिससे समी. (5) व समी. (8) द्वारा μ_s व μ_k का मान ज्ञात किया जा सकता है।

4.13 जड़त्वीय एवं अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (प्रारंभिक अवधारणा) (Intertial and Non-Inertial frames of reference) (Elementary concept)

निर्देश तंत्र- वह निकाय जिसके सापेक्ष किसी पिण्ड की स्थिति या गति को व्यक्त किया जा सके, निर्देश तंत्र कहलाता है। निर्देश तंत्र को किसी दृढ़ पिण्ड से जुड़ा मानकर उसके सापेक्ष अन्य पिण्डों की स्थिति बतायी जाती है। इसके लिए किसी उचित बिन्दु को निर्देश तंत्र का मूल बिन्दु मानते हैं जिसके सापेक्ष स्थिति सदिश द्वारा किसी पिण्ड की स्थिति को व्यक्त किया जाता है। सामान्यत: प्रेक्षक की स्थिति इस मूल बिन्दु से सम्पाती होती है। कार्तीय निर्देशांक का उपयोग सरलतम निर्देश तंत्र के रूप में लिया जाता है।

(i) जड़त्वीय निर्देश तंत्र (Inertial frame of reference)–वह निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण रहित दिखाई देती है, जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। इस निर्देश तंत्र में बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण नियत वेग से गति करता है।

उदाहरण–वे सभी निर्देश तंत्र जो एक दूसरे के सापेक्ष स्थिर है या नियत वेग से गतिशील है जैसे– विराम अवस्था में लिफ्ट, नियत वेग से ऊपर नीचे की ओर गति करती लिफ्ट, एक सीधी सड़क पर नियत

वेग से गति करती हुई कार इत्यादि।

(ii) अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (Non-Inertial frame of reference)–वह निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण सहित दिखाई देती है अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। इस निर्देश तंत्र में कण नियत वेग से गति नहीं करता है।

उदाहरण–स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करता हुआ निर्देश तंत्र, एक समान वृत्तीय गति करती हुई कार, लिफ्ट जो कि किसी त्वरण के साथ ऊपर या नीचे जा रही हो, उड़ान भरता हुआ हवाई–जहाज इत्यादि।

क्या पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र है या अजड़त्वीय?

पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर घूमती है तथा स्वयं की अक्ष पर भी घूर्णन करती है। अत: पृथ्वी एक घूर्णन करता हुआ निर्देश तंत्र है। अत: पृथ्वी एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है।

पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर निर्देश तंत्र जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं होगा क्योंकि पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर कक्षीय गति के अतिरिक्त स्वयं की अक्ष के परित: चक्रण गति भी करती है जिसके कारण पृथ्वी की सतह पर स्थित प्रत्येक पिण्ड पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर अभिकेन्द्रीय त्वरण $\omega^2 R$ लगता है जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है।

$$\text{अभिकेन्द्रीय त्वरण} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$= \left(\frac{2\times 3.14}{24\times 60\times 60}\right)^2 \times 6.4\times 10^6 = 3.4\times 10^{-2} \text{ मी./से}^2$$

यहाँ आवर्तकाल T = 24 घण्टे

पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4\times 10^6$ मीटर

सामान्य यांत्रिकी समस्याओं में यदि उपरोक्त त्वरण को नगण्य मान लिया जाये तब पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तंत्र के रूप में माना जा सकता है। परन्तु बड़े पैमाने की गतियों जैसे महासागरीय धाराओं, पवनों आदि पर विचार किया जाये तब उपरोक्त त्वरण का प्रभाव दिखायी देता है तब पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं माना जा सकता है।

महत्त्वपूर्ण–ब्रह्माण्ड में कोई आदर्श जड़त्वीय निर्देश तंत्र संभव नहीं है। व्यवहार में किसी निर्देश तंत्र को जड़त्वीय माना जा सकता है, यदि प्रेक्षित वस्तु के त्वरण के सापेक्ष निर्देश तंत्र का त्वरण नगण्य हो।

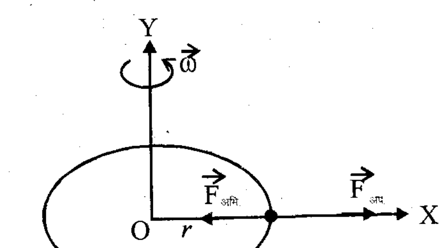
महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) आभासी या छद्म बल (Pseudo Force)

सामान्य रूप से देखा जाता है कि जब भी रेलगाड़ी त्वरित अथवा मंद होती है तब इसमें बैठा यात्री क्रमश: पीछे की ओर अथवा आगे की ओर बल महसूस करता है। जबकि कोई बाह्य बल नहीं लगाया जाता है। फिर भी यात्री को बल का आभास होता है। इस बल को आभासी बल कहते हैं।

इस बल का कारण है कि यात्री की गति त्वरित निर्देश तंत्र में है। माना कि m द्रव्यमान का पिण्ड a त्वरण के निर्देश तंत्र में है, जिसमें पिण्ड पर $-ma$ बल लगता है, तब इस त्वरित निर्देश तंत्र पर न्यूटन का नियम लगाया जा सकता है। बस के अचानक रूक जाने पर, आभासी बल के कारण ही यात्री आगे की ओर गिरता है।

उदाहरण–माना कि m द्रव्यमान का एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है जिस पर **अभिकेन्द्रीय त्वरण** (centripetal accelerations) $\vec{a} = \omega^2 r\hat{r}$ है। अब यदि एक निर्देश तंत्र कण के साथ ही घूर्णन करता है तब निर्देश तंत्र के प्रेक्षक को कण स्थिर प्रतीत होगा क्योंकि यह एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है जिस पर आभासी बल $\vec{F} = -m\vec{a} = -m\omega^2 r\hat{r}$ बाहर की ओर लगता हुआ प्रतीत होता है जिसे **अपकेन्द्रीय बल** (centrifugal force) कहते हैं।



(2) किसी पिण्ड का लिफ्ट में भार
(Weight of a body in a lift)

माना कि कोई व्यक्ति (द्रव्यमान m) तौलने की मशीन पर खड़ा है। व्यक्ति पर पृथ्वी का गुरूत्व बल mg नीचे की ओर लगता है। मशीन व्यक्ति पर प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर लगाती है अतः व्यक्ति पर परिणामी बल $F = mg - R$ (नीचे की ओर) ...(1)

(i) जब लिफ्ट समान वेग से ऊपर या नीचे जा रही हो तो इसमें बैठे यात्री के लिए, इस स्थिति में व्यक्ति का त्वरण शून्य है अतः परिणामी बल भी शून्य होगा।

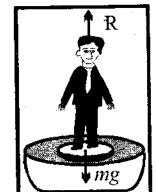
$\therefore \quad F = mg - R = 0$

$\therefore \quad R = mg$

$\therefore$ भार $W = mg$ ...(2)

अर्थात् प्रभावी त्वरण

$g' = g$



(i)

(ii) जब लिफ्ट त्वरण $\vec{a}$ से ऊपर की ओर गति करती है तो इस स्थिति में न्यूटन के द्वितीय नियम से उस पर परिणामी बल $F = ma$ (ऊपर की ओर) अथवा $F = -ma$ (नीचे की ओर) होना चाहिए।

समीकरण (1) से

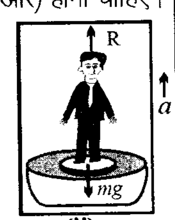
$\therefore \quad -ma = mg - R$

$R = mg + ma$

$R = m(g + a)$

$\therefore$ भार $W = m(g + a)$ ...(3)

प्रभावी त्वरण $g' = g + a$



(ii)

(iii) जब लिफ्ट त्वरण $\vec{a}$ से नीचे की ओर गिरती है ($a < g$) तो इस

स्थिति में परिणामी बल $F = ma$ नीचे की ओर होना चाहिए।

समीकरण (1) से

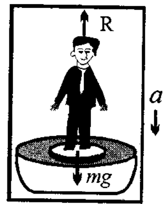
$$\therefore \quad ma = mg - R$$

$$R = mg - ma$$

$$R = m(g-a)$$

$$\therefore \quad \text{भार } W = m(g-a)$$

प्रभावी त्वरण $g' = g - a$ ...(4)



(iii)

(iv) जब लिफ्ट मुक्त रूप से गिरती है तो

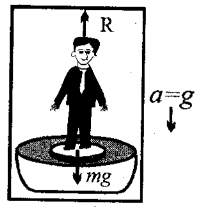
$$a = g$$

समीकरण (1) से $mg = mg - R$

$$\Rightarrow \quad R = mg - mg = 0$$

$$\therefore \quad \text{भार } W = 0 \quad ...(5)$$

प्रभावी त्वरण $g' = 0$

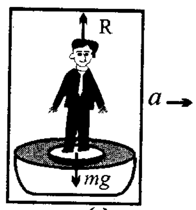


(iv)

(v) जब लिफ्ट क्षैतिज दिशा में $\vec{a}$ त्वरण से गतिमान है तो

प्रभाव त्वरण $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$

भार $W = m\sqrt{g^2 + a^2}$ ...(6)



(v)

महत्त्वपूर्ण

1. जब लिफ्ट विराम अवस्था में हो–

तब त्वरण $a = 0$

$\therefore$ प्रतिक्रिया बल $R = mg$

तथा आभासी भार = वास्तविक भार

2. जब लिफ्ट a त्वरण से नीचे की ओर $(a > g)$ गति करती हो–

तब $R = mg - ma$ = ऋणात्मक

इस स्थिति में आभासी भार ऋणात्मक होने का अर्थ है कि वस्तु लिफ्ट के फर्श से उठकर लिफ्ट की छत से सट जायेगी।

उदा 14. 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किए 3m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है। टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाएगा? (पुस्तक का उदाहरण 4.8)

हल– दिया गया है–

$$v = 18 \text{ किमी./घंटा}$$

$$= 18 \times \frac{1000}{3600} \text{ मी./से.}$$

$$= 5 \text{ मी./से.}$$

वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r = 3 मी.

$$\mu = 0.1$$

साइकिल सवार के सुरक्षित रूप से मुड़ने के लिए आवश्यक शर्त

$$f \geq \frac{mv^2}{r}$$

$$\mu mg \geq \frac{mv^2}{r} \quad ...(7)$$

$$\Rightarrow \quad v \leq \sqrt{\mu rg}$$

$$\Rightarrow \text{प्रश्नानुसार } v_{max} = \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.1 \times 3 \times 9.8}$$

$$= \sqrt{2.94} = 1.71 \text{ मी./से.}$$

समी. ($v_{max} = \sqrt{\mu rg}$) के अनुसार शर्त का पालन नहीं होने से साइकिल सवार फिसलकर गिर जायेगा।

उदा 15. एक कार 200 मीटर त्रिज्या की वृत्ताकार सड़क पर गतिशील है जिसका करवट कोण 10° है यदि कार के पहियों व सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0.25 हो तो कार की सुरक्षित अधिकतम चाल की गणना कीजिए। ($g = 10$ मी./से.^{2} $\tan 10° = 0.1763$)

हल– दिया गया है–

$$r = 200 \text{ मीटर}$$

$$\theta = 10°$$

$$\mu = 0.25$$

कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}\right)}$$

$$= \sqrt{200 \times 10\left(\frac{0.25 + \tan 10°}{1 - 0.25\tan 10°}\right)}$$

$$= \sqrt{2000\left(\frac{0.25 + 0.1763}{1 - 0.25 \times 0.1763}\right)}$$

$$= \sqrt{2000 \times \frac{0.4263}{0.956}}$$

$$= 29.85 \text{ मी./से.}$$

उदा 16. 300 m त्रिज्या वाले किसी वृत्ताकार दौड़ के मैदान का ढ़ाल 15° है। यदि मैदान और रेसकार के पट्टियों के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है, तो (a) टायरों को घिसने से बचाने के लिए रेसकार की अनुकूलतम चाल, तथा (b) फिसलने से बचने के लिए अधिकतम अनुमेय चाल क्या है? (पुस्तक का उदाहरण 4.9)

हल– दिया गया है–

$$r = 300 \text{ मी.}$$

$$\theta = 15°$$

$$\mu = 0.2$$

$\because$ रेसकार की अनुकूलतम (आदर्श) चाल

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

$$= \sqrt{300 \times 9.8 \times \tan 15°}$$

$$= \sqrt{300 \times 9.8 \times 0.2679}$$

$= 28.1$ मी./से.

∵ कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\mu+\tan\theta}{1-\mu\tan\theta}\right)}$$

$$= \sqrt{300\times 9.8\times\left(\frac{0.2+\tan 15°}{1-0.2\tan 15°}\right)}$$

$$= \sqrt{300\times 9.8\times\left(\frac{0.2+0.2679}{1-0.2\times 0.2679}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{300\times 9.8\times 0.4679}{0.946}}$$

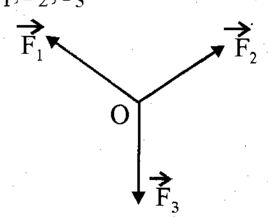
$$= \sqrt{1454.15} = 38.1 \text{ मी./से.}$$

4.14 संगामी बल एवं बल निर्देशक आरेख द्वारा यांत्रिकी में समस्याओं का हल (Concurrent forces and solution of Problems in Mechanics by force diagram)

संगामी बल (Concurrent forces)

यदि किसी वस्तु पर कार्यरत एक से अधिक बलों की क्रिया रेखाएँ एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर गुजरती है तब वे बल संगामी बल कहलाते हैं।

चित्रानुसार $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ की क्रिया रेखाएं उभयनिष्ठ बिन्दु O से गुजर रही हैं अतः $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ संगामी बल कहलाते हैं।



चित्र 4.28

1. किसी वस्तु पर कार्यरत सभी बलों का परिणामी बल उन बलों के सदिश योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n$$

2. यदि वस्तु पर सभी बल एक ही दिशा में आरोपित हो तो परिणामी बल उनके योग के बराबर होगा

अतः $F = F_1 + F_2 + ...+ F_n$

3. यदि बल विपरीत दिशा में हो तो परिणामी बल उनके अन्तर के बराबर होगा।

4. जब किसी पिण्ड पर संगामी बल कार्य करते हैं तो पिण्ड में केवल रेखीय त्वरण हो सकता है।

5. असंगामी बलों की उपस्थिति में पिण्ड में घूर्णन गति उत्पन्न हो जाती है।

6. यदि किसी पिण्ड पर दो भिन्न–भिन्न बल भिन्न–भिन्न दिशाओं में कार्यरत हो तो परिणामी बल, का मान बलों के त्रिभुज के नियम, समान्तर चतुर्भुज के नियम अथवा बहुभुज के नियम से दिया जाता है।

(i) **बलों के त्रिभुज का नियम**–यदि किसी पिण्ड पर लगने वाले दो बलों को परिमाण व दिशा में त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं से व्यक्त किया जाए तो तीसरी भुजा विपरीत दिशा में उनके परिणामी बल को व्यक्त करेगी।

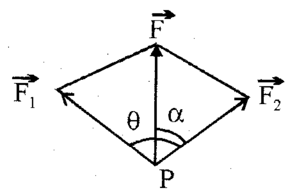
(ii) **बलों के समान्तर चतुर्भुज का नियम**–यदि किसी पिण्ड पर कार्यरत दो बलों को परिमाण व दिशा में समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं के द्वारा व्यक्त किया जाए तो उनके कटान बिन्दु से खींचा गया विकर्ण उनके परिणामी बल को व्यक्त करेगा।

(iii) **बलों के बहुभुज का नियम**–यदि किसी बिन्दु पर लगने वाले n बलों को परिमाण व दिशा में किसी बहुभुज की n भुजाओं द्वारा क्रम से व्यक्त किया जाए तो बहुभुज को बंद करने वाली अंतिम भुजा विपरीत क्रम में परिणामी बल को व्यक्त करेगी।

यदि किसी पिण्ड पर दो बल $\vec{F_1}$ व $\vec{F_2}$ कार्य कर रहे हों तथा उनके मध्य कोण θ हो तो परिणामी बल

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \quad ...(1)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}\right) \quad ...(2)$$



चित्र 4.29

7. किसी पिण्ड पर आरोपित दो बल $\vec{F_1}$ व $\vec{F_2}$ होने पर परिणामी बल का अधिकतम मान

$F_{max} = F_1 + F_2$ जब $\theta = 0°$

न्यूनतम मान $F_{min} = F_1 - F_2$ जब $\theta = 180°$.

8. यदि दोनों बल परस्पर लम्बवत् हो अर्थात् $\theta = 90°$

तो $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

9. संगामी बलों के प्रभाव में यदि पिण्ड सन्तुलन अवस्था में हो तो पिण्ड पर कार्यरत सभी संगामी बलों का सदिश योग शून्य होता है

अर्थात् $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = 0$

यदि सभी बल एक ही दिशा में आरोपित हो तो सन्तुलन की स्थिति में–

$$F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = 0$$

10. यदि किसी पिण्ड पर दो संगामी बल $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ कार्यरत हैं और पिण्ड संतुलन अवस्था में हो तो दोनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए–

अतः $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

या $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

अतः सन्तुलन के लिए आवश्यक है कि पिण्ड पर कार्यरत दोनों बलों का परिमाण समान एवं दिशा विपरीत होनी चाहिये।

11. जब दो संगामी बलों की क्रिया रेखायें, एक ही सरल रेखा में नहीं हो तब सन्तुलन के लिए कम से कम तीन बलों की आवश्यकता होती है।

अतः तीन संगामी बलों $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ व $\vec{F}_3$ के अधीन सन्तुलन अवस्था के लिए इन तीनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिये।

अतः $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

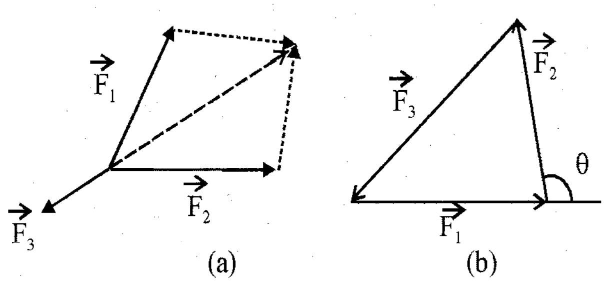
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\Rightarrow \quad F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

जहां θ, $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ के मध्य का कोण है। θ का न्यूनतम मान शून्य तथा अधिकतम मान 180° होने पर

$$(F_1 + F_2) \geq F_3 \geq |F_1 - F_2|$$

यह तीन बलों के लिए संतुलन अवस्था की शर्त है अर्थात् संतुलन की अवस्था में तीसरा बल पहले व दूसरे बल के परिणामी प्रभाव के बराबर तथा विपरीत दिशा में कार्यरत होना चाहिए।



चित्र 4.30

जैसे बलों के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा प्राप्त दो बलों $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ का परिणामी बल तीसरे बल $\vec{F}_3$ के समान व विपरीत होना चाहिये। इसी प्रकार साम्यावस्था में तीनों बलों को किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रमागत रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

12. संगामी बलों के संतुलन के लिए किसी भी अक्ष के अनुदिश बलों के घटकों का योग शून्य होना चाहियें।

$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ... + F_{nx} = 0$, $F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + ... + F_{ny} = 0$

$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + ... + F_{nz} = 0$

13. किसी पिण्ड की पूर्ण साम्यावस्था के लिए स्थानान्तरीय साम्यावस्था तथा घूर्णी साम्यावस्था दोनों ही आवश्यक हैं अर्थात् कुल बाह्य बल तथा कुल बाह्य बल आघूर्ण दोनों ही शून्य होने चाहिये।

बल निर्देशक आरेख

बल निर्देशक आरेख द्वारा किसी पिण्ड पर आरोपित समस्त बलों को परिमाण व दिशा द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसे पिण्ड का मुक्त आरेख भी कहते हैं। बल निर्देशक आरेख किसी पिण्ड पर कार्यरत बलों को दर्शाने वाले चित्र का सरल रूप है। यांत्रिकी में कई ऐसे निकाय होते हैं जिन पर गुरुत्वीय बल, घर्षण बल, डोरी से जुड़े पिण्डों की गति जैसे कई बल अनेक पिण्डों पर कार्य करते हैं। बल निर्देशक आरेख द्वारा स्प्रिंग, डोरी से जुड़े पिण्ड से सम्बन्धित समस्याएँ आसानी से हल की जा सकती है। यह न्यूटन के गति के नियमों पर आधारित होते हैं। पिण्डों पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल सदैव उस पृष्ठ के लम्बवत् होते हैं जिस पृष्ठ पर पिण्ड रखा गया है।

यांत्रिकी में किसी प्ररूपी समस्या को हल करने के लिए निम्न चरण अपनाने चाहिए-

(i) पिण्डों के संयोजन के विभिन्न भागों के सम्बन्धों को दर्शाने वाला आरेख खींचिए।

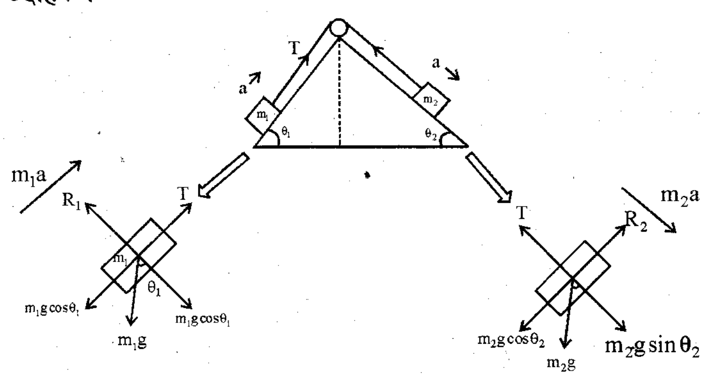
(ii) संयोजन के किसी एक भाग का निकाय के रूप में चयन कीजिए जिसकी गति का अध्ययन करना हो। संयोजन के शेष भाग को वातावरण कहा जाता है।

(iii) चयन किए गए निकाय का अलग चित्र बनाइए जिसमें केवल निकाय तथा वातावरण द्वारा निकाय पर आरोपित बलों को दर्शाना चाहिए। निकाय पर अन्य साधनों द्वारा आरोपित बलों को भी सम्मिलित कीजिए। निकाय द्वारा वातावरण पर आरोपित बल सम्मिलित नहीं करना है। इस प्रकार के आरेख को बल निर्देशक आरेख या पिण्ड का मुक्त आरेख कहते हैं।

(iv) बल निर्देशक आरेख में बलों से सम्बन्धित केवल वहीं सूचनाएँ सम्मिलित कीजिए जो दी गई है या पूर्णतया निश्चित है। शेष सूचनाएँ अज्ञात लें जिन्हें गति के नियमों के अनुप्रयोग द्वारा ज्ञात किया जाना है।

(v) परिणामी बल को त्वरण की दिशा में द्रव्यमान व त्वरण के गुणनफल के बराबर रखना चाहिए।

उदाहरण-



चित्र: m_1 का बल निर्देशक आरेख

चित्र: m_2 का बल निर्देशक आरेख

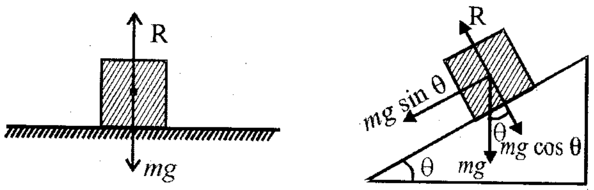
चित्र 4.31

महत्वपूर्ण तथ्य

यांत्रिकी में सामान्य बल (Common Forces in Mechanics)

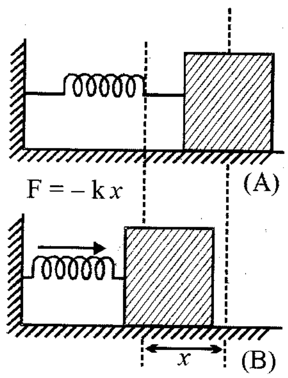
(i) भार–किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उसे आकर्षित करती है। इसे गुरुत्वीय अथवा गुरुत्वाकर्षण बल भी कहते हैं।

(ii) प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल–जब किसी वस्तु को एक दृढ़ सतह पर रखा जाता है, तब वस्तु पर उसकी संपर्क सतहों के अभिलम्बवत् एक बल लगता है, जिसे प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल कहते हैं।

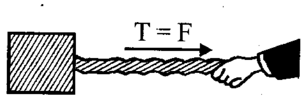


(A) (B)

(iii) स्प्रिंग बल–प्रत्येग स्प्रिंग इसकी लम्बाई में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है। यह प्रतिरोधी बल लंबाई में परिवर्तन के साथ बढ़ता है। स्प्रिंग बल को निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं, $F = -kx$ जहाँ x लम्बाई में परिवर्तन तथा k स्प्रिंग नियतांक है।



(iv) तनाव–किसी तनी हुई रस्सी, धागे अथवा चेन द्वारा आरोपित बल के विरुद्ध लगाये गये बल को तनाव कहते हैं। इसकी दिशा सदैव वस्तु से दूर की ओर होती है, क्योंकि तनाव सदैव वस्तु को खींचता है।



अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. जड़त्व का मात्रक तथा विमा लिखिए।
2. जड़त्व के प्रकार लिखिए।
3. 1 किग्रा भार का न्यूटन में मान लिखिए।
4. आवेग का संवेग से सम्बन्ध लिखिए।
5. संगामी बल किसे कहते हैं?
6. सीमान्त घर्षण बल किसे कहते हैं?
7. सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर किस प्रकार निर्भर करता है?
8. घर्षण कोण से क्या तात्पर्य है?
9. घर्षण कोण व विश्राम कोण में सम्बन्ध बताइये।
10. गतिक घर्षण, सर्पी घर्षण तथा बेलनी घर्षण में सम्बन्ध लिखिए।
11. किसी वस्तु के भार से क्या तात्पर्य है?
12. संगामी बलों के प्रभाव में यदि कोई पिण्ड सन्तुलन अवस्था में हो तब संगामी बलों का सदिश योग कितना होगा?
13. संवेग संरक्षण नियम के कोई दो उदाहरण लिखिये।
14. मोटरगाड़ी की छत से एक गेंद डोरी द्वारा लटकाई गई है। गेंद की स्थिति पर क्या प्रभाव पड़ेगा यदि–
    (i) गाड़ी एकसमान वेग से चल रही थी,
    (ii) गाड़ी त्वरित गति से चली रही हो,
    (iii) गाड़ी दाहिनी ओर मुड़ रही हो ?
15. एक पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज समतल पर गतिमान है। क्या निम्न दशाओं में उस पर कोई बल कार्य कर रहा है ? कारण सहित उत्तर दीजिये जबकि पिण्ड (i) समान वेग से गतिमान है, (ii) समान चाल से गतिमान है।
16. M तथा m द्रव्यमानों $(M > m)$ के दो पिण्ड समान ऊँचाई से नीचे गिराये जाते हैं। यदि प्रत्येक के लिए वायु का प्रतिरोध बल समान हो तो क्या दोनों पिण्ड पृथ्वी पर एक साथ पहुँचगें ?
17. एक स्थिर नौका पर रखे बिजली के पंखें से नौका पर बँधे पाल (sail) पर हवा फेंकी जाती है। क्या नौका चलने लगेगी ?
18. एक चिड़िया काँच के बन्द पिंजरे के फर्श पर बैठी है तथा पिंजरा एक लड़के के हाथ में हैं। क्या लड़के को पिंजरें के भार में कोई परिवर्तन अनुभव होगा यदि–
    (i) चिड़िया नियत वेग से पिंजरे में उड़ने लगे
    (ii) त्वरित गति से ऊपर की ओर उड़ने लगे
    (iii) त्वरित गति से नीचे उतरने लगे।
19. यदि उपरोक्त प्रश्न में पिंजरा तारों से बना हुआ हो, तब।
20. अन्धेरे में सुरक्षात्मक कार चलाने की चाल हैडलाइट की परास पर निर्भर करती है, समझाइये।
21. निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिये–
    (i) क्या कोई पिण्ड विरामावस्था में रह सकता है, जबकि उसके ऊपर बाह्य बल लग रहे हों ?
    (ii) एक गतिमान पिण्ड द्वारा चली गई दूरी समय के अनुक्रमानुपाती है। क्या इस पर कोई बाह्य बल लगा है ?
    (iii) यदि किसी पिण्ड पर परिणामी बल शून्य हो, तो क्या पिण्ड अवश्य ही विरामावस्था में होगा ?
    (iv) यदि कोई पिण्ड विरामावस्था में नहीं है, तो उसके ऊपर लगने वाला परिणामी बल शून्य नहीं हो सकता है। यह कथन सत्य है या असत्य।
    (v) यदि किसी गतिमान पिण्ड पर कोई बल गति की दिशा के लम्बवत् लग रहा है, तो पिण्ड की चाल तथा दिशा पर क्या प्रभाव होगा ?
    (vi) एक समान चाल से चलती ट्रेन के डिब्बे में बैठा व्यक्ति ऊपर की ओर गेंद उछालता है। उसे गेंद का पथ कैसा दिखाई देगा ? बाहर खड़े व्यक्ति को कैसा ?
    (vii) गति के दूसरे नियम का सदिश रूप क्या है ?
    (viii) एक लिफ्ट में ऊर्ध्वाकार टंगी एक कमानीदार तुला पर 2 किग्रा का पिण्ड लटका है। यदि लिफ्ट गुरुत्वीय त्वरण g के अन्तर्गत नीचे गिर रही हो तो तुला का पाठ्यांक क्या होगा? यदि लिफ्ट उसी त्वरण के ऊपर जा रही हो तब।
    (ix) 1.0 किग्रा का पिण्ड कमानीदार तुला से लटका हुआ है तथा इसी प्रकार का एक समरूप (identical) पिण्ड एक भौतिक तुला के पलड़े पर सन्तुलित है। यदि दोनों लिफ्ट में रखें हों तो प्रत्येक स्थिति में क्या होगा जबकि लिफ्ट पर ऊपर की ओर एक त्वरण कार्य कर रहा है ?
    (x) एक चोर अपने सिर पर आभूषणों से भरा W भार का एक बक्सा रखकर छत से नीचे कूद पड़ता है। कूदते समय उसे बक्से का भार कितना अनुभव होगा ?

(xi) 0.5 किग्रा द्रव्यमान की एक गेंद 10 मीटर/सेकण्ड के वेग से किसी पूर्ण प्रत्यास्थ दीवार से लम्बवत् टकराकर लौट आती है। गेंद के संवेग में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

22. सोडा वाटर की एक बोतल ऊपर से मुक्त रूप से गिर रही है क्या गैस के बुलबुले बोतल के तल के ऊपर उठेंगें ?

23. पृथ्वी की ओर स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए एक पारदर्शी केबिन की छत से एक पिण्ड छोड़ दिया जाता है। एक प्रेक्षक को पिण्ड की गति किस प्रकार की प्रतीत होगी यदि वह (i) केबिन में बैठा हो (ii) पृथ्वी पर खड़ा हो ?

24. स्प्रिंग तुला के पलड़े में रखे एक बीकर में कुछ जल है। यदि हम इस जल में अपनी अंगुली बीकर की तली को बिना छुये डुबोयें, तो तुला के पाठ्यांक पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

25. दो लड़के, जिनके द्रव्यमान समान हैं, अपने पैरों से बर्फ पर चलने वाले पहिये (ice-skates) बाँधकर एक घर्षण रहित समतल पर एक–दूसरे से कुछ दूरी पर खड़े हैं। एक लड़के की कमर से एक रस्सी बँधी है, जिसका दूसरा सिरा दूसरे लड़के के हाथ में है। यदि दूसरा लड़का रस्सी को अपनी ओर खीचें तो क्या होगा?

26. जब कोई गेंद ऊपर की ओर फेंकी जाती है, तो उसका संवेग पहले घटता हैं, फिर बढ़ता है। क्या इस प्रक्रिया में संवेग–संरक्षण के नियम का उल्लंघन होता है ?

27. एक कमानीदार तुला के दोनों सिरों को 5-5 किग्रा–भार के बलों से खींचा जाता है। तुला का पाठ्यांक क्या होगा ?

28. एक आदर्श स्प्रिंग की लम्बाई में 1.0 किग्रा का पिण्ड लटकाने पर 1.0 सेमी की वृद्धि होती है। यदि स्प्रिंग को एक घर्षण रहित क्षैतिज मेज पर रखकर दोनों सिरों से एक–एक किग्रा का भार लटकायें तो उसकी लम्बाई में कितनी वृद्धि होगी ?

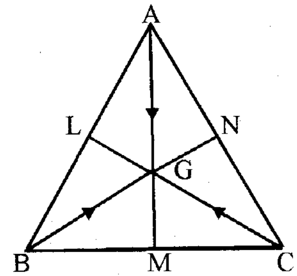
29. जब दो भारहीन स्प्रिंगों A व B से W भार का पिण्ड बारी–बारी से लटकाया जाता है, तो प्रत्येक की लम्बाई में 2 सेमी. की वृद्धि होती है। यदि स्प्रिंग B को W भार सहित स्प्रिंग A से लटका दिया जाये तो प्रत्येक स्प्रिंग में कितनी वृद्धि हो जायेगी ? अब यदि भार W को हटा लें तो स्प्रिंग B का निचला सिरा कितना ऊपर उठेगा?

30. (i) एक सफेद गेंद चिकने तल पर एकसमान चाल v से लुढ़कते हुए, उतने ही द्रव्यमान की एक स्थिर लाल गेंद से टकराकर रुक जाती है। लाल गेंद कितनी चाल से किस दिशा में जायेगी ?
(ii) यदि सफेद गेंद लाल गेंद से टकराने पर उससे चिपक जाये तब।
(iii) यदि लाल गेंद भी उतनी ही चाल v से सफेद गेंद की ओर आ रही हो तथा दोनों टकराकर आपस में चिपक जायें तब।

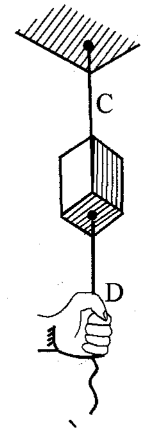
31. एक गुब्बारे (द्रव्यमान M) से बँधी रस्सी से एक व्यक्ति (द्रव्यमान m) लटका है तथा गुब्बारा स्थिर है। यदि वह व्यक्ति रस्सी के सहारे ऊपर चढ़ने लगे तो गुब्बारा किस वेग से तथा किस दिशा में चलने लगेगा ? व्यक्ति का रस्सी के सापेक्ष वेग v है।

32. पंख वाले हवाई जहाज कम ऊंचाई पर उड़ते हैं जबकि जेट हवाई जहाज अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं, क्यों ?

33. समान द्रव्यमान के तीन कण A, B व C चित्र के अनुसार एक समबाहु त्रिभुज की माध्यिकाओं के अनुदिश समान चाल v से चलते हैं। ये त्रिभुज के केन्द्र G पर टकराते हैं। टकराने के पश्चात् A स्थिर हो जाता है तथा B उसी चाल से वापस लौटता है। C का वेग क्या है ?



34. चित्र में एक हल्की डोरी C से M द्रव्यमान का एक भारी गुटका लटका है। गटके की तली से एक दूसरी डोरी D बँधी है। डोरी D, डोरी C से कुछ मजबूत है। डोरी D को बल T से नीचे की ओर खींचा जाता है। डोरी C में कितना तनाव होगा ? यदि डोरी D में तनाव T को धीरे–धीरे बढ़ाया जाये तो डोरी C पहले क्यों टूटती है ? क्या आप बता सकते हैं कि यदि डोरी D पर तेजी से झटका दिया जाये तो डोरी C न टूटकर डोरी D क्यों टूटती है?



35. एक घिरनी के ऊपर से होती हुई एक लम्बी रस्सी लटकी है। रस्सी के विपरित सिरों से बराबर भार के दो बन्दर चढ़ते हैं। रस्सी के सापेक्ष उनमें से एक अधिक तेजी से चढ़ता है। कौन–सा बन्दर पहले पहुँचेगा ? घिरनी घर्षण रहित है, रस्सी भारहीन तथा लम्बाई में न बढ़ने वाली है।

36. घर्षण गुणांक की क्या इकाई है ?

37. घर्षण गुणांक का मान क्या एक से अधिक हो सकता है ?

38. क्या घर्षण बल असंरक्षित बल है ?

39. गाड़ी के पहिये वृत्ताकार क्यों होते हैं ?

40. स्थैतिक घर्षण स्वतः समायोज्य बल है। इस आधार पर बताइये कि यदि सीमान्त घर्षण बल 20 न्यूटन है, तो घर्षण बल क्या होगा यदि बाह्य बल शून्य, 5 न्यूटन, 10 न्यूटन, 15 न्यूटन व 20 न्यूटन हो ?

41. उपरोक्त प्रश्न में यदि बाह्य बल 20 न्यूटन से अधिक हो तो घर्षण बल कितना होगा ?

42. स्थैतिक घर्षण गुणांक तथा घर्षण कोण में क्या सम्बन्ध है ?

43. यदि घर्षण कोण 30° हो तो स्थैतिक घर्षण गुणांक क्या है ?

44. दो तलों के बीच घर्षण गुणांक किन–किन बातों पर निर्भर करता है ?

45. क्या साइकिल में बड़े ब्रेक, छोटे ब्रेक की तुलना में अधिक उपयोगी

होंगे ?

46. घोड़े को गाड़ी खींचने के लिये प्रारम्भ में अधिक बल लगाना पड़ता है, क्यों ?

47. मोटरकार के टायरों की सतहों पर अनियमित प्रक्षेप (grooves) क्यों होते हैं ?

48. मोटर साइकिल, एम्बेसडर कार (rear wheel drive) के अगले पहिये व पिछले पहिये पर त्वरित दशा में घर्षण बल किस दिशा में होते हैं ?

49. उपरोक्त प्रश्न में यदि मोटर साइकिल त्वरित न हो या एकसमान वेग से बिना इंजन के बल के चल रही हो तो अगले व पिछले पहिये पर घर्षण बल किस दिशा में लगेगा ?

50. ब्रेक लगाकर साइकिल चलाना कठिन क्यों है ?

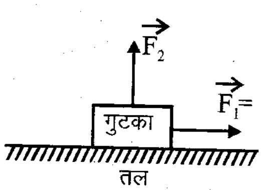
51. चित्र में बल $\vec{F_1}$ = 10 न्यूटन, क्षैतिज दिशा में लगा हुआ है लेकिन गुटका स्थिर है। $\vec{F_2}$ बल ऊर्ध्वाधर दिशा में लगा हुआ है, यदि $\vec{F_2}$ को शून्य से इतना बढ़ाया जाता है कि गुटका तल पर फिसलने लगे, तब–

(a) स्थिर अवस्था में गुटके पर लगने वाला घर्षण बल क्या होगा?

(b) गुटके पर तल के द्वारा लगा अभिलम्ब बल तथा

(c) अधिकतम घर्षण बल बढ़ेगा, घटेगा या समान रहेगा।

[संकेत : $F_2 + R = Mg$ तथा $(f_s)_{max} = \mu_s R$]



चित्र 4.34

52. क्षैतिज तल पर 2 किग्रा., 3 किग्रा. व 5 किग्रा की तीन किताबें रखी है। यदि तल के सिरे को क्षैतिज से धीरे–धीरे ऊपर उठाया जाये तो कौन–सी किताब पहले फिसलना प्रारम्भ करेगी ?

53. यदि किसी ठोस वस्तु को दीवार पर रखकर इस तरह दबाया जाता है कि वस्तु दीवार पर न फिसले तो–

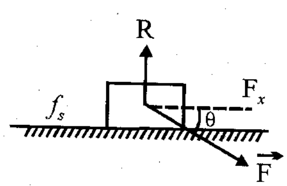
(a) वस्तु पर दीवार के द्वारा स्थैतिक घर्षण बल (f_s) किस दिशा में लगेगा ?

(b) वस्तु पर दीवार के द्वारा अभिलम्ब बल (R) किस दिशा में लगेगा ?

(c) यदि आप दबाव बढायें तो f_s, R तथा $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

54. किसी स्थिर गुटके पर बल $\vec{F}$ क्षैतिज से θ कोण नीचे की ओर लगा हुआ है (चित्र)। यदि θ का मान बढ़ाया जाए तो–

(a) F_x पर क्या प्रभाव होगा ?



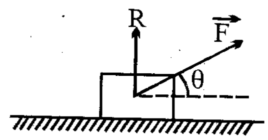
चित्र 4.35

(b) स्थैतिक घर्षण बल f_s पर क्या प्रभाव होगा ?

(c) अभिलम्ब बल R पर क्या प्रभाव होगा ?

(d) अधिकतम घर्षण बल $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव होगा ?

55. यदि उपरोक्त प्रश्न में $\vec{F}$ क्षैतिज से θ कोण ऊपर को बनाता हो (चित्र) तो F_x, f_s, R व $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव पड़ेगा?



उत्तरमाला

1. जड़त्व का कोई मात्रक तथा विमा नहीं होती है क्योंकि जड़त्व भौतिक राशि नहीं है।
2. (i) विराम का जड़त्व (ii) गति का जड़त्व। (iii) दिशा का जड़त्व।
3. 1 किग्रा भार = 9.8 न्यूटन।
4. आवेग= संवेग में परिवर्तन।
5. वे बल जिनकी क्रिया रेखाएँ एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर गुजरें, संगामी बल कहलाते हैं।
6. स्थैतिक घर्षण बल के अधिकतम मान को सीमान्त घर्षण बल कहते हैं।
7. सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।
8. सीमान्त घर्षण की स्थिति में परिणामी प्रतिक्रिया बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के मध्य बने कोण को घर्षण कोण कहते हैं।
9. घर्षण कोण तथा विश्राम कोण समान होते हैं।
10. बेलनी घर्षण < गतिक घर्षण < सर्पी घर्षण।
11. किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उस वस्तु को अपनी ओर आकर्षित करती है।
12. शून्य।
13. बंदूक से दागी गई गोली, दो पिण्डों की टक्कर।
14. (i) गेंद ऊर्ध्वाधर ही लटकी रहेगी, (ii) गेंद पीछे की ओर हटेगी, (iii) गेंद बायीं ओर हटेगी।
15. (i) नहीं। (ii) हाँ।
16. नहीं। द्रव्यमान M का त्वरण $a_1 = \frac{Mg - F}{M} = g - \frac{F}{M}$ तथा द्रव्यमान m का त्वरण $a_2 = \frac{Mg - F}{m} = g - \frac{F}{m}$ क्योंकि M > m अतः $a_1 > a_2$ अतः M द्रव्यमान, m द्रव्यमान से पहले पहुँचेगा।
17. नहीं। जब पंखा पाल को हवा से धकेलता है, तो हवा भी पंखें को समान बल से विपरीत दिशा में धकेलती है। अतः हवा पाल के द्वारा नौका को बल से एक दिशा में चलाने का प्रयत्न करेगी उसी समय हवा पंखें पर बल F विपरीत दिशा में लगाकर नौका को विपरीत दिशा में चलाने को प्रयत्न करेगी। अतः पंखें व नौका के संवेगों का योग शून्य है। नौका को चलने के लिए किसी बाह्य वस्तु की प्रतिक्रिया मिलनी चाहिए।
18. यहाँ पिंजरा तथा इसके भीतर की वायु (पिंजरे से बद्ध होने के कारण) एक निकाय माना जा सकता है। अतः (i) कोई परिवर्तन नहीं (ii) पहले से भारी लगेगा(iii) पहले से हल्का लगेगा।

19. पिंजरा तारों का होने के कारण पिंजरे की वायु पिंजरे से बद्ध नहीं है। बल्कि बाह्य वायु के सम्पर्क में है। अतः पिंजरे के भीतर चिड़िया के उड़ने पर लड़के को चिड़िया का भार नहीं अनुभव होगा तथा पिंजरा पहले से हल्का लगेगा।

20. अन्धेरे में कार का ड्राइवर हैडलाइट की परास s तक ही देख पाता है अर्थात् वह कोई भी अवरोधक जो s दूरी पर है, को देख पाता है। अवरोधक को देखकर ड्राइवर को उससे पहले गाड़ी रोकनी होती है। कार का मदंक बल निश्चित है। यदि ब्रेक लगाने पर उत्पन्न मंदक a हो, तो कार को s दूरी से पहले रोकने के लिए चाल $v, \sqrt{2as}$ से कम होनी चाहिए। स्पष्ट है कि गाड़ी की चाल 's' पर निर्भर करती है। s ही हैडलाइट की परास है।

21. (i) हाँ, यदि इस पर एक से अधिक लगे हुए बलों का सदिश योग शून्य हो।

(ii) परिणामी बाह्य बल शून्य है $\left(s \propto t, \frac{ds}{st} = \text{नियत तथा} \frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \right)$।

(iii) नहीं, यह भी हो सकता है, कि वह अचर वेग से चल रहा हो।

(iv) असत्य, यह हो सकता है, कि वह अचर वेग से चल रहा हो तथा परिणामी बल शून्य हो।

(v) चाल नहीं बदलेगी, परन्तु दिशा बदलेगी।

(vi) ऊर्ध्वाधर ऋजुरेखीय परवलयाकार।

(vii) $\vec{F} = m\vec{a}$

(viii) शून्य 4 किग्रां

(ix) कमानीदार तुला में $W' = M(g+a) = 1.0\,(g+a)$ अतः माप बढ़ जायेगी जबकि भौतिक तुला के संतुलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

(x) शून्य।

(xi) $-2mv = -10$ किग्रा मीटर/ सेकण्ड।

22. बुलबुले जल में ऊपर नहीं चढ़ेंगे। मुक्त रूप से गिरती बोतल में जल भारहीनता की अवस्था में होता है। इस कारण बुलबुलों पर कोई उत्प्लावन बल नहीं लगता, जिसके कारण वे ऊपर नहीं चढ़ते।

23. (i) केबिन में बैठे प्रेक्षक को पिण्ड वायु में स्थिर दिखाई देगा
(ii) पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक को पिण्ड गुरुत्वीय त्वरण से नीचे गिरता प्रतीत होगा।

24. बढ़ जायेगा, जल अंगुली पर ऊपर की ओर उछाल लगायेगा तथा अंगुली उतना ही प्रतिक्रिया बल जल पर नीचे की ओर बीकर की तली पर लगायेगी।

25. प्रारम्भिक संवेग शून्य है तथा निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। अतः खींचने पर भी संवेग शून्य होना चाहिए। अतः दोनों लड़के एक–दूसरे की ओर समान वेग से आने लगेंगे ताकि संयुक्त संवेग शून्य रहे।

26. नहीं।

27. 5 किग्रा–भार

28. 1.0 सेमी

29. प्रत्येक 2 सेमी, 4 सेमी

30. (i) चाल v से सफेद गेंद की दिशा में चलेगी(ii) संयुक्त गेंद चाल $\frac{v}{2}$ से सफेद गेंद की दिशा में चलेगी (iii) दोनों गेंदें ठहर जायेंगी।

31. गुब्बारे तथा व्यक्ति का प्रारम्भिक संवेग शून्य है तथा बाह्य बल शून्य है, अतः बाद का संवेग भी शून्य होना चाहिए माना जब व्यक्ति रस्सी के सापेक्ष v वेग से ऊपर चढ़ता है तब गुब्बारा u वेग से नीचे उतरेगा कि संयुक्त संवेग शून्य ही रहे। व्यक्ति का पृथ्वी के सापेक्ष वेग $(v-u)$ है अतः

$$m(v-u) - Mu = 0, \therefore u = \frac{mv}{M+m}$$

32. पंख वाले हवाई जहाज के लिए वायु के सघन माध्यम की आवश्यकता होती है, क्योंकि हवाई जहाज पंखों द्वारा बाहर की वायु को अपने पीछे की ओर धकेलकर उसकी प्रतिक्रिया से आगे बढ़ते हैं। जिससे कम ऊंचाई पर सघन माध्यम होने से अधिक प्रतिक्रिया बल प्राप्त होगा। जेट हवाई जहाज में बाहर की वायु जहाज के भीतर खींचकर संपीड़ित होती है, अतः इसके लिए सघन माध्यम होना न केवल अनावश्यक है, बल्कि अवांछनीय भी है। वायु के घर्षण से उत्पन्न ऊष्मा को कम करने के लिए जेट हवाई जहाज अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं जहां वायु का घनत्व कम है।

33. प्रारंभिक संवेग शून्य अतः बाद का संवेग भी शून्य होना चाहिए, अतः C की चाल v तथा टकराने के बाद की B की दिशा के विपरीत $\overrightarrow{GN}$ दिशा में होगी, क्योंकि टकराने के बाद $\overrightarrow{GB}$ दिशा में वापस जा रहा है।

34. जब डोरी D में तनाव T है तो डोरी C में तनाव $T + Mg$ होगा। अतः C पहले टूटेगी। झटका देने पर गुटका जड़त्व के कारण अपने स्थान पर बना रहेगा जिससे रस्सी D से टूट जायेगी।

35. एक–दूसरे के संवेग बराबर होने से दोनों बन्दर बराबर दर से ऊपर चढ़ेंगें। अतः बराबर समय में साथ–साथ पहुँचेंगें।

36. कोई इकाई नहीं है।

37. हाँ।

38. हाँ।

39. फिसलता घर्षण, घूर्णन घर्षण में बदल जाता है, अतः घर्षण कम हो जाता है।

40. शून्य, 5, 10, 15, 20 न्यूटन।

41. 20 न्यूटन से कम होगा, क्योंकि $\mu_k < \mu_s$

42. $\mu_s = \tan\lambda$

43. $\mu_s = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

44. आर्द्रता, तलों की प्रकृति, तलों की स्वच्छता, ताप

45. नहीं

46. गतिज घर्षण बल सीमान्त घर्षण बल से कम होता है।

47. सड़क तथा पहिये के बीच घर्षण बढ़ाने के लिए।

48. पिछले पहियों पर घर्षण बल आगे की ओर तथा अगले पहियों पर घर्षण बल पीछे की ओर लगता है, क्योंकि पिछला पहिया सड़क पर पीछे की ओर तथा अगला पहिया सड़क पर आगे की ओर बल लगाता है।

49. पिछले व अगले पहियों पर घर्षण बल पीछे को लगेगा।

50. हम जानते हैं कि सर्पी घर्षण बल (sliding friction), लोटनी घर्षण (rolling friction) से अधिक होता है। अतः जब ब्रेक लगा हो तो गाड़ी पर सर्पी घर्षण बल लगने लगता है।

51. (a) $\vec{F_1} = 10$ न्यूटन, (b) घटेगा, (c) घटेगा

52. आनत तल के एक ही झुकाव कोण पर किताबें एक साथ फिसलना प्रारम्भ होगी, $\theta_0 = \tan^{-1}\mu_S$

53. (a) ऊर्ध्वाकार ऊपर की ओर, (b) क्षैतिज तल में (दीवार के लम्बवत्) बाहर की ओर, (c) बढ़ेगा, बढ़ेगा, कोई प्रभाव नहीं

54. (a) घटेगा, (b) घटेगा, (c) घटेगा, (d) घटेगा,

55. (a) घटेगा, (b) घटेगा, (c) घटेगा, (d) घटेगा।

विविध उदाहरण

उदा 17. 90 $m\,s^{-1}$ चाल से गतिमान 0.04 kg संहति की कोई गोली लकड़ी के भारी गुटके में धँसकर 60 cm दूरी चलकर रुक जाती है। गुटके द्वारा गोली पर लगने वाला औसत अवरोधी बल क्या है?

हल– दिया गया है–

u = 90 मी./से.

v = 0 मी./से.

m = 0.04 किग्रा.

s = 60 सेमी. = 0.60 मी.

$\because \quad v^2 = u^2 + 2as$

$\Rightarrow \quad (0)^2 = (90)^2 + 2 \times a \times 0.60$

$\Rightarrow \quad a = -\dfrac{90 \times 90}{2 \times 0.60} = -6750$ मी./से.^{2}

$\because \quad F = ma = -0.04 \times 6750$

$= -270$ न्यूटन

अतः औसत अवरोधी बल = 270 न्यूटन

यहाँ वास्तविक अवरोधी बल तथा गोली का मंदन एकसमान नहीं होने से औसत अवरोधी बल प्राप्त किया गया है।

उदा. 18. *m* द्रव्यमान के किसी कण का किसी समय *t* सेकण्ड पर विस्थापन है-

$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$ मीटर

इस कण पर कार्यरत बल का मान ज्ञात करो।

हल– कण का विस्थापन

$$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$$

$$\text{वेग } v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2)$$

$$v = C_1 + 2C_2 t \text{ मी./से.} \quad ...(1)$$

$$\text{त्वरण } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(C_1 + 2C_2 t)$$

$$a = 2C_2 \text{ मी./से.}^2 \quad ...(2)$$

कण पर कार्यरत बल

$$F = ma$$

$$F = 2mC_2 \text{ न्यूटन} \quad ...(3)$$

उदा. 19. 200 मीटर प्रति सेकण्ड वेग से गतिमान 20 ग्राम द्रव्यमान वाली गोली एक बालू से भरे थैले से टकराकर बालू में 3 सेमी. धँसने के उपरान्त विरामवस्था में आ जाती है। बालू द्वारा गोली पर आरोपित प्रतिरोध बल ज्ञात करो।

हल– दिया हुआ है– $u = 200$ मी./से., $v = 0$, $S = 0.03$ मी. $m = 0.02$ किग्रा., $a = ?$ व $F = ?$

$\because \quad v^2 = u^2 + 2aS$

$\Rightarrow \quad 0 = (200)^2 + 2 \times a \times 0.03$

$$a = \frac{-200 \times 200}{2 \times 0.03}$$

$$a = \frac{-20}{3} \times 10^5 \text{ मी./से.}^2$$

$\because \quad F = ma$

$$= 0.02 \times \left(\frac{-20}{3} \times 10^5\right)$$

$$= -13.3 \times 10^3 \text{ न्यूटन}$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह से तात्पर्य है कि बल गति की विपरीत दिशा में कार्यरत है।

उदा. 20. 0.5 किग्रा भारी हथौड़ा 6.0 मी./से. के वेग से एक कील के सिरे पर टकराकर उस कील को 5 सेमी. अन्दर धकेल देता है। यदि कील का द्रव्यमान उपेक्षणीय हो तो-

(i) टक्कर के पश्चात् त्वरण क्या था?

(ii) टक्कर में कितना समय लगा?

(iii) आवेग क्या था?

हल– **(i)** $v^2 = u^2 + 2aS$

दिया गया है– $u = 6.0$ मी./से., $S = 5$ सेमी. $= 0.05$ मी., $v = 0$

अतः $\quad 0 = (6)^2 + 2a(0.05)$

या $\quad -36 = 0.1\,a$

$\therefore \quad a = -\dfrac{36}{0.1}$

$= -360$ मी./से.^{2} मंदन

अतः त्वरण = 360 मी./से.^{2}

(ii) समय $t = \dfrac{6}{360}$

$= \dfrac{1}{60}$ सेकण्ड

(iii) आवेग $I = Ft = mat$

$= 0.5 \times (-)\,360 \times \dfrac{1}{60}$

$= -3$ न्यूटन × से.

आवेग का परिमाण $= 3$ न्यूटन × से.

उदा.21.एक 5 किग्रा द्रव्यमान की वस्तु में 4 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी?

हल– दिया गया है–

द्रव्यमान $m = 5$ किग्रा.

त्वरण $a = 4$ मी./से.^{2}

बल $F = ma$

$= 5 \times 4 = 20 \frac{\text{किग्रा मी.}}{\text{से}^2}$

$= 20$ न्यूटन

उदा.22. 100 किग्रा. द्रव्यमान वाली एक गाड़ी 5 मी./से. के वेग से गतिमान है। इसे $\frac{1}{10}$ सेकण्ड में विरामावस्था में लाने के लिए कितना बल लगाना पड़ेगा?

हल– दिया गया है–

$m = 100$ किग्रा

$u = 5$ मी./से.

$t = \frac{1}{10}$ से.

$v = 0$

गति के प्रथम समीकरण से

$v = u + at$

$0 = 5 + a \times \frac{1}{10}$

$a = -50$ मी./से.^{2}

$\because$ $F = ma$

$= -100 \times 50 = -5000$ न्यूटन

अतः 5000 न्यूटन बल वेग के विपरीत दिशा में लगाना पड़ेगा।

उदा.23.400 न्यूटन का बल एक वस्तु में 8 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करता है। उस वस्तु का द्रव्यमान कितना है? यदि यह वस्तु 5 सेकण्ड में 125 मीटर चलती है तो वस्तु का प्रारंभिक वेग ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$F = 400$ न्यूटन

$a = 8$ मी./से.^{2}

$m = ?$

$t = 5$ सेकण्ड

दूरी $S = 125$ मीटर

$u = ?$

$\because$ $F = ma$

$\Rightarrow$ $m = \frac{F}{a} = \frac{400}{8}$

$= 50$ किग्रा.

गति के द्वितीय समीकरण से

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$

$125 = 5u + \frac{1}{2} \times 8 \times (5)^2$

$125 = 5u + 100$

$\Rightarrow$ $u = 5$ मी./से.

उदा 24.एक 2 किग्रा. द्रव्यमान के पिण्ड की चाल 10 सेकण्ड में 4 मी./से. से 10 मी./से. हो जाती है। बल का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

द्रव्यमान $m = 2$ किग्रा., $t = 10$ से., $u = 4$मी./से.,

$v = 10$ मी./से.

त्वरण $a = \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{परिवर्तन में लगा समय}}$

$= \frac{v - u}{t}$

$= \frac{10 - 4}{10}$

$= \frac{6}{10} = 0.6$ मी./से.^{2}

बल $F = ma = 2 \times 0.6 = 1.2$ न्यूटन

बल का परिमाण = 1.2 न्यूटन, गति की दिशा में।

उदा.25.यदि कोई बल 5 किग्रा. की वस्तु में 2 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करता है तो वह 200 ग्राम की वस्तु में कितना त्वरण उत्पन्न करेगा? बल का मान ज्ञात करो।

हल– दिया गया है–

$m_1 = 5$ किग्रा.

$a_1 = 2$ मी./से.^{2}

$m_2 = 200$ ग्राम $= \frac{200}{1000}$ किग्रा.

$a_2 = ?$ $F_2 = ?$

$F = m_1 a_1$

$\therefore$ $F = 5 \times 2 = 10$ न्यूटन

इसी प्रकार $F = m_2 a_2$

$\Rightarrow$ $a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{10}{\frac{200}{1000}} = 50$ मी./से.^{2}

उदा.26.एक 25 ग्राम द्रव्यमान की गेंद 5 मी. की ऊँचाई से गिरती है तथा फर्श से टकराकर पुनः 1.8 मीटर की ऊँचाई तक जाती है। यदि गेंद फर्श के सम्पर्क में 0.5 सेकण्ड तक रही तो गेंद तथा फर्श के मध्य आवेग व औसत बल का परिकलन कीजिए। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– जब गेंद 5 मी. की ऊँचाई से गिरती है तब $h = 5$ मी., $u = 0$ एवं $g = 10$ मी./से.^{2}

अतः $v = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2 \times 10 \times 5}$

$= 10$ मी./से.

फर्श से टकराकर पुनः 1.8 मी. की ऊँचाई तक जाती है अब

$v' = 0, g = +10$ मी./से.^{2}

अतः $v'^2 = u'^2 - 2gh'$

$\therefore$ $u' = \sqrt{2gh'}$

$= \sqrt{2 \times 10 \times 1.8}$

$= 6$ मी./से.

दोनों वेग विपरीत हैं अर्थात् $v = 10$ मी./से., $u' = -6$ मी./से.

दिया गया है–

$m = 25$ ग्राम $= 0.025$ किग्रा.

$t = 0.5$ सेकण्ड

(i) आवेग = संवेग में परिवर्तन

$= mu' - mv$

$= m(u' - v)$

$= 0.025\,[-6 - 10]$

$= -0.4$ न्यूटन × से.

आवेग का परिमाण = 0.4 न्यूटन × से.

(ii) $$\text{बल} = \frac{\text{आवेग}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \text{ न्यूटन}$$

उदा. 27. 2×10^4 किग्रा. द्रव्यमान के एक स्थिर रॉकेट पर 2×10^5 न्यूटन बल 30 सेकण्ड तक लगाया जाता है। 30 सेकण्ड के पश्चात् रॉकेट का वेग ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$m = 2 \times 10^4$ किग्रा.

$F = 2 \times 10^5$ न्यूटन

$t = 30$ सेकण्ड

$v = ?$

$\because$ $F = ma$

$\Rightarrow$ $$a = \frac{F}{m} = \frac{2 \times 10^5}{2 \times 10^4} = 10 \text{ मी./से.}^2$$

$$a = \frac{v - u}{t}$$

$$10 = \frac{v - 0}{30}$$

$\Rightarrow$ $v = 300$ मी./से.

उदा.28. 5 न्यूटन बल m_1 द्रव्यमान वाली वस्तु को 8 मी./से.^{2} तथा m_2 द्रव्यमान की वस्तु को 24 मी./से.^{2} का त्वरण प्रदान करता है। यदि इन दोनों को बाँध दिया जाए तो यह बल अब कितना त्वरण प्रदान करेगा?

हल– $\because$ $F = ma$

$5 = m_1 \times 8$

$\therefore$ $$m_1 = \frac{5}{8} \text{ किग्रा.}$$

इसी प्रकार

$5 = m_2 \times 24$

$\therefore$ $$m_2 = \frac{5}{24} \text{ किग्रा.}$$

जब दोनों वस्तुओं को बाँध दिया जाये

तब $$5 = \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{24}\right)a$$

$\Rightarrow$ $$a = \frac{5 \times 24}{20} = 6 \text{ मी./से.}^2$$

उदा.29. एक किग्रा. द्रव्यमान का एक पिण्ड घर्षण रहित टेबिल पर रखा हुआ है उस पर 2 सेकण्ड तक एक नियत बल लगाकर हटा लिया जाता है। अगले 2 सेकण्ड में पिण्ड 20 मीटर दूरी तय करता है। उस पर लगाए गए बल की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है– $m = 1$किग्रा., $t_1 = 2$ सेकण्ड, $t_2 = 2$ सेकण्ड, दूरी $S = 20$ मीटर, $u = 0$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

या $$20 = \frac{1}{2}a(2^2 + 2^2)$$

या $20 = 4a \;\therefore\; a = 5$ मी./से.^{2}

बल $F = ma = 1 \times 5$

$= 5$ न्यूटन

उदा 30. एक 4 किलोग्राम की गोली 2000 किग्रा. की एक तोप से 1500 मी./से. के वेग से छोड़ी जाती है। तोप का प्रतिक्षेप वेग ज्ञात करो।

हल– दिया गया है– $M = 2000$ किग्रा., $V = ?$, $m = 4$ किग्रा. $v = 1500$ मी./से.

संवेग संरक्षण नियम से

$$MV + mv = 0$$

$\Rightarrow$ $$V = \frac{-mv}{M}$$

$$V = \frac{-4 \times 1500}{2000}$$

$V = -3$ मी./से.

अतः तोप 3 मी./से. के वेग से पीछे हटेगी।

उदा.31. एक रॉकेट की मोटर 1000 किग्रा. ईधन तथा ऑक्सीजन के मिश्रण को प्रति सेकण्ड जलाती है। बाहर फेंकने का आपेक्षिक वेग 700 मी./से. का है। रॉकेट का थ्रस्ट ज्ञात करो।

हल– $$F = u\frac{dm}{dt}$$

जहाँ $u = 700$ मी./से. और $\frac{dm}{dt} = 1000$ किग्रा./से.

$\therefore$ $F = 700 \times 1000$

$F = 7 \times 10^5$ न्यूटन

उदा 32. एक रॉकेट में ईधन 100. किग्रा./से. की दर से जलता है तथा वह गैस के रूप में 2×10^3 मी./से. के वेग से बाहर निकलता है। गैस द्वारा रॉकेट पर लगाये गये बल का मान ज्ञात करो।

हल– $$F = u\frac{dm}{dt}$$

जहाँ $u = 2 \times 10^3$ मी./से. और $\frac{dm}{dt} = 100$ किग्रा./से.

$\therefore$ $F = 2 \times 10^3 \times 100$

$F = 2 \times 10^5$ न्यूटन

उदा.33. 30 किग्रा. के रॉकेट में ऊपर की ओर 6.0 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करने के लिए कितने प्रणोद बल की आवश्यकता होगी?

हल— बल $F = ma = 30 \times 6.0$

$= 180$ न्यूटन

$\because$ न्यूटन के तृतीय नियम से—

क्रिया बल = प्रतिक्रिया बल

$\therefore$ प्रणोद बल का मान = 180 न्यूटन

उदा 34. 5×10^3 किग्रा. द्रव्यमान के रॉकेट से 1.2×10^3 मी./से. की चाल से कितनी गैस प्रति सेकण्ड निकलनी चाहिये जिससे उसे प्रारंभ में ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर 20 मी./से.^{2} का त्वरण प्राप्त हो सके? (g = 10 मी./से.^{2})

हल— दिया गया है—

$m = 5 \times 10^3$ किग्रा.

$a = 20$ मी./से.^{2}

$u = 1.2 \times 10^3$ मी./से.

$g = 10$ मी./से.^{2}

रॉकैट की गति का समीकरण

$$u\frac{dm}{dt} = ma + mg$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m(a+g)}{u}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{5 \times 10^3(20+10)}{1.2 \times 10^3}$$

$$\frac{dm}{dt} = 125 \text{ किग्रा./से.}$$

उदा.35.एक गतिमान गोला जिसका द्रव्यमान 30 किग्रा. तथा वेग 48 मी./से. है, विस्फोट के पश्चात् दो खण्डों में विभक्त हो जाता है। इन खण्डों के द्रव्यमान 18 तथा 12 किग्रा. है। यदि विस्फोट के पश्चात् अधिक द्रव्यमान वाला खण्ड विरामावस्था में आ जाए तो खण्ड का वेग ज्ञात करो।

हल— संवेग संरक्षण नियम से

विस्फोट के पूर्व संवेग = विस्फोट के पश्चात् संवेग

दिया गया है—

M = 30 किग्रा., $m_1 = 18$ किग्रा.

V = 48 मी./से., $m_2 = 12$ किग्रा.

$v_1 = 0$

$v_2 = ?$

$$MV = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$30 \times 48 = 18 \times 0 + 12 \times v_2$$

$$30 \times 48 = 0 + 12 v_2$$

$\Rightarrow$ $v_2 = \frac{30 \times 48}{12} = 120$ मी./से.

उदा. 36. एक किग्रा. द्रव्यमान का एक बम विस्फोट के कारण तीन भागों 1 : 1 : 3 के अनुपात में विभाजित हो जाता है। यदि समान द्रव्यमान के टुकड़े परस्पर लम्बवत् दिशा में 25 मी./से. की चाल से गतिमान होते हैं तो भारी टुकड़े की चाल की गणना कीजिए।

हल— बम का द्रव्यमान = 1 किग्रा.

विस्फोट के बाद टुकड़ों का द्रव्यमान = 1 : 1: 3

अतः $m_1 = \frac{1}{5} = 0.2$ किग्रा., $m_2 = \frac{1}{5} = 0.2$ किग्रा., $m_3 = \frac{3}{5} = 0.6$ किग्रा.

यदि विस्फोट के पश्चात् 0.2 किग्रा., 0.2 किग्रा. व 0.6 किग्रा. द्रव्यमान के टुकड़ों के संवेग क्रमशः $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ हों, तो

$$0 = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}$$

या $\vec{p_3} = -(\vec{p_1} + \vec{p_2})$

$\because$ $\vec{p_1}$ व $\vec{p_2}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

$\therefore$ $|\vec{p_3}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$

या $m_3v_3 = \sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}$

या $v_3 = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}}{m_3}$

$$= \frac{\sqrt{(0.2)^2 \times (25)^2 + (0.2)^2 \times (25)^2}}{0.6}$$

या $v_3 = \frac{\sqrt{25+25}}{0.6} = \frac{\sqrt{50}}{0.6}$

$= \frac{7.07}{0.6} = 11.78$ मी./से.

उदा.37.25 किग्रा. की एक मशीनगन से 25 ग्राम की गोलियाँ 5 गोली प्रति सेकण्ड की दर तथा 300 मी./से. की चाल से दागी जाती है। मशीनगन को अपनी स्थिति में बनाये रखने के लिए आवश्यक बल की गणना कीजिए।

हल— दिया गया है—

$m = 25$ ग्राम

$= 0.025$ किग्रा.

$v = 300$ मी./से.

$M = 25$ किग्रा.

$n = 5$ गोली/से.

संवेग संरक्षण नियम के आधार पर बंदूक का प्रतिक्षेप वेग

$$V = \frac{mv}{M}$$

$$= \frac{0.025 \times 300}{25}$$

$= 0.3$ मी./से.

दिया गया है: गोली दागने की दर = 5 गोली प्रति सेकण्ड

$\therefore$ एक गोली दागने का समय

$$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ सेकण्ड}$$

आवेग–संवेग प्रमेय से

$$Ft = \text{बंदूक के संवेग में परिवर्तन}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{MV}{t}$$

$$= \frac{25 \times 0.3}{0.2} = 37.5 \text{ न्यूटन}$$

उदा.38. एक व्यक्ति तथा एक ठेला गाड़ी का द्रव्यमान क्रमशः 50 किग्रा. व 100 किग्रा. है। 0.1 मी./से. के वेग से गतिशील गाड़ी पर वह व्यक्ति गाड़ी के चलने की दिशा में भाग कर चढ़ जाता है। अब गाड़ी व व्यक्ति का वेग 0.6 मी./से. हो जाता है। व्यक्ति किस वेग से भाग रहा था?

हल– दिया गया है–

व्यक्ति का द्रव्यमान $m_1 = 50$ किग्रा.

ठेला गाड़ी का द्रव्यमान $m_2 = 100$ किग्रा.

ठेला गाड़ी का वेग $v_2 = 0.1$ मी./से.

गाड़ी + व्यक्ति का वेग $v = 0.6$मी./से.

व्यक्ति का वेग $v_1 = ?$

संवेग संरक्षण के नियम से–

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

या $\quad 50v_1 + 100 \times 0.1 = (50 + 100) \times 0.6$

या $\quad 50v_1 + 10 = 90$

या $\quad 50v_1 = 90 - 10 = 80$

या $\quad v_1 = \frac{80}{50} = 1.6$ मी./से.

उदा 39.एक क्षैतिज पृष्ठ पर 4 किग्राभार के पिण्ड को खींचने के लिए 2 किग्रा. भार के न्यूनतम बल की आवश्यकता होती है। घर्षण कोण की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है–$(f_s)_{max} = 2$ किग्रा. भार, $R = 4$ किग्रा. भार

सूत्र $\quad \tan\lambda = \frac{(f_s)_{max}}{R} = \frac{2}{4}$

$= 0.5$

$\lambda = \tan^{-1}(0.5) = 27°$ लगभग

उदा.40.10 ग्राम द्रव्यमान की एक गोली क्षैतिज दिशा में एक किग्रा. द्रव्यमान के गुटके की ओर दागी जाती है। गोली गुटके में धँस जाती है तथा गोली व गुटके का निकाय स्थिर अवस्था में आने तक 20 मीटर की दूरी तय करते हैं। गोली गुटके से जिस वेग से टकराती है उसका परिकलन कीजिए।

(जबकि $\mu_k = 0.3, g = 10$ मी/से.^{2})

हल– दिया गया है–

$m = 10$ ग्राम

$= 0.01$ किग्रा.

$M = 1$ किग्रा.

$\mu_k = 0.3$

$g = 10$ मी./से.^{2}

दूरी $S = 20$ मीटर

ऊर्जा संरक्षण नियम से

गोली की गतिज ऊर्जा = (गोली + गुटका) द्वारा घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = W$$

$\because$ कार्य $W = \text{बल } (f) \times \text{विस्थापन } (S)$

$$= \mu_k R \times S = \mu_k (M + m)g \times S$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2\mu_k (M + m)gS}{m}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\mu_k (M + m)gS}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad = \sqrt{\frac{2 \times 0.3(1 + 0.01) \times 10 \times 20}{0.01}} = 1.1 \times 10^2 \text{ मी./से.}$$

उदा.41.दो 7 किग्रा. और 12 किग्रा. के भार एक भारहीन और अप्रसरणशील डोरी के दोनों सिरों से लटके हुए हैं जो एक घिरनी पर होकर जाती है। जब भारों को छोड़ दिया जाता है तो उनका त्वरण और डोरी में तनाव ज्ञात करो।

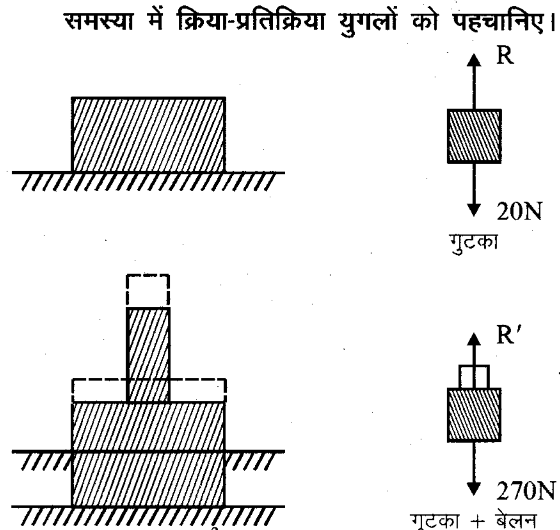
हल– त्वरण $a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$ जहाँ $m_1 < m_2$

$$= \frac{12 - 7}{12 + 7} \times 10 = \frac{50}{19} = 2.6 \text{ मी./से.}^2$$

तनाव $T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g$

$$= \frac{2 \times 12 \times 7}{12 + 7} \times 10 = \frac{1680}{19} = 86.8 \text{ न्यूटन}$$

उदा.42.किसी कोमल क्षैतिज फर्श पर 2 kg संहति का लकड़ी का गुटका रखा है (चित्र)। जब इस गुटके के ऊपर 25kg संहति का लोहे का बेलन रखा जाता है तो फर्श स्थिर गति से नीचे धँसता है तथा गुटका व बेलन एक साथ 0.1 ms^{-2} त्वरण से नीचे जाते हैं। गुटके की फर्श पर क्रिया (a) फर्श के धँसने से पूर्व तथा (b) फर्श के धँसने के पश्चात् क्या है? g = 10 ms^{-2} लीजिए। समस्या में क्रिया-प्रतिक्रिया युगलों को पहचानिए।



चित्र 4.33

हल– (a) फर्श के धँसने से पूर्व गुटके की फर्श पर क्रिया = गुटके का भार = mg = 2 × 10 = 20 न्यूटन (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

(b) फर्श के धँसने के पश्चात् गुटके की फर्श पर क्रिया–

निकाय (गुटका + बेलन) पर परिणामी बल

$$(m+M)g - R' = (m+M)a$$

यहाँ M = बेलन का द्रव्यमान

R′ = अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

$\therefore \quad (2+25)\times 10 - R' = (2+25)\times 0.1$

$\Rightarrow \quad 27\times 10 - R' = 27\times 0.1$

$\Rightarrow \quad R' = 270 - 2.7 = 267.3$ न्यूटन

गति के तृतीय नियमानुसार

R′ = (गुटका + बेलन) की फर्श पर क्रिया

= 267.3 न्यूटन (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

उदा.43.हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन प्रोटॉन के चारों ओर 5.28×10^{-11} मीटर त्रिज्या के वृत्त में 2.18×10^6 मी./से. की चाल से चक्कर काटता है। इलेक्ट्रॉन के त्वरण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$R = 5.28 \times 10^{-11}$ मीटर

$v = 2.18 \times 10^6$ मी./से.

इस स्थिति में अभिकेन्द्रीय त्वरण

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

$$a_r = \frac{(2.18\times 10^6)^2}{5.28\times 10^{-11}}$$

$= 9.0 \times 10^{22}$ मी./से.^{2}

उदा.44. कोई कीड़ा एक वृत्तीय खांचे में जिसकी त्रिज्या 12cm है, फंस गया है। वह खांचे के अनुदिश स्थिर चाल से चलता है और 100 सेकंड में 7 चक्कर लगा लेता है। (a) कीड़े की कोणीय चाल व रैखिक चाल कितनी होगी? (b) क्या त्वरण सदिश एक अचर सदिश है। इसका परिमाण कितना होगा?

हल– दिया गया उदाहरण एक समान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है।

प्रश्नानुसार R = 12 सेमी. = 12×10^{-2} मी., $T = \frac{100}{7}$ सेकण्ड

(a) कीड़े की कोणीय चाल $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{100/7}$

= 0.44 रेडियन/से.

रैखिक चाल $v = R\omega$ $= 12\times 10^{-2}\times 0.44$

$= 5.28 \times 10^{-2}$ मी./से.

(b) वृत्त के प्रत्येक बिन्दु पर त्वरण की दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर होने से त्वरण की दिशा लगातार परिवर्तित होती रहती है। जिससे त्वरण एक अचर सदिश नहीं है।

त्वरण का परिमाण $a_r = \omega^2 R = (0.44)^2 \times 12\times 10^{-2}$

$= 2.3 \times 10^{-2}$ मी./से.^{2}

उदा.45. चन्द्रमा 2.36×10^6 सेकण्ड में पृथ्वी का परिक्रमण वृत्ताकार कक्षा में करता है जिसकी त्रिज्या 3.85×10^5 किमी. है। चन्द्रमा के पृथ्वी की ओर त्वरण का परिकलन कीजिए।

हल– दिया गया है–

$T = 2.36 \times 10^6$ सेकण्ड

$R = 3.85 \times 10^5$ किमी.

$R = 3.85 \times 10^5 \times 10^3$ मी.

चन्द्रमा का कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{2.36\times 10^6}\ \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$

∴ चन्द्रमा के पृथ्वी की ओर त्वरण

$$a_r = R\omega^2$$

$$= 3.85\times 10^5 \times 10^3 \times \left(\frac{2\times 3.14}{2.36\times 10^6}\right)^2$$

$= 2.73 \times 10^{-3}$ मी./से.^{2}

उदा.46.एक 10 ग्राम द्रव्यमान का पिण्ड 50 सेमी. लम्बी डोरी से बंधा हुआ है। यदि पिण्ड को क्षैतिज वृत्त में π सेकण्ड के आवर्तकाल से घुमाया जाए तो डोरी में तनाव की गणना कीजिए।

हल– इस स्थिति में तनाव बल अभिकेन्द्रीय बल होता है।

∴ तनाव बल $T = mR\omega^2$

दिया गया है–

$m = 10$ ग्राम

$= 10 \times 10^{-3}$ ग्राम

R = 50 सेमी.

$= 50 \times 10^{-2}$ मी.

आवर्तकाल $= \pi$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{\text{आवर्तकाल}}$$

$= \frac{2\pi}{\pi} = 2$ रेडियन/से.

∴ तनाव बल $T = 10\times 10^{-3}\times 50\times 10^{-2}\times (2)^2$

$= 2 \times 10^{-2}$ न्यूटन

उदा.47. 100 ग्राम द्रव्यमान का एक पत्थर 2 मीटर लम्बे धागे से बांधकर 3 घूर्णन प्रति सेकण्ड से क्षैतिज वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता है। धागे पर लगने वाले तनाव बल की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है–

$m = 100$ ग्राम

$= 100 \times 10^{-3}$ किग्रा.

R = 2 मीटर

$n = 3$ घूर्णन/सेकण्ड

$\omega = 2\pi n$

$= 2 \times 3.14 \times 3$ रेडियन/से.

∴ तनाव बल $T = mR\omega^2$

$= 100\times 10^{-3}\times 2\times (2\times 3.14\times 3)^2$

= 71 न्यूटन

उदा.48. एक डोरी अधिक से अधिक 100 न्यूटन का बल सहन कर सकती है। इस डोरी के 1मीटर लम्बे टुकड़े के एक सिरे पर 1 किग्रा. का पिण्ड बाँधकर उसे क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। पिण्ड को अधिकतम कितनी रेखीय चाल से घुमाया जा सकता

है कि डोरी न टूटे।

हल– दिया गया है–

$$F = 100 \text{ न्यूटन}$$
$$r = 1 \text{ मीटर}$$
$$m = 1 \text{किग्रा.}$$

$$\because \quad F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = \sqrt{\frac{100 \times 1}{1}}$$
$$= 10 \text{ मी./से.}$$

उदा.49. समान द्रव्यमान के दो कण क्रमशः r_1 व r_2 त्रिज्या के वृत्ताकार पथों पर समान चाल से चक्कर लगा रहे है उनके अभिकेन्द्रीय बलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– अभिकेन्द्र बल $F = \frac{mv^2}{r}$

द्रव्यमान m तथा चाल v समान होने पर

$$F \propto \frac{1}{r}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

उदा 50. वह अधिकतम चाल ज्ञात करो जिससे एक कार 36 मीटर त्रिज्या के घुमाव पर सुरक्षित घूम सके जबकि कार के टायर तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक = 0.4

हल–

$$r = 36 \text{ मीटर}$$
$$\mu = 0.4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = \mu R = \mu mg$$
$$\Rightarrow \quad v^2 = \mu rg$$
$$\Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.4 \times 36 \times 10}$$
$$= 12 \text{ मी./से.}$$

उदा. 51. 7 मी./से. समान चाल से एक साईकिल सवार बिना झुके कम से कम कितनी त्रिज्या के सम॥ल मोड़ पर सुरक्षित चल सकता है। साईकिल टायर तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक $\left(\frac{1}{4}\right)$ है।

हल– दिया गया है–

$$v = 7 \text{मी./से.}, \ \mu = \frac{1}{4}$$
$$r = ?$$
$$v = \sqrt{\mu rg}$$
$$v^2 = \mu rg$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{\mu g}$$

$$= \frac{(7)^2}{\frac{1}{4} \times 10} = 20 \text{ मीटर}$$

उदा.52. एक मोटर साइकिल सवार क्षैतिज वृत्ताकार पथ पर 36 $\frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}}$ के वेग से घूम रहा है। अपना संतुलन बनाये रखने के लिए वह भीतर की ओर किस कोण से झुकेगा? जबकि वृत्ताकार पथ की त्रिज्या 200 मीटर है। (g = 10 मी./से.²)

हल– दिया गया है–

$$v = 36 \frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}} = \frac{36 \times 1000}{3600}$$
$$= 10 \text{ मी./से.}$$
$$r = 200 \text{ मीटर}$$

$$\because \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(10)^2}{200 \times 10} = 0.05$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0.05) = 3° \text{ (लगभग)}$$

उदा.53. यदि किसी वृत्ताकार मोड़ की त्रिज्या 0.1 किमी. है। 60 $\frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}}$ से चलने वाले वाहन के लिए सड़क का करवट कोण कितना होना चाहिए। (g = 10 मी./से.²)

हल– दिया गया है–

$$r = 0.1 \text{ किमी.}$$
$$= 0.1 \times 10^3 \text{ मी.}$$
$$v = 60 \text{ किमी./घंटा}$$

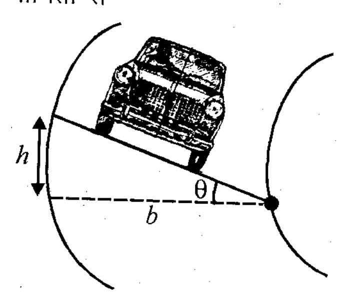
$$= \frac{60 \times 1000}{3600} = \frac{50}{3} \text{ मी./से.}$$

$$\because \quad \tan = \frac{v^2}{rg} = \frac{\left(\frac{50}{3}\right)^3}{0.1 \times 10^3 \times 10} = \frac{5}{18}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{18}\right)$$

उदा.54. एक वाहन b चौड़ाई तथा R वक्रता त्रिज्या की सड़क पर v वेग से गतिशील है। वाहन पर अपकेन्द्री बल का प्रतिकार करने के लिए सड़क के बाह्य तथा आन्तरिक किनारों के मध्य आवश्यक ऊँचाई में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल– चित्र की ज्यामिती से



चित्र 4.34

$$\tan\theta = \frac{h}{b} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\therefore \qquad h = \frac{v^2 b}{Rg}$$

उदा.55.20 मीटर त्रिज्या के मोड़ पर 10 मी./से. की चाल से एक कार की सुरक्षित गति के लिए सड़क का करवट कोण कितना होना चाहिए? (g = 10 मी./से.²)

हल– दिया गया है–

$$r = 20 \text{ मीटर}$$
$$v = 10 \text{ मी./से.}$$
$$g = 10 \text{ मी./से.}^2$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$= \frac{(10)^2}{20 \times 10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5) = 27^\circ \text{ (लगभग)}$$

उदा 56.एक निकाय पर तीन संगामी बल $\vec{F_1} = 2\hat{i}$ न्यूटन $\vec{F_2} = -6\hat{j}$ न्यूटन तथा $\vec{F_3} = 3\hat{j}$ न्यूटन कार्यरत है। क्या वस्तु सन्तुलन की स्थिति में है? यदि नहीं तो संतुलन स्थिति के लिए कितना बल और लगाना चाहिए?

हल– निकाय पर परिणामी बल

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$
$$\vec{F} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{j}$$
$$\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) \text{ न्यूटन}$$

इस प्रकार परिणामी बल अशून्य है अतः निकाय संतुलित अवस्था में नहीं है।

निकाय को संतुलित अवस्था में लाने के लिए यदि एक अन्य बल $\vec{F_4}$ लगाया जाता है। तब

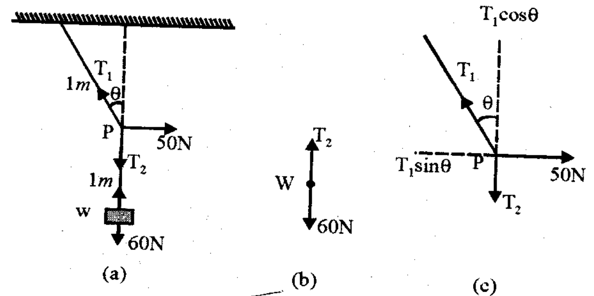
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 0$$
$$\vec{F_4} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3})$$
$$\vec{F_4} = -(2\hat{i} - 3\hat{j}) \text{ न्यूटन}$$
$$\vec{F_4} = -2\hat{i} + 3\hat{j} \text{ न्यूटन}$$

$$\Rightarrow \qquad F_4 = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2}$$

$$F_4 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ न्यूटन}$$

उदा 57. 6 kg संहति के किसी पिण्ड को छत से 2 m लंबाई की डोरी द्वारा लटकाया गया है। डोरी के मध्य-बिन्दु पर चित्र में दर्शाए अनुसार क्षैतिज दिशा में 50 N बल लगाया जाता है। साम्यावस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है?

(g = 10 m s^{-2} लीजिए) : डोरी ...



चित्र 4.35

हल– दिया गया है–

$m = 6$ किग्रा.

F = 50 न्यूटन

g = 10 मी./से.²

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T_1 \sin\theta = F \qquad \ldots(1)$$
$$T_1 \cos\theta = T_2 = W \qquad \ldots(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{W} = \frac{F}{mg}$$

$$= \frac{50}{6 \times 10} = \frac{5}{6}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40^\circ$$

उदा.58.एक 2 किग्रा. का ब्लॉक 30° के घर्षण रहित आनत तल पर फिसलता है। तल पर 4 मी. की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा? [g = 10 मी./से.²]

हल– दिया गया है–S = 4 मी., $u = 0$, g = 10 मी./से.²

30° के आनत तल पर त्वरण

$$a = g\sin 30^\circ$$
$$= 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ मी./से.}^2$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ से}$$

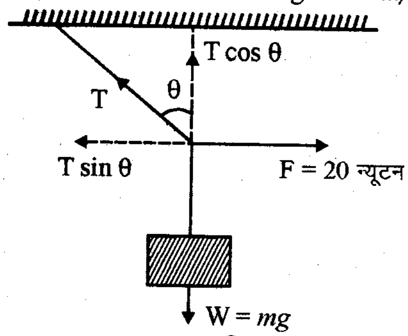
$$4 = 0 + \frac{1}{2} \times 5.t^2$$

$$t^2 = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$t = \sqrt{1.6}$$
$$= 1.28 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.59.एक 3 किग्रा. द्रव्यमान का पिण्ड द्रव्यमान रहित रस्सी के द्वारा लटकाया गया है। रस्सी के मध्य बिन्दु पर एक 20 न्यूटन का बल क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। रस्सी का साम्यावस्था में ऊर्ध्वाधर तल से कोण ...

$m = 3$ किग्रा.
$F = 20$ न्यूटन
$g = 10$ मी./से.^{2}



चित्र 4.36

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T \sin\theta = F \quad ...(1)$$
$$T \cos\theta = W \quad ...(2)$$

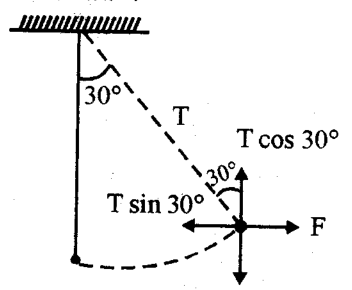
समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{W} = \frac{F}{mg} = \frac{20}{3 \times 10} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 34° \text{ (लगभग)}$$

उदा.60. 30 ग्राम द्रव्यमान का एक पिण्ड एक लम्बे धागे से बँधा है। एक क्षैतिज बल उस पिण्ड को इस प्रकार विस्थापित करता है कि अब धागा ऊर्ध्वाधर दिशा से 30° का कोण बना रहा है। बल का परिमाण संगणित करो।

हल– साम्यावस्था की स्थिति में



चित्र 4.37

$$T \sin 30° = F \quad ...(1)$$
$$T \cos 30° = mg \quad ...(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan 30° = \frac{F}{mg}$$

$$\Rightarrow \quad F = mg \tan 30°$$

$$= 30 \times g \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

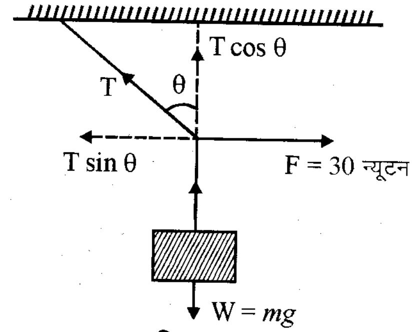
$$= \frac{30\sqrt{3}}{3} g = 10\sqrt{3} g$$

$= 10\sqrt{3}$ ग्राम भार

उदा.61. 4 किग्रा. के एक पिण्ड को 3 मीटर लम्बाई की रस्सी के द्वारा छत से लटकाया गया है। रस्सी के मध्य बिन्दु पर 30 न्यूटन का बल क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। साम्यावस्था की स्थिति के लिए ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया जाने वाला कोण ज्ञात कीजिए। रस्सी का द्रव्यमान नगण्य है। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$m = 4$ किग्रा. $F = 30$ न्यूटन
$g = 10$ मी./से.^{2}



चित्र 4.38

साम्यावस्था की स्थिति में

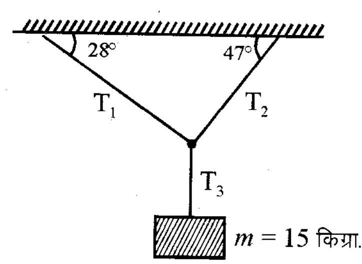
$$T \sin\theta = F \quad ...(1)$$
$$T \cos\theta = mg \quad ...(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{30}{4 \times 10} = \frac{3}{4}$$

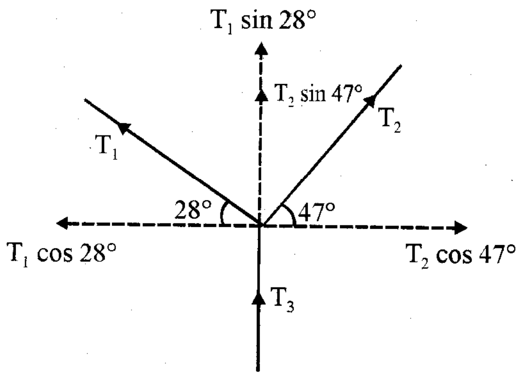
$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37° \text{ (लगभग)}$$

उदा.62.चित्रानुसार 15 किग्रा. द्रव्यमान का एक बक्सा तीन डोरियों से लटकाया गया है। डोरियों में तनाव ज्ञात कीजिए। (डोरियों का द्रव्यमान नगण्य मान लिया जाये।) ($\sin 28° = 0.469$, $\sin 47° = 0.731$, $\cos 28° = 0.883$, $\cos 47° = 0.682$)



चित्र 4.39

हल– दिए गए चित्र को सरलतम रूप में निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–



चित्र 4.40

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T_3 = W = mg \quad ...(1)$$
$$= 15 \times 9.8$$
$$= 147 \text{ न्यूटन}$$
$$T_1 \cos 28° = T_2 \cos 47° \quad ...(2)$$
$$T_1 \sin 28° + T_2 \sin 47° = W = T_3 \quad ...(3)$$

समी. (2) से $T_1 (0.883) = T_2 (0.682)$

$$T_1 = 0.772\, T_2 \quad ...(4)$$

समी. (3) से

$$T_1 (0.469) + T_2 (0.731) = 147$$

समी. (4) से T_1 का मान रखने पर

$$0.772 \times 0.469\, T_2 + 0.731\, T_2 = 147$$
$$1.093\, T_2 = 147$$
$$\therefore \quad T_2 = 134.5 \text{ न्यूटन}$$

यह मान समीकरण (4) में रखने पर

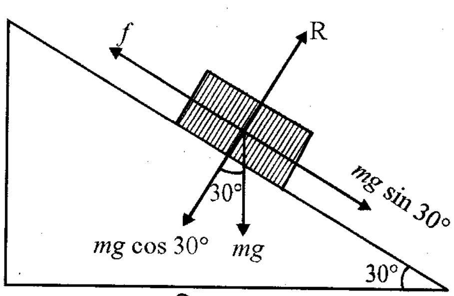
$$T_1 = 0.772 \times 134.5$$
$$= 103.8 \text{ न्यूटन}$$

उदा.63.एक धातु का एक ब्लॉक धातु से बनी नत तल की सतह पर रखा हुआ है तथा सतह क्षैतिज के साथ 30° का कोण बनाती है। यदि ब्लॉक का द्रव्यमान 0.5 किग्रा. तथा घर्षण गुणांक 0.2 है तो-

(i) वस्तु को फिसलने से रोकने के लिए आवश्यक बल क्या होगा?

(ii) सतह पर ऊपर की ओर गति कराने में बल क्या होगा?

हल–



चित्र 4.41

दिया गया है– $\theta = 30°$

$$m = 0.5 \text{ किग्रा.}$$
$$\mu = 0.2$$

(i) फिसलने के लिए आवश्यक बल

$$= mg \sin 30° - f$$
$$= mg \sin 30° - \mu R \qquad (\because f = \mu R)$$
$$= mg \sin 30° - \mu mg \cos 30° \qquad (\because R = mg \cos 30°)$$
$$= mg (\sin 30° - \mu \cos 30°)$$
$$= 0.5 \times 9.8 (0.5 - 0.2 \times 0.866)$$
$$= 4.9 (0.5 - 0.1732)$$
$$= 1.6 \text{ न्यूटन}$$

(ii) सतह पर ऊपर की ओर गति कराने के लिए आवश्यक बल

$$= mg \sin 30° + f$$
$$= mg \sin 30° + \mu R$$
$$= mg \sin 30° + \mu\, mg \cos 30°$$
$$= mg (\sin 30° + \mu \cos 30°)$$
$$= 0.5 \times 9.8 (0.5 + 0.2 \times 0.866)$$
$$= 4.9 (0.5 + 0.1732) = 3.299 \text{ न्यूटन}$$

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. किसी वस्तु पर यदि नेट बल शून्य है तो उसका त्वरण क्या होगा?

उत्तर– इस स्थिति में वस्तु का त्वरण a शून्य होगा क्योंकि त्वरण

$$a = \frac{F}{m} \qquad \because \; F = 0 \text{ होने पर } a = 0$$

प्र.2. किसी वस्तु के संवेग का सूत्र लिखिए।

उत्तर– संवेग $\vec{p}$ = द्रव्यमान (m) × वेग ($\vec{v}$)

प्र.3. न्यूटन के गति का द्वितीय नियम सूत्र रूप में लिखिए।

उत्तर– $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

प्र.4. न्यूटन के गति के तृतीय नियम में क्रिया एवं प्रतिक्रिया की दिशा क्या होती है?

उत्तर– न्यूटन के गति के तृतीय नियम में क्रिया एवं प्रतिक्रिया परस्पर विपरित दिशा में होती है।

प्र.5. परिवर्ती द्रव्यमान वाले तंत्र का एक उदाहरण दीजिए।

उत्तर– रॉकेट नोदन।

प्र.6. किसी दो सम्पर्कित पृष्ठों के मध्य स्थैतिक एवं गतिक घर्षण में से किसका मान अधिक होता है?

उत्तर– स्थैतिक घर्षण का मान, गतिक घर्षण की तुलना में अधिक होता है।

प्र.7. μ_s एवं μ_k में किसका मान अधिक होता है?

उत्तर– स्थैतिक घर्षण गुणांक μ_s का मान गतिक घर्षण गुणांक μ_k की तुलना में अधिक होता है।

प्र.8. एक समान वृत्तीय गति में कौनसा बल विद्यमान होता है?

उत्तर– एक समान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्रीय बल विद्यमान होता है।

प्र.9. समतल वृत्ताकार पथ पर एक वाहन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कैसे प्राप्त होता है?

उत्तर- समतल वृत्ताकार पथ पर वाहन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल घर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है?

प्र.10. एक बंकित वृत्ताकार पथ पर घर्षण बल के अलावा आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कैसे प्राप्त होता है?

उत्तर- अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के घटक $R\sin\theta$ द्वारा जबकि θ सड़क का बंकन कोण या करवट कोण है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. स्पष्ट कीजिए कि क्यों किसी तीव्र गति से चल रही बस के यकायक रूकने पर यात्री आगे की ओर गिरते है?

उत्तर- इसका कारण है कि यात्री के शरीर का निचला हिस्सा बस के साथ विरामावस्था में आ जाता है परन्तु ऊपरी हिस्सा गति के जड़त्व के कारण आगे की ओर गतिमान रहता है। जिससे यात्री आगे की ओर गिरता है।

प्र.2. न्यूटन के गति के प्रथम नियम को जड़त्व का नियम क्यों कहते हैं?

उत्तर- न्यूटन का गति का प्रथम नियम निम्न दो तथ्यों में बाँटा जा सकता है:

(i) प्रत्येक वस्तु अपनी स्थिरावस्था का बनाए रखती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल आरोपित नहीं किया जाये।

(ii) प्रत्येक वस्तु अपनी सरल रेखीय एक समान गति को बनाए रखती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल आरोपित नहीं किया जाये।

मूल रूप से जड़त्व की परिभाषा यही है। इस कारण गति का प्रथम नियम जड़त्व का नियम कहलाता है।

प्र.3. क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को लपकते समय अपने हाथ गेंद के साथ पीछे की ओर क्यों खींचता है?

उत्तर- इसका कारण है कि खिलाड़ी हाथ पीछे की तरफ खींचकर गेंद के कैच लेने के समय को बढ़ाता है ताकि हाथ पर आरोपित कम बल के कारण उसे चोट नहीं लगे।

प्र.4. बल की परिभाषा दीजिए।

उत्तर- बल वह भौतिक राशि है जो स्थिर वस्तु को गतिमान या गतिमान वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करता है अथवा ऐसा करने का प्रयास करता है।

प्र.5. एक जड़त्वीय तंत्र के अन्तर्गत एक कण का त्वरण मापने पर शून्य आता हैं। क्या हम कह सकते हैं कि कण पर कोई बल कार्यरत नहीं है? स्पष्ट कीजिए।

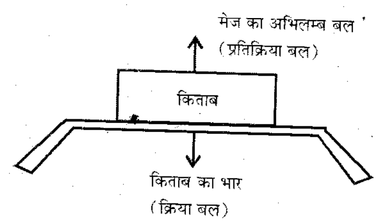
उत्तर- एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के अन्तर्गत एक कण का त्वरण मापने पर शून्य आता है। अत: गतिशील होने की दिशा में कण समान वेग से गतिशील होगा या स्थिर रहेगा क्योंकि इस दिशा में कोई बल या बल का घटक कार्यकारी नहीं होगा किन्तु गति के लम्बवत दिशा में बल कार्यकारी हो सकता है।

प्र.6. न्यूटन के गति के तृतीय नियम के अनुसार रस्साकशी के खेल में प्रत्येक टीम अपनी विरोधी टीम को समान बल से खींचता है तो फिर एक टीम जीतती है और दूसरी टीम हार जाती है, ऐसा क्यों?

उत्तर- रस्साकशी के खेल में प्रत्येक टीम विरोधी टीम को समान बल से खींचती है किन्तु मध्य में लगी गाँठ के इर्दगिर्द दोनों टीमों के द्वारा रस्सी में उत्पन्न तनाव भिन्न-भिन्न होता है। इस तनाव की भिन्नता के कारण एक टीम की ओर परिणामी बल दूसरी ओर की तुलना में बढ़ जाने से वह टीम जीत जाती है और दूसरी हार जाती है।

प्र.7. एक मेज पर एक किताब रखी हुई हैं। किताब का भार एवं मेज द्वारा किताब पर लगाया गया अभिलम्ब बल परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत है। क्या इसे न्यूटन के तृतीय नियम का उदाहरण माना जा सकता है? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- जब मेज पर किताब रखी जाती है तब किताब का भार मेज पर क्रिया बल के रूप में तथा मेज द्वारा किताब पर लगाया गया अभिलम्ब बल प्रतिक्रिया बल के रूप में होता है। किताब संतुलन में होने के कारण क्रिया व प्रतिक्रिया बल परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत है एवं दोनों बल भिन्न-भिन्न पिण्डों पर आरोपित है जोकि न्यूटन के गति के तृतीय नियम का पालन करते हैं।



चित्र: 4.42

प्र.8. किसी वस्तु पर लगने वाले आवेग की परिभाषा लिखिए।

उत्तर- किसी पिण्ड की गति पर बल के कुल प्रभाव को आवेग कहते हैं। इसका मान वस्तु पर आरोपित बल तथा जितने समयान्तराल के लिए बल कार्यरत हैं का गुणनफल होता है।

यदि किसी वस्तु पर कोई बल $\vec{F}$ अल्प समय dt के लिए कार्यरत हैं तब बल का आवेग

$$d\vec{I} = \vec{F}dt$$

प्र.9. आवेगी बल क्या होते हैं?

उत्तर- परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए कम समय के लिए कार्यरत अत्यधिक परिमाण के बल को आवेगी बल कहते हैं।

प्र.10. आवेग-संवेग प्रमेय लिखिए।

उत्तर- इस प्रमेय के अनुसार किसी बल का आवेग, उस बल के कारण संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है।

प्र.11. संवेग संरक्षण का नियम लिखिए।

उत्तर- इस नियम के अनुसार कुल बाह्य बल की अनुपस्थिति में किसी निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है।

प्र.12. विलगित निकाय किसे कहते हैं?

उत्तर- वह निकाय जिसका बाह्य वातावरण से कोई सम्बन्ध नहीं हो, विलगित या पृथक्कित निकाय कहलाता है।

प्र.13. किसी बन्दूक से एक गोली छोड़ने पर बन्दूक पीछे की ओर प्रतिक्षिप्त क्यों होती है?

उत्तर- प्रारंभ में गोली के बंदूक से निकलने से पहले गोली तथा बन्दूक मिलकर एक निकाय के रूप में होते हैं तथा इस निकाय का कुल संवेग शून्य होता है। इस संवेग को संरक्षित (शून्य) रखने के लिए बन्दूक का संवेग, गोली के संवेग के बराबर व विपरीत होता है जिससे गोली आगे की ओर निकलती है तो बन्दूक पीछे की ओर प्रतिक्षिप्त होती है।

प्र.14. घर्षण कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर- सामान्यत: घर्षण दो प्रकार के होते हैं-

(1) स्थैतिक घर्षण तथा

(2) गतिक घर्षण

इसके अतिरिक्त घर्षण सर्पी घर्षण, बेलनी या लोटनी घर्षण भी होते हैं।

प्र.15. अभिकेन्द्रीय त्वरण को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10 पर देखें।

प्र.16. किसी वृत्ताकार मोड़ पर एक सड़क को बंकित क्यों किया जाता है?

उत्तर- सड़क के मोड़ पर वाहनों को घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने हेतु सड़क के बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षाकृत थोड़ा ऊँचा उठा दिया जाता है अर्थात् बंकित किया जाता है।

प्र.17. जड़त्वीय निर्देश तंत्र को परिभाषित कीजतिए।

उत्तर- निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण रहित दिखायी देती है, जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है।

प्र.18. अजड़त्वीय निर्देश तंत्र को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण सहित दिखायी देती है, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है।

प्र.19. क्या पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र है?

उत्तर- नहीं, पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं है क्योंकि पृथ्वी सूर्य के चारों ओर घूमती है तथा साथ ही अपने स्वयं की अक्ष पर भी घूर्णन करती है। इसलिए यह घूमता हुआ निर्देश तंत्र है। अत: पृथ्वी एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. न्यूटन के गति का द्वितीय नियम क्या है? इसे परिभाषित करिए। इससे गति के प्रथम नियम को व्युत्पन्न करिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.4 पर देखें।

प्र.2. न्यूटन के गति का तृतीय नियम परिभाषित कीजिए। इसे दो उदाहरणों द्वारा समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.6 पर देखें।

प्र.3. आवेग-संवेग प्रमेय को लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए। ग्राफीय विधि से आवेग का मान कैसे ज्ञात करेंगे?

उत्तर- अनुच्छेद 4.5 पर देखें।

प्र.4. किसी N कणों के निकाय के लिए संवेग संरक्षण का नियम लिखिए। न्यूटन के द्वितीय नियम का उपयोग करते हुए इसे व्युत्पन्न करिये। एक उदाहरण द्वारा संवेग संरक्षण के नियम को समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.7 पर देखें।

प्र.5. रॉकेट की गति का वर्णन करिये तथा इसके वेग के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.8 भाग 3 पर देखें।

प्र.6. घर्षण कितने प्रकार का होता है? उनके नाम लिखिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.7. स्थैतिक घर्षण की दिशा कैसे ज्ञात करेंगे? समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.8. स्थैतिक एवं गतिज घर्षण गुणांकों को परिभाषित कीजिए। इनका मान कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.9. क्षैतिज तल में एक पिण्ड की वृत्ताकार गति का वर्णन कीजिए तथा आवर्तकाल के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10.1 का भाग (i) पर देखें।

प्र.10. ऊर्ध्वाधर तल में एक पिण्ड की वृत्ताकार गति का वर्णन करिए। वृत्त के उच्चतम एवं निम्नतम बिन्दुओं पर एक डोरी में उत्पन्न तनाव के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए। क्रान्तिक वेग किसे कहते हैं? इसका सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10.1 का भाग (ii) पर देखें।

प्र.11. एक समतल वृत्ताकार पथ पर एक वाहन की गति का वर्णन करते हुए वाहन की अधिकतम गति के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.11 पर देखें।

प्र.12. वृत्ताकार मोड़ पर एक सड़क को बंकित क्यों किया जाता है? ऐसे मोड़ पर एक वाहन की अधिकतम गति के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए। यदि सड़क में घर्षण को नगण्य मान लिया जाय तो बंकन कोण के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.11 पर देखें।

प्र.13. एक आनत तल पर एक पिण्ड की गति का वर्णन करिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.12 पर देखें।

प्र.14. जड़त्वीय एवं अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों में अन्तर स्पष्ट करिये। क्या पृथ्वी निर्देश तंत्र है? स्पष्ट कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.13 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.13 है तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिये जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिये आवश्यक है।

उत्तर– दिया गया है– $\mu_s = 0.13,\ g = 9.8\ m/s^2;\ a_{max} = ?$

प्रश्नानुसार बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण है।

अत: $ma \le (f_s)_{max}$

$\Rightarrow \quad ma \le \mu_s R$

$\Rightarrow \quad ma \le \mu_s mg$

$$a_{max} = \mu_s g = 0.13 \times 9.8 = 1.27\ m/s^2$$

प्र.2. 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किये 3m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है, टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जायेगा?

हल– पुस्तक उदाहरण 4.8 से देखें।

प्र.3. किसी विस्फोट में एक बम के तीन टुकड़े हो जाते हैं जिसके दो टुकड़े एक दूसरे के लम्बवत् गति करते हैं। यदि प्रथम टुकड़े का द्रव्यमान 2kg व वेग 12 ms⁻¹, दूसरे का द्रव्यमान 1kg व वेग 8ms⁻¹ तथा तीसरे टुकड़े का वेग 20 ms⁻¹ हो तो उसके द्रव्यमान की गणना कीजिये।

हल– दिया गया है– $m_1 = 2kg, v_1 = 12m/s$

$m_2 = 1\ kg, v_2 = 8\ m/s, v_3 = 20\ m/s, m_3 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से–

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$\because$ $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ परस्पर लम्बवत् है।

$$\therefore \quad p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$m_3 v_3 = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{v_3}$$

$$= \frac{\sqrt{(2)^2 \times (12)^2 + (1)^2 \times (8)^2}}{20}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{4 \times 144 + 1 \times 64}}{20} = \frac{\sqrt{640}}{20} = 1.26\ kg$$

प्र.4. किसी हल्की घर्षण रहित घिरनी पर चढ़ी डोरी के दो सिरों पर 8kg व 12kg द्रव्यमान के दो पिण्डों को बाँधा गया है। पिण्डों को मुक्त छोड़ने पर उनके त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिये।

हल– दिया गया है– $m_1 = 8kg,\ m_2 = 12kg$

यहाँ $m_2 > m_1$

त्वरण

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g = \left(\frac{12-8}{8+12}\right) 10 = \frac{4}{20} \times 10 = 2\ m/s^2$$

तनाव $T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$

$$= \left(\frac{2 \times 8 \times 12}{8+12}\right) 10 = \frac{2 \times 8 \times 12 \times 10}{20} = 96N$$

प्र.5. कोई बल्लेबाज किसी गेंद को 45° के कोण पर विक्षेपित कर देता है। ऐसा करने पर वह गेंद की आरम्भिक चाल 54km h⁻¹ में कोई परिवर्तन नहीं करता है तो गेंद के आवेग की गणना कीजिये यदि गेंद का द्रव्यमान 0.15 kg हों।

हल– माना कि बल्ले की स्थिति 'O' है। चित्रानुसार m द्रव्यमान की गेंद प्रारंभ में v चाल से AO के अनुदिश गतिशील होकर बल्ले से टकरा कर यह OB के अनुदिश प्रतिक्षिप्त होती है।

$$\angle AOB = 45°$$

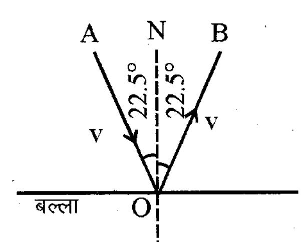
माना ON बल्ले पर अभिलम्ब है तथा

$$\angle AON = \angle NOB = \theta = \frac{45°}{2} = 22.5°$$

दिया गया है– $v = 54$ किमी./घंटा

$$= \frac{54 \times 1000}{3600} \text{ मी./से.}$$

$= 15$ मी./से.



चित्र 4.43

गेंद का प्रारंभिक संवेग $= mv\ \cos\theta$

$p_i = 0.15 \times 15 \times \cos 22.5°$

$= 2.25 \times 0.9239$

$= 2.08$ किग्रा. × मी./से.

(दिशा NO के अनुदिश)

गेंद का अंतिम संवेग $= -m\,v\cos\theta$

$p_f = -2.08$ किग्रा.× मी./से.

(दिशा ON के अनुदिश)

$\because$ गेंद को प्रदत्त आवेग = गेंद के रैखिक संवेग में परिवर्तन

$= p_f - p_i$
$= -mv\cos\theta - mv\cos\theta$
$= -2.08 - 2.08 = -4.16$

आवेग का परिमाण = 4.16 किग्रा.× मी./से.

प्र.6. $15ms^{-1}$ की आरम्भिक चाल से गतिशील 20kg द्रव्यमान के एक पिण्ड पर 50N का स्थाई मंदन बल आरोपित है तो पिण्ड को रुकने में लगे समय की गणना कीजिये।

हल– दिया गया है:– $u = 15 \frac{\text{मी.}}{\text{से.}}$, m = 20 किग्रा.

F = – 50 न्यूटन (मंदन बल)

$v = 0 \frac{\text{मी.}}{\text{से.}}, t = ?$

$\because F = ma$

$\Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-50}{20} = -2.5 \frac{\text{मी.}}{\text{से.}^2}$

$\because v = u + at$

$\Rightarrow 0 = 15 + (-2.5) \times t$

$\Rightarrow t = \frac{15}{2.5} = 6$ सेकण्ड

प्र.7. 100 kg द्रव्यमान की किसी तोप से 0.020kg का गोला दागा जाता है। यदि गोले की नालमुखी चाल $80\ ms^{-1}$ है तो तोप की प्रतिक्षेप चाल क्या होगी।

हल– दिया गया है–तोप का द्रव्यमान $m_g = 100$ किग्रा.

गोले का द्रव्यमान $m_b = 0.020$ किग्रा.

गोले की चाल $v_b = 80$ मी./से.

तोप की प्रतिक्षेप चाल $v_g = ?$

संवेग संरक्षण नियमानुसार

निकाय का प्रारंभिक संवेग= निकाय का अंतिम संवेग

$\Rightarrow 0 = m_b v_b + m_g v_g$ [$\because$ निकाय (तोप +गोला) प्रारंभ में विराम में है।]

$\Rightarrow v_g = -\frac{m_b}{m_g} v_b$

$\Rightarrow v_g = -\frac{0.020}{100} \times 80$

$= -0.016$ मी./से.

अतः तोप की प्रतिक्षेप चाल = 0.016 मी./से.

प्र.8. यदि 0.1 kg द्रव्यमान के एक कण की गति $y = \left(0.3t + \frac{9.8}{2}t^2\right)$ मीटर से वर्णित है तो उस कण पर लगने वाले बल की गणना कीजिये।

हल– $\because$ कण का विस्थापन $y = 0.3t + \frac{9.8}{2}t^2 = 0.3t + 4.9t^2$

$\therefore$ वेग $V = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0.3t + 4.9t^2) = 0.3(1) + 4.9(2t)$

$v = 0.3 + 9.8t$ मी/से.

त्वरण $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.3 + 9.8t) = 0 + 9.8(1)$

$a = 9.8$ मी/से^{2}

$\therefore$ कण पर कार्यरत बल F = ma

$F = 0.1 \times 9.8 = 0.98$ न्यूटन

प्र.9. किसी डोरी के एक सिरे से बँधा 0.25 किग्रा. संहति का कोई पत्थर क्षैतिज तल में 1.5m त्रिज्या के वृत्त पर 40 rev/min की चाल से चक्कर लगाता है। डोरी में तनाव कितना है? यदि डोरी 200N के अधिकतम तनाव को सहन कर सकती है, तो वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को घुमाया जा सकता है।

हल– दिया गया है– m = 0.25 किग्रा.

आवृत्ति $f = 40$ परिक्रमण/मिनट

$= \frac{40}{60}$ परिक्रमण/सेकण्ड

$\because$ कोणीय चाल $\omega = 2\pi f$

$= 2 \times 3.14 \times \frac{40}{60}$ रेडियन/सेकण्ड

$= 4.19$ रेडियन/सेकण्ड

$\because$ डोरी में तनाव T आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है अतः

$$T = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

$= 0.25 \times 1.5 \times (4.19)^2$ न्यूटन

$= 6.58 \approx 6.6$ न्यूटन

अब प्रश्नानुसार डोरी 200 न्यूटन का अधिकतम तनाव सहन कर सकती है अतः

$\therefore T_{max} = \frac{m v_{max}^2}{r}$

$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{T_{max} r}{m}} = \sqrt{\frac{200 \times 1.5}{0.25}}$

$= 34.64$ मी./से.

प्र.10. 5.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर 8N व 6N के दो लंबवत् बल आरोपित हैं। पिण्ड के त्वरण का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

उत्तर– माना कि $\vec{F_1}$ तथा $\vec{F_2}$ दो परस्पर लम्बवत् बल है।

दिया गया है : $F_1 = 8$ न्यूटन, $F_2 = 6$ न्यूटन

अतः पिण्ड पर कार्यरत परिणामी बल का परिमाण

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

= 10 न्यूटन

त्वरण $a = \frac{F}{m} = \frac{10}{5}$

= 2 मी./से.^{2}

यदि परिणामी बल $\vec{F}$, बल $\vec{F_1}$ के साथ θ कोण बनाता है तब

$$\tan\theta = \frac{F_2}{F_1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\theta = 37°$$

यह परिणामी बल की दिशा है, अतः पिण्ड के त्वरण की दिशा, बल की दिशा ही होगी।

गति के नियम (LAWS OF MOTION)

4 CHAPTER

4.1 प्रस्तावना (Intoduction)

- पिछले अध्याय में हमने गतिकी के अध्ययन में गति के उन कारणों का अध्ययन नहीं किया जिनके प्रभाव में कोई वस्तु गतिशील होती है। किसी वस्तु की गति को प्रभावित करने वाले कारक द्रव्यमान तथा बल हैं। इस अध्याय में हम गति के कारक बल तथा गति के नियमों का अध्ययन करेंगे। भौतिक विज्ञान की यह शाखा गति विज्ञान (Dynamics) कहलाती है।

4.2 बल की संकल्पना (Concept of Force)

- दैनिक जीवन में हमारा अनुभव है कि कोई वस्तु तब तक स्थिर रहती है जब तक कि उसे खींचा या धक्का नहीं दिया जाये। इसी प्रकार गतिशील वस्तु को रोकने के लिए भी गति के विपरीत धक्का लगाया जाता है या खींचा जाता है। इन सभी स्थितियों में एक बाह्य कारक की आवश्यकता होती है जिसे बल कहते हैं।

इस प्रकार वह कारक जो स्थिर वस्तु को गतिशील या गतिशील वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करता है अथवा ऐसा करने का प्रयास करता है, बल कहलाता है। बल वह भौतिक राशि है जो किसी वस्तु में त्वरण उत्पन्न करे अथवा त्वरण उत्पन्न करने का प्रयास करे।

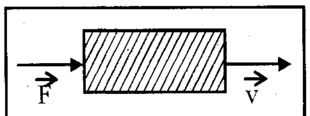
जब वस्तु पर कार्यरत बल संतुलित होते हैं तब वह स्थिरावस्था में तथा जब असंतुलित बल कार्यरत होते हैं तब वह परिणामी बल की दिशा में गति करती है।

किसी पिण्ड पर कार्यरत बल की व्याख्या करने के लिए निम्न तथ्यों का निर्धारण आवश्यक होता है–

(1) कार्यरत बल का परिमाण
(2) कार्यरत बल की दिशा तथा
(3) कार्यरत बल के बिन्दु की स्थिति पर

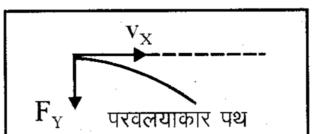
कार्यरत बल की दिशा का गति पर प्रभाव
(Effect on the motion due to direction of applied force)

स्थिति (i) जब कार्यरत बल की दिशा कण के विस्थापन की दिशा में हो–इस स्थिति में कार्यरत बल का परिमाण नियत होने पर कण का त्वरण भी नियत रहता है।



(*a*).

स्थिति (ii) जब नियत परिमाण का बल नियत वेग से गतिशील कण के प्रारंभिक वेग की दिशा के लम्बवत् कार्यरत हो–इस स्थिति में कण परवलयाकार पथ पर गति करता है।



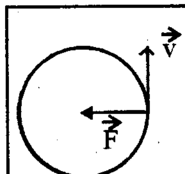
(b).

स्थिति (iii) जब नियत परिमाण का बल गतिशील कण के लम्बवत् कार्यरत हो–इस स्थिति में कण नियत चाल से वृत्ताकार पथ पर गति करता है।

(iii) अनुभव के आधार पर बल दो प्रकार के होते हैं–

1. सम्पर्क बल–वे बाह्य बल जो किसी वस्तु के सम्पर्क में आने पर वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करते हैं या करने का प्रयास करते हैं। सम्पर्क बल कहलाते हैं।

उदाहरण–हाथ से मेज को खींचना, साईकिल पर पैडल मारना आदि।



चित्र 4.1 (c)

2. दूरी पर कार्यरत बल–वे बाह्य बल जो किसी वस्तु के सम्पर्क में आए बिना ही वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करने का प्रयास करते हैं। दूरी पर कार्यरत बल या क्षेत्रीय बल कहलाते हैं।

उदाहरण–गुरुत्वीय बल, चुम्बकीय बल, कूलॉम बल आदि। अतः बाह्य बल किसी पिण्ड के संपर्क में हैं यह आवश्यक नहीं है। बाह्य बल एक दूरी से भी किसी पिण्ड पर बल लगा सकता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. बल के कारण वस्तु में त्वरण या मंदन उत्पन्न होता है।
2. बल के कारण वस्तु की आकृति या आकार में परिवर्तन संभव हैं।
3. वस्तु पर बल लगाने के लिए उसे छूना (सम्पर्क) आवश्यक नहीं है।
4. यदि किसी वस्तु पर एक से अधिक बल कार्यरत हों और वस्तु स्थिरावस्था में हो तो यह बलों की संतुलन की स्थिति कहलाती है।
5. यदि किसी वस्तु पर एक से अधिक बल कार्यरत हों और कार्यरत बल संतुलन की स्थिति में नहीं हों अर्थात् असंतुलित बल कार्यरत हों तो वस्तु परिणामी बल की दिशा में गति करेगी।

4.3 जड़त्व एवं न्यूटन का गति का प्रथम नियम (Inertia and Newton's First Law of Motion)

जड़त्व (Inertia):

(i) वस्तु का वह गुण जिसके कारण वह रेखीय गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है, जड़त्व कहलाता है। यह वस्तु के द्रव्यमान के बराबर होता है।

(ii) यदि कोई वस्तु स्थिर है तो वह स्थिर रहना चाहती है तथा यदि गतिशील है तो एक समान वेग से गतिशील रहना चाहती है। जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं करे। वस्तु के

इस गुण को जड़त्व का गुण कहते हैं।

(iii) यदि नेट बाह्य बल शून्य है तो विरामावस्था में रह रहा,पिण्ड विरामावस्था में रहता है और गतिशील पिण्ड निरंतर एक समान वेग से गतिशील रहता है। पिण्ड के इस गुण को जड़त्व कहते हैं।

(iv) कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा एक समान गति की अवस्था में स्वयं तब तक कोई परिवर्तन नहीं कर सकता जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं कर सकें।

(v) पिण्ड का वह गुण जिसके कारण वह स्थिर अवस्था या एक समान गति अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है जड़त्व कहलाता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(1) जड़त्व एक भौतिक राशि नहीं है, यह केवल वस्तु का अंतर्निहित गुण है जो कि वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है।

(2) जड़त्व का कोई मात्रक अथवा विमा नहीं होती।

(3) समान द्रव्यमान की दो वस्तुओं (जिनमें से एक गतिमान तथा दूसरी स्थिर है) का जड़त्व समान होता है, क्योंकि जड़त्व केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। यह वस्तु के वेग व आकार पर निर्भर नहीं करता।

(4) जड़त्व से तात्पर्य है परिवर्तन के प्रति प्रतिरोध।

(5) **यदि समान बल दो भिन्न-भिन्न द्रव्यमान की वस्तुओं पर आरोपित किया जाता है तब कम द्रव्यमान (हल्की वस्तु) की वस्तु में अधिक त्वरण होगा जबकि अधिक द्रव्यमान (भारी वस्तु) की वस्तु में कम त्वरण होगा।** इस प्रकार जिस वस्तु का जड़त्व अपेक्षाकृत अधिक है उस पर बाह्य बल आरोपित करने से अपेक्षाकृत कम त्वरण उत्पन्न होगा।

न्यूटन का गति का प्रथम नियम (जड़त्व का नियम) (Newton's First Law of Motion)

यह नियम गैलीलियो के प्रायोगिक प्रेक्षणों पर आधारित है।

इस नियम के अनुसार **यदि कोई वस्तु स्थिर है तो वह स्थिर ही रहेगी तथा गतिशील है तो नियत वेग से गतिशील ही रहेगी जब तक उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल कार्य नहीं करता है। इसे जड़त्व का नियम भी कहते हैं।**

इस प्रकार किसी वस्तु की स्थिर अवस्था अथवा एक समान वेग से गतिशील अवस्थाओं में परिवर्तन के लिए बाह्य असंतुलित बल आवश्यक है दोनों ही शून्य त्वरण की अवस्थायें हैं।

यदि किसी वस्तु पर लगने वाला नेट बाह्य बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है। शून्येत्तर त्वरण केवल तभी हो सकता है जब वस्तु पर कोई बाह्य असंतुलित बल अर्थात् नेट बाह्य बल लगता हो।

न्यूटन की गति के प्रथम नियम के उदाहरण–

न्यूटन का प्रथम नियम जड़त्व को परिभाषित करता है। जड़त्व तीन प्रकार का होता है–

विराम का जड़त्व, गति का जड़त्व, दिशा का जड़त्व।

(1) **विराम का जड़त्व (Inertia of rest)**–यह वस्तु का वह गुण है जिसके कारण वस्तु स्वयं अपनी विरामावस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती है। इसका अर्थ है, कि यदि कोई वस्तु विरामावस्था में है, तो वह विरामावस्था में ही रहती है अर्थात् स्वयं गति प्रारंभ नहीं कर सकती।

उदाहरण-(i) यदि हम किसी गिलास के ऊपर रखे एक चिकने कार्ड बोर्ड

पर कोई सिक्का रखते हैं तथा उँगलियों की सहायता से कार्ड बोर्ड को एका एक दूर धकेलते हैं, तब कार्ड–बोर्ड दूर गिर जाता है, जबकि सिक्का विराम के जड़त्व के कारण गिलास में गिर जाता है।

(ii) एक आदमी बस में स्वतंत्र रूप से खड़ा है। जब बस अचानक चलना प्रारम्भ करती है, तब वह पीछे की ओर गिरता है।

जब बस अचानक चलना प्रारंभ करती है, तो बस की गति के लिए आवश्यक बल शरीर के निचले भाग में भी संचरित होता है, अतः शरीर का निचला भाग बस के साथ ही गतिमान होता है, जबकि शरीर के ऊपरी भाग में (कमर से ऊपर का भाग) विराम के जड़त्व के कारण कोई बल संचरित नहीं होता, अतः यह हिस्सा अपनी पूर्व अवस्था में ही रहता है। इस प्रकार शरीर के दो हिस्सों के बीच परिणामी विस्थापन होने से शरीर के ऊपरी हिस्से को पीछे की ओर झटका लगता है।

(iii) यदि बस धीमी गति से गतिमान है, तो गति का जड़त्व एकसमान रूप से व्यक्ति के शरीर में संचरित हो जाता है, जिससे व्यक्ति का संपूर्ण शरीर बस के साथ गतिमान हो जाता है तथा व्यक्ति को कोई झटका नहीं लगता।

(iv) जब कोई घोड़ा अचानक दौड़ना शुरू कर देता है, तब घुड़सवार पीछे की ओर गिरने लगता है, ऐसा व्यक्ति के शरीर के ऊपरी हिस्से में विराम के जड़त्व के कारण होता है।

(v) बंदूक की गोली को काँच की खिड़की पर दागने पर यह स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि कोई गेंद पूरी खिड़की के काँच को तोड़ देती है। इसका कारण यह है कि गोली का वेग गेंद की अपेक्षा अत्यधिक होता है, अतः काँच के साथ इसका संपर्क अत्यंत कम समय तक होता है, अतः गोली के कारण गति काँच के केवल छोटे से भाग में ही संचरित होती है। अतः यह काँच की खिड़की से एक स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि गेंद से सम्बन्धित समय तथा संपर्क क्षेत्रफल अधिक होता है। इस समय में गति पूरी खिड़की के काँच में संचरित हो जाती है, अतः यह पूरी खिड़की को तोड़ (Cracks) देती है।

(vi) किसी दरीपट्टी को छड़ से झाड़ने पर इसमें से धूल के कण गिरने लगते हैं, क्योंकि दरीपट्टी को छड़ से झाड़ने पर दरीपट्टी गति में आ जाती है, किन्तु धूल के कण अपनी पूर्वावस्था में ही रहते हैं, अतः दरीपट्टी से अलग हो जाते हैं।

(2) **गति का जड़त्व (Inertia of motion)**–वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वह अपनी एकसमान गति की अवस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती अर्थात् एक समान गति करती हुई वस्तु स्वयं न तो त्वरित होती है अथवा न ही अवमंदित।

उदाहरण (i) जब किसी बस अथवा ट्रेन को अचानक रोक दिया जाता है, तब उसमें बैठे यात्री आगे की ओर झुक जाते हैं, क्योंकि उनके शरीर का निचला हिस्सा बस अथवा ट्रेन के साथ विरामावस्था में आ जाता है, किन्तु ऊपरी हिस्सा गति के जड़त्व के कारण आगे की ओर गतिमान रहता है।

(ii) चलती ट्रेन से कूदने पर व्यक्ति आगे की ओर (रेलगाड़ी की दिशा में) गिरने लगता है।

(iii) लंबी कूद के धावक लंबी कूद से पहले कुछ दूरी तक दौड़ते हैं, क्योंकि दौड़ने पर प्राप्त वेग, लंबी कूद लगाने के वेग में जुड़ जाता है। अतः वह ज्यादा दूरी तक कूद सकता है।

(3) **दिशा का जड़त्व (Inertia of direction)**–वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वह स्वयं की गति की दिशा में परिवर्तन नहीं कर सकती, दिशा का जड़त्व कहलाता है।

उदाहरण-(i) जब कोई कार अचानक वक्राकार मार्ग पर चलने लगती है, तब अंदर बैठे व्यक्ति बाहर की ओर गिरने लगते हैं।

(ii) जब किसी पत्थर को धागे से बाँधकर वृत्तीय मार्ग में घुमाया जाता है अथवा अचानक धागे को छोड़ दिया जाए तो पत्थर दिशा के जड़त्व के कारण वृत्त की स्पर्शज्या के अनुदिश गति करता हुआ गिर जाता है, क्योंकि धागे का खिंचाव बल पत्थर की वृत्तीय गति में सहायक होता है। जैसे ही धागे को छोड़ा जाता है, खिंचाव बल समाप्त हो जाता है तथा पत्थर एक सीधी रेखा के अनुदिश वृत्त की स्पर्श रेखा में गति करता हुआ गिर जाता है।

(iii) किसी वाहन का घूर्णन करता हुआ पहिया कीचड़ को पहिए की स्पर्शज्या के अनुदिश बाहर की ओर फेंकता है, ऐसा दिशा के जड़त्व के कारण होता है।

4.4 संवेग एवं न्यूटन का गति का द्वितीय नियम (Momentum and Newton's Second law of Motion)

संवेग (रेखीय संवेग) (Momentum)

रेखीय गति कर रही वस्तु के द्रव्यमान व वेग के गुणनफल को उसका रेखीय संवेग कहते हैं।

$$\text{संवेग } \vec{p} = m\vec{v} \qquad ...(1)$$

यह सदिश राशि है जिसकी दिशा वेग की दिशा में होती है। यह वस्तु की गति की मात्रा का माप है।

मात्रक–M.K.S. पद्धति में किग्रा.मी./से.

विमा $[M^1 L^1 T^{-1}]$

यदि दो भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुयें नियत वेग से गतिशील हो तो संवेग का मान द्रव्यमान के समानुपाती होता है अर्थात्

$$p \propto m$$

जिससे $m\uparrow$ तब $p\uparrow$ तथा $m\downarrow$ तब $p\downarrow$

इसी प्रकार यदि दो भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की वस्तुओं का रेखीय संवेग नियत हो तो गतिशील वस्तुओं का वेग उनके द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात्

$$v \propto \frac{1}{m}$$

जिससे $m\uparrow$ तब $v\downarrow$ तथा $m\downarrow$ तब $v\uparrow$

न्यूटन का गति का द्वितीय नियम (Newton's Second Law of Motion)

इस नियम के अनुसार **किसी वस्तु के संवेग में परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बाह्य असंतुलित बल के समानुपाती होती है तथा संवेग में यह परिवर्तन बल की दिशा में होता है** अर्थात्

$$\vec{F} \propto \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{F} = K\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(1)$$

यहाँ K समानुपाती नियतांक है जिसका मान चयनित मात्रकों पर निर्भर करता है। मात्रकों का चयन इस प्रकार करते हैं कि K का मान 1 प्राप्त हो।

$\therefore$ K = 1 मानने पर

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(2)$$

$$\because \text{संवेग } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\therefore \qquad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \because \text{त्वरण } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad ...(3)$$

अतः किसी वस्तु का द्रव्यमान तथा उसमें उत्पन्न त्वरण का गुणनफल उस पर आरोपित बल के बराबर होता है तथा त्वरण की दिशा बल की दिशा में होती है।

वस्तुतः–न्यूटन का प्रथम नियम बल की परिभाषा देता है जबकि न्यूटन का द्वितीय नियम बल का परिमाण निर्धारित करता है।

न्यूटन की गति के द्वितीय नियम के उदाहरण–

(i) क्रिकेट का कोई खिलाड़ी तीव्र गति से आती गेंद को पकड़ते समय अपने हाथ को पीछे की ओर खींचता है। इसका कारण यह है कि प्रारंभ में गेंद गतिशील है तथा खिलाड़ी हाथों से गेंद को रोकने के लिए मंदक बल लगाता है। अब यदि खिलाड़ी गेंद को अचानक पकड़ ले तब गेंद का मंदन बहुत अधिक होने से गेंद को रोकने के लिए बहुत अधिक बल लगाना पड़ेगा जिससे खिलाड़ी की हथेली में चोट लग सकती है।

जब खिलाड़ी अपने हाथ को पीछे की ओर ले जाकर गेंद को धीरे से पकड़े तब मन्दन कम होगा। अतः खिलाड़ी को गेंद पकड़ने में कम बल लगाना पड़ेगा और खिलाड़ी की हथेली में चोट लगने की संभावना नहीं रहेगी।

(ii) जब कोई व्यक्ति किसी ऊँचाई से कठोर फर्श पर कूदता है तब व्यक्ति का वेग तुरन्त ही शून्य हो जाता है और व्यक्ति पर फर्श द्वारा आरोपित बल अत्यधिक होता है जिससे व्यक्ति को चोट लग जाती है। इसके विपरीत यदि व्यक्ति उसी ऊँचाई से रेत में कूदता है तब उसके पैर रेत में धँसने से उसके वेग में परिवर्तन धीरे–धीरे होता है जिससे फर्श द्वारा आरोपित बल कम होने से व्यक्ति को चोट नहीं लगती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. गति के द्वितीय नियम में $\vec{F} = 0$ से यह उपलक्षित होता है कि $\vec{a} = 0$ । प्रत्यक्ष रूप से द्वितीय नियम प्रथम नियम के अनुरूप है।
2. गति का द्वितीय नियम एक सदिश नियम है।

   न्यूटन का द्वितीय नियम घटकों के रूप में–

   $\because \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ और $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

   $\because \vec{F} = m\vec{a}$

   $$(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})$$

   $$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$$

   $$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

   $$F_z = \frac{dp_z}{dt} = ma_z$$
3. समान समय के लिए लगाया गया समान बल विभिन्न पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन करता है।
4. बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि कितनी तीव्रता से यह परिवर्तन किया जाता है।

   समान संवेग परिवर्तन आदि अपेक्षाकृत कम समय में किया जाता

है तो अपेक्षाकृत अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है अर्थात् संवेग परिवर्तन की दर अधिक है तो बल अधिक होगा।

5. न्यूटन का द्वितीय नियम नेट बाह्य बल व वस्तु के त्वरण में सम्बन्ध दर्शाता है।

6. दो पिण्ड जो आरंभ में विराम में हैं, पर कोई नियत बल एक निश्चित समय अंतराल के लिए लगाया जाता है तो हल्का पिण्ड भारी पिण्ड की तुलना में अधिक चाल ग्रहण कर लेता है क्योंकि दोनों पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन होता है।

अत: $m_1v_1 = m_2v_2$

यदि $m_1 < m_2$

तब $v_1 > v_2$

7. यदि भिन्न द्रव्यमान वाली वस्तुओं पर समान बल लगाया जाता है तो उनके त्वरणों का अनुपात उनके द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

अत: $a \propto \frac{1}{m}$ $F =$ नियत

माना एक वस्तु का द्रव्यमान m_1 तथा उत्पन्न त्वरण a_1 तथा दूसरी वस्तु का द्रव्यमान m_2 तथा उतना ही बल लगाने पर उत्पन्न त्वरण a_2 हो तो

$$m_1a_1 = m_2a_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

यदि $m_1 < m_2$ तो $a_1 > a_2$

अर्थात् समान बल लगाने पर हल्की वस्तु का त्वरण अधिक भारी वस्तु अर्थात् अधिक जड़त्व वाली वस्तु का त्वरण कम होता है।

8. किसी कण के त्वरण का निर्धारण उसी समय उस पर लगने वाले बल द्वारा किया जाता है।

किसी त्वरित रेलगाड़ी से कोई पत्थर बाहर डालने के क्षण के तुरंत पश्चात् उस पर कोई क्षैतिज त्वरण अथवा बल कार्यरत नहीं होता।

9. **बल के मात्रक (Units of force)**

न्यूटन (M.K.S.), डाइन (C.G.S.) व पाउण्डल (F.P.S.)।

1 न्यूटन बल की परिभाषा

$\because F = ma$ जब $m = 1$ किग्रा. तथा

$a = 1$ मीटर/से.^{2} हो तो $F = 1$ न्यूटन

वह बल जो कि 1 किग्रा. द्रव्यमान की वस्तु में 1मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न कर दें, 1 न्यूटन बल के बराबर होता है।

1 न्यूटन = 1 किग्रा. × मी./से.^{2}

CGS प्रणाली–

$F = ma$

यदि $m = 1$ ग्राम तथा $a = 1$ सेमी./से.^{2}

तब $F = 1$ डाइन

अत: "एक डाइन (Dyne) का बल वह बल है जो एक ग्राम द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करने पर उसमें एक सेन्टीमीटर प्रति वर्ग सेकण्ड का त्वरण उत्पन्न कर देता है।

फ. प. स. (F.P.S.) प्रणाली–माना $m = 1$पौण्ड तथा $a = 1$ फुट/से.^{2} तब $F = 1$ पाउण्डल।

बल का यह मात्रक एक पाउण्डल कहलाता है।

अत: "एक पाउण्डल (Poundal) का बल वह बल है जो एक पौण्ड द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करने पर उसमें एक फुट प्रति वर्ग सेकण्ड का त्वरण उत्पन्न कर देता है।"

इन मात्रकों में परस्पर सम्बन्ध इस प्रकार है–

1 न्यूटन = 1 किग्रा. × 1मी./से.^{2}
= 1000 ग्राम × 100 सेमी./से.^{2}
= 1000 × 100 ग्राम × सेमी./से.^{2}

1न्यूटन = 10^5 डाइन

1 पाउण्डल = 1 पौण्ड × 1 फुट/से.^{2}
= 453.6 ग्राम × 30.48 सेमी./से.^{2}

1 पाउण्डल = 13825.7 डाइन (लगभग)

बल के उक्त तीनों मात्रक डाइन, पाउण्डल तथा न्यूटन निरपेक्ष मात्रक माने जाते हैं क्योंकि इनका मान सर्वत्र स्थिर रहता है। किन्तु कुछ अन्य व्यावहारिक मात्रक हम अपनी सुविधा के लिए और बना लेते हैं। इन्हें गुरुत्वकीय मात्रक (gravitational units) कहते हैं तथा इनका मान निरपेक्ष मात्रकों का g गुना होता है। मात्रक निम्नलिखित है–

स.ग.स. प्रणामी (CGS)

1 ग्राम भार = g डाइन = 981 डाइन

फ.प.स. प्रणाली (FPS)

1 पौण्ड भार = g पाउण्डल = 32.2 पाउण्डल

S.I. प्रणाली

1 किग्रा भार = g न्यूटन = 9.8 न्यूटन

गुरुत्वीय मात्रक का बल वह बल है जो मात्रक द्रव्यमान में g मात्रक का त्वरण उत्पन्न कर सके।

10. **भार (Weight)**

किसी वस्तु का भार उस पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है।

भार $W = mg$

जहाँ $g =$ गुरुत्वीय त्वरण

भार का मात्रक न्यूटन होता है।

1 किलोग्राम भार = 1 किग्रा. × g मी./से.^{2}
= g न्यूटन = 9.8 न्यूटन

4.5 आवेग एवं आवेग-संवेग प्रमेय (Impulse and Impulse Momentum Theorem)

आवेग (Impulse)

किसी वस्तु के वेग में परिवर्तन दो प्रकार से किया जा सकता है–

(i) वस्तु पर एक बड़े परिमाण का बल थोड़े समयान्तराल के लिए लगाकर।

(ii) एक छोटे परिमाण का बल अधिक समयान्तराल के लिए लगाकर।

इस प्रकार वस्तु में उत्पन्न वेग परिवर्तन उस पर लगाये गये बल तथा समयान्तर के गुणनफल पर निर्भर करता है।

जब कोई अधिक परिमाण का नियत बल किसी वस्तु पर अल्प समयान्तर के लिए लगता है (उदाहरण के लिए हथौड़े से कील ठोकना, बल्ले से गेंद मारना आदि।) तो बल तथा समयान्तर के गुणनफल को बल का आवेग कहते हैं।

1. किसी पिण्ड की गति पर बल के कुल प्रभाव को आवेग कहते हैं।

2. किसी वस्तु पर आरोपित बल तथा जितने समयान्तराल के लिए बल कार्यरत है के गुणनफल को उसका आवेग कहते हैं। यह सदिश राशि है तथा इसे $\vec{I}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

आवेग की दिशा बल की दिशा में होती है। इसका मात्रक

न्यूटन–सेकण्ड होता है।

यदि किसी वस्तु पर कोई बल $\vec{F}$ अल्प समय dt के लिए कार्यरत रहता है तो इस बल का आवेग

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt \qquad ...(1)$$

$$\text{कुल आवेग } \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \qquad ...(2)$$

यदि $\vec{F}$ नियत हो तो

$$\vec{I} = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}(t)_{t_1}^{t_2}$$

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) \qquad ...(3)$$

आवेग-संवेग प्रमेय (Impulse-Momentum theorem)

$$\because \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \therefore \vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{p_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = (\vec{p})_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} = [\vec{p}_2 - \vec{p}_1]$$

$$\Rightarrow \vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad ...(1)$$

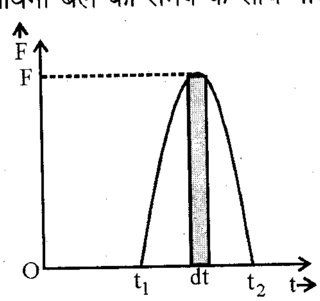
अर्थात् किसी बल का आवेग उस बल के कारण संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है। यही **आवेग-संवेग प्रमेय** है।

समान आवेग की स्थिति में $\vec{F_1}t_1 = \vec{F_2}t_2$

उदाहरण–क्रिकेटर तेजी से आती गेंद को कैच लेते समय अपने हाथ पीछे की तरफ खींचकर गेंद के कैच लेने के समय को बढ़ाता है ताकि हाथ पर आरोपित कम बल के कारण उसे चोट नहीं लगे।

- परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए कम समय के लिए कार्यरत रहने वाले अत्यधिक परिमाण के बल को आवेगी बल कहते हैं।
- आवेगी बल द्वारा किसी वस्तु के संवेग में कुल परिवर्तन की गणना आवेग–संवेग प्रमेय द्वारा भी की जा सकती है।

चित्र में एक आवेगी बल का समय के साथ परिवर्तन आरेख दर्शाया गया है।



चित्र 4.2

बल समय-वक्र तथा समय अक्ष के मध्य घिरे क्षेत्रफल को अनेक पट्टिकाओं के रूप में विभक्त किया जा सकता है। अल्प समय परिवर्तन के dt के संगत बल का मान F लगभग नियत माना जाये तब पट्टिका का क्षेत्रफल = Fdt

$\therefore$ बल का t_1 से t_2 समय तक कुल प्रभाव

$$= \int_{t_1}^{t_2} Fdt = \text{सभी पट्टिकाओं के क्षेत्रफल का योग} =$$

बल–समय आरेख तथा समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल

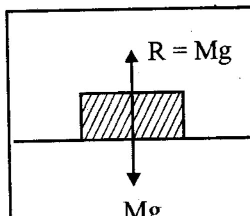
$\because$ आवेग–संवेग प्रमेय से

$$\text{आवेग } I = \int_{t_1}^{t_2} Fdt = p_2 - p_1 = \text{संवेग में परिवर्तन}$$

इस प्रकार बल–समय आरेख तथ समय अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल वस्तु के संवेग में कुल परिवर्तन के बराबर होता है।

4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम (Newton's Third Law of Motion)

(क्रिया प्रतिक्रिया का नियम)–इस नियम के अनुसार **प्रत्येक क्रिया की समान परिमाण तथा विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है तथा क्रिया व प्रतिक्रिया बल भिन्न-भिन्न पिण्डों पर आरोपित होते हैं।**



चित्र 4.3

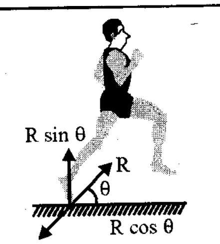
उदाहरण–**(i)** किसी धरातल पर स्थित पिण्ड का भार (क्रिया बल) नीचे का ओर लगता है जबकि धरातल द्वारा प्रतिक्रिया बल R पिण्ड पर ऊपर की ओर लगता है।

$\because$ उपरोक्त निकाय विरामावस्था में है, अतः इस पर कुल बल शून्य होगा। अतः क्रिया बल तथा प्रतिक्रिया बल समान तथा विपरीत दिशा में होने चाहिए।

(ii) तैरने की क्रिया न्यूटन के तृतीय नियम से संभव है।

(iii) जब रायफल चलायी जाती है, तो गोली जिस बल से आगे बढ़ती है (क्रिया), रायफल पर उतना ही बल पीछे की ओर (प्रतिक्रिया) लगता है।

(iv) जब कोई व्यक्ति पृथ्वी पर चलता है, तो वह पैर के पंजों के द्वारा तिर्यक बल **F** से पृथ्वी को पीछे की ओर दबाता है (क्रिया)। पृथ्वी भी उतना भी बल (प्रतिक्रिया) विपरीत दिशा में लगती है। इस प्रतिक्रिया बल को दो समकोणिक घटकों में वियोजित किया जा सकता है। क्षैतिज घटक व्यक्ति को आगे बढ़ने में मदद करता है, जबकि ऊर्ध्वाधर घटक व्यक्ति के भार को संतुलित करता है।



चित्र 4.4

महत्वपूर्ण तथ्य

प्रत्येक क्रिया के लिए, हमेशा एक बराबर (परिमाण में) एवं विपरीत (दिशा में) प्रतिक्रिया होती है।

1. जब एक वस्तु दूसरी किसी वस्तु पर बल लगाती है, तब दूसरी वस्तु भी प्रथम वस्तु पर बराबर तथा विपरीत दिशा में बल आरोपित करती है।
2. प्रकृति में बल हमेशा युग्म के रूप में होते हैं। एक अकेला विलगित बल संभव नहीं हो सकता है।
3. यदि कोई कारक, जो बल लगाता है, तब उस पर स्वयं पर भी बराबर तथा विपरीत दिशा में एक बल लगता है। कारक द्वारा लगाये गये बल को 'क्रिया' तथा कारक पर लगने वाले विपरीत बल को 'प्रतिक्रिया बल' कहते हैं।
4. क्रिया तथा प्रतिक्रिया कभी भी एक ही वस्तु पर नहीं लगती है। यदि ऐसा होता है, तो वस्तु पर कुल बल का मान शून्य होगा अर्थात् वस्तु हमेशा साम्यावस्था में रहेगी।
5. यदि $\vec{F}_{AB}$ = वस्तु B द्वारा वस्तु A पर लगाया गया बल (क्रिया) है तथा $\vec{F}_{BA}$ = वस्तु A द्वारा वस्तु B पर लगाया गया बल (प्रतिक्रिया) है। दोनों एक ही क्षण कार्यरत होते हैं अतः इनमें से किसी भी एक को क्रिया तथा दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जाता है।

   तब न्यूटन के गति के तीसरे नियम से $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$
6. न्यूटन का तीसरा नियम बल के गुण को व्यक्त करता है।
7. न्यूटन का तीसरा नियम स्थिर या गतिशील दोनों स्थितियों में लागू होता है।
8. यह नियम गुरुत्वीय बल, विद्युत बल व चुम्बकीय बल आदि में लागू होता है।
9. क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं। अतः ये बल एक दूसरे को निरस्त नहीं कर सकते परन्तु किसी एक पिण्ड में आंतरिक क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का योग अवश्य ही शून्य होता है।
10. यदि किसी फर्श पर एक गुटका विरामावस्था में हो तो प्रथम नियम के अनुसार गुटके पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। गुटके पर दो बल कार्य करेंगे पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल $W = Mg$ तथा गुटके पर फर्श का अभिलम्ब बल R

    अतः $Mg = R$ क्रिया प्रतिक्रिया युगल नहीं है।
11. तृतीय नियम का उपयोग करने पर गुटके की क्रिया अर्थात् गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल $W = Mg$ जिसकी दिशा ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होगी।
12. क्रिया प्रतिक्रिया युगल–

    (i) पृथ्वी द्वारा गुटके पर आरोपित गुरुत्व बल (क्रिया) तथा गुटके द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया)

    (ii) गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया) फर्श द्वारा गुटके पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

उदा 1. एक कार तथा एक ट्रक के रेखीय संवेग समान है। दोनों में से किसकी चाल अधिक होगी?

हल– संवेग = द्रव्यमान × वेग

$$\text{वेग} = \frac{\text{संवेग}}{\text{द्रव्यमान}} \Rightarrow \quad \text{वेग} \propto \frac{1}{\text{द्रव्यमान}}$$

अर्थात् जिस पिण्ड का द्रव्यमान कम होगा उसका वेग अधिक होगा। इस प्रकार कार का द्रव्यमान ट्रक से कम होने के कारण इसकी चाल अधिक होगी।

उदा 2. द्रव्यमान m के एक कण की गति, $S = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से वर्णित है। उस कण पर लगने वाले बल को ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 4.1)

हल– ∵ $$S = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

∴ $$\text{वेग } v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ut + \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$= u + \frac{1}{2} \times 2gt = u + gt$$

$$\text{त्वरण } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u + gt)$$

$$= 0 + g = g$$

∴ बल $F = ma = mg$

उदा 3. क्रिकेट के एक मैच में एक गेंदबाज 50 मी./से. के वेग से 450 ग्राम की एक गेंद एक बल्लेबाज की ओर फेंकता है। बल्लेबाज बल्ले को गेंद के सम्पर्क में 0.6 सेकण्ड रखता हुआ, गेंद को उसी वेग से गेंदबाज की ओर लौटा देता है। बल्लेबाज द्वारा लगाये गये बल की गणना करो।

हल– दिया गया है–

u = 50 मी./से.

m = 450 ग्राम = 0.45 किग्रा.

v = –50 मी./से.

t = 0.6 सेकण्ड

F = ?

संवेग में परिवर्तन $= mv - mu$

$= m[v - u]$

$= 0.45[-50 - 50]$

$= 0.45(-100)$

= –45 किग्रा. × मी./से.

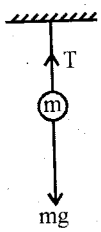
$$F = \frac{\text{संवेग में परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}}$$

$$= \frac{-45}{0.6} = -75 \text{ न्यूटन}$$

उदा4. एक भारी द्रव्यमान 0.50 किलो ग्राम का पिण्ड, छत पर टंगी डोरी द्वारा लटका हुआ है। डोरी द्वारा पिण्ड पर लगाये गये बल की गणना कीजिए। दिया हुआ है- $g = 9.8\ m/s^2$

(पुस्तक का उदाहरण 4.2)

हल– चित्रानुसार पिण्ड का भार = mg (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)
डोरी में तनाव बल = T (ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)



चित्र 4.5

∴ साम्यावस्था की स्थिति में

$T = mg = 0.50 \times 9.8$
$= 4.9$ न्यूटन

अत: डोरी द्वारा पिण्ड पर लगाया गया बल = 4.9 न्यूटन

उदा. 5. 0.2 किग्रा. द्रव्यमान की एक गेंद 10 मी./से. के वेग से गति कर रही है। एक खिलाड़ी उसे 0.5 सेकण्ड में स्थिर अवस्था में लाता है। गेंद के आवेग तथा खिलाड़ी द्वारा लगाया गया बल ज्ञात करो।

हल– दिया गया है–
$m = 0.2$ किग्रा.
$u = 10$ मी./से.
$t = 0.5$ से.
$v = 0$
$I = ?$
$F = ?$

आवेग = संवेग में परिवर्तन
$I = mv - mu$
$= m(v - u)$
$= 0.2\,(0 - 10) = -2$ किग्रा.× मी. /से.

आवेग $I = Ft$

$\Rightarrow \quad F = \frac{I}{t} = \frac{-2}{0.5} = -4$ न्यूटन

उदा.6. कोई बल्लेबाज किसी गेंद को आरम्भिक चाल जो 15 m/s है में बिना परिवर्तन किए उस पर हिट लगाकर सीधे गेंदबाज की दिशा में वापस भेज देता है। यदि गेंद का द्रव्यमान 0.12 kg है, तो गेंद को दिया गया आवेग ज्ञात कीजिए।(गेंद की गति रैखिक मानिए)।

(पुस्तक का उदाहरण 4.3)

हल– दिया गया है: $u = 15$ m/s, $v = -15$ m/s
$m = 0.12$ kg, $I = ?$

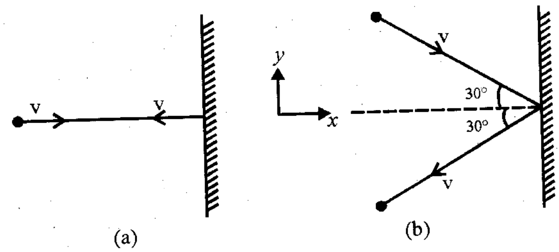
∵ आवेग-संवेग प्रमेय से

आवेग = संवेग में परिवर्तन
$= mv - mu = m(v-u)$
$= 0.12\,(-15-15) = 0.12\,(-30)$
$= -3.6$ किग्रा × मी./से

बल्लेबाज से गेंदबाज की दिशा में

उदा 7. दो सर्वसम बिलियर्ड गेंदें किसी दृढ़ दीवार से समान चाल से, परन्तु भिन्न कोणों पर टकराती हैं तथा नीचे दर्शाए चित्र की भांति चाल में बिना क्षय हुए परावर्तित हो जाती हैं। (i) प्रत्येक गेंद के कारण दीवार पर बल की दिशा क्या है? तथा (ii) दीवार द्वारा दोनों गेंदों पर लगे आवेगों का अनुपात क्या है?

(पुस्तक का उदाहरण 4.4)



चित्र 4.6

हल– माना कि प्रत्येक गेंद का द्रव्यमान m तथा दीवार पर टकराने के पूर्व तथा टकराने के पश्चात् दोनों गेंदों की चाल v है।

(i) (a) गेंद के संवेग को x तथा y घटकों के रूप में वियोजित करने पर

$(p_x)_i = mv$, $\quad (p_y)_i = 0$
$(p_x)_f = -mv$, $\quad (p_y)_f = 0$

[∵ गेंद X-अक्ष के अनुदिश गतिशील है।]

∴ X-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन $= -mv - (mv)$
$= -2mv$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन = 0

∵ आवेग = संवेग में परिवर्तन

अत: X-अक्ष के अनुदिश आवेग $= -2mv$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश आवेग = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में है अत: दीवार के कारण गेंद पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की ऋणात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

गति के तृतीय नियम के अनुसार गेंद के कारण दीवार पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

(b) गेंद के संवेग को x तथा y घटकों के रूप में वियोजित करने पर

$(p_x)_i = mv\cos 30°$, $\quad (p_y)_i = -mv\sin 30°$
$(p_x)_f = -mv\cos 30°$, $\quad (p_y)_f = -mv\sin 30°$

यहाँ दीवार से टकराने के बाद p_x का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है। जबकि p_y का चिन्ह परिवर्तित नहीं होता है।

∴ X-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन
$= -mv\cos 30° - (mv\cos 30°)$
$= -2\,mv\cos 30°$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश संवेग में परिवर्तन = 0

∵ आवेग = संवेग में परिवर्तन

अत: X-अक्ष के अनुदिश आवेग $= -2\,mv\cos 30°$

तथा Y-अक्ष के अनुदिश आवेग = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में है अत: दीवार के कारण गेंद पर

लगा बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की ऋणात्मक X-अक्ष के अनुदिश है। गति के तृतीय नियम के अनुसार गेंद के कारण दीवार पर आरोपित बल दीवार के अभिलम्बवत् तथा गति की धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।

(ii) प्रश्नानुसार दोनों स्थितियों में दीवार द्वारा दोनों गेदों पर लगे आवेगों का अनुपात

$$= \frac{-2mv}{-2mv\cos 30^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$$

4.7 संवेग संरक्षण नियम एवं इसके अनुप्रयोग (Law of conservation of momentum and its Applications)

न्यूटन के द्वितीय नियम से किसी निकाय के रेखीय संवेग में परिवर्तन की दर उस पर लग रहे कुल बाह्य बल के बराबर होती है।

अतः $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ...(1)$$

यदि कुल बाह्य बल $\vec{F}$ अनुपस्थित हो तो $\vec{F}=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \text{नियतांक}$$

अर्थात् कुल बाह्य बल की अनुपस्थिति में किसी निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है यही रेखीय संवेग संरक्षण का नियम है।

दो कणों के निकाय के लिए संवेग संरक्षण का नियम–माना कि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो कण है। जो एक निकाय की रचना करते हैं तथा किसी क्षण उनके संवेग $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ हैं। m_1 द्रव्यमान के कण पर बाह्य बल $\vec{F_1'}$ तथा m_2 द्रव्यमान के कारण आन्तरिक बल $\vec{F_1''}$ है। इसी प्रकार m_2 द्रव्यमान के कण पर बाह्य बल $\vec{F_2'}$ तथा m_1 द्रव्यमान के कारण आन्तरिक बल $\vec{F_2''}$ है।

तब m_1 द्रव्यमान के कण पर परिणामी बल

$$\vec{F_1} = \vec{F_1'} + \vec{F_1''} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} \qquad ...(1)$$

(न्यूटन के द्वितीय नियम से)

m_2 द्रव्यमान के कण पर परिणामी बल

$$\vec{F_2} = \vec{F_2'} + \vec{F_2''} = \frac{d\vec{p_2}}{dt} \qquad ...(2)$$

∴ समी. (1) व (2) का योग करने पर

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F_1'} + \vec{F_1''} + \vec{F_2'} + \vec{F_2''} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} \qquad ...(3)$$

न्यूटन के तृतीय नियम से

$$\Rightarrow \quad \vec{F_1''} = -\vec{F_2''}$$

$$\vec{F_1''} + \vec{F_2''} = 0$$

∴ समीकरण (3) से

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

यदि कुल बाह्य बल

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} = 0 \text{ हो तो}$$

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{p_1} + \vec{p_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p_1} + \vec{p_2} = \text{नियतांक}$$

अतः किसी निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल शून्य हो तो उस निकाय का परिणामी संवेग नियत रहता है।

आन्तरिक बलों की उपस्थिति से इस नियम पर प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि अन्योन्य क्रिया के कारण लगने वाले आन्तरिक बल न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते हैं।

संवेग संरक्षण नियम के उदाहरण
(Illustrations of law of conservation of momentum)

1. बंदूक से दागी गई गोली–प्रारंभ में बंदूक तथा गोली का वेग शून्य है जिससे प्रारंभिक संवेग शून्य होगा। गोली दागने के बाद बंदूक का प्रतिक्षेप वेग $\vec{V}$ तथा गोली का वेग $\vec{v}$ है तो अन्तिम संवेग $M\vec{V} + m\vec{v}$ होगा।

यहाँ M = बंदूक का द्रव्यमान, m = गोली का द्रव्यमान

∴ संवेग संरक्षण नियम से

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{-m}{M}\vec{v}$$

2 एक विस्फोटक बम जो प्रारम्भ में विराम अवस्था में है। अतः इसका प्रारम्भिक संवेग (mv) स्पष्टतः शून्य है क्योंकि वेग शून्य है। अब यदि यह दो भागों में विस्फोटित हो जाता है। जिनके द्रव्यमान माना 2 : 1 के अनुपात में है तो इनके वेग ठीक एक ही रेखा में किन्तु विपरीत दिशा में इस प्रकार होंगे कि सम्पूर्ण संवेग पुनः शून्य हो जाए (स्पष्टतः बम पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है।)

माना कि $2m$ द्रव्यमान वाले खण्ड का वेग V है तथा m द्रव्यमान वाले खण्ड का वेग v हो तब विस्फोट के बाद भी सम्पूर्ण संवेग शून्य होता है। अतः

$$2mV + mv = 0$$
$$v = -2V$$

अतः m द्रव्यमान वाला खण्ड विपरीत दिशा में 2V वेग से गति करेगा।

3. **दो पिण्डों की टक्कर**–माना कि दो पिण्डों A तथा B का एक निकाय है दोनों पिण्ड अन्योन्य क्रिया कर रहे हैं। पिण्डों का टकराने से पूर्व संवेग क्रमशः $\vec{p_A}$ तथा $\vec{p_B}$ है, जबकि टकराने के बाद संवेग क्रमशः $\vec{p'_A}$ तथा $\vec{p'_B}$ है। तब गति के द्वितीय नियम से

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\vec{p'_A} - \vec{p_A}}{\Delta t} \quad ...(1)$$

$$\text{तथा } \vec{F}_{BA} = \frac{\vec{p'_B} - \vec{p_B}}{\Delta t} \quad ...(2)$$

यहाँ Δt वह समय है जिसमें दोनों पिण्ड सम्पर्क में रहते हैं।
गति के तृतीय नियम से–

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

∴ समी. (1) व (2) से

$$\left(\frac{\vec{p'_A} - \vec{p_A}}{\Delta t}\right) = -\left(\frac{\vec{p'_B} - \vec{p_B}}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{p_A} + \vec{p_B}\right) = \left(\vec{p'_A} + \vec{p'_B}\right) \quad ...(3)$$

अर्थात् विलगित निकाय (A+B) का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) यदि किसी निकाय में x कण हों तथा उस पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है तो उस निकाय का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा।

$$\Sigma \vec{p} = \text{नियतांक}$$

या $\quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n = \text{नियतांक}$

अलग–अलग कणों का रेखीय संवेग यह आवश्यक नहीं कि नियत हो निकाय में आन्तरिक बलों के कारण यदि किसी एक कण का रेखीय संवेग कुछ बढ़ता है तो किसी अन्य कण का उतना ही घटता है इस कारण सम्पूर्ण निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत बना रहता है।

अर्थात् बाह्य बल की अनुपस्थिति में निकाय की रचना करने वाले कणों के संवेगों में परिवर्तन संभव है परन्तु कुल संवेग नियत रहता है।

(2) संवेग संरक्षण का नियम गति के तृतीय नियम पर आधारित है क्योंकि गति के तृतीय नियम के अनुसार किसी निकाय पर क्रिया व प्रतिक्रिया बलों का सदिश योग अर्थात् परिणामी बल शून्य होता है। यह नियम भौतिकी के मूलभूत नियमों में से एक है, जिसका कोई अपवाद नहीं है। इसके द्वारा अज्ञात कणों की खोज में सहायता मिलती है। इसी के द्वारा न्यूट्रिनों, मेसॉन तथा कई अन्य मूल कणों की खोज संभव हो सकी है।

4.8 परिवर्ती द्रव्यमान वाले तन्त्र (Systems with Variable mass)

सामान्यतः किसी निकाय का द्रव्यमान नियत रहता है परन्तु कुछ घटनाओं में द्रव्यमान परिवर्ती होता है जिसमें निकाय की गति का अध्ययन गति के नियमों को प्रयुक्त कर किया जाता है।
न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुसार

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \quad ...(1)$$

समी. (1) के दांये पक्ष से
यदि निकाय का द्रव्यमान m नियत हो तो

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

जिससे बल $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ द्वारा निर्धारित होता है।

इसी प्रकार यदि निकाय का वेग $\vec{v}$ नियत हो तो

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

जिससे बल $\vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt}$ द्वारा निर्धारित होता है। इसके अन्तर्गत निकाय का द्रव्यमान समय के साथ परिवर्तित होता है।
परिवर्तित द्रव्यमान वाले निकाय के रूप में वाहक पट्टा लदान व्यवस्था, रॉकेट नोदन आदि प्रमुख उदाहरण है।

1. जब बरसात की बूंद नीचे गिरती है तो पानी का वाष्पन या बूंद की सतह पर नमी का संघनन हो सकता है जिससे बूंद का द्रव्यमान परिवर्तित हो जाता है।
माना कि m द्रव्यमान की एक पानी की बूंद $\vec{v}$ वेग से गतिशील है जिसकी सतह पर $\vec{u}$ वेग से गतिशील नमी का $\frac{dm}{dt}$ दर से संघनन हो रहा है।
अतः बूँद के संवेग में कुल परिवर्तन की दर = बूंद के त्वरण के कारण संवेग में परिवर्तन की दर + नमी के संघनन के कारण संवेग में परिवर्तन की दर

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$$

∴ बूंद की गति का समीकरण

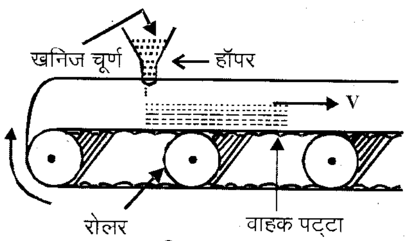
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) \qquad ....(1)$$

समी. (1) को विभिन्न स्थितियों में हल किया जा सकता है।

2. वाहक-पट्टा लदान व्यवस्था (Conveyor belt loading system)

यह व्यवस्था परिवर्ती द्रव्यमान निकाय का एक उदाहरण है।

इस व्यवस्था के अन्तर्गत एक स्थिर हॉपर से खनिज चूर्ण एक वाहक पट्टे पर नियत दर द्वारा छोड़ा जाता है।



चित्र 4.7

वाहक पट्टा रोलरों की सहायता से नियत वेग $\vec{v}$ से आगे बढ़ता है। इस स्थिति में खनिज चूर्ण को अभीष्ट स्थान तक पहुँचाने के लिए आवश्यक बल उपलब्ध होता है। यह बल रोलर के साथ लगी मोटर द्वारा उपलब्ध कराया जाता है।

- माना कि वाहक पट्टे पर नियत दर $\frac{dm}{dt}$ से खनिज चूर्ण गिर रहा है। किसी क्षण पट्टे पर उपस्थित पदार्थ का द्रव्यमान m तथा पट्टे का द्रव्यमान M है। अब यदि वाहक पट्टे का नियत वेग $\vec{v}$ हो तो निकाय का कुल संवेग

$$\vec{p} = (m+M)\vec{v} \qquad ....(1)$$

∴ पट्टे को गतिशील रखने के लिए आवश्यक बल

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(गति के द्वितीय नियम से)}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}[(m+M)\vec{v}]$$

$$= (m+M)\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} + \vec{v}\frac{dM}{dt}$$

∵ पट्टे का द्रव्यमान M तथा वेग $\vec{v}$ नियत है–

$$\therefore \quad \frac{dM}{dt} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} \qquad ...(2)$$

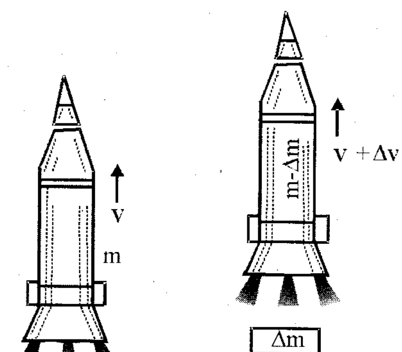
इस प्रकार पट्टे को नियत वेग $\vec{v}$ से गतिशील बनाये रखने के लिए आवश्यक बल का मान द्रव्यमान परिवर्तन $\frac{dm}{dt}$ पर निर्भर करता है। यह बल पट्टे के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

3. रॉकेट नोदन तथा रॉकेट की गति का समीकरण

(Rocket Propulsion and Equation for Rocket Motion)

रॉकेट की गति न्यूटन के गति के तृतीय नियम अथवा संवेग संरक्षण नियम पर आधारित है।

माना कि $t = 0$ समय पर रॉकेट का ईंधन सहित द्रव्यमान m_0 है। किसी समय t पर रॉकेट का द्रव्यमान m तथा उसका वेग v है। माना कि रॉकेट से एक निश्चित दर $r = \frac{dm}{dt}$ से गैंसे निष्कासित हो रही है। रॉकेट से निष्कासित गैसों के कारण इसका द्रव्यमान घटकर $(m - \Delta m)$ तथा वेग बढ़कर $(v + \Delta v)$ हो जाता है। माना कि निष्कासित गैसों का रॉकेट के सापेक्ष वेग u है।



चित्र 4.8

किसी समय t पर रॉकेट का शेष रहे ईंधन सहित द्रव्यमान $m = m_0 - rt$ होगा।

पृथ्वी के सापेक्ष निष्कासित गैसों का वेग

$$V_{\text{गैस, पृथ्वी}} = V_{\text{गैस, रॉकेट}} + V_{\text{रॉकेट, पृथ्वी}}$$
$$= -u + v$$
$$= v - u$$

इसकी दिशा रॉकेट की गति की दिशा में होगी।

अत: पृथ्वी के सापेक्ष निष्कासित गैसों का वेग $(v - u)$ होगा।

∵ निकाय का प्रारंभिक संवेग = mv

निकाय का अंतिम संवेग = $(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u)$

यहाँ Δt समयान्तराल में रॉकेट से निष्कासित गैसों का द्रव्यमान Δm है जहाँ $\Delta m = r\Delta t$ है।

∴ संवेग संरक्षण के नियमानुसार

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u) = mv$$

$$\Rightarrow \quad mv + m\Delta v - (\Delta m)v - (\Delta m)(\Delta v) + (\Delta m)v - (\Delta m)u = mv$$

$$\Rightarrow \quad m\Delta v - (\Delta m)(\Delta v) = (\Delta m)u$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v(m - \Delta m) = (\Delta m)u$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v = \frac{(\Delta m)u}{m - \Delta m}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}.\frac{u}{m - \Delta m} = \frac{\Delta m}{\Delta t}.\frac{u}{m - r\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ सीमा लेने पर

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}.\frac{u}{m} = \frac{ru}{m} = \frac{ru}{m_0 - rt}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{ru}{m_0 - rt} \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) से रॉकेट के त्वरण का मान ज्ञात किया जा सकता है। उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि समय बढ़ने पर रॉकेट का त्वरण भी बढ़ता है। यदि $t = 0$ समय पर रॉकेट गति प्रारंभ करता है तब बाह्य बल जैसे गुरुत्वीय बल आदि को नगण्य मानने पर समी. (1) का समाकलन करने पर

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{ru}{m_0 - rt} dt$$

$$\Rightarrow \quad v = ru\left(-\frac{1}{r}\right)\left[\log_e(m_0 - rt)\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad v = -u\left[\log_e(m_0 - rt) - \log_e m_0\right]$$

$$\Rightarrow \quad v = -u\log_e\left(\frac{m_0 - rt}{m_0}\right) \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad v = u\log_e\left(\frac{m_0}{m_0 - rt}\right) \qquad ...(3)$$

समी. (3) द्वारा किसी समय t पर रॉकेट का वेग ज्ञात किया जा सकता है। उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि t का मान बढ़ने पर रॉकेट का वेग v बढ़ता है। उपरोक्त समीकरण रॉकेट की गति का समीकरण कहलाता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

- यदि किसी समय t पर रॉकेट का द्रव्यमान m है तथा रॉकेट से निष्कासित गैसों का द्रव्यमान dm हो तो निष्कासित गैसों का रॉकेट के सापेक्ष वेग u होने पर रॉकेट पर बल

$$F = -u\frac{dm}{dt}$$

- यदि रॉकेट का प्रारंभिक द्रव्यमान m_i, वेग v_i तथा अंतिम द्रव्यमान m_f, वेग v_f होने पर

$$v_f = v_i + u\log_e\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

उदा 8. 10 किग्रा. द्रव्यमान की एक बंदूक से 250 मी./से. के वेग से 20 ग्राम द्रव्यमान की एक गोली दागी जाती है। बंदूक के प्रतिक्षेप वेग की गणना करो।

हल– दिया गया है– M = 10 किग्रा., $m = 0.02$ किग्रा., v = 250 मी./से.

संवेग संरक्षण नियम से

$$MV + mv = 0$$

$$\therefore \quad V = \frac{-mv}{M}$$

$$V = \frac{-0.02 \times 250}{10}$$

$$V = -0.5 \text{ मी./से.}$$

अतः बंदूक 0.5 मी./से. के वेग से पीछे हटेगी।

उदा.9. विस्फोट में एक बम तीन टुकड़ों में विभाजित होता है, जिसके दो टुकड़े, एक-दूसरे के लम्बवत् गतिमान होते हैं। यदि 1kg के टुकड़े का वेग 12m/s, 2kg के टुकड़े का वेग 8m/s जो परस्पर लम्बवत् है तथा तीसरे टुकड़े का वेग 40m/s हो तो इस टुकड़े का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 4.5)

हल– दिया गया है $m_1 = 1$ kg, $v_1 = 12$ m/s, $m_2 = 2$kg, $v_2 = 8$m/s, $v_3 = 40$m/s, $m_3 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से–

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

प्रश्नानुसार $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ परस्पर लम्बवत् है।

$$\therefore \quad p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos 90^\circ}$$

$$p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$m_3v_3 = \sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}}{v_3}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{(1\times12)^2 + (2\times8)^2}}{40} = \frac{\sqrt{144+256}}{40}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{400}}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\text{kg} = 0.5\text{kg}$$

उदा 10. एक कन्वेयर बेल्ट पर प्रति सेकण्ड 100 ग्राम. द्रव्यमान ऊपर से ऊर्ध्वाधर गिर रहा है। यदि बेल्ट 5 सेमी./से. के समान वेग से क्षैतिज दिशा में गतिशील है तो बेल्ट पर लगने वाला बल ज्ञात करो।

हल– बेल्ट पर लगने वाला बल

$$F = u\frac{dm}{dt} \qquad ...(1)$$

∵ $u = 5$ सेमी./से.
$= 5 \times 10^{-2}$ मी./से.

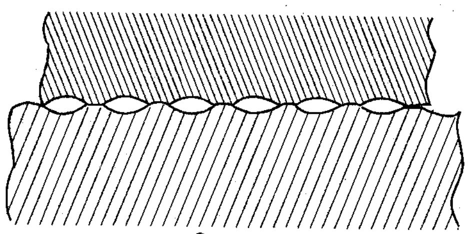
$\frac{dm}{dt} = 100$ ग्राम/से.
$= 100 \times 10^{-3}$ किग्रा./से.

∴ समीकरण (1) से

$F = 5 \times 10^{-2} \times 100 \times 10^{-3}$
$F = 5 \times 10^{-3}$ न्यूटन

4.9 घर्षण (Friction)

जब किसी पिण्ड को अन्य पिण्ड पर गतिमान किया जाता है या गतिमान करने का प्रयास किया जाता है तब उनके सम्पर्क तलों के मध्य उपस्थित वह बल जो उनकी एक दूसरे के सापेक्ष गति का विरोध करता है, घर्षण बल कहलाता है। पिण्डों के पृष्ठ पूर्णतः चिकने नहीं होते हैं। जब इनको उच्च क्षमता के सूक्ष्मदर्शी से देखा जाता है जब इनमें खुरदरापन होता है तथा कई स्थानों पर अनियमिताएँ होती है।

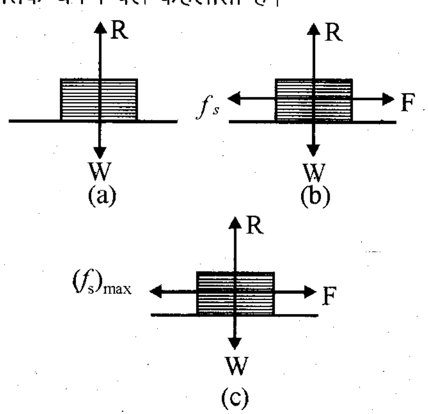


चित्र 4.9

जब एक सतह को दूसरी सतह के ऊपर रखा जाता है तो अणुओं के समूह एक दूसरे को दबाते हैं तथा अनियमिताएँ एक दूसरे में फँस जाती है। जिससे एक प्रकार की अतप्त बेल्डिंग (दो धातुओं को जोड़ने की विधि) हो जाती है। यह स्थिति अन्तरपरमाण्विक बलों के कारण उत्पन्न होती है। जब एक सतह दूसरी सतह पर फिसलती है तब अणुओं के मध्य बने बन्धों को तोड़ने के आवश्यक बल घर्षण बल कहलाता है।

स्थैतिक व गतिक घर्षण (Static and Kinetic Friction)

स्थैतिक घर्षण बल (Static frictional force) : घर्षण बल जो कि सम्पर्क तलों के मध्य सापेक्ष गति होने से पहले कार्य करता है, स्थैतिक घर्षण बल कहलाता है।



चित्र 4.10

माना कि एक लकड़ी का गुटका किसी टेबल पर स्थित है और उस पर कोई तनाव बल (F) (क्षैतिज बाह्य बल) कार्य न करे तब सतह द्वारा केवल अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R ही लगाया जाता है। ऐसी अवस्था में घर्षण बल उत्पन्न नहीं होगा। यदि गुटके पर तनाव बल (F) लगाया जाता है। तब तनाव बल के कम मान के लिए गुटका स्थिर रहता है। इस स्थिति में घर्षण बल इसे सन्तुलित कर देता है। जिसे स्थैतिक घर्षण बल (f_s) कहते हैं। परन्तु तनाव बल बढ़ाने पर एक स्थिति ऐसी प्राप्त होती है तब गुटका गतिमान होने की स्थिति में होता है। इस सीमान्त स्थिति में घर्षण बल अधिकतम होता है। अतः स्थैतिक घर्षण बल के अधिकतम मान को **सीमान्त घर्षण बल** कहते हैं।

सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{max}$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के समानुपाती होता है।

$$(f_s)_{max} \propto R$$

$$\Rightarrow \quad (f_s)_{max} = \mu_s R \quad ...(1)$$

जहाँ μ_s नियतांक है जिसे स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं।

$$\mu_s = \frac{(f_s)_{max}}{R} \quad ...(2)$$

अर्थात् किन्हीं दो सम्पर्क तलों के मध्य सीमान्त घर्षण बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के अनुपात को स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s) कहते हैं। इसका मान दोनों सम्पर्कित वस्तुओं के पदार्थ पर निर्भर करता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) μ_s का कोई मात्रक नहीं होता है।

(ii) μ_s का मान 0 तथा 1 के बीच होता है अर्थात् $0 < \mu_s < 1$

(iii) μ_s का मान पदार्थ पर तथा सम्पर्क तलों की प्रकृति पर निर्भर करता है अर्थात् वह सूखी है या गीली, खुरदरी है या चिकनी।

(iv) μ_s का मान तलों के आभासी सम्पर्क क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता।

(v) $$f_s \le (f_s)_{max} = \mu_s R.$$
इसे स्थैतिक घर्षण नियम कहते हैं।

(vi) घर्षण का कारण पिण्ड के तल में खुरदरापन है जो भिन्न–भिन्न वस्तुओं में भिन्न–भिन्न होता है।

(vii) पिण्ड का तल जितना चिकना होगा घर्षण बल उतना ही कम होगा।

(viii) घर्षण बल के कारण ही समतल धरातल पर किसी पिण्ड को एक समान चाल बनाए रखने के लिए बाह्य बल लगाना पड़ता है।

(ix) घर्षण बल गति का नहीं वरन् आपेक्षिक गति का विरोध करता है।

(x) ऐसी गति जो तभी होगी जब (परंतु वास्तव में होती नहीं) किसी आरोपित बल के अंतर्गत घर्षण अनुपस्थित हो।

(xi) घर्षण बल दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्षिक गति (समुपस्थित अथवा वास्तविक) का विरोध करता है।

(xii) घर्षण बल संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करते हैं।

(xiii) चिकनी सतहों के लिए μ_S का मान कम होता है।

(xiv) स्थैतिक घर्षण पिण्ड की समुपस्थित गति का विरोध करता है।

(xv) त्वरित गति से गतिमान रेलगाड़ी के किसी डिब्बों में रखा एक बॉक्स जो रेलगाड़ी के सापेक्ष स्थिर है तो वास्तव में वह रेलगाड़ी के साथ त्वरित हो रहा है स्थैतिक घर्षण बल, बॉक्स को रेलगाड़ी के सापेक्ष स्थिर रखते हुए रेलगाड़ी के समान त्वरण प्रदान करता है। अतः बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण ही है।

$$ma = f_s \le \mu_S R = \mu_S mg$$

$$a \le \mu_S g$$

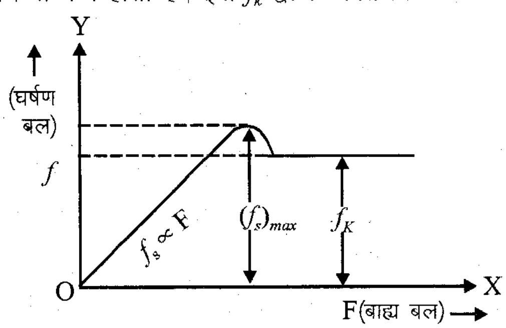
$$a_{max} = \mu_S g$$

गतिक घर्षण बल (Kinetic Frictional force)

घर्षण बल जो कि सम्पर्कित तलों के मध्य सापेक्ष गति उत्पन्न होने के पश्चात् कार्य करता है, गतिक घर्षण बल कहलाता है। गतिक घर्षण संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

जब पिण्ड पर आरोपित बाह्य बल F का मान स्थैतिक घर्षण की अधिकतम सीमा $(f_s)_{max}$ से अधिक हो जाता है तो पिण्ड पृष्ठ पर आरोपित बल की दिशा में गति करने लगता है।

एक बार जब पिण्ड गतिशील हो जाता है तो उस पर गतिक घर्षण बल कार्य करने लगता है जो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है। गतिक घर्षण प्रायः स्थैतिक घर्षण के अधिकतम मान से कम होता है। इसे f_k द्वारा व्यक्त किया जाये तब



चित्र 4.11

$$f_k = \mu_k R.$$

इसे गतिक घर्षण नियम कहते हैं।

μ_k गतिक घर्षण गुणांक कहलाता है।

$$\mu_k = \frac{f_k}{R} \qquad ...(2)$$

अर्थात् किन्हीं दो सम्पर्क तलों के मध्य गतिक घर्षण बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के अनुपात को गतिक घर्षण गुणांक कहते हैं।

इसका मान सम्पर्क पृष्ठों के युगल की प्रकृति अर्थात् पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

गतिक घर्षण गुणांक (μ_k), स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s) से कम होता है अर्थात् $\mu_k < \mu_s$

जब गुटके पर तनाव बल बढ़ाया जाता है तब

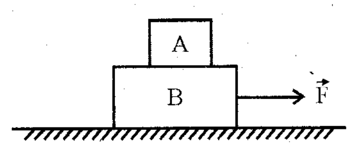
$$F = (f_s)_{max}$$

पर घर्षण बल अधिकतम हो जाता है, इसके बाद भी तनाव बल बढ़ाने पर घर्षण बल कम होकर f_k रह जाता है तथा गतिशील अवस्था में f_k लगभग नियत रहता है।

जैसा कि चित्र में आलेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है। यदि बाह्य आरोपित बल को हटा लिया जाता है तो उसका त्वरण $(-f_k/m)$ होता है और अंत में गुटका स्थिर हो जाता है। गतिक घर्षण भी सम्पर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता तथा यह आपेक्ष गति के वेग पर भी निर्भर नहीं करता है। गतिक घर्षण (f_k) वास्तविक गति का विरोध करता है।

स्थैतिक घर्षण की दिशा ज्ञात करना

किसी वस्तु पर स्थैतिक घर्षण बल की दिशा इस प्रकार होती है कि वस्तु पर आरोपित कुल बल वस्तु के सम्पर्क में रखी वस्तु के सापेक्ष इस वस्तु को स्थिर रख सके। गति के प्रथम व द्वितीय नियम की सहायता से स्थैतिक घर्षण की दिशा ज्ञात की जा सकती है।



चित्र 4.11 (a)

चित्रानुसार दो लकड़ी के गुटके A व B एक मेज पर एक दूसरे के ऊपर व्यवस्थित किये गये हैं। अब गुटके B पर दांयी ओर बाह्य बल $\vec{F}$ आरोपित किया जाता है। कम बल के प्रभाव में दोनों गुटके स्थिर रहते हैं। गुटके A पर कोई बाह्य बल आरोपित नहीं होने से गुटके B द्वारा गुटके A पर लगने वाला घर्षण बल भी शून्य होना चाहिए। अब बाह्य बल $\vec{F}$ बढ़ाने पर एक अवस्था में दोनों गुटके बाह्य बल की दिशा में गतिशील हो जाते हैं। इस स्थिति में गुटके A पर गुटके B के सम्पर्क के कारण केवल क्षैतिज स्थैतिक घर्षण बल लग सकता है। अतः इस बल की दिशा बाह्य बल के अनुदिश होनी चाहिए। इस प्रकार गुटके B पर घर्षण बल गति की विपरीत दिशा में तथा गुटके A पर घर्षण बल गति की दिशा में लगता है। इस प्रकार स्पष्ट होता है कि घर्षण बल सदैव गति का विरोध नहीं करता है बल्कि पिण्ड को त्वरित करने में भी सहायक होता है।

सारणी–1 : घर्षण गुणांक (लगभग)

पृष्ठों के पदार्थ (Materials of surfaces)	घर्षण गुणांक	
	μ_s	μ_k
कांच के ऊपर कांच	0.95	0.40
लकड़ी के ऊपर लकड़ी	0.50	0.30
पत्थर के ऊपर लकड़ी	0.50	0.40
स्टील के ऊपर स्टील	0.15	0.09
स्टील पर ताँबा	0.53	0.36
कंक्रीट पर रबर टायर	1.00	0.70

घर्षण के नियम (Laws of Friction)

(i) घर्षण बल सदैव पिण्ड की गति का विरोध करता है अर्थात् यह पिण्ड पर आरोपित बाह्य बल के विपरीत दिशा में कार्य करता है।

(ii) सम्पर्क में रखे दो पिण्डों के तलों के मध्य सीमान्त घर्षण बल तलों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

(iii) सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{max}$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के समानुपाती होता है अर्थात् $(f_s)_{max} \propto R$

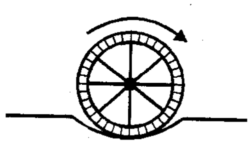
(iv) सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

(v) सीमान्त घर्षण बल से पहले घर्षण बल बाह्य बल से सन्तुलन में रहता है।

(vi) जब पिण्ड सतह पर सरकने लगता है तब घर्षण बल कम होकर गतिक घर्षण (f_k) के बराबर हो जाता है जो सदैव गति का विरोध करता है।

सर्पी तथा लोटनी घर्षण (Sliding and Rolling Friction)

- **सर्पी घर्षण (Sliding friction)**—वह घर्षण बल जो सम्पर्क में आए दो तलों के परस्पर फिसलने पर उत्पन्न होता है, सर्पी घर्षण कहलाता है।



चित्र 4.12

- **बेलनी या लोटनी घर्षण (Rolling friction)**—वह घर्षण बल जो किसी पिण्ड या वस्तु के किसी तल पर घूर्णन गति करने के कारण उत्पन्न होता है, बेलनी घर्षण कहलाता है। जब कोई पिण्ड किसी पथ पर लुढ़कता है तब सम्पर्क क्षेत्रफल बहुत कम होता है जिससे दाब $\left(\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}\right)$ बहुत अधिक हो जाता है तथा दोनों या कोई एक सम्पर्कित स्थान पर कुछ दब जाते हैं। इस कारण उनकी आकृति में कुछ विकृति उत्पन्न हो जाती है तथा लुढ़कने वाले पिण्ड को लगातार ऊँचाई पर चढ़ना पड़ता है। लोटनी घर्षण गुणांक μ_r का मान μ_s व μ_k से कम होता है।

बेलनी घर्षण < गतिक घर्षण < सर्पी घर्षण

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) बेलनी (लोटनी) घर्षण, सर्पी घर्षण की तुलना में बहुत कम होता है इसलिए भारी वस्तुयें पहिएँ वाली गाड़ी में रखकर ले जायी जाती हैं।

(ii) लुढ़कने में, सम्पर्क तल एक दूसरे से रगड़ते नहीं है।

(iii) सम्पर्क बिन्दु का वेग पृष्ठ के सापेक्ष सदैव शून्य रहता है यद्यपि पहिये का केन्द्र आगे बढ़ता है।

(iv) $\mu_r < \mu_k < \mu_S$

(v) घर्षण बल की अनुपस्थिति में हमारा चलना, लिखना, पकड़ मजबूत होना असंभव है।

(vi) मशीनों तथा यंत्रों में ब्रेक की भांति इसका उपयोग किया जाता है।

(vii) डोरी में गांठ लगाना, ब्रेक लगाने पर वाहन का रूकना, माचिस की तीली का जलना सभी कुछ घर्षण के कारण ही संभव है।

(viii) घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य ऊष्मा आदि में परिवर्तित हो जाता है जिसके कारण मशीनों की दक्षता कम हो जाती है और मशीन गर्म हो जाती है। मशीनों के कल पुर्जे घिस जाते हैं जिससे ऊर्जा क्षय होता है।

(ix) घर्षण बल की अनुपस्थिति में हमारा चलना असंभव है क्योंकि जब हम एक पैर उठाकर आगे की ओर रखते हैं के पिछले पैर को घर्षण बल के कारण उत्पन्न प्रतिक्रिया बल पीछे जाने से रोकता है अन्यथा वह पीछे की ओर फिसलता जायेगा और आगे कभी नहीं चल सकेगा।

(x) घर्षण बल गाड़ी के पहिये व ब्रेक शू के मध्य लगता है यदि घर्षण बल नहीं होता तो गाड़ी को रोकने के लिए लगाये गये ब्रेकों का प्रभाव नहीं होता।

(xi) टायरों के धरातल खुरदरे बनाए जाते हैं जिससे सड़क व पहिए के मध्य घर्षण बल बढ़ाया जा सके।

(xii) किसी भारी वस्तु को घसीट कर ले जाने में अधिक बल लगाना पड़ता है जबकि उसी वस्तु को पहिए वाली गाड़ी में रखकर खींचने में कम बल लगाना पड़ता है क्योंकि घर्षण बल लोटनिक घर्षण में बदल जाता है जिसका मान सबसे कम होता है।

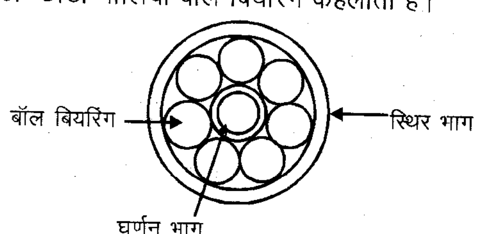
घर्षण बल कम करने की विधियाँ (Methods of Reducing Frictional Force)

घर्षण बल कम करने की सामान्यतः निम्न विधियाँ प्रयुक्त की जाती है–

(1) स्नेहक द्वारा (2) बॉल बियरिंग द्वारा तथा (3) पॉलिश द्वारा

(1) **स्नेहक द्वारा (Using Lubricant)**—घर्षण बल को कम करने के लिए प्रयुक्त किए जाने वाले पदार्थों को स्नेहक कहते हैं। ये पदार्थ सम्पर्क में रखें दो तलों के मध्य पतली परत का निर्माण करते हैं। हल्की मशीनों में कम श्यानता वाले पतले तेलों को घर्षण कम करने के लिए प्रयुक्त करते हैं। जैसे–घड़ियों में, सिलाई मशीन में आदि। भारी तथा तीव्र गतिमान मशीनों में गाढ़ा तेल या ग्रीस का उपयोग किया जाता है। संपीडित वायु का भी उपयोग स्नेहक के रूप में किया जाता है। उच्च दाब पर वायु को मशीनों के गतिशील भाग में प्रवाहित कर घर्षण में कमी की जाती है।

(2) **बॉल बियरिंग द्वारा (Using Ball Bearing)**—गतिशील पहियों शाफ्ट अथवा धुरियों के खाँचों के मध्य लगायी जाने वाली धातु की छोटी–छोटी गोलियाँ बाल बियरिंग कहलाती है।



चित्र 4.13

बाल बियरिंग का उपयोग वस्तु की गति को लोटनी गति में परिवर्तित करने के लिये किया जाता है। इस स्थिति में घर्षण बल का प्रभावी मान बहुत कम हो जाता है।

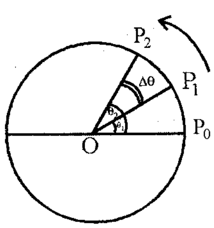
(3) **पॉलिश द्वारा (Using Polish)**–घर्षण बल का मान सम्पर्कित पृष्ठों पर पॉलिश करके कम किया जा सकता है। पॉलिश द्वारा सम्पर्कित पृष्ठों के मध्य उभार तथा गर्त भरकर सपाट हो जाते हैं जिससे अन्तरपरमाण्विक आकर्षक बन्ध अपेक्षाकृत कम बनते हैं तथा घर्षण बल का मान कम हो जाता है।

4.10 वृत्तीय गति (Circular Motion)

वृत्तीय गति से तात्पर्य वृत्ताकार पथ पर गति से है। वृत्तीय गति विभिन्न प्रकार की गतियों में महत्त्वपूर्ण गति होती है। किसी पंखे की गति, कृत्रिम उपग्रह की पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार पथ पर गति, धागे से बंधे पत्थर की किसी अक्ष के चारों ओर गति, सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति आदि वृत्तीय गति के उदाहरण है। वृत्तीय गति का अध्ययन करने के लिए निम्न राशियों की जानकारी होना आवश्यक है।

कोणीय विस्थापन (Angular displacement)–

निश्चित अक्ष के सापेक्ष निश्चित समयान्तराल में किसी कण की कोणीय स्थिति में परिवर्तन को उसका कोणीय विस्थापन कहते हैं। माना कि किसी समय t_1 पर कण की कोणीय स्थिति θ_1 व t_2 समय पर कोणीय स्थिति θ_2 है। तब कोणीय विस्थापन $\Delta\theta = \angle P_1OP_2$



चित्र 4.14

कोणीय विस्थापन का S.I. मात्रक रेडियन होता है।

कोणीय वेग (Angular velocity)– घूर्णन गति कर रहे कण के कोणीय विस्थापन में परिवर्तन की दर को कोणीय वेग कहते हैं। समयान्तराल Δt में कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ व समयान्तराल Δt के अनुपात को कण का औसत (माध्य) कोणीय वेग कहते हैं।

औसत कोणीय वेग $\omega_{av} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ...(1)

किसी क्षण t पर कण के कोणीय वेग को तात्क्षणिक कोणीय वेग कहते हैं।

तात्क्षणिक कोणीय वेग $\omega = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$ ...(2)

कण के नियत कोणीय वेग के लिए

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

$\Rightarrow$ $\omega = 2\pi n$ ...(3)

यहाँ T कण का आवर्तकाल तथा n आवृत्ति है।

T = वृत्ताकार पथ पर एक चक्कर लगाने में लगा समय

n = एक सेकण्ड में चक्करों की संख्या

कोणीय त्वरण (Angular acceleration)– घूर्णन गति कर रही वस्तु के कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं। समयान्तराल Δt में कोणीय वेग $\Delta\omega$ व समयान्तराल Δt के अनुपात को औसत कोणीय त्वरण कहते हैं।

औसत कोणीय त्वरण $\alpha_{av} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ....(4)

किसी क्षण t पर कण के कोणीय त्वरण को तात्क्षणिक कोणीय त्वरण कहते हैं।

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण $\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$ ...(5)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

कण के नियत कोणीय त्वरण के लिए

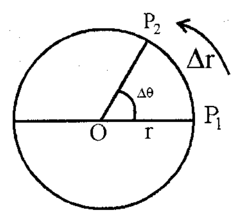
$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

$\Rightarrow$ $\omega = \alpha t$ ...(6)

रेखीय वेग तथा कोणीय वेग में सम्बन्ध
(Relation between linear velocity and angular velocity)

माना किसी समय t व $t + \Delta t$ पर कण की स्थिति क्रमशः P_1 व P_2 है

$\because$ कोण = $\dfrac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$



चित्र 4.15

$$\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r}$$

$\Rightarrow$ $\Delta r = r\Delta\theta$

$\therefore$ Δt समय में कण का औसत रेखीय वेग

$$v_{av} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r.\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$\Rightarrow$ $v = r\omega$ ....(1)

रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध
(Relation between linear acceleration and angular acceleration)

यदि वेग v परिवर्तित होता है तब रेखीय

त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(r\omega)}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha$

$\Rightarrow$ $a = r\alpha$ ....(2)

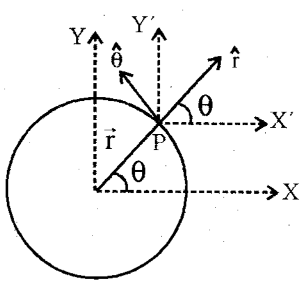
अभिकेन्द्रीय त्वरण अथवा त्रिज्य त्वरण

(Centripetal Acceleration or Radial acceleration)

जब कोई कण एक समान रैखिक चाल v से r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर गति करता है तब इसके रैखिक वेग की दिशा वृत्त के स्पर्शीय रेखीय होने के कारण सदैव परिवर्तित होती रहती है। अतः कण का वेग परिवर्तित होता है। इस प्रकार वेग परिवर्तन यदि केवल दिशा परिवर्तन के कारण हो अर्थात् कण की चाल अपरिवर्तित रहे तो त्वरण की दिशा, वेग की दिशा के लम्बवत्, अर्थात् वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र की ओर होती है। इस प्रकार के त्वरण को अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं। जब कोई कण एक समान चाल से वृत्ताकार पथ पर चलता है तो कण की गति को एक समान वृत्तीय गति कहते हैं।

अभिकेन्द्रीय त्वरण का व्यंजक समतल ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति में-

माना कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है। कण के वेग का परिमाण तथा दिशा समय के साथ परिवर्तनीय है। किसी समय t पर कण P बिन्दु पर है जहाँ उसकी कोणीय स्थिति θ है। बिन्दु P के निर्देशांकों (x, y) को समतल ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) के पदों में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 4.16

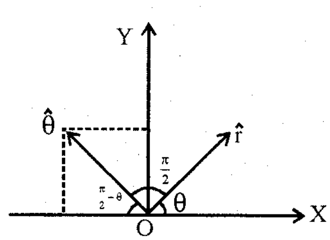
$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

स्थिति सदिश $\vec{r}$ के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{r}$ तथा कोण θ की बढ़ती दिशा अर्थात् स्थिति सदिश $\vec{r}$ के लम्बवत् एकांक सदिश $\hat{\theta}$ हो तो-

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \quad ...(1)$$



चित्र 4.17

चित्र की ज्यामिति से-

$$\hat{\theta} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \quad ...(2)$$

इस प्रकार कण का t समय पर स्थिति सदिश

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) \quad ...(3)$$

कण का t समय पर वेग

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)]$$

$$\vec{v} = r[\hat{i}(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}) + \hat{j}(\cos\theta\frac{d\theta}{dt})]$$

$$\vec{v} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left[-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right] = r\omega\,[-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta] \quad ....(4)$$

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \quad ....(5)$$

इस प्रकार समीकरण (5) से स्पष्ट है कि पद rω समय t पर कण की चाल है तथा वेग की दिशा $\hat{\theta}$ अर्थात् वृत्तीय पथ की स्पर्श रेखीय दिशा में है।

कण का t समय पर त्वरण

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\omega(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)]$$

$$\vec{a} = r\left[\omega\frac{d}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) + \frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\right]$$

$$\vec{a} = r\omega[-\hat{i}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - \hat{j}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}) + r\frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = r\omega[-\hat{i}\cos\theta(\omega) - \hat{j}\sin\theta(\omega)] + r\frac{d\omega}{dt}(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2[\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) + r\alpha(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\theta} \quad ....(6)$$

समी. (6) से स्पष्ट है कि इस स्थिति में कण की सामान्य वृत्तीय गति में त्वरण $\vec{a}$ के दो घटक है-

(i) $\vec{a}_r = -\omega^2 r\hat{r}$

जिसकी दिशा $-\hat{r}$ अर्थात् वृत्त के केन्द्र की ओर होती है इसे अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं।

(ii) $\vec{a}_t = r\alpha\hat{\theta} = r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} = \frac{d}{dt}(r\omega)\hat{\theta} = \frac{dv}{dt}\hat{\theta}$

जिसकी दिशा उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है इसे स्पर्शीय त्वरण कहते हैं।

इस प्रकार समी. (6) से-

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \quad ...(7)$$

स्थिति-यदि कण एकसमान चाल से वृत्तीय पथ पर गति करता है तो कण की गति एकसमान वृत्तीय गति कहलाती है। इस स्थिति में

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

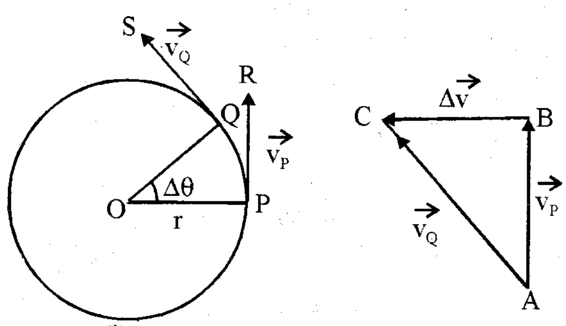
अर्थात् स्पर्शीय त्वरण शून्य होगा तथा केवल अभिकेन्द्रीय त्वरण उपस्थित होगा।

∴ अभिकेन्द्रीय त्वरण $a = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{r} \quad ...(8)$$

वैकल्पिक विधि-

माना कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है। कण के वेग का परिमाण नियत है जबकि दिशा समय के साथ परिवर्तनीय है।



चित्र 4.18

माना कि समय t पर कण P बिन्दु पर है तथा वेग $\vec{v}_P$ है जबकि $t + \Delta t$ समय पर कण Q बिन्दु पर है तथा वेग $\vec{v}_Q$ है। कण का त्वरण

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_Q - \vec{v}_P}{\Delta t} \quad ...(1)$$

वेग $\vec{v}_P$ व $\vec{v}_Q$ का तुल्य सदिश लेने पर (चित्र (ii) से)
सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P \quad ...(2)$$

समी (1) व (2) से $\quad \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad ...(3)$

चित्र (i) व (ii) की ज्यामिति से
(कोणीय विस्थापन Δθ अल्प होने पर)
$BC = \Delta v, PQ = v\Delta t, AB = v, OP = r$
त्रिभुज POQ व BAC समरूप त्रिभुज है अतः

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{OP}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{v\Delta t} = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

∴ समी. (3) से त्वरण $\vec{a}$ का परिमाण

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad a_r = \frac{v^2}{r} \quad ...(4)$$

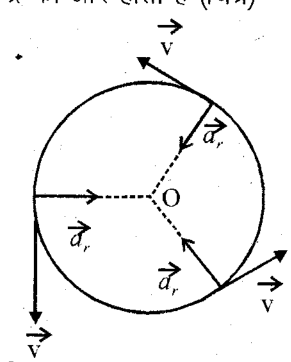
तथा दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर होती है इसी कारण इस प्रकार के त्वरण को अभिकेन्द्रीय त्वरण कहते हैं।
स्पर्श रेखीय वेग (v) तथा कोणीय वेग (ω) में सम्बन्ध में $v = r\omega$
अभिकेन्द्रीय त्वरण कोणीय चाल के रूप में–

$$\Rightarrow \quad a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad a_r = r\omega^2 \quad ...(5)$$

जहाँ कोणीय वेग $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ तथा f = आवृत्ति, T = आवर्तकाल

एकसमान वृत्तीय गति करते हुए कण के वेग की दिशा वृत्त के स्पर्श रेखीय तथा त्वरण की दिशा वेग की दिशा के सदैव लम्बवत्, वृत्त के केन्द्र की ओर होती है (चित्र)



चित्र 4.19

किसी नियत चाल v पर, त्रिज्या r के छोटे होने पर a_r अधिक तथा बड़े होने पर a_r छोटा होता है। किसी नियत कोणीय चाल ω पर r के छोटे होने पर a_r छोटा तथा बड़े होने पर a_r बड़ा होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. अभिकेन्द्रीय त्वरण $\quad a_r = \frac{v^2}{r}$

   चूंकि v व r दोनों अचर हैं इसलिए अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण भी अचर होता है। परंतु दिशा बदलती रहती है और सदैव केन्द्र की ओर होती है। अतः अभिकेन्द्रीय त्वरण एक समान सदिश नहीं होता है।

   इसकी दिशा परिवर्तित होती रहती है अतः यह एक परिवर्तित त्वरण भी है।

2. r त्रिज्या के एक वृत्ताकार पथ में नियत चाल से गति कर रहे कण

का स्पर्शरेखीय त्वरण (a_t) शून्य होता है। अतः कुल त्वरण

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \quad \text{चूंकि } a_t = 0$$

अतः $a = a_r$

3. जब कण की चाल भी बदल रही हो तो अभिकेन्द्रीय त्वरण के साथ–साथ स्पर्श रेखीय त्वरण भी उत्पन्न हो जाता है।

परिणामी त्वरण $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

अतः परिणामी त्वरण का परिमाण

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

तथा त्वरण की दिशा $\tan\theta = \dfrac{a_r}{a_t}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_r}{a_t}\right)$$

4. **अभिकेन्द्रीय बल**–वह बल जो किसी कण को वृत्ताकार पथ में गति करने को बाध्य करता है और जिसकी दिशा सदैव वृत्ताकार पथ के केन्द्र की ओर होती है, अभिकेन्द्रीय बल कहते हैं।

$F_r = ma_r$ जहां m = कण का द्रव्यमान

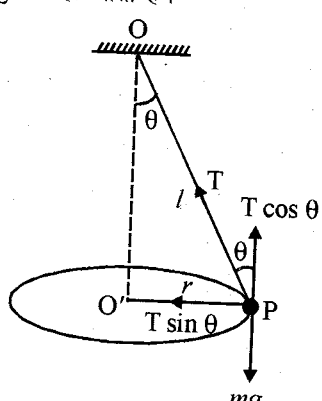
$F_r = \dfrac{mv^2}{r}$ चूंकि $a_r = \dfrac{v^2}{r}$

$\Rightarrow \quad F_r = m\omega^2 r$ $\therefore v = \omega r$

$= m\,4\pi^2 f^2 r$ $\omega = 2\pi f$

4.10.1 क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति (Circular motion in Horizontal and vertical planes)

(i) **क्षैतिज तल में वृत्तीय गति**–चित्रानुसार एक m द्रव्यमान के पिण्ड को l लम्बाई के एक धागे से बाँधकर नियत चाल v से क्षैतिज वृत्त में घुमाया जा रहा है। इस स्थिति में धागा θ कोण के शंकु की सतह को प्रसर्पित करता है। जहाँ θ धागे द्वारा ऊर्ध्व रेखा के साथ बनाया गया कोण है। यदि धागे में तनाव बल T है तो चित्रानुसार बलों को घटकों में वियोजित करने पर तनाव बल का घटक T sin θ अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है जबकि T cos θ घटक पिण्ड के भार से संतुलित हो जाता है।



चित्र 4.20

$$T\cos\theta = mg \qquad ...(1)$$

$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad ...(2)$$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{mv^2}{r.mg} = \frac{v^2}{rg} \qquad ...(3)$$

माना कि $OO' = h$

$$\tan\theta = \frac{O'P}{OO'} = \frac{r}{h}$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{h}{l}$

$h = l\cos\theta$

$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{r}{l\cos\theta}$

समी. (3) से $\quad \dfrac{v^2}{rg} = \dfrac{r}{l\cos\theta}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{v^2}{r^2} = \dfrac{g}{l\cos\theta}$

$\because \quad v = r\omega$

$\Rightarrow \quad \omega = \dfrac{v}{r}$

$\therefore \quad \omega^2 = \dfrac{g}{l\cos\theta}$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

परिक्रमण काल $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}} \qquad ...(4)$

समी. (4) से θ कोण का परिक्रमण काल (आवर्त काल) का सम्बन्ध प्राप्त होता है।

स्थिति (i)– समी. (4) के अनुसार θ = 90° संभव नहीं है क्योंकि इस स्थिति में आवर्तकाल T = 0 होगा जिससे v = ∞ जो कि संभव नहीं है।

स्थिति (ii)– समी. (4) के अनुसार $T_{max} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

इस स्थिति में $\theta \approx 0°$

समी. (4) सरल लोलक के आवर्तकाल के व्यंजक के समान है। इस कारण यह व्यवस्था शंकु लोलक (Conical Pendulum) कहलाती है।

(ii) **ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति**–जब किसी वस्तु को डोरी के एक सिरे से बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाते हैं तब वृत्तीय पथ के विभिन्न बिन्दुओं पर वस्तु की चाल भिन्न-भिन्न होती है। अतः वस्तु पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल तथा डोरी में तनाव भी लगातार बदलता रहता है।

माना कि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड किसी धागे से बँधा हुआ ऊर्ध्वाधर तल में R त्रिज्या के वृत्त में गति करता है। वृत्त के निम्नतम व उच्चतम बिन्दु क्रमशः A व C है। पिण्ड का वेग वृत्त के निम्नतम

बिन्दु पर अधिकतम तथा उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम होता है।

किसी बिन्दु पर पिण्ड का वेग (Velocity of body at any point)

माना कि बिन्दु P की बिन्दु A से ऊँचाई h है। यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से-

बिन्दु A पर यांत्रिक ऊर्जा = बिन्दु P पर यांत्रिक ऊर्जा

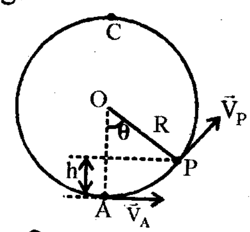
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(0) = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh$$

$$V_A^2 = V_P^2 + 2gh$$

$$\Rightarrow \quad V_P^2 = V_A^2 - 2gh$$

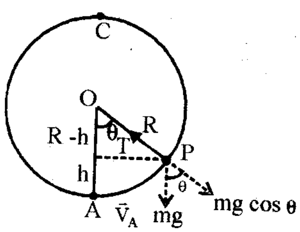
$$\Rightarrow \quad V_P = \sqrt{v_A^2 - 2gh} \quad \text{....(1)}$$



चित्र 4.21

डोरी में तनाव (Tension in the string)

चित्रानुसार वृत्ताकार पथ के केन्द्र की ओर परिणामी बल (T – mg cos θ) पिण्ड को अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।



चित्र 4.22

अर्थात् $$T - mg\cos\theta = \frac{mv_P^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T = mg\cos\theta + \frac{mv_P^2}{R}$$

चित्र की ज्यामिति से $\cos\theta = \frac{R-h}{R}$

समी. (1) से V_P का मान रखने पर

$$T = mg\left(\frac{R-h}{R}\right) + \frac{m}{R}(v_A^2 - 2gh)$$

$$T = \frac{m}{R}[gR - gh + v_A^2 - 2gh]$$

$$T = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3gh] \quad \text{...(2)}$$

विशिष्ट स्थितियाँ

(i) निम्नतम बिन्दु A पर तनाव

$$T_A = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3g(0)]$$

(∵ बिन्दु A पर h = 0)

$$T_A = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR] \quad \text{....(3)}$$

(ii) उच्चतम बिन्दु C पर तनाव

$$T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - 3g \times 2R]$$

(∵ बिन्दु C पर h =2R)

$$T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 - 5gR] \quad \text{....(4)}$$

अत: निम्नतम बिन्दु व उच्चतम बिन्दु के तनावों में अन्तर

$$T_A - T_C = \frac{m}{R}[v_A^2 + gR] - \frac{m}{R}[v_A^2 - 5gR]$$

$$= \frac{m}{R}[v_A^2 + gR - v_A^2 + 5gR]$$

$$= \frac{m}{R}6gR = 6mg \quad \text{...(5)}$$

ऊर्ध्ववृत्त पूर्ण करने के लिए निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग-

पिण्ड के ऊर्ध्ववृत्त पूर्ण करने के लिए आवश्यक शर्त

$$T_C \geq 0$$

∴ समी. (4) से-

$$\frac{m}{R}(V_A^2 - 5gR) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A^2 - 5gR \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A^2 \geq 5gR$$

$$\Rightarrow \quad V_A \geq \sqrt{5gR}$$

∴ **निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग**

$$V_A = \sqrt{5gR} \quad \text{...(6)}$$

समी. (3) से-

तनाव $$T_A = \frac{m}{R}(5gR + gR)$$

$$T_A = \frac{m}{R}6gR = 6mg \quad \text{...(7)}$$

उच्चतम बिन्दु C पर न्यूनतम वेग–

समी. (1) से-

$$V_C = \sqrt{5gR - 2g(2R)}$$

(∵ बिन्दु C पर h =2R)

$$\therefore \quad V_C = \sqrt{5gR - 4gR} = \sqrt{gR}$$

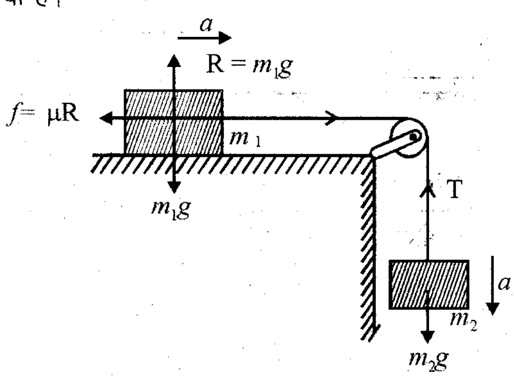
∴ उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग

$$V = \sqrt{gR}$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

घिरनी से गुजरने वाली डोरी से जुड़े पिण्डों की गति
(Motion of Bodies Connected by a String passing over a pulley)

(i) माना m_1 द्रव्यमान का एक पिण्ड एक क्षैतिज तल पर स्थिर है। इस पिण्ड से m_2 द्रव्यमान के अन्य पिण्ड को एक डोरी की सहायता से जोड़कर चित्रानुसार एक हल्की घिरनी पर से लटकाया गया है।



R = प्रतिक्रिया बल
f_s = घर्षण बल
μ = घर्षण गुणांक

यदि डोरी में तनाव T व पिण्डों के त्वरण a हों तो m_1 द्रव्यमान के पिण्ड पर परिणामी बल–

$$T - f = m_1 a$$

∵ $f = \mu R = \mu m_1 g$

∴ $T - \mu m_1 g = m_1 a$ ...(1)

m_2 द्रव्यमान के पिण्ड पर परिणामी बल

$$m_2 g - T = m_2 a \quad ...(2)$$

त्वरण a ज्ञात करना–

समी. (1) व समी. (2) को जोड़ने पर

$$g(m_2 - \mu m_1) = (m_1 + m_2)a$$

या $$a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} \quad ...(3)$$

तनाव बल T ज्ञात करना–

समी. (1) में समी. (2) का भाग देने पर

$$\frac{T - \mu m_1 g}{m_2 g - T} = \frac{m_1}{m_2}$$

या $$m_2 T - \mu m_1 m_2 g = m_1 m_2 g - m_1 T$$

$$T(m_1 + m_2) = m_1 m_2 g(\mu + 1)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\mu + 1)}{m_1 + m_2} \quad ...(4)$$

स्थिति–यदि क्षैतिज तल व पिण्ड के मध्य घर्षण बल नगण्य है तो $\mu = 0$ होगा

अतः समी. (3) से त्वरण

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad ...(5)$$

तथा समी. (4) से तनाव $$T = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g \quad ...(5)$$

(ii) जब दो पिण्डों को एक डोरी से जोड़कर चित्रानुसार एक घिरनी से लटकाया जाता है तब भारी पिण्ड (m_1 द्रव्यमान) की गति ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर व हल्के पिण्ड (m_2 द्रव्यमान) की गति ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगी। यदि दोनों पिण्ड के त्वरण 'a' व डोरी में तनाव 'T' है तो पिण्ड m_1 पर परिणामी बल होगा–

$$m_1 g - T = m_1 a \quad ...(7)$$

पिण्ड m_2 पर परिणामी बल

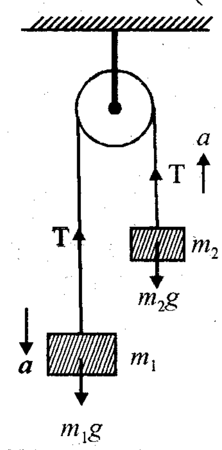
$$T - m_2 g = m_2 a \quad ...(8)$$

त्वरण a का मान ज्ञात करना–

समी. (7) में समी. (8) को जोड़ने पर

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

या $$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g \quad ...(9)$$



तनाव बल T मान ज्ञात करना–

समी. (7) में समी. (8) का भाग देने पर

$$\frac{m_1 g - T}{T - m_2 g} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$m_1 m_2 g - m_2 T = m_1 T - m_1 m_2 g$$

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

उदा.11. कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.15 है, तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिए आवश्यक है।

(पुस्तक का उदाहरण 4.6)

हल– दिया गया है–$\mu_s = 0.15$, $a_{max} = ?$

प्रश्नानुसार बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण है

अतः

$$ma \le (f_s)_{max}$$

$$\Rightarrow \quad ma \le \mu_s R$$

$$\Rightarrow \quad ma \le \mu_s mg$$

$$\Rightarrow \quad a_{max} = \mu_s g$$

$$= 0.15 \times 10 \text{ मी./से.}^2$$

$$= 1.5 \text{ मी./से.}^2$$

उदा 12.एक पिण्ड 5 मी./से. की चाल से एक क्षैतिज धरातल पर फिसल रहा है। यदि धरातल व पिण्ड के मध्य गतिक घर्षण गुणांक 0.2 हो तो स्थिर अवस्था में आने तक पिण्ड द्वारा तय

की गई दूरी ज्ञात करो। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया हुआ है–$u = 5$मी./से., $\mu_k = 0.2$, $v = 0$ मी./से., $g = 10$ मी./से.^{2}

पिण्ड की गति का समीकरण

$$-\mu_k mg = ma$$

(ऋणात्मक चिन्ह पिण्ड के मंदन के कारण प्रयुक्त किया गया है।)

$$a = -\mu_k g \quad ...(1)$$

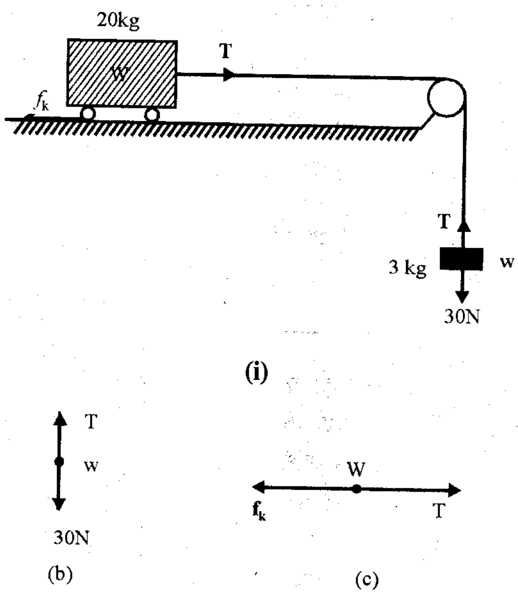
गति के तृतीय समी. से $\quad v^2 = u^2 + 2aS$

$$0 = (5)^2 + 2(-\mu_k g)S$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{25}{2\mu_k g} = \frac{5}{2 \times 0.2 \times 10}$$

$$= \frac{25}{4} = 6.25 \text{ मीटर}$$

उदा.13.चित्र में दर्शाए ब्लॉक-ट्रॉली निकाय का त्वरण क्या है, यदि ट्रॉली और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0.04 है? डोरी में तनाव क्या है? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ लीजिए), डोरी की संहति नगण्य मानिए। **(पुस्तक का उदाहरण 4.7)**



चित्र 4.23 (ii)

हल– चित्रानुसार ट्रॉली पर परिणामी बल

$$T - f_k = 20 \times a$$

$$\Rightarrow \quad T - f_k = 20a$$

$$\because \quad f_k = \mu_k R = \mu_k mg$$

$$\Rightarrow \quad f_k = 0.04 \times 20 \times 10$$

$$= 8$$

$$\therefore \quad T - 8 = 20a \quad ...(1)$$

ब्लॉक पर परिणामी बल

$$30 - T = 3 \times a$$

$$\Rightarrow \quad 30 - T = 3a \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) का योग करने पर

$$\Rightarrow \quad T - 8 + 30 - T = 20a + 3a$$

$$\Rightarrow \quad 22 = 23a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{22}{23} \text{ मी./से.}^2$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.96 \text{ मी./से.}^2$$

समी. (1) में a का मान रखने पर

$$T - 8 = 20 \times 0.96 = 19.1$$

$$\Rightarrow \quad T = 27.1 \text{न्यूटन}$$

4.11 समतल तथा बंकित वृत्ताकार पथ पर वाहन की गति (Motion of a vehicle on a plane and Banked Circular path)

सड़क के मोड़ पर वाहनों को घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने हेतु सड़क के बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षाकृत थोड़ा ऊँचा उठा दिया जाता है। इसे सड़क में करवट (बंकन) कहते हैं। बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षा जिस कोण से उठाया जाता है उसे करवट कोण कहते हैं।

समतल वृत्ताकार सड़क पर वाहन की गति (Motion of a Vehicle on a plan circular road)

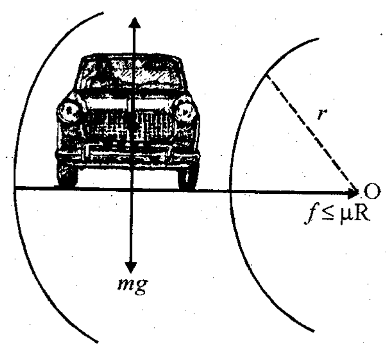
माना कि m द्रव्यमान की कोई कार r त्रिज्या के समतल वृत्ताकार सड़क पर नियत चाल v से गतिशील है।

इस पर चित्रानुसार बल कार्य करते हैं।

कार का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर तथा सड़क के कारण कार पर लगने वाला प्रतिक्रिया बल R ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है। क्षैतिज दिशा में वृत्ताकार मोड़ पर कार के पहिये मोड़ के केन्द्र से दूर जाने का प्रयास करते हैं। तब घर्षण बल (f) कार के पहियों को वृत्ताकार पथ के केन्द्र से दूर जाने से रोकता है। यदि घर्षण गुणांक μ है तो

घर्षण बल $f \le \mu R$

ऊर्ध्व बलों के संतुलन से $\quad mg = R$



चित्र 4.24

यह घर्षण बल f ही वृत्ताकार पथ में गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल $\frac{mv^2}{r}$ प्रदान करता है।

अर्थात् $\quad f = \frac{mv^2}{r}$

इस प्रकार समतल वृत्ताकार पथ पर कार की सुरक्षित गति के लिए अभिकेन्द्रीय बल का मान घर्षण बल के बराबर या इससे कम होना चाहिये।

अतः $\frac{mv^2}{r} \le \mu mg$

$\Rightarrow$ $v \le \sqrt{\mu rg}$

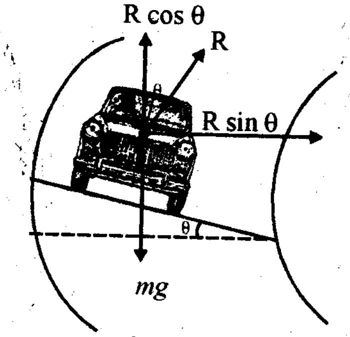
अतः कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{\mu rg}$$

वेग कार के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

बंकित सड़क पर वाहन की गति
(Motion of a vehicle on a banked road)

स्थिति (i)-जब घर्षण द्वारा अभिकेन्द्रीय बल नहीं लगता हो–
माना कि बंकित सड़क का बंकन कोण θ है तथा वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r है।



चित्र 4.25

चित्र की ज्यामिति से– $mg = R\cos\theta$ ...(1)

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta \quad ...(2)$$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta}$$

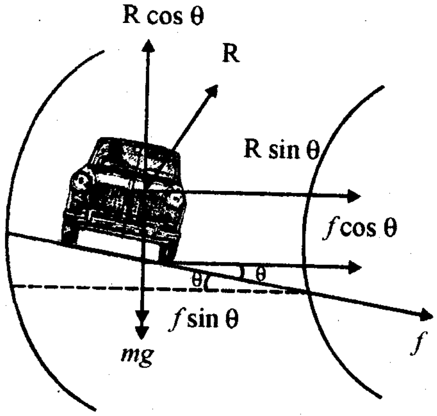
$\Rightarrow$ $\frac{v^2}{rg} = \tan\theta$

$\Rightarrow$ $v^2 = rg\tan\theta$

$\Rightarrow$ $v = \sqrt{rg\tan\theta}$ ...(3)

समी. (3) कार की आदर्श चाल के समीकरण को व्यक्त करता है। इस चाल से ढालू सड़क पर कार चलाने पर कार के टायरों की घिसाई कम होती है।

स्थिति (ii)-अधिकतम सुरक्षित चाल (घर्षण बल प्रभावी हो)–



चित्र 4.26

चित्र की ज्यामिति से–

$$mg + f\sin\theta = R\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $mg = R\cos\theta - f\sin\theta$ ...(

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta + f\cos\theta \quad ...($$

समी. (2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta + f\cos\theta}{R\cos\theta - f\sin\theta}$$

कार की सुरक्षित अधिकतम चाल v_{max} हो तो

$$\frac{v_{max}^2}{rg} = \frac{R\sin\theta + \mu R\cos\theta}{R\cos\theta - \mu R\sin\theta}$$

$\because$ $f = \mu R$

जहां घर्षण बल का अधिकतम मान $f = \mu R$ होता है।

$$\frac{v_{max}^2}{rg} = \frac{R\tan\theta + \mu R}{R - \mu R\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

$\Rightarrow$ $v_{max}^2 = rg\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)}$ ...(3)

ढालू सड़क पर कार की अधिकतम चाल समतल सड़क पर कार की अधिकतम संभव चाल ($v_{max} = \sqrt{\mu rg}$) से अधिक है।

स्थिति (iii)-न्यूनतम सुरक्षित चाल (घर्षण बल प्रभावी हो)–

जब कार की चाल $\sqrt{rg\tan\theta}$ से कम हो तब कार के मोड़ के भीतर की ओर फिसलने की संभावना रहती है तब घर्षण बल f बाहर की ओर लगता है। इस स्थिति में समी. (1) व (2) में f का चिन्ह बदलने पर

$$mg = R\cos\theta + f\sin\theta \quad ...(4)$$

$$\frac{mv^2}{r} = R\sin\theta - f\cos\theta \quad ...(5)$$

समी. (5) में (4) का भाग देने पर

$$\frac{mv^2}{r.mg} = \frac{R\sin\theta - f\cos\theta}{R\cos\theta + f\sin\theta}$$

$$= \frac{R\tan\theta - f}{R + f\tan\theta}$$

$\Rightarrow$ $\frac{v_{min}^2}{rg} = \frac{R\tan\theta - \mu R}{R + \mu R\tan\theta} = \frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}$

$\Rightarrow$ $v_{min}^2 = rg\left(\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}\right)$

$$\Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{rg\left(\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}\right)} \quad ...(6)$$

महत्वपूर्ण तथ्य

1. यदि घर्षण बल की आवश्यकता नहीं पड़े तो वाहन पर घर्षण बल का प्रभाव नहीं होगा इस स्थिति में वेग का चरम मान होगा अर्थात् अदिश चाल

$$v = \sqrt{rg\tan\theta} \qquad \because \mu = 0$$

इस अवस्था में त्रिज्य दाब नहीं होगा तब ढालू सड़क पर कार चलाने पर टायरों की घिसाई कम होगी।

2. सीमान्त घर्षण की स्थिति में $\mu = \mu_s$

तब
$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\mu_s + \tan\theta}{(1 - \mu_s\tan\theta)}\right)}$$

घर्षण का प्रभाव टायरों पर अधिकतम होगा इससे वेग अधिक होने पर वाहन उलट जायेगा।

3. यदि सड़क बंकित न हो तो केवल घर्षण बल ही अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करेगा और कार का अधिकतम वेग

$$v_{max} = \sqrt{\mu_S rg}$$

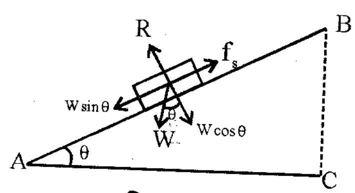
4.12 आनत तल पर गति (Motion on an inclined plane)

- चित्रानुसार m द्रव्यमान का एक पिण्ड झुकाव θ के नत तल पर विराम अवस्था में है। इस स्थिति में पिण्ड पर कार्यरत विभिन्न बल निम्न होंगे–

(i) पिण्ड का भार $W = mg$

(ii) पिण्ड पर तल के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R

(iii) घर्षण बल f_s



चित्र 4.27

चित्र की ज्यामिति से भार W को घटकों में वियोजित करने पर पिण्ड की स्थिर अवस्था के लिए

$$W\cos\theta = R \quad ...(1)$$
$$W\sin\theta = f_s \quad ...(2)$$

अब यदि नत तल के झुकाव कोण का अधिकतम मान θ_s हो जबकि पिण्ड नत तल पर विराम अवस्था में रहे तब कोण θ_s को विश्राम कोण (Angle of Repose) कहते हैं।

इस स्थिति में
$$W\cos\theta_s = R \quad ...(3)$$
$$W\sin\theta_s = (f_s)_{max} \quad ...(4)$$

इस अवस्था में स्थैतिक घर्षण बल सीमान्त घर्षण बल होता है।

समी. (4) में समी. (3) का भाग देने पर

$$\tan\theta_s = \frac{(f_s)_{max}}{R} = \mu_s$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta_s = \mu_s \quad ...(5)$$

उपरोक्त समीकरण से नत तल तथा पिण्ड के पृष्ठ के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक μ_s ज्ञात किया जा सकता है। अब यदि नत तल के झुकाव कोण θ का मान θ_s से कुछ अधिक इस प्रकार बढ़ाते हैं कि पिण्ड नियत वेग से गति करता है तब इस स्थिति में पिण्ड पर गतिज घर्षण बल लगता है। इस स्थिति में

$$W\cos\theta_K = R \quad ...(6)$$
$$W\sin\theta_K = f_k \quad ...(7)$$

समी. (7) में समी. (6) का भाग देने पर

$$\tan\theta_k = \frac{f_k}{R} = \mu_k$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta_k = \mu_k \quad ...(8)$$

इस प्रकार उपरोक्त समीकरण से नत तल तथा पिण्ड के पृष्ठ के मध्य गतिज घर्षण गुणांक μ_k ज्ञात किया जा सकता है। माना कि BC दूरी AC पर अभिलम्ब है तब क्षैतिज तल AC तथा नत तल AB की दूरियाँ ज्ञात होने पर $\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{(AB)^2 - (AC)^2}}{AC}$ सम्बन्ध द्वारा $\tan\theta_s$ तथा $\tan\theta_k$ का मान ज्ञात किया जा सकता है। जिससे समी. (5) व समी. (8) द्वारा μ_s व μ_k का मान ज्ञात किया जा सकता है।

4.13 जड़त्वीय एवं अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (प्रारंभिक अवधारणा) (Intertial and Non-Inertial frames of reference) (Elementary concept)

निर्देश तंत्र- वह निकाय जिसके सापेक्ष किसी पिण्ड की स्थिति या गति को व्यक्त किया जा सके, निर्देश तंत्र कहलाता है। निर्देश तंत्र को किसी दृढ़ पिण्ड से जुड़ा मानकर उसके सापेक्ष अन्य पिण्डों की स्थिति बतायी जाती है। इसके लिए किसी उचित बिन्दु को निर्देश तंत्र का मूल बिन्दु मानते हैं जिसके सापेक्ष स्थिति सदिश द्वारा किसी पिण्ड की स्थिति को व्यक्त किया जाता है। सामान्यत: प्रेक्षक की स्थिति इस मूल बिन्दु से सम्पाती होती है। कार्तीय निर्देशांक का उपयोग सरलतम निर्देश तंत्र के रूप में लिया जाता है।

(i) **जड़त्वीय निर्देश तंत्र (Inertial frame of reference)**–वह निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण रहित दिखाई देती है, जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। इस निर्देश तंत्र में बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण नियत वेग से गति करता है।

उदाहरण–वे सभी निर्देश तंत्र जो एक दूसरे के सापेक्ष स्थिर है या नियत वेग से गतिशील है जैसे– विराम अवस्था में लिफ्ट, नियत वेग से ऊपर नीचे की ओर गति करती लिफ्ट, एक सीधी सड़क पर नियत

वेग से गति करती हुई कार इत्यादि।

(ii) अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (Non-Inertial frame of reference)—वह निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण सहित दिखाई देती है अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। इस निर्देश तंत्र में कण नियत वेग से गति नहीं करता है।

उदाहरण—स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करता हुआ निर्देश तंत्र, एक समान वृत्तीय गति करती हुई कार, लिफ्ट जो कि किसी त्वरण के साथ ऊपर या नीचे जा रही हो, उड़ान भरता हुआ हवाई–जहाज इत्यादि।

क्या पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र है या अजड़त्वीय?

पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर घूमती है तथा स्वयं की अक्ष पर भी घूर्णन करती है। अत: पृथ्वी एक घूर्णन करता हुआ निर्देश तंत्र है। अत: पृथ्वी एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है।

पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर निर्देश तंत्र जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं होगा क्योंकि पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर कक्षीय गति के अतिरिक्त स्वयं की अक्ष के परित: चक्रण गति भी करती है जिसके कारण पृथ्वी की सतह पर स्थित प्रत्येक पिण्ड पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर अभिकेन्द्रीय त्वरण $\omega^2 R$ लगता है जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है।

$$\text{अभिकेन्द्रीय त्वरण} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$= \left(\frac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60}\right)^2 \times 6.4 \times 10^6 = 3.4 \times 10^{-2} \text{ मी./से}^2$$

यहाँ आवर्तकाल T = 24 घण्टे

पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4 \times 10^6$ मीटर

सामान्य यांत्रिकी समस्याओं में यदि उपरोक्त त्वरण को नगण्य मान लिया जाये तब पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तंत्र के रूप में माना जा सकता है। परन्तु बड़े पैमाने की गतियों जैसे महासागरीय धाराओं, पवनों आदि पर विचार किया जाये तब उपरोक्त त्वरण का प्रभाव दिखायी देता है तब पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं माना जा सकता है।

महत्त्वपूर्ण—ब्रह्माण्ड में कोई आदर्श जड़त्वीय निर्देश तंत्र संभव नहीं है। व्यवहार में किसी निर्देश तंत्र को जड़त्वीय माना जा सकता है, यदि प्रेक्षित वस्तु के त्वरण के सापेक्ष निर्देश तंत्र का त्वरण नगण्य हो।

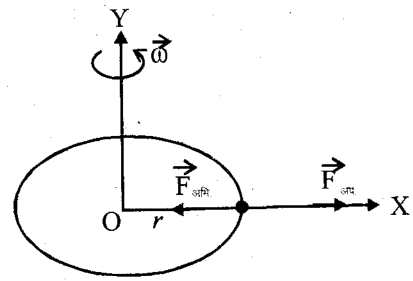
महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) आभासी या छद्म बल (Pseudo Force)

सामान्य रूप से देखा जाता है कि जब भी रेलगाड़ी त्वरित अथवा मंद होती है तब इसमें बैठा यात्री क्रमशः पीछे की ओर अथवा आगे की ओर बल महसूस करता है। जबकि कोई बाह्य बल नहीं लगाया जाता है। फिर भी यात्री को बल का आभास होता है। इस बल को आभासी बल कहते हैं।

इस बल का कारण है कि यात्री की गति त्वरित निर्देश तंत्र में है। माना कि m द्रव्यमान का पिण्ड a त्वरण के निर्देश तंत्र में है, जिसमें पिण्ड पर $-ma$ बल लगता है, तब इस त्वरित निर्देश तंत्र पर न्यूटन का नियम लगाया जा सकता है। बस के अचानक रूक जाने पर, आभासी बल के कारण ही यात्री आगे की ओर गिरता है।

उदाहरण—माना कि m द्रव्यमान का एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है जिस पर **अभिकेन्द्रीय त्वरण** (centripetal accelerations) $\vec{a} = \omega^2 r\hat{r}$ है। अब यदि एक निर्देश तंत्र कण के साथ ही घूर्णन करता है तब निर्देश तंत्र के प्रेक्षक को कण स्थिर प्रतीत होगा क्योंकि यह एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है जिस पर आभासी बल $\vec{F} = -m\vec{a} = -m\omega^2 r\hat{r}$ बाहर की ओर लगता हुआ प्रतीत होता है जिसे **अपकेन्द्रीय बल** (centrifugal force) कहते हैं।



(2) किसी पिण्ड का लिफ्ट में भार (Weight of a body in a lift)

माना कि कोई व्यक्ति (द्रव्यमान m) तौलने की मशीन पर खड़ा है। व्यक्ति पर पृथ्वी का गुरूत्व बल mg नीचे की ओर लगता है। मशीन व्यक्ति पर प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर लगाती है अतः व्यक्ति पर परिणामी बल $F = mg - R$ (नीचे की ओर) ...(1)

(i) जब लिफ्ट समान वेग से ऊपर या नीचे जा रही हो तो इसमें बैठे यात्री के लिए, इस स्थिति में व्यक्ति का त्वरण शून्य है अतः परिणामी बल भी शून्य होगा।

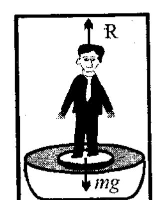
$\therefore$ $F = mg - R = 0$

$\therefore$ $R = mg$

$\therefore$ भार $W = mg$ ...(2)

अर्थात् प्रभावी त्वरण

$g' = g$



(i)

(ii) जब लिफ्ट त्वरण $\vec{a}$ से ऊपर की ओर गति करती है तो इस स्थिति में न्यूटन के द्वितीय नियम से उस पर परिणामी बल $F = ma$ (ऊपर की ओर) अथवा $F = -ma$ (नीचे की ओर) होना चाहिए।

समीकरण (1) से

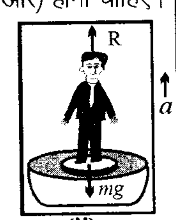
$\therefore$ $-ma = mg - R$

$R = mg + ma$

$R = m(g + a)$

$\therefore$ भार $W = m(g + a)$ ...(3)

प्रभावी त्वरण $g' = g + a$



(ii)

(iii) जब लिफ्ट त्वरण $\vec{a}$ से नीचे की ओर गिरती है $(a < g)$ तो इस

स्थिति में परिणामी बल F = ma नीचे की ओर होना चाहिए।

समीकरण (1) से

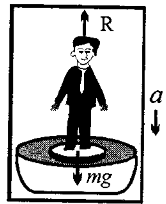
$$\therefore \quad ma = mg - R$$

$$R = mg - ma$$

$$R = m(g - a)$$

$$\therefore \quad \text{भार } W = m(g - a)$$

प्रभावी त्वरण $g' = g - a$ ...(4)



(iii)

(iv) जब लिफ्ट मुक्त रूप से गिरती है तो

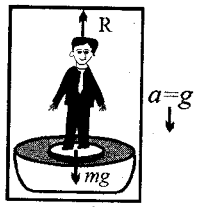
$$a = g$$

समीकरण (1) से $mg = mg - R$

$$\Rightarrow \quad R = mg - mg = 0$$

$\therefore$ भार W = 0 ...(5)

प्रभावी त्वरण g' = 0

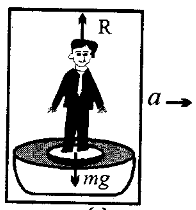


(iv)

(v) जब लिफ्ट क्षैतिज दिशा में $\vec{a}$ त्वरण से गतिमान है तो

प्रभाव त्वरण $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$

भार $W = m\sqrt{g^2 + a^2}$ ...(6)



(v)

महत्त्वपूर्ण

1. जब लिफ्ट विराम अवस्था में हो–

तब त्वरण $a = 0$

$\therefore$ प्रतिक्रिया बल $R = mg$

तथा आभासी भार = वास्तविक भार

2. जब लिफ्ट a त्वरण से नीचे की ओर ($a > g$) गति करती हो–

तब $R = mg - ma$ = ऋणात्मक

इस स्थिति में आभासी भार ऋणात्मक होने का अर्थ है कि वस्तु लिफ्ट के फर्श से उठकर लिफ्ट की छत से सट जायेगी।

उदा 14. 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किए 3m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है। टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाएगा? (पुस्तक का उदाहरण 4.8)

हल– दिया गया है– v = 18 किमी./घंटा

$$= 18 \times \frac{1000}{3600} \text{ मी./से.}$$

$$= 5 \text{ मी./से.}$$

वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r = 3 मी.

$$\mu = 0.1$$

साइकिल सवार के सुरक्षित रूप से मुड़ने के लिए आवश्यक शर्त

$$f \geq \frac{mv^2}{r}$$

$$\mu mg \geq \frac{mv^2}{r} \quad ...(7)$$

$$\Rightarrow \quad v \leq \sqrt{\mu rg}$$

$\Rightarrow$ प्रश्नानुसार $v_{max} = \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.1 \times 3 \times 9.8}$

$$= \sqrt{2.94} = 1.71 \text{ मी./से.}$$

समी. ($v_{max} = \sqrt{\mu rg}$) के अनुसार शर्त का पालन नहीं होने से साइकिल सवार फिसलकर गिर जायेगा।

उदा 15. एक कार 200 मीटर त्रिज्या की वृत्ताकार सड़क पर गतिशील है जिसका करवट कोण 10° है यदि कार के पहियों व सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0.25 हो तो कार की सुरक्षित अधिकतम चाल की गणना कीजिए। (g = 10 मी./से.^{2} tan 10° = 0.1763)

हल– दिया गया है–

$$r = 200 \text{ मीटर}$$

$$\theta = 10°$$

$$\mu = 0.25$$

कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}\right)}$$

$$= \sqrt{200 \times 10\left(\frac{0.25 + \tan 10°}{1 - 0.25\tan 10°}\right)}$$

$$= \sqrt{2000\left(\frac{0.25 + 0.1763}{1 - 0.25 \times 0.1763}\right)}$$

$$= \sqrt{2000 \times \frac{0.4263}{0.956}}$$

$$= 29.85 \text{ मी./से.}$$

उदा 16. 300 m त्रिज्या वाले किसी वृत्ताकार दौड़ के मैदान का ढ़ाल 15° है। यदि मैदान और रेसकार के पहियों के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है, तो (a) टायरों को घिसने से बचाने के लिए रेसकार की अनुकूलतम चाल, तथा (b) फिसलने से बचने के लिए अधिकतम अनुमेय चाल क्या है? (पुस्तक का उदाहरण 4.9)

हल– दिया गया है–

$$r = 300 \text{ मी.}$$

$$\theta = 15°$$

$$\mu = 0.2$$

$\because$ रेसकार की अनुकूलतम (आदर्श) चाल

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

$$= \sqrt{300 \times 9.8 \times \tan 15°}$$

$$= \sqrt{300 \times 9.8 \times 0.2679}$$

$= 28.1$ मी./से.

$\because$ कार की अधिकतम सुरक्षित चाल

$$v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\mu+\tan\theta}{1-\mu\tan\theta}\right)}$$

$$= \sqrt{300\times9.8\times\left(\frac{0.2+\tan15°}{1-0.2\tan15°}\right)}$$

$$= \sqrt{300\times9.8\times\left(\frac{0.2+0.2679}{1-0.2\times0.2679}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{300\times9.8\times0.4679}{0.946}}$$

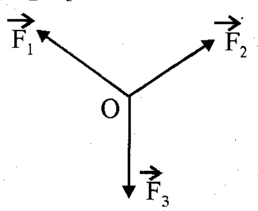
$$= \sqrt{1454.15} = 38.1 \text{मी./से.}$$

4.14 संगामी बल एवं बल निर्देशक आरेख द्वारा यांत्रिकी में समस्याओं का हल (Concurrent forces and solution of Problems in Mechanics by force diagram)

संगामी बल (Concurrent forces)

यदि किसी वस्तु पर कार्यरत एक से अधिक बलों की क्रिया रेखाएँ एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर गुजरती है तब वे बल संगामी बल कहलाते हैं।

चित्रानुसार $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ की क्रिया रेखाएं उभयनिष्ठ बिन्दु O से गुजर रही हैं अतः $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ संगामी बल कहलाते हैं।



चित्र 4.28

1. किसी वस्तु पर कार्यरत सभी बलों का परिणामी बल उन बलों के सदिश योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ... + \vec{F_n}$$

2. यदि वस्तु पर सभी बल एक ही दिशा में आरोपित हो तो परिणामी बल उनके योग के बराबर होगा

अतः $$F = F_1 + F_2 + ...+ F_n$$

3. यदि बल विपरीत दिशा में हो तो परिणामी बल उनके अन्तर के बराबर होगा।
4. जब किसी पिण्ड पर संगामी बल कार्य करते हैं तो पिण्ड में केवल रेखीय त्वरण हो सकता है।
5. असंगामी बलों की उपस्थिति में पिण्ड में घूर्णन गति उत्पन्न हो जाती है।
6. यदि किसी पिण्ड पर दो भिन्न–भिन्न बल भिन्न–भिन्न दिशाओं में कार्यरत हो तो परिणामी बल, का मान बलों के त्रिभुज के नियम, समान्तर चतुर्भुज के नियम अथवा बहुभुज के नियम से दिया जाता है।

(i) **बलों के त्रिभुज का नियम**–यदि किसी पिण्ड पर लगने वाले दो बलों को परिमाण व दिशा में त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं से व्यक्त किया जाए तो तीसरी भुजा विपरीत दिशा में उनके परिणामी बल को व्यक्त करेगी।

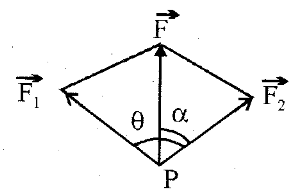
(ii) **बलों के समान्तर चतुर्भुज का नियम**–यदि किसी पिण्ड पर कार्यरत दो बलों को परिमाण व दिशा में समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं के द्वारा व्यक्त किया जाए तो उनके कटान बिन्दु से खींचा गया विकर्ण उनके परिणामी बल को व्यक्त करेगा।

(iii) **बलों के बहुभुज का नियम**–यदि किसी बिन्दु पर लगने वाले n बलों को परिमाण व दिशा में किसी बहुभुज की n भुजाओं द्वारा क्रम से व्यक्त किया जाए तो बहुभुज को बंद करने वाली अंतिम भुजा विपरीत क्रम में परिणामी बल को व्यक्त करेगी।

यदि किसी पिण्ड पर दो बल $\vec{F_1}$ व $\vec{F_2}$ कार्य कर रहे हों तथा उनके मध्य कोण θ हो तो परिणामी बल

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \quad ...(1)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}\right) \quad ...(2)$$



चित्र 4.29

7. किसी पिण्ड पर आरोपित दो बल $\vec{F_1}$ व $\vec{F_2}$ होने पर परिणामी बल का अधिकतम मान

$$F_{max} = F_1 + F_2 \quad \text{जब } \theta = 0°$$

न्यूनतम मान $F_{min} = F_1 - F_2$ जब $\theta = 180°$.

8. यदि दोनों बल परस्पर लम्बवत् हो अर्थात् $\theta = 90°$

तो $$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

9. संगामी बलों के प्रभाव में यदि पिण्ड सन्तुलन अवस्था में हो तो पिण्ड पर कार्यरत सभी संगामी बलों का सदिश योग शून्य होता है

अर्थात् $$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ... + \vec{F_n} = 0$$

यदि सभी बल एक ही दिशा में आरोपित हो तो सन्तुलन की स्थिति में–

$$F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = 0$$

10. यदि किसी पिण्ड पर दो संगामी बल $\vec{F_1} = \vec{F_2}$ कार्यरत हैं और पिण्ड संतुलन अवस्था में हो तो दोनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए–

अतः $$\vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$$

या $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

अतः सन्तुलन के लिए आवश्यक है कि पिण्ड पर कार्यरत दोनों बलों का परिमाण समान एवं दिशा विपरीत होनी चाहिये।

11. जब दो संगामी बलों की क्रिया रेखायें, एक ही सरल रेखा में नहीं हो तब सन्तुलन के लिए कम से कम तीन बलों की आवश्यकता होती है।

अतः तीन संगामी बलों $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ व $\vec{F}_3$ के अधीन सन्तुलन अवस्था के लिए इन तीनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिये।

अतः $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

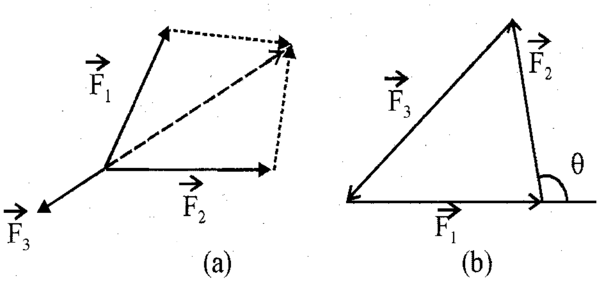
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\Rightarrow \quad F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

जहां θ, $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ के मध्य का कोण है। θ का न्यूनतम मान शून्य तथा अधिकतम मान 180° होने पर

$$(F_1 + F_2) \geq F_3 \geq |F_1 - F_2|$$

यह तीन बलों के लिए संतुलन अवस्था की शर्त है अर्थात् संतुलन की अवस्था में तीसरा बल पहले व दूसरे बल के परिणामी प्रभाव के बराबर तथा विपरीत दिशा में कार्यरत होना चाहिए।



चित्र 4.30

जैसे बलों के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा प्राप्त दो बलों $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ का परिणामी बल तीसरे बल $\vec{F}_3$ के समान व विपरीत होना चाहिये। इसी प्रकार साम्यावस्था में तीनों बलों को किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रमागत रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

12. संगामी बलों के संतुलन के लिए किसी भी अक्ष के अनुदिश बलों के घटकों का योग शून्य होना चाहिये।

$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ... + F_{nx} = 0$, $F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + ... + F_{ny} = 0$
$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + ... + F_{nz} = 0$

13. किसी पिण्ड की पूर्ण साम्यावस्था के लिए स्थानान्तरीय साम्यावस्था तथा घूर्णी साम्यावस्था दोनों ही आवश्यक हैं अर्थात् कुल बाह्य बल तथा कुल बाह्य बल आघूर्ण दोनों ही शून्य होने चाहिये।

बल निर्देशक आरेख

बल निर्देशक आरेख द्वारा किसी पिण्ड पर आरोपित समस्त बलों को परिमाण व दिशा द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसे पिण्ड का मुक्त आरेख भी कहते हैं। बल निर्देशक आरेख किसी पिण्ड पर कार्यरत बलों को दर्शाने वाले चित्र का सरल रूप है। यांत्रिकी में कई ऐसे निकाय होते हैं जिन पर गुरुत्वीय बल, घर्षण बल, डोरी से जुड़े पिण्डों की गति जैसे कई बल अनेक पिण्डों पर कार्य करते हैं। बल निर्देशक आरेख द्वारा स्प्रिंग, डोरी से जुड़े पिण्ड से सम्बन्धित समस्याएँ आसानी से हल की जा सकती है। यह न्यूटन के गति के नियमों पर आधारित होते हैं। पिण्डों पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल सदैव उस पृष्ठ के लम्बवत् होते हैं जिस पृष्ठ पर पिण्ड रखा गया है।

यांत्रिकी में किसी प्ररूपी समस्या को हल करने के लिए निम्न चरण अपनाने चाहिए-

(i) पिण्डों के संयोजन के विभिन्न भागों के सम्बन्धों को दर्शाने वाला आरेख खींचिए।

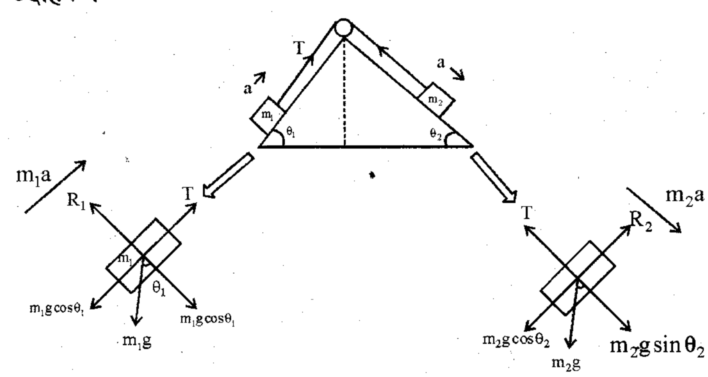
(ii) संयोजन के किसी एक भाग का निकाय के रूप में चयन कीजिए जिसकी गति का अध्ययन करना हो। संयोजन के शेष भाग को वातावरण कहा जाता है।

(iii) चयन किए गए निकाय का अलग चित्र बनाइए जिसमें केवल निकाय तथा वातावरण द्वारा निकाय पर आरोपित बलों को दर्शाना चाहिए। निकाय पर अन्य साधनों द्वारा आरोपित बलों को भी सम्मिलित कीजिए। निकाय द्वारा वातावरण पर आरोपित बल सम्मिलित नहीं करना है। इस प्रकार के आरेख को बल निर्देशक आरेख या पिण्ड का मुक्त आरेख कहते हैं।

(iv) बल निर्देशक आरेख में बलों से सम्बन्धित केवल वहीं सूचनाएँ सम्मिलित कीजिए जो दी गई है या पूर्णतया निश्चित है। शेष सूचनाएँ अज्ञात लें जिन्हें गति के नियमों के अनुप्रयोग द्वारा ज्ञात किया जाना है।

(v) परिणामी बल को त्वरण की दिशा में द्रव्यमान व त्वरण के गुणनफल के बराबर रखना चाहिए।

उदाहरण-



चित्र: m_1 का बल निर्देशक आरेख

चित्र: m_2 का बल निर्देशक आरेख

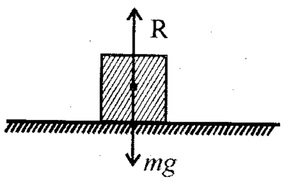
चित्र 4.31

महत्वपूर्ण तथ्य

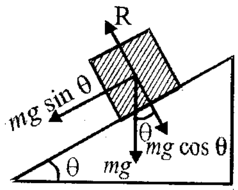
यांत्रिकी में सामान्य बल (Common Forces in Mechanics)

(i) **भार**–किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उसे आकर्षित करती है। इसे गुरुत्वीय अथवा गुरुत्वाकर्षण बल भी कहते हैं।

(ii) **प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल**–जब किसी वस्तु को एक दृढ़ सतह पर रखा जाता है, तब वस्तु पर उसकी संपर्क सतहों के अभिलम्बवत् एक बल लगता है, जिसे प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल कहते हैं।

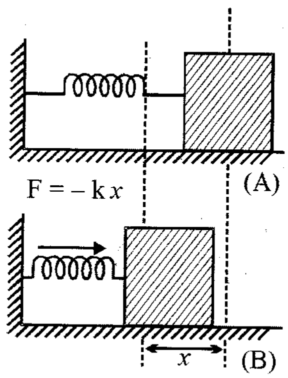


(A)

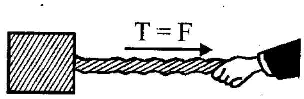


(B)

(iii) स्प्रिंग बल–प्रत्येग स्प्रिंग इसकी लम्बाई में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है। यह प्रतिरोधी बल लंबाई में परिवर्तन के साथ बढ़ता है। स्प्रिंग बल को निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं, $F = -kx$ जहाँ x लम्बाई में परिवर्तन तथा k स्प्रिंग नियतांक है।



(iv) तनाव–किसी तनी हुई रस्सी, धागे अथवा चेन द्वारा आरोपित बल के विरुद्ध लगाये गये बल को तनाव कहते हैं। इसकी दिशा सदैव वस्तु से दूर की ओर होती है, क्योंकि तनाव सदैव वस्तु को खींचता है।



अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. जड़त्व का मात्रक तथा विमा लिखिए।
2. जड़त्व के प्रकार लिखिए।
3. 1 किग्रा भार का न्यूटन में मान लिखिए।
4. आवेग का संवेग से सम्बन्ध लिखिए।
5. संगामी बल किसे कहते हैं?
6. सीमान्त घर्षण बल किसे कहते हैं?
7. सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर किस प्रकार निर्भर करता है?
8. घर्षण कोण से क्या तात्पर्य है?
9. घर्षण कोण व विश्राम कोण में सम्बन्ध बताइये।
10. गतिक घर्षण, सर्पी घर्षण तथा बेलनी घर्षण में सम्बन्ध लिखिए।
11. किसी वस्तु के भार से क्या तात्पर्य है?
12. संगामी बलों के प्रभाव में यदि कोई पिण्ड सन्तुलन अवस्था में हो तब संगामी बलों का सदिश योग कितना होगा?
13. संवेग संरक्षण नियम के कोई दो उदाहरण लिखिये।
14. मोटरगाड़ी की छत से एक गेंद डोरी द्वारा लटकाई गई है। गेंद की स्थिति पर क्या प्रभाव पड़ेगा यदि–
    (i) गाड़ी एकसमान वेग से चल रही थी,
    (ii) गाड़ी त्वरित गति से चली रही हो,
    (iii) गाड़ी दाहिनी ओर मुड़ रही हो ?
15. एक पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज समतल पर गतिमान है। क्या निम्न दशाओं में उस पर कोई बल कार्य कर रहा है ? कारण सहित उत्तर दीजिये जबकि पिण्ड (i) समान वेग से गतिमान है, (ii) समान चाल से गतिमान है।
16. M तथा m द्रव्यमानों (M > m) के दो पिण्ड समान ऊँचाई से नीचे गिराये जाते हैं। यदि प्रत्येक के लिए वायु का प्रतिरोध बल समान हो तो क्या दोनों पिण्ड पृथ्वी पर एक साथ पहुँचगें ?
17. एक स्थिर नौका पर रखे बिजली के पंखे से नौका पर बँधे पाल (sail) पर हवा फेंकी जाती है। क्या नौका चलने लगेगी ?
18. एक चिड़िया काँच के बन्द पिंजरे के फर्श पर बैठी है तथा पिंजरा एक लड़के के हाथ में हैं। क्या लड़के को पिंजरें के भार में कोई परिवर्तन अनुभव होगा यदि–
    (i) चिड़िया नियत वेग से पिंजरे में उड़ने लगे
    (ii) त्वरित गति से ऊपर की ओर उड़ने लगे
    (iii) त्वरित गति से नीचे उतरने लगे।
19. यदि उपरोक्त प्रश्न में पिंजरा तारों से बना हुआ हो, तब।
20. अन्धेरे में सुरक्षात्मक कार चलाने की चाल हैडलाइट की परास पर निर्भर करती है, समझाइये।
21. निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिये–
    (i)क्या कोई पिण्ड विरामावस्था में रह सकता है, जबकि उसके ऊपर बाह्य बल लग रहे हों ?
    (ii)एक गतिमान पिण्ड द्वारा चली गई दूरी समय के अनुक्रमानुपाती है। क्या इस पर कोई बाह्य बल लगा है ?
    (iii)यदि किसी पिण्ड पर परिणामी बल शून्य हो, तो क्या पिण्ड अवश्य ही विरामावस्था में होगा ?
    (iv)यदि कोई पिण्ड विरामावस्था में नहीं है, तो उसके ऊपर लगने वाला परिणामी बल शून्य नहीं हो सकता है। यह कथन सत्य है या असत्य।
    (v)यदि किसी गतिमान पिण्ड पर कोई बल गति की दिशा के लम्बवत् लग रहा है, तो पिण्ड की चाल तथा दिशा पर क्या प्रभाव होगा ?
    (vi)एक समान चाल से चलती ट्रेन के डिब्बे में बैठा व्यक्ति ऊपर की ओर गेंद उछालता है। उसे गेंद का पथ कैसा दिखाई देगा ? बाहर खड़े व्यक्ति को कैसा ?
    (vii)गति के दूसरे नियम का सदिश रूप क्या है ?
    (viii)एक लिफ्ट में ऊर्ध्वाकार टंगी एक कमानीदार तुला पर 2 किग्रा का पिण्ड लटका है। यदि लिफ्ट गुरुत्वीय त्वरण g के अन्तर्गत नीचे गिर रही हो तो तुला का पाठ्यांक क्या होगा? यदि लिफ्ट उसी त्वरण के ऊपर जा रही हो तब।
    (ix)1.0 किग्रा का पिण्ड कमानीदार तुला से लटका हुआ है तथा इसी प्रकार का एक समरूप (identical) पिण्ड एक भौतिक तुला के पलड़े पर सन्तुलित है। यदि दोनों लिफ्ट में रखें हों तो प्रत्येक स्थिति में क्या होगा जबकि लिफ्ट पर ऊपर की ओर एक त्वरण कार्य कर रहा है ?
    (x)एक चोर अपने सिर पर आभूषणों से भरा W भार का एक बक्सा रखकर छत से नीचे कूद पड़ता है। कूदते समय उसे बक्से का भार कितना अनुभव होगा ?

(xi) 0.5 किग्रा द्रव्यमान की एक गेंद 10 मीटर/सेकण्ड के वेग से किसी पूर्ण प्रत्यास्थ दीवार से लम्बवत् टकराकर लौट आती है। गेंद के संवेग में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

22. सोडा वाटर की एक बोतल ऊपर से मुक्त रूप से गिर रही है क्या गैस के बुलबुले बोतल के तल के ऊपर उठेंगें ?

23. पृथ्वी की ओर स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए एक पारदर्शी केबिन की छत से एक पिण्ड छोड़ दिया जाता है। एक प्रेक्षक को पिण्ड की गति किस प्रकार की प्रतीत होगी यदि वह (i) केबिन में बैठा हो (ii) पृथ्वी पर खड़ा हो ?

24. स्प्रिंग तुला के पलड़े में रखे एक बीकर में कुछ जल है। यदि हम इस जल में अपनी अंगुली बीकर की तली को बिना छुये डुबोयें, तो तुला के पाठ्यांक पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

25. दो लड़के, जिनके द्रव्यमान समान हैं, अपने पैरों से बर्फ पर चलने वाले पहिये (ice-skates) बाँधकर एक घर्षण रहित समतल पर एक–दूसरे से कुछ दूरी पर खड़े हैं। एक लड़के की कमर से एक रस्सी बँधी है, जिसका दूसरा सिरा दूसरे लड़के के हाथ में है। यदि दूसरा लड़का रस्सी को अपनी ओर खीचें तो क्या होगा?

26. जब कोई गेंद ऊपर की ओर फेंकी जाती है, तो उसका संवेग पहले घटता हैं, फिर बढ़ता है। क्या इस प्रक्रिया में संवेग–संरक्षण के नियम का उल्लंघन होता है ?

27. एक कमानीदार तुला के दोनों सिरों को 5-5 किग्रा–भार के बलों से खींचा जाता है। तुला का पाठ्यांक क्या होगा ?

28. एक आदर्श स्प्रिंग की लम्बाई में 1.0 किग्रा का पिण्ड लटकाने पर 1.0 सेमी की वृद्धि होती है। यदि स्प्रिंग को एक घर्षण रहित क्षैतिज मेज पर रखकर दोनों सिरों से एक–एक किग्रा का भार लटकायें तो उसकी लम्बाई में कितनी वृद्धि होगी ?

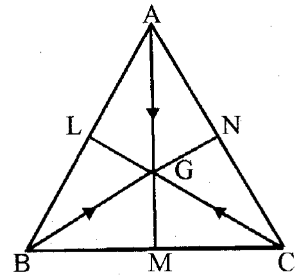
29. जब दो भारहीन स्प्रिंगों A व B से W भार का पिण्ड बारी–बारी से लटकाया जाता है, तो प्रत्येक की लम्बाई में 2 सेमी. की वृद्धि होती है। यदि स्प्रिंग B को *W* भार सहित स्प्रिंग A से लटका दिया जाये तो प्रत्येक स्प्रिंग में कितनी वृद्धि हो जायेगी ? अब यदि भार W को हटा लें तो स्प्रिंग B का निचला सिरा कितना ऊपर उठेगा?

30. (i) एक सफेद गेंद चिकने तल पर एकसमान चाल v से लुढ़कते हुए, उतने ही द्रव्यमान की एक स्थिर लाल गेंद से टकराकर रुक जाती है। लाल गेंद कितनी चाल से किस दिशा में जायेगी ?
(ii) यदि सफेद गेंद लाल गेंद से टकराने पर उससे चिपक जाये तब।
(iii) यदि लाल गेंद भी उतनी ही चाल v से सफेद गेंद की ओर आ रही हो तथा दोनों टकराकर आपस में चिपक जायें तब।

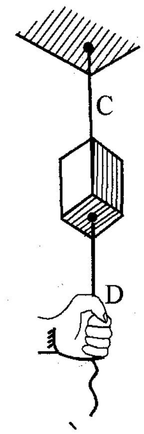
31. एक गुब्बारे (द्रव्यमान M) से बँधी रस्सी से एक व्यक्ति (द्रव्यमान *m*) लटका है तथा गुब्बारा स्थिर है। यदि वह व्यक्ति रस्सी के सहारे ऊपर चढ़ने लगे तो गुब्बारा किस वेग से तथा किस दिशा में चलने लगेगा ? व्यक्ति का रस्सी के सापेक्ष वेग v है।

32. पंख वाले हवाई जहाज कम ऊंचाई पर उड़ते हैं जबकि जेट हवाई जहाज अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं, क्यों ?

33. समान द्रव्यमान के तीन कण A, B व C चित्र के अनुसार एक समबाहु त्रिभुज की माध्यिकाओं के अनुदिश समान चाल v से चलते हैं। ये त्रिभुज के केन्द्र G पर टकराते हैं। टकराने के पश्चात् A स्थिर हो जाता है तथा B उसी चाल से वापस लौटता है। C का वेग क्या है ?



34. चित्र में एक हल्की डोरी C से M द्रव्यमान का एक भारी गुटका लटका है। गटके की तली से एक दूसरी डोरी D बँधी है। डोरी D, डोरी C से कुछ मजबूत है। डोरी D को बल T से नीचे की ओर खींचा जाता है। डोरी C में कितना तनाव होगा ? यदि डोरी D में तनाव T को धीरे–धीरे बढ़ाया जाये तो डोरी C पहले क्यों टूटती है ? क्या आप बता सकते हैं कि यदि डोरी D पर तेजी से झटका दिया जाये तो डोरी C न टूटकर डोरी D क्यों टूटती है?



35. एक घिरनी के ऊपर से होती हुई एक लम्बी रस्सी लटकी है। रस्सी के विपरित सिरों से बराबर भार के दो बन्दर चढ़ते हैं। रस्सी के सापेक्ष उनमें से एक अधिक तेजी से चढ़ता है। कौन–सा बन्दर पहले पहुँचेगा ? घिरनी घर्षण रहित है, रस्सी भारहीन तथा लम्बाई में न बढ़ने वाली है।

36. घर्षण गुणांक की क्या इकाई है ?

37. घर्षण गुणांक का मान क्या एक से अधिक हो सकता है ?

38. क्या घर्षण बल असंरक्षित बल है ?

39. गाड़ी के पहिये वृत्ताकार क्यों होते हैं ?

40. स्थैतिक घर्षण स्वतः समायोज्य बल है। इस आधार पर बताइये कि यदि सीमान्त घर्षण बल 20 न्यूटन है, तो घर्षण बल क्या होगा यदि बाह्य बल शून्य, 5 न्यूटन, 10 न्यूटन, 15 न्यूटन व 20 न्यूटन हो ?

41. उपरोक्त प्रश्न में यदि बाह्य बल 20 न्यूटन से अधिक हो तो घर्षण बल कितना होगा ?

42. स्थैतिक घर्षण गुणांक तथा घर्षण कोण में क्या सम्बन्ध है ?

43. यदि घर्षण कोण 30° हो तो स्थैतिक घर्षण गुणांक क्या है ?

44. दो तलों के बीच घर्षण गुणांक किन–किन बातों पर निर्भर करता है ?

45. क्या साइकिल में बड़े ब्रेक, छोटे ब्रेक की तुलना में अधिक उपयोगी

होंगे ?

46. घोड़े को गाड़ी खींचने के लिये प्रारम्भ में अधिक बल लगाना पड़ता है, क्यों ?

47. मोटरकार के टायरों की सतहों पर अनियमित प्रक्षेप (grooves) क्यों होते हैं ?

48. मोटर साइकिल, एम्बेसडर कार (rear wheel drive) के अगले पहिये व पिछले पहिये पर त्वरित दशा में घर्षण बल किस दिशा में होते हैं ?

49. उपरोक्त प्रश्न में यदि मोटर साइकिल त्वरित न हो या एकसमान वेग से बिना इंजन के बल के चल रही हो तो अगले व पिछले पहिये पर घर्षण बल किस दिशा में लगेगा ?

50. ब्रेक लगाकर साइकिल चलाना कठिन क्यों है ?

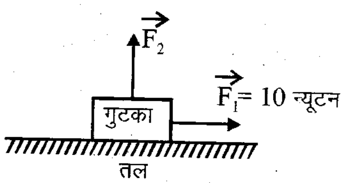
51. चित्र में बल $\vec{F_1}$ = 10 न्यूटन, क्षैतिज दिशा में लगा हुआ है लेकिन गुटका स्थिर है। $\vec{F_2}$ बल ऊर्ध्वाधर दिशा में लगा हुआ है, यदि $\vec{F_2}$ को शून्य से इतना बढ़ाया जाता है कि गुटका तल पर फिसलने लगे, तब–

(a) स्थिर अवस्था में गुटके पर लगने वाला घर्षण बल क्या होगा?

(b) गुटके पर तल के द्वारा लगा अभिलम्ब बल तथा

(c) अधिकतम घर्षण बल बढ़ेगा, घटेगा या समान रहेगा।

[संकेत : $F_2 + R = Mg$ तथा $(f_s)_{max} = \mu_s R$]



चित्र 4.34

52. क्षैतिज तल पर 2 किग्रा., 3 किग्रा. व 5 किग्रा की तीन किताबें रखी है। यदि तल के सिरे को क्षैतिज से धीरे–धीरे ऊपर उठाया जाये तो कौन–सी किताब पहले फिसलना प्रारम्भ करेगी ?

53. यदि किसी ठोस वस्तु को दीवार पर रखकर इस तरह दबाया जाता है कि वस्तु दीवार पर न फिसले तो–

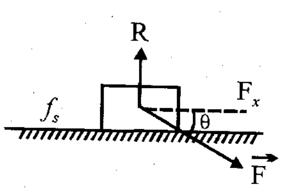
(a) वस्तु पर दीवार के द्वारा स्थैतिक घर्षण बल (f_s) किस दिशा में लगेगा ?

(b) वस्तु पर दीवार के द्वारा अभिलम्ब बल (R) किस दिशा में लगेगा ?

(c) यदि आप दबाव बढायें तो f_s, R तथा $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

54. किसी स्थिर गुटके पर बल $\vec{F}$ क्षैतिज से θ कोण नीचे की ओर लगा हुआ है (चित्र)। यदि θ का मान बढ़ाया जाए तो–

(a) F_x पर क्या प्रभाव होगा ?



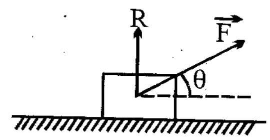
चित्र 4.35

(b) स्थैतिक घर्षण बल f_s पर क्या प्रभाव होगा ?

(c) अभिलम्ब बल R पर क्या प्रभाव होगा ?

(d) अधिकतम घर्षण बल $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव होगा ?

55. यदि उपरोक्त प्रश्न में $\vec{F}$ क्षैतिज से θ कोण ऊपर को बनाता हो (चित्र) तो F_x, f_s, R व $(f_s)_{max}$ पर क्या प्रभाव पड़ेगा?



उत्तरमाला

1. जड़त्व का कोई मात्रक तथा विमा नहीं होती है क्योंकि जड़त्व भौतिक राशि नहीं है।
2. (i) विराम का जड़त्व (ii) गति का जड़त्व। (iii) दिशा का जड़त्व।
3. 1 किग्रा भार = 9.8 न्यूटन।
4. आवेग= संवेग में परिवर्तन।
5. वे बल जिनकी क्रिया रेखाएँ एक उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर गुजरें, संगामी बल कहलाते हैं।
6. स्थैतिक घर्षण बल के अधिकतम मान को सीमान्त घर्षण बल कहते हैं।
7. सीमान्त घर्षण बल सम्पर्कित तलों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।
8. सीमान्त घर्षण की स्थिति में परिणामी प्रतिक्रिया बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के मध्य बने कोण को घर्षण कोण कहते हैं।
9. घर्षण कोण तथा विश्राम कोण समान होते हैं।
10. बेलनी घर्षण < गतिक घर्षण < सर्पी घर्षण।
11. किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उस वस्तु को अपनी ओर आकर्षित करती है।
12. शून्य।
13. बंदूक से दागी गई गोली, दो पिण्डों की टक्कर।
14. (i) गेंद ऊर्ध्वाधर ही लटकी रहेगी, (ii) गेंद पीछे की ओर हटेगी, (iii) गेंद बायीं ओर हटेगी।
15. (i) नहीं। (ii) हाँ।
16. नहीं। द्रव्यमान M का त्वरण $a_1 = \frac{Mg - F}{M} = g - \frac{F}{M}$ तथा द्रव्यमान m का त्वरण $a_2 = \frac{Mg - F}{m} = g - \frac{F}{m}$ क्योंकि M> m अतः $a_1 > a_2$ अतः M द्रव्यमान, m द्रव्यमान से पहले पहुँचेगा।
17. नहीं। जब पंखा पाल को हवा से धकेलता है, तो हवा भी पंखें को समान बल से विपरीत दिशा में धकेलती है। अतः हवा पाल के द्वारा नौका को बल से एक दिशा में चलाने का प्रयत्न करेगी उसी समय हवा पंखें पर बल F विपरीत दिशा में लगाकर नौका को विपरीत दिशा में चलाने को प्रयत्न करेगी। अतः पंखें व नौका के संवेगों का योग शून्य है। नौका को चलने के लिए किसी बाह्य वस्तु की प्रतिक्रिया मिलनी चाहिए।
18. यहाँ पिंजरा तथा इसके भीतर की वायु (पिंजरे से बद्ध होने के कारण) एक निकाय माना जा सकता है। अतः (i) कोई परिवर्तन नहीं (ii) पहले से भारी लगेगा(iii) पहले से हल्का लगेगा।

19. पिंजरा तारों का होने के कारण पिंजरे की वायु पिंजरे से बद्ध नहीं है। बल्कि बाह्य वायु के सम्पर्क में है। अतः पिंजरे के भीतर चिड़िया के उड़ने पर लड़के को चिड़िया का भार नहीं अनुभव होगा तथा पिंजरा पहले से हल्का लगेगा।

20. अन्धेरे में कार का ड्राइवर हैडलाइट की परास s तक ही देख पाता है अर्थात् वह कोई भी अवरोधक जो s दूरी पर है, को देख पाता है। अवरोधक को देखकर ड्राइवर को उससे पहले गाड़ी रोकनी होती है। कार का मदंक बल निश्चित है। यदि ब्रेक लगाने पर उत्पन्न मंदक a हो, तो कार को s दूरी से पहले रोकने के लिए चाल $v, \sqrt{2as}$ से कम होनी चाहिए। स्पष्ट है कि गाड़ी की चाल 's' पर निर्भर करती है। s ही हैडलाइट की परास है।

21. (i) हाँ, यदि इस पर एक से अधिक लगे हुए बलों का सदिश योग शून्य हो।

(ii) परिणामी बाह्य बल शून्य है $\left(s \propto t, \frac{ds}{st} = \text{नियत तथा} \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \right)$।

(iii) नहीं, यह भी हो सकता है, कि वह अचर वेग से चल रहा हो।

(iv) असत्य, यह हो सकता है, कि वह अचर वेग से चल रहा हो तथा परिणामी बल शून्य हो।

(v) चाल नहीं बदलेगी, परन्तु दिशा बदलेगी।

(vi) ऊर्ध्वाधर ऋजुरेखीय परवलयाकार।

(vii) $\vec{F} = m\vec{a}$

(viii) शून्य 4 किग्रां

(ix) कमानीदार तुला में $W' = M(g+a) = 1.0\,(g+a)$ अतः माप बढ़ जायेगी जबकि भौतिक तुला के संतुलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

(x) शून्य।

(xi) $-2mv = -10$ किग्रा मीटर/ सेकण्ड।

22. बुलबुले जल में ऊपर नहीं चढ़ेंगे। मुक्त रूप से गिरती बोतल में जल भारहीनता की अवस्था में होता है। इस कारण बुलबुलों पर कोई उत्प्लावन बल नहीं लगता, जिसके कारण वे ऊपर नहीं चढ़ते।

23. (i) केबिन में बैठे प्रेक्षक को पिण्ड वायु में स्थिर दिखाई देगा
(ii) पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक को पिण्ड गुरुत्वीय त्वरण से नीचे गिरता प्रतीत होगा।

24. बढ़ जायेगा, जल अंगुली पर ऊपर की ओर उछाल लगायेगा तथा अंगुली उतना ही प्रतिक्रिया बल जल पर नीचे की ओर बीकर की तली पर लगायेगी।

25. प्रारम्भिक संवेग शून्य है तथा निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। अतः खींचने पर भी संवेग शून्य होना चाहिए। अतः दोनों लड़के एक–दूसरे की ओर समान वेग से आने लगेंगे ताकि संयुक्त संवेग शून्य रहे।

26. नहीं।

27. 5 किग्रा–भार

28. 1.0 सेमी

29. प्रत्येक 2 सेमी, 4 सेमी

30. (i) चाल v से सफेद गेंद की दिशा में चलेगी(ii) संयुक्त गेंद चाल $\frac{v}{2}$ से सफेद गेंद की दिशा में चलेगी (iii) दोनों गेंदें ठहर जायेंगी।

31. गुब्बारे तथा व्यक्ति का प्रारम्भिक संवेग शून्य है तथा बाह्य बल शून्य है, अतः बाद का संवेग भी शून्य होना चाहिए माना जब व्यक्ति रस्सी के सापेक्ष v वेग से ऊपर चढ़ता है तब गुब्बारा u वेग से नीचे उतरेगा कि संयुक्त संवेग शून्य ही रहे। व्यक्ति का पृथ्वी के सापेक्ष वेग $(v-u)$ है अतः

$$m(v-u) - Mu = 0, \therefore u = \frac{mv}{M+m}$$

32. पंख वाले हवाई जहाज के लिए वायु के सघन माध्यम की आवश्यकता होती है, क्योंकि हवाई जहाज पंखों द्वारा बाहर की वायु को अपने पीछे की ओर धकेलकर उसकी प्रतिक्रिया से आगे बढ़ते हैं। जिससे कम ऊंचाई पर सघन माध्यम होने से अधिक प्रतिक्रिया बल प्राप्त होगा। जेट हवाई जहाज में बाहर की वायु जहाज के भीतर खींचकर संपीड़ित होती है, अतः इसके लिए सघन माध्यम होना न केवल अनावश्यक है, बल्कि अवांछनीय भी है। वायु के घर्षण से उत्पन्न ऊष्मा को कम करने के लिए जेट हवाई जहाज अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं जहां वायु का घनत्व कम है।

33. प्रारंभिक संवेग शून्य अतः बाद का संवेग भी शून्य होना चाहिए, अतः C की चाल v तथा टकराने के बाद की B की दिशा के विपरीत $\overrightarrow{GN}$ दिशा में होगी, क्योंकि टकराने के बाद $\overrightarrow{GB}$ दिशा में वापस जा रहा है।

34. जब डोरी D में तनाव T है तो डोरी C में तनाव $T + Mg$ होगा। अतः C पहले टूटेगी। झटका देने पर गुटका जड़त्व के कारण अपने स्थान पर बना रहेगा जिससे रस्सी D से टूट जायेगी।

35. एक–दूसरे के संवेग बराबर होने से दोनों बन्दर बराबर दर से ऊपर चढ़ेंगें। अतः बराबर समय में साथ–साथ पहुँचेंगें।

36. कोई इकाई नहीं है।

37. हाँ।

38. हाँ।

39. फिसलता घर्षण, घूर्णन घर्षण में बदल जाता है, अतः घर्षण कम हो जाता है।

40. शून्य, 5, 10, 15, 20 न्यूटन।

41. 20 न्यूटन से कम होगा, क्योंकि $\mu_k < \mu_s$

42. $\mu_s = \tan\lambda$

43. $\mu_s = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

44. आर्द्रता, तलों की प्रकृति, तलों की स्वच्छता, ताप

45. नहीं

46. गतिज घर्षण बल सीमान्त घर्षण बल से कम होता है।

47. सड़क तथा पहिये के बीच घर्षण बढ़ाने के लिए।
48. पिछले पहियों पर घर्षण बल आगे की ओर तथा अगले पहियों पर घर्षण बल पीछे की ओर लगता है, क्योंकि पिछला पहिया सड़क पर पीछे की ओर तथा अगला पहिया सड़क पर आगे की ओर बल लगाता है।
49. पिछले व अगले पहियों पर घर्षण बल पीछे को लगेगा।
50. हम जानते हैं कि सर्पी घर्षण बल (sliding friction), लोटनी घर्षण (rolling friction) से अधिक होता है। अतः जब ब्रेक लगा हो तो गाड़ी पर सर्पी घर्षण बल लगने लगता है।
51. (a) $\vec{F_1} = 10$ न्यूटन, (b) घटेगा, (c) घटेगा
52. आनत तल के एक ही झुकाव कोण पर किताबें एक साथ फिसलना प्रारम्भ होगी, $\theta_0 = \tan^{-1}\mu_S$
53. (a) ऊर्ध्वाकार ऊपर की ओर, (b) क्षैतिज तल में (दीवार के लम्बवत्) बाहर की ओर, (c) बढ़ेगा, बढ़ेगा, कोई प्रभाव नहीं
54. (a) घटेगा, (b) घटेगा, (c) घटेगा, (d) घटेगा,
55. (a) घटेगा, (b) घटेगा, (c) घटेगा, (d) घटेगा।

विविध उदाहरण

उदा 17. 90 m s^{-1} चाल से गतिमान 0.04 kg संहति की कोई गोली लकड़ी के भारी गुटके में धँसकर 60 cm दूरी चलकर रुक जाती है। गुटके द्वारा गोली पर लगने वाला औसत अवरोधी बल क्या है?

हल– दिया गया है–
u = 90 मी./से.
v = 0 मी./से.
m = 0.04 किग्रा.
s = 60 सेमी. = 0.60 मी.

$\because \quad v^2 = u^2 + 2as$

$\Rightarrow \quad (0)^2 = (90)^2 + 2 \times a \times 0.60$

$\Rightarrow \quad a = -\dfrac{90 \times 90}{2 \times 0.60} = -6750$ मी./से.^{2}

$\because \quad F = ma = -0.04 \times 6750$

$= -270$ न्यूटन

अतः औसत अवरोधी बल = 270 न्यूटन

यहाँ वास्तविक अवरोधी बल तथा गोली का मंदन एकसमान नहीं होने से औसत अवरोधी बल प्राप्त किया गया है।

उदा.18. m द्रव्यमान के किसी कण का किसी समय t सेकण्ड पर विस्थापन है-
$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$ मीटर
इस कण पर कार्यरत बल का मान ज्ञात करो।

हल– कण का विस्थापन

$$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$$

वेग $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2)$

$v = C_1 + 2C_2 t$ मी./से. ...(1)

त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(C_1 + 2C_2 t)$

$a = 2C_2$ मी./से.^{2} ...(2)

कण पर कार्यरत बल

$F = ma$

$F = 2mC_2$ न्यूटन ...(3)

उदा. 19. 200 मीटर प्रति सेकण्ड वेग से गतिमान 20 ग्राम द्रव्यमान वाली गोली एक बालू से भरे थैले से टकराकर बालू में 3 सेमी. धँसने के उपरान्त विरामवस्था में आ जाती है। बालू द्वारा गोली पर आरोपित प्रतिरोध बल ज्ञात करो।

हल– दिया हुआ है– $u = 200$ मी./से., v = 0, S = 0.03 मी. m = 0.02 किग्रा., a = ? व F = ?

$\because \quad v^2 = u^2 + 2aS$

$\Rightarrow \quad 0 = (200)^2 + 2 \times a \times 0.03$

$a = \dfrac{-200 \times 200}{2 \times 0.03}$

$a = \dfrac{-20}{3} \times 10^5$ मी./से.^{2}

$\because \quad F = ma$

$= 0.02 \times \left(\dfrac{-20}{3} \times 10^5\right)$

$= -13.3 \times 10^3$ न्यूटन

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह से तात्पर्य है कि बल गति की विपरीत दिशा में कार्यरत है।

उदा.20. 0.5 किग्रा भारी हथौड़ा 6.0 मी./से. के वेग से एक कील के सिरे पर टकराकर उस कील को 5 सेमी. अन्दर धकेल देता है। यदि कील का द्रव्यमान उपेक्षणीय हो तो-
(i) टक्कर के पश्चात् त्वरण क्या था?
(ii) टक्कर में कितना समय लगा?
(iii) आवेग क्या था?

हल– (i) $v^2 = u^2 + 2aS$

दिया गया है– u = 6.0 मी./से.,
S = 5 सेमी. = 0.05 मी.
v = 0

अतः $0 = (6)^2 + 2a(0.05)$

या $-36 = 0.1\,a$

$\therefore \quad a = -\dfrac{36}{0.1}$

$= -360$ मी./से.^{2} मंदन

अतः त्वरण = 360 मी./से.^{2}

(ii) समय $t = \dfrac{6}{360}$

$= \dfrac{1}{60}$ सेकण्ड

(iii) आवेग $I = Ft = mat$

$= 0.5 \times (-)\, 360 \times \dfrac{1}{60}$

$= -3$ न्यूटन × से.

आवेग का परिमाण $= 3$ न्यूटन × से.

उदा.21.एक 5 किग्रा द्रव्यमान की वस्तु में 4 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी?

हल– दिया गया है–

द्रव्यमान $m = 5$ किग्रा.

त्वरण $a = 4$ मी./से.^{2}

बल $F = ma$

$$= 5 \times 4 = 20 \frac{\text{किग्रा मी.}}{\text{से}^2}$$

$= 20$ न्यूटन

उदा.22. 100 किग्रा. द्रव्यमान वाली एक गाड़ी 5 मी./से. के वेग से गतिमान है। इसे $\frac{1}{10}$ सेकण्ड में विरामावस्था में लाने के लिए कितना बल लगाना पड़ेगा?

हल– दिया गया है–

$m = 100$ किग्रा

$u = 5$ मी./से.

$t = \frac{1}{10}$ से.

$v = 0$

गति के प्रथम समीकरण से

$$v = u + at$$

$$0 = 5 + a \times \frac{1}{10}$$

$a = -50$ मी./से.^{2}

$\because$ $F = ma$

$= -100 \times 50 = -5000$ न्यूटन

अतः 5000 न्यूटन बल वेग के विपरीत दिशा में लगाना पड़ेगा।

उदा.23.400 न्यूटन का बल एक वस्तु में 8 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करता है। उस वस्तु का द्रव्यमान कितना है? यदि यह वस्तु 5 सेकण्ड में 125 मीटर चलती है तो वस्तु का प्रारंभिक वेग ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$F = 400$ न्यूटन

$a = 8$ मी./से.^{2}

$m = ?$

$t = 5$ सेकण्ड

दूरी $S = 125$ मीटर

$u = ?$

$\because$ $F = ma$

$\Rightarrow$ $m = \frac{F}{a} = \frac{400}{8}$

$= 50$ किग्रा.

गति के द्वितीय समीकरण से

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2$$

$$125 = 5u + \frac{1}{2} \times 8 \times (5)^2$$

$$125 = 5u + 100$$

$\Rightarrow$ $u = 5$ मी./से.

उदा 24.एक 2 किग्रा. द्रव्यमान के पिण्ड की चाल 10 सेकण्ड में 4 मी./से. से 10 मी./से. हो जाती है। बल का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

द्रव्यमान $m = 2$ किग्रा., $t = 10$ से., $u = 4$मी./से.,

$v = 10$ मी./से.

$$\text{त्वरण } a = \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{परिवर्तन में लगा समय}}$$

$$= \frac{v - u}{t}$$

$$= \frac{10 - 4}{10}$$

$= \frac{6}{10} = 0.6$ मी./से.^{2}

बल $F = ma = 2 \times 0.6 = 1.2$ न्यूटन

बल का परिमाण $= 1.2$ न्यूटन, गति की दिशा में।

उदा.25.यदि कोई बल 5 किग्रा. की वस्तु में 2 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करता है तो वह 200 ग्राम की वस्तु में कितना त्वरण उत्पन्न करेगा? बल का मान ज्ञात करो।

हल– दिया गया है–

$m_1 = 5$ किग्रा.

$a_1 = 2$ मी./से.^{2}

$m_2 = 200$ ग्राम $= \frac{200}{1000}$ किग्रा.

$a_2 = ?$ $F_2 = ?$

$F = m_1 a_1$

$\therefore$ $F = 5 \times 2 = 10$ न्यूटन

इसी प्रकार $F = m_2 a_2$

$\Rightarrow$ $a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{10}{\frac{200}{1000}} = 50$ मी./से.^{2}

उदा.26.एक 25 ग्राम द्रव्यमान की गेंद 5 मी. की ऊँचाई से गिरती है तथा फर्श से टकराकर पुनः 1.8 मीटर की ऊँचाई तक जाती है। यदि गेंद फर्श के सम्पर्क में 0.5 सेकण्ड तक रही तो गेंद तथा फर्श के मध्य आवेग व औसत बल का परिकलन कीजिए। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– जब गेंद 5 मी. की ऊँचाई से गिरती है तब $h = 5$ मी., $u = 0$ एवं $g = 10$ मी./से.^{2}

अतः $v = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2 \times 10 \times 5}$

$= 10$ मी./से.

फर्श से टकराकर पुनः 1.8 मी. की ऊँचाई तक जाती है अब

$v' = 0, g = +10$ मी./से.^{2}

अतः $v'^2 = u'^2 - 2gh'$

$\therefore$ $u' = \sqrt{2gh'}$

$= \sqrt{2 \times 10 \times 1.8}$

$= 6$ मी./से.

दोनों वेग विपरीत हैं अर्थात् $v = 10$ मी./से., $u' = -6$ मी./से.

दिया गया है–

$m = 25$ ग्राम $= 0.025$ किग्रा.

$t = 0.5$ सेकण्ड

(i) आवेग = संवेग में परिवर्तन

$= mu' - mv$

$= m(u' - v)$

$= 0.025\,[-6-10]$

$= -0.4$ न्यूटन × से.

आवेग का परिमाण $= 0.4$ न्यूटन × से.

(ii) बल $= \dfrac{\text{आवेग}}{\text{समय}}$

$= \dfrac{0.4}{0.5} = 0.8$ न्यूटन

उदा. 27. 2×10^4 किग्रा. द्रव्यमान के एक स्थिर रॉकेट पर 2×10^5 न्यूटन बल 30 सेकण्ड तक लगाया जाता है। 30 सेकण्ड के पश्चात् रॉकेट का वेग ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$m = 2 \times 10^4$ किग्रा.

$F = 2 \times 10^5$ न्यूटन

$t = 30$ सेकण्ड

$v = ?$

$\because$ $F = ma$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{2 \times 10^5}{2 \times 10^4} = 10$ मी./से.^{2}

$a = \dfrac{v - u}{t}$

$10 = \dfrac{v - 0}{30}$

$\Rightarrow$ $v = 300$ मी./से.

उदा.28. 5 न्यूटन बल m_1 द्रव्यमान वाली वस्तु को 8 मी./से.^{2} तथा m_2 द्रव्यमान की वस्तु को 24 मी./से.^{2} का त्वरण प्रदान करता है। यदि इन दोनों को बाँध दिया जाए तो यह बल अब कितना त्वरण प्रदान करेगा?

हल– $\because$ $F = ma$

$5 = m_1 \times 8$

$\therefore$ $m_1 = \dfrac{5}{8}$ किग्रा.

इसी प्रकार

$5 = m_2 \times 24$

$\therefore$ $m_2 = \dfrac{5}{24}$ किग्रा.

जब दोनों वस्तुओं को बाँध दिया जाये

तब $5 = \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{5}{24}\right) a$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{5 \times 24}{20} = 6$ मी./से.^{2}

उदा.29. एक किग्रा. द्रव्यमान का एक पिण्ड घर्षण रहित टेबिल पर रखा हुआ है उस पर 2 सेकण्ड तक एक नियत बल लगाकर हटा लिया जाता है। अगले 2 सेकण्ड में पिण्ड 20 मीटर दूरी तय करता है। उस पर लगाए गए बल की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है– $m = 1$किग्रा., $t_1 = 2$ सेकण्ड, $t_2 = 2$ सेकण्ड, दूरी $S = 20$ मीटर, $u = 0$

$S = ut + \dfrac{1}{2} at^2$

या $20 = \dfrac{1}{2} a(2^2 + 2^2)$

या $20 = 4a \;\therefore a = 5$ मी./से.^{2}

बल $F = ma = 1 \times 5$

$= 5$ न्यूटन

उदा 30. एक 4 किलोग्राम की गोली 2000 किग्रा. की एक तोप से 1500 मी./से. के वेग से छोड़ी जाती है। तोप का प्रतिक्षेप वेग ज्ञात करो।

हल– दिया गया है– $M = 2000$ किग्रा., $V = ?$, $m = 4$ किग्रा. $v = 1500$ मी./से.

संवेग संरक्षण नियम से

$MV + mv = 0$

$\Rightarrow$ $V = \dfrac{-mv}{M}$

$V = \dfrac{-4 \times 1500}{2000}$

$V = -3$ मी./से.

अतः तोप 3 मी./से. के वेग से पीछे हटेगी।

उदा.31. एक रॉकेट की मोटर 1000 किग्रा. ईधन तथा ऑक्सीजन के मिश्रण को प्रति सेकण्ड जलाती है। बाहर फेंकने का आपेक्षिक वेग 700 मी./से. का है। रॉकेट का थ्रस्ट ज्ञात करो।

हल– $F = u\dfrac{dm}{dt}$

जहाँ $u = 700$ मी./से. और $\dfrac{dm}{dt} = 1000$ किग्रा./से.

$\therefore$ $F = 700 \times 1000$

$F = 7 \times 10^5$ न्यूटन

उदा 32. एक रॉकेट में ईधन 100. किग्रा./से. की दर से जलता है तथा वह गैस के रूप में 2×10^3 मी./से. के वेग से बाहर निकलता है। गैस द्वारा रॉकेट पर लगाये गये बल का मान ज्ञात करो।

हल– $F = u\dfrac{dm}{dt}$

जहाँ $u = 2 \times 10^3$ मी./से. और $\frac{dm}{dt} = 100$ किग्रा./से.

$\therefore$ $F = 2 \times 10^3 \times 100$

$F = 2 \times 10^5$ न्यूटन

उदा.33. 30 किग्रा. के रॉकेट में ऊपर की ओर 6.0 मी./से.^{2} का त्वरण उत्पन्न करने के लिए कितने प्रणोद बल की आवश्यकता होगी?

हल— बल $F = ma = 30 \times 6.0$

$= 180$ न्यूटन

$\because$ न्यूटन के तृतीय नियम से—

क्रिया बल = प्रतिक्रिया बल

$\therefore$ प्रणोद बल का मान = 180 न्यूटन

उदा 34. 5×10^3 किग्रा. द्रव्यमान के रॉकेट से 1.2×10^3 मी./से. की चाल से कितनी गैस प्रति सेकण्ड निकलनी चाहिये जिससे उसे प्रारंभ में ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर 20 मी./से.^{2} का त्वरण प्राप्त हो सके? (g = 10 मी./से.^{2})

हल— दिया गया है—

$m = 5 \times 10^3$ किग्रा.

$a = 20$ मी./से.^{2}

$u = 1.2 \times 10^3$ मी./से.

$g = 10$ मी./से.^{2}

रॉकैट की गति का समीकरण

$$u\frac{dm}{dt} = ma + mg$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m(a+g)}{u}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{5 \times 10^3 (20 + 10)}{1.2 \times 10^3}$$

$$\frac{dm}{dt} = 125 \text{ किग्रा./से.}$$

उदा.35.एक गतिमान गोला जिसका द्रव्यमान 30 किग्रा. तथा वेग 48 मी./से. है, विस्फोट के पश्चात् दो खण्डों में विभक्त हो जाता है। इन खण्डों के द्रव्यमान 18 तथा 12 किग्रा. है। यदि विस्फोट के पश्चात् अधिक द्रव्यमान वाला खण्ड विरामावस्था में आ जाए तो खण्ड का वेग ज्ञात करो।

हल— संवेग संरक्षण नियम से

विस्फोट के पूर्व संवेग = विस्फोट के पश्चात् संवेग

दिया गया है—

M = 30 किग्रा., $m_1 = 18$ किग्रा.

V = 48 मी./से., $m_2 = 12$ किग्रा.

$v_1 = 0$

$v_2 = ?$

$MV = m_1v_1 + m_2v_2$

$30 \times 48 = 18 \times 0 + 12 \times v_2$

$30 \times 48 = 0 + 12 v_2$

$\Rightarrow$ $v_2 = \frac{30 \times 48}{12} = 120$ मी./से.

उदा. 36. एक किग्रा. द्रव्यमान का एक बम विस्फोट के कारण तीन भागों 1 : 1 : 3 के अनुपात में विभाजित हो जाता है। यदि समान द्रव्यमान के टुकड़े परस्पर लम्बवत् दिशा में 25 मी./से. की चाल से गतिमान होते हैं तो भारी टुकड़े की चाल की गणना कीजिए।

हल— बम का द्रव्यमान = 1 किग्रा.

विस्फोट के बाद टुकड़ों का द्रव्यमान = 1 : 1: 3

अतः $m_1 = \frac{1}{5} = 0.2$ किग्रा., $m_2 = \frac{1}{5} = 0.2$ किग्रा., $m_3 = \frac{3}{5} = 0.6$ किग्रा.

यदि विस्फोट के पश्चात् 0.2 किग्रा., 0.2 किग्रा. व 0.6 किग्रा. द्रव्यमान के टुकड़ों के संवेग क्रमशः $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ हों, तो

$$0 = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}$$

या $$\vec{p_3} = -(\vec{p_1} + \vec{p_2})$$

$\because$ $\vec{p_1}$ व $\vec{p_2}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

$\therefore$ $$|\vec{p_3}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

या $$m_3 v_3 = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}$$

या $$v_3 = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_3}$$

$$= \frac{\sqrt{(0.2)^2 \times (25)^2 + (0.2)^2 \times (25)^2}}{0.6}$$

या $$v_3 = \frac{\sqrt{25 + 25}}{0.6} = \frac{\sqrt{50}}{0.6}$$

$$= \frac{7.07}{0.6} = 11.78 \text{ मी./से.}$$

उदा.37.25 किग्रा. की एक मशीनगन से 25 ग्राम की गोलियाँ 5 गोली प्रति सेकण्ड की दर तथा 300 मी./से. की चाल से दागी जाती है। मशीनगन को अपनी स्थिति में बनाये रखने के लिए आवश्यक बल की गणना कीजिए।

हल— दिया गया है—

$m = 25$ ग्राम

$= 0.025$ किग्रा.

$v = 300$ मी./से.

$M = 25$ किग्रा.

$n = 5$ गोली/से.

संवेग संरक्षण नियम के आधार पर बंदूक का प्रतिक्षेप वेग

$$V = \frac{mv}{M}$$

$$= \frac{0.025 \times 300}{25}$$

$$= 0.3 \text{ मी./से.}$$

दिया गया है: गोली दागने की दर = 5 गोली प्रति सेकण्ड

$\therefore$ एक गोली दागने का समय

$$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ सेकण्ड}$$

आवेग–संवेग प्रमेय से

Ft = बंदूक के संवेग में परिवर्तन

$$\Rightarrow \quad F = \frac{MV}{t}$$

$$= \frac{25 \times 0.3}{0.2} = 37.5 \text{ न्यूटन}$$

उदा.38. एक व्यक्ति तथा एक ठेला गाड़ी का द्रव्यमान क्रमशः 50 किग्रा. व 100 किग्रा. है। 0.1 मी./से. के वेग से गतिशील गाड़ी पर वह व्यक्ति गाड़ी के चलने की दिशा में भाग कर चढ़ जाता है। अब गाड़ी व व्यक्ति का वेग 0.6 मी./से. हो जाता है। व्यक्ति किस वेग से भाग रहा था?

हल– दिया गया है–

व्यक्ति का द्रव्यमान $m_1 = 50$ किग्रा.

ठेला गाड़ी का द्रव्यमान $m_2 = 100$ किग्रा.

ठेला गाड़ी का वेग $v_2 = 0.1$ मी./से.

गाड़ी + व्यक्ति का वेग $v = 0.6$ मी./से.

व्यक्ति का वेग $v_1 = ?$

संवेग संरक्षण के नियम से–

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

या $50v_1 + 100 \times 0.1 = (50 + 100) \times 0.6$

या $50v_1 + 10 = 90$

या $50v_1 = 90 - 10 = 80$

या $v_1 = \frac{80}{50} = 1.6$ मी./से.

उदा 39.एक क्षैतिज पृष्ठ पर 4 किग्राभार के पिण्ड को खींचने के लिए 2 किग्रा. भार के न्यूनतम बल की आवश्यकता होती है। घर्षण कोण की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है–$(f_s)_{max} = 2$ किग्रा. भार, R = 4 किग्रा. भार

सूत्र $\tan\lambda = \frac{(f_s)_{max}}{R} = \frac{2}{4}$

$= 0.5$

$\lambda = \tan^{-1}(0.5) = 27°$ लगभग

उदा.40.10 ग्राम द्रव्यमान की एक गोली क्षैतिज दिशा में एक किग्रा. द्रव्यमान के गुटके की ओर दागी जाती है। गोली गुटके में धँस जाती है तथा गोली व गुटके का निकाय स्थिर अवस्था में आने तक 20 मीटर की दूरी तय करते हैं। गोली गुटके से जिस वेग से टकराती है उसका परिकलन कीजिए।

(जबकि $\mu_k = 0.3, g = 10$ मी/से.^{2})

हल– दिया गया है–

m = 10 ग्राम

= 0.01 किग्रा.

M = 1 किग्रा.

$\mu_k = 0.3$

g = 10 मी./से.^{2}

दूरी S = 20 मीटर

ऊर्जा संरक्षण नियम से

गोली की गतिज ऊर्जा = (गोली + गुटका) द्वारा घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = W$$

$\because$ कार्य W = बल (f) × विस्थापन (S)

$= \mu_k R \times S = \mu_k (M + m)g \times S$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2\mu_k (M + m)gS}{m}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\mu_k (M + m)gS}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad = \sqrt{\frac{2 \times 0.3(1 + 0.01) \times 10 \times 20}{0.01}} = 1.1 \times 10^2 \text{ मी./से.}$$

उदा.41.दो 7 किग्रा. और 12 किग्रा. के भार एक भारहीन और अप्रसरणशील डोरी के दोनों सिरों से लटके हुए हैं जो एक घिरनी पर होकर जाती है। जब भारों को छोड़ दिया जाता है तो उनका त्वरण और डोरी में तनाव ज्ञात करो।

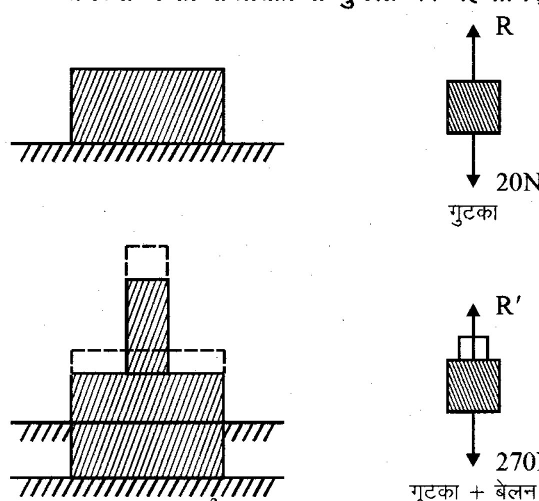
हल– त्वरण $a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$ जहाँ $m_1 < m_2$

$$= \frac{12 - 7}{12 + 7} \times 10 = \frac{50}{19} = 2.6 \text{ मी./से.}^2$$

तनाव $T = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right) g$

$$= \frac{2 \times 12 \times 7}{12 + 7} \times 10 = \frac{1680}{19} = 86.8 \text{ न्यूटन}$$

उदा.42.किसी कोमल क्षैतिज फर्श पर 2 kg संहति का लकड़ी का गुटका रखा है (चित्र)। जब इस गुटके के ऊपर 25kg संहति का लोहे का बेलन रखा जाता है तो फर्श स्थिर गति से नीचे धँसता है तथा गुटका व बेलन एक साथ 0.1 ms^{-2} त्वरण से नीचे जाते हैं। गुटके की फर्श पर क्रिया (a) फर्श के धँसने से पूर्व तथा (b) फर्श के धँसने के पश्चात् क्या है? g = 10 ms^{-2} लीजिए। समस्या में क्रिया-प्रतिक्रिया युगलों को पहचानिए।



चित्र 4.33

हल– (a) फर्श के धँसने से पूर्व गुटके की फर्श पर क्रिया = गुटके का भार $= mg = 2 \times 10 = 20$ न्यूटन (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

(b) फर्श के धँसने के पश्चात् गुटके की फर्श पर क्रिया–
निकाय (गुटका + बेलन) पर परिणामी बल

$$(m+M)g - R' = (m+M)a$$

यहाँ M = बेलन का द्रव्यमान

R′ = अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

$\therefore \quad (2+25) \times 10 - R' = (2+25) \times 0.1$

$\Rightarrow \quad 27 \times 10 - R' = 27 \times 0.1$

$\Rightarrow \quad R' = 270 - 2.7 = 267.3$ न्यूटन

गति के तृतीय नियमानुसार

R′ = (गुटका + बेलन) की फर्श पर क्रिया

= 267.3 न्यूटन (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

उदा.43. हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन प्रोटॉन के चारों ओर 5.28×10^{-11} मीटर त्रिज्या के वृत्त में 2.18×10^6 मी./से. की चाल से चक्कर काटता है। इलेक्ट्रॉन के त्वरण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$R = 5.28 \times 10^{-11}$ मीटर

$v = 2.18 \times 10^6$ मी./से.

इस स्थिति में अभिकेन्द्रीय त्वरण

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

$$a_r = \frac{(2.18 \times 10^6)^2}{5.28 \times 10^{-11}}$$

$= 9.0 \times 10^{22}$ मी./से.^{2}

उदा.44. कोई कीड़ा एक वृत्तीय खांचे में जिसकी त्रिज्या 12cm है, फंस गया है। वह खांचे के अनुदिश स्थिर चाल से चलता है और 100 सेकंड में 7 चक्कर लगा लेता है। (a) कीड़े की कोणीय चाल व रैखिक चाल कितनी होगी? (b) क्या त्वरण सदिश एक अचर सदिश है। इसका परिमाण कितना होगा?

हल– दिया गया उदाहरण एक समान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है।

प्रश्नानुसार R = 12 सेमी. $= 12 \times 10^{-2}$ मी., $T = \frac{100}{7}$ सेकण्ड

(a) कीड़े की कोणीय चाल $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{100/7}$

= 0.44 रेडियन/से.

रैखिक चाल $v = R\omega$ $= 12 \times 10^{-2} \times 0.44$

$= 5.28 \times 10^{-2}$ मी./से.

(b) वृत्त के प्रत्येक बिन्दु पर त्वरण की दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर होने से त्वरण की दिशा लगातार परिवर्तित होती रहती है। जिससे त्वरण एक अचर सदिश नहीं है।

त्वरण का परिमाण $a_r = \omega^2 R = (0.44)^2 \times 12 \times 10^{-2}$

$= 2.3 \times 10^{-2}$ मी./से.^{2}

उदा.45. चन्द्रमा 2.36×10^6 सेकण्ड में पृथ्वी का परिक्रमण वृत्ताकार कक्षा में करता है जिसकी त्रिज्या 3.85×10^5 किमी. है। चन्द्रमा के पृथ्वी की ओर त्वरण का परिकलन कीजिए।

हल– दिया गया है–

$T = 2.36 \times 10^6$ सेकण्ड

$R = 3.85 \times 10^5$ किमी.

$R = 3.85 \times 10^5 \times 10^3$ मी.

चन्द्रमा का कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{2.36 \times 10^6}$ $\frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$

∴ चन्द्रमा के पृथ्वी की ओर त्वरण

$$a_r = R\omega^2$$

$$= 3.85 \times 10^5 \times 10^3 \times \left(\frac{2 \times 3.14}{2.36 \times 10^6}\right)^2$$

$= 2.73 \times 10^{-3}$ मी./से.^{2}

उदा.46. एक 10 ग्राम द्रव्यमान का पिण्ड 50 सेमी. लम्बी डोरी से बंधा हुआ है। यदि पिण्ड को क्षैतिज वृत्त में π सेकण्ड के आवर्तकाल से घुमाया जाए तो डोरी में तनाव की गणना कीजिए।

हल– इस स्थिति में तनाव बल अभिकेन्द्रीय बल होता है।

∴ तनाव बल $T = mR\omega^2$

दिया गया है– $m = 10$ ग्राम

$= 10 \times 10^{-3}$ ग्राम

R = 50 सेमी.

$= 50 \times 10^{-2}$ मी.

आवर्तकाल $= \pi$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{\text{आवर्तकाल}}$$

$= \frac{2\pi}{\pi} = 2$ रेडियन/से.

∴ तनाव बल $T = 10 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-2} \times (2)^2$

$= 2 \times 10^{-2}$ न्यूटन

उदा.47. 100 ग्राम द्रव्यमान का एक पत्थर 2 मीटर लम्बे धागे से बांधकर 3 घूर्णन प्रति सेकण्ड से क्षैतिज वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता है। धागे पर लगने वाले तनाव बल की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है–

$m = 100$ ग्राम

$= 100 \times 10^{-3}$ किग्रा.

R = 2 मीटर

$n = 3$ घूर्णन/सेकण्ड

$\omega = 2\pi n$

$= 2 \times 3.14 \times 3$ रेडियन/से.

∴ तनाव बल $T = mR\omega^2$

$= 100 \times 10^{-3} \times 2 \times (2 \times 3.14 \times 3)^2$

= 71 न्यूटन

उदा.48. एक डोरी अधिक से अधिक 100 न्यूटन का बल सहन कर सकती है। इस डोरी के 1मीटर लम्बे टुकड़े के एक सिरे पर 1 किग्रा. का पिण्ड बाँधकर उसे क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। पिण्ड को अधिकतम कितनी रेखीय चाल से घुमाया जा सकता

है कि डोरी न टूटे।

हल– दिया गया है–

$$F = 100 \text{ न्यूटन}$$
$$r = 1 \text{ मीटर}$$
$$m = 1 \text{किग्रा.}$$

$$\because \quad F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = \sqrt{\frac{100 \times 1}{1}}$$
$$= 10 \text{ मी./से.}$$

उदा.49. समान द्रव्यमान के दो कण क्रमशः r_1 व r_2 त्रिज्या के वृत्ताकार पथों पर समान चाल से चक्कर लगा रहे है उनके अभिकेन्द्रीय बलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– अभिकेन्द्र बल $F = \frac{mv^2}{r}$

द्रव्यमान m तथा चाल v समान होने पर

$$F \propto \frac{1}{r}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

उदा 50. वह अधिकतम चाल ज्ञात करो जिससे एक कार 36 मीटर त्रिज्या के घुमाव पर सुरक्षित घूम सके जबकि कार के टायर तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक = 0.4

हल–

$$r = 36 \text{ मीटर}$$
$$\mu = 0.4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = \mu R = \mu mg$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \mu rg$$

$$\Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.4 \times 36 \times 10}$$
$$= 12 \text{ मी./से.}$$

उदा. 51. 7 मी./से. समान चाल से एक साईकिल सवार बिना झुके कम से कम कितनी त्रिज्या के समतल मोड़ पर सुरक्षित चल सकता है। साईकिल टायर तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक $\left(\frac{1}{4}\right)$ है।

हल– दिया गया है–

$$v = 7 \text{मी./से.}, \ \mu = \frac{1}{4}$$
$$r = ?$$
$$v = \sqrt{\mu rg}$$
$$v^2 = \mu rg$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{\mu g}$$

$$= \frac{(7)^2}{\frac{1}{4} \times 10} = 20 \text{ मीटर}$$

उदा.52. एक मोटर साइकिल सवार क्षैतिज वृत्ताकार पथ पर 36 $\frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}}$ के वेग से घूम रहा है। अपना संतुलन बनाये रखने के लिए वह भीतर की ओर किस कोण से झुकेगा? जबकि वृत्ताकार पथ की त्रिज्या 200 मीटर है। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$$v = 36 \frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}} = \frac{36 \times 1000}{3600}$$
$$= 10 \text{ मी./से.}$$
$$r = 200 \text{ मीटर}$$

$$\because \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(10)^2}{200 \times 10} = 0.05$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0.05) = 3° \text{ (लगभग)}$$

उदा.53. यदि किसी वृत्ताकार मोड़ की त्रिज्या 0.1 किमी. है। 60 $\frac{\text{किमी.}}{\text{घंटा}}$ से चलने वाले वाहन के लिए सड़क का करवट कोण कितना होना चाहिए। ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$$r = 0.1 \text{ किमी.}$$
$$= 0.1 \times 10^3 \text{ मी.}$$
$$v = 60 \text{ किमी./घंटा}$$

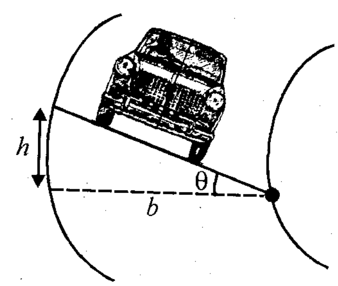
$$= \frac{60 \times 1000}{3600} = \frac{50}{3} \text{ मी./से.}$$

$$\because \quad \tan = \frac{v^2}{rg} = \frac{\left(\frac{50}{3}\right)^3}{0.1 \times 10^3 \times 10} = \frac{5}{18}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{18}\right)$$

उदा.54. एक वाहन b चौड़ाई तथा R वक्रता त्रिज्या की सड़क पर v वेग से गतिशील है। वाहन पर अपकेन्द्री बल का प्रतिकार करने के लिए सड़क के बाह्य तथा आन्तरिक किनारों के मध्य आवश्यक ऊँचाई में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल– चित्र की ज्यामिती से



चित्र 4.34

$$\tan\theta = \frac{h}{b} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\therefore \qquad h = \frac{v^2 b}{Rg}$$

उदा.55.20 मीटर त्रिज्या के मोड़ पर 10 मी./से. की चाल से एक कार की सुरक्षित गति के लिए सड़क का करवट कोण कितना होना चाहिए? (g = 10 मी./से.²)

हल– दिया गया है–

$$r = 20 \text{ मीटर}$$
$$v = 10 \text{ मी./से.}$$
$$g = 10 \text{ मी./से.}^2$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$= \frac{(10)^2}{20 \times 10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5) = 27° \text{ (लगभग)}$$

उदा 56.एक निकाय पर तीन संगामी बल $\vec{F_1} = 2\hat{i}$ न्यूटन $\vec{F_2} = -6\hat{j}$ न्यूटन तथा $\vec{F_3} = 3\hat{j}$ न्यूटन कार्यरत है। क्या वस्तु सन्तुलन की स्थिति में है? यदि नहीं तो संतुलन स्थिति के लिए कितना बल और लगाना चाहिए?

हल– निकाय पर परिणामी बल

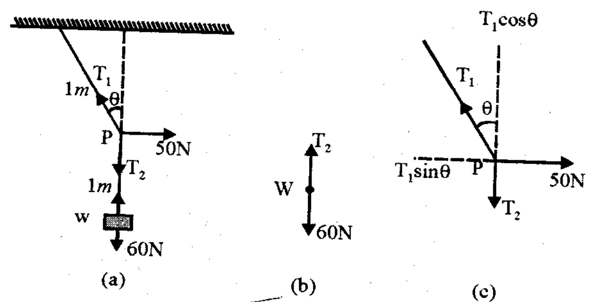
$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$
$$\vec{F} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{j}$$
$$\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) \text{ न्यूटन}$$

इस प्रकार परिणामी बल अशून्य है अतः निकाय संतुलित अवस्था में नहीं है।

निकाय को संतुलित अवस्था में लाने के लिए यदि एक अन्य बल $\vec{F_4}$ लगाया जाता है। तब

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 0$$
$$\vec{F_4} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3})$$
$$\vec{F_4} = -(2\hat{i} - 3\hat{j}) \text{ न्यूटन}$$
$$\vec{F_4} = -2\hat{i} + 3\hat{j} \text{ न्यूटन}$$
$$\Rightarrow \qquad F_4 = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2}$$
$$F_4 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ न्यूटन}$$

उदा 57. 6 kg संहति के किसी पिण्ड को छत से 2 m लंबाई की डोरी द्वारा लटकाया गया है। डोरी के मध्य-बिन्दु पर चित्र में दर्शाए अनुसार क्षैतिज दिशा में 50 N बल लगाया जाता है। साम्यावस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है?



चित्र 4.35

हल– दिया गया है–

$m = 6$ किग्रा.

F = 50 न्यूटन

g = 10 मी./से.²

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T_1 \sin\theta = F \qquad ...(1)$$
$$T_1 \cos\theta = T_2 = W \qquad ...(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{W} = \frac{F}{mg}$$

$$= \frac{50}{6 \times 10} = \frac{5}{6}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40°$$

उदा.58.एक 2 किग्रा. का ब्लॉक 30° के घर्षण रहित आनत तल पर फिसलता है। तल पर 4 मी. की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा? [g = 10 मी./से.²]

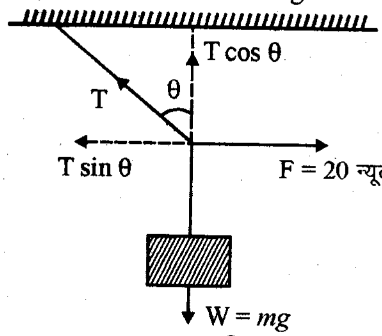
हल– दिया गया है–S = 4 मी., $u = 0$, g = 10 मी./से.²

30° के आनत तल पर त्वरण

$$a = g\sin 30°$$
$$= 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ मी./से.}^2$$
$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ से}$$
$$4 = 0 + \frac{1}{2} \times 5.t^2$$
$$t^2 = \frac{8}{5} = 1.6$$
$$t = \sqrt{1.6}$$
$$= 1.28 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.59.एक 3 किग्रा. द्रव्यमान का पिण्ड द्रव्यमान रहित रस्सी के द्वारा लटकाया गया है। रस्सी के मध्य बिन्दु पर एक 20 न्यूटन का बल क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। रस्सी का साम्यावस्था में ऊर्ध्वाधर तल से कोण

$m = 3$ किग्रा.
F = 20 न्यूटन
g = 10 मी./से.^{2}



चित्र 4.36

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T\sin\theta = F \quad ...(1)$$
$$T\cos\theta = W \quad ...(2)$$

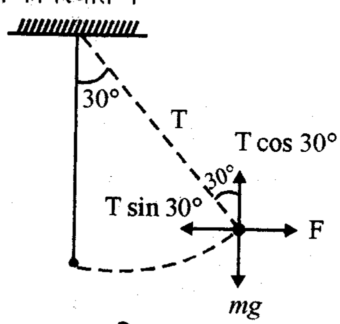
समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{W} = \frac{F}{mg} = \frac{20}{3\times 10} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 34° \text{ (लगभग)}$$

उदा.60. 30 ग्राम द्रव्यमान का एक पिण्ड एक लम्बे धागे से बँधा है। एक क्षैतिज बल उस पिण्ड को इस प्रकार विस्थापित करता है कि अब धागा ऊर्ध्वाधर दिशा से 30° का कोण बना रहा है। बल का परिमाण संगणित करो।

हल– साम्यावस्था की स्थिति में



चित्र 4.37

$$T\sin 30° = F \quad ...(1)$$
$$T\cos 30° = mg \quad ...(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan 30° = \frac{F}{mg}$$

$$\Rightarrow \qquad F = mg\tan 30°$$

$$= 30\times g\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

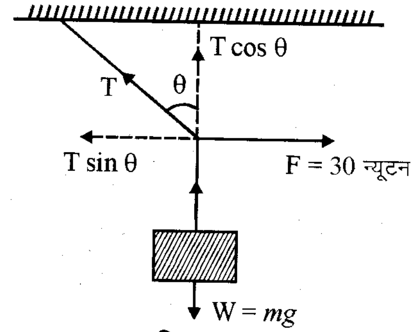
$$= \frac{30\sqrt{3}}{3}g = 10\sqrt{3}g$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ ग्राम भार}$$

उदा.61. 4 किग्रा. के एक पिण्ड को 3 मीटर लम्बाई की रस्सी के द्वारा छत से लटकाया गया है। रस्सी के मध्य बिन्दु पर 30 न्यूटन का बल क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। साम्यावस्था की स्थिति के लिए ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया जाने वाला कोण ज्ञात कीजिए। रस्सी का द्रव्यमान नगण्य है। (g = 10 मी./से.^{2})

हल– दिया गया है–

$m = 4$ किग्रा. F = 30 न्यूटन
g = 10 मी./से.^{2}



चित्र 4.38

साम्यावस्था की स्थिति में

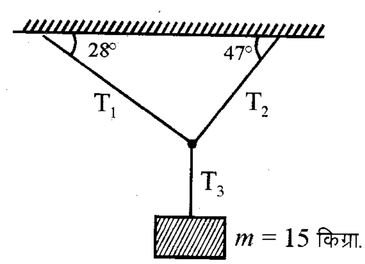
$$T\sin\theta = F \quad ...(1)$$
$$T\cos\theta = mg \quad ...(2)$$

समी. (1) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{30}{4\times 10} = \frac{3}{4}$$

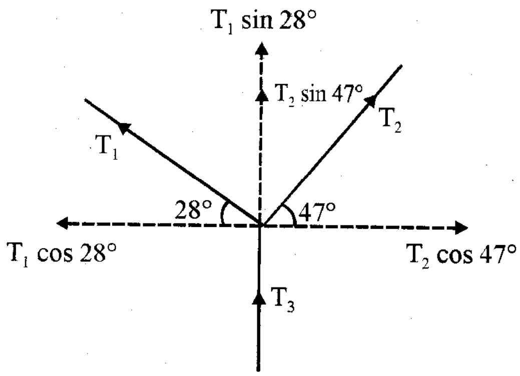
$$\Rightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37° \text{ (लगभग)}$$

उदा.62. चित्रानुसार 15 किग्रा. द्रव्यमान का एक बक्सा तीन डोरियों से लटकाया गया है। डोरियों में तनाव ज्ञात कीजिए। (डोरियों का द्रव्यमान नगण्य मान लिया जाये।) (sin 28° = 0.469, sin 47° = 0.731, cos 28° = 0.883, cos 47° = 0. 682)



चित्र 4.39

हल– दिए गए चित्र को सरलतम रूप में निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है–



चित्र 4.40

साम्यावस्था की स्थिति में

$$T_3 = W = mg \quad ...(1)$$
$$= 15 \times 9.8$$
$$= 147 \text{ न्यूटन}$$

$$T_1 \cos 28° = T_2 \cos 47° \quad ...(2)$$
$$T_1 \sin 28° + T_2 \sin 47° = W = T_3 \quad ...(3)$$

समी. (2) से $T_1 (0.883) = T_2 (0.682)$

$$T_1 = 0.772\, T_2 \quad ...(4)$$

समी. (3) से

$$T_1 (0.469) + T_2 (0.731) = 147$$

समी. (4) से T_1 का मान रखने पर

$$0.772 \times 0.469\, T_2 + 0.731\, T_2 = 147$$
$$1.093\, T_2 = 147$$
$$\therefore \quad T_2 = 134.5 \text{ न्यूटन}$$

यह मान समीकरण (4) में रखने पर

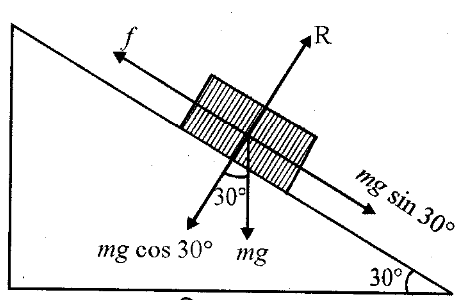
$$T_1 = 0.772 \times 134.5$$
$$= 103.8 \text{ न्यूटन}$$

उदा.63.एक धातु का एक ब्लॉक धातु से बनी नत तल की सतह पर रखा हुआ है तथा सतह क्षैतिज के साथ 30° का कोण बनाती है। यदि ब्लॉक का द्रव्यमान 0.5 किग्रा. तथा घर्षण गुणांक 0.2 है तो-

(i) वस्तु को फिसलने से रोकने के लिए आवश्यक बल क्या होगा?

(ii) सतह पर ऊपर की ओर गति कराने में बल क्या होगा?

हल–



चित्र 4.41

दिया गया है– $\theta = 30°$

$m = 0.5$ किग्रा.

$\mu = 0.2$

(i) फिसलने के लिए आवश्यक बल

$$= mg \sin 30° - f$$
$$= mg \sin 30° - \mu R \quad (\because f = \mu R)$$
$$= mg \sin 30° - \mu mg \cos 30° \quad (\because R = mg \cos 30°)$$
$$= mg (\sin 30° - \mu \cos 30°)$$
$$= 0.5 \times 9.8 (0.5 - 0.2 \times 0.866)$$
$$= 4.9 (0.5 - 0.1732)$$
$$= 1.6 \text{ न्यूटन}$$

(ii) सतह पर ऊपर की ओर गति कराने के लिए आवश्यक बल

$$= mg \sin 30° + f$$
$$= mg \sin 30° + \mu R$$
$$= mg \sin 30° + \mu\, mg \cos 30°$$
$$= mg (\sin 30° + \mu \cos 30°)$$
$$= 0.5 \times 9.8 (0.5 + 0.2 \times 0.866)$$
$$= 4.9 (0.5 + 0.1732) = 3.299 \text{ न्यूटन}$$

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. किसी वस्तु पर यदि नेट बल शून्य है तो उसका त्वरण क्या होगा?

उत्तर– इस स्थिति में वस्तु का त्वरण a शून्य होगा क्योंकि त्वरण

$$a = \frac{F}{m} \quad \because F = 0 \text{ होने पर } a = 0$$

प्र.2. किसी वस्तु के संवेग का सूत्र लिखिए।

उत्तर– संवेग $\vec{p}$ = द्रव्यमान (m) × वेग $(\vec{v})$

प्र.3. न्यूटन के गति का द्वितीय नियम सूत्र रूप में लिखिए।

उत्तर– $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

प्र.4. न्यूटन के गति के तृतीय नियम में क्रिया एवं प्रतिक्रिया की दिशा क्या होती है?

उत्तर– न्यूटन के गति के तृतीय नियम में क्रिया एवं प्रतिक्रिया परस्पर विपरित दिशा में होती है।

प्र.5. परिवर्ती द्रव्यमान वाले तंत्र का एक उदाहरण दीजिए।

उत्तर– रॉकेट नोदन।

प्र.6. किसी दो सम्पर्कित पृष्ठों के मध्य स्थैतिक एवं गतिक घर्षण में से किसका मान अधिक होता है?

उत्तर– स्थैतिक घर्षण का मान, गतिक घर्षण की तुलना में अधिक होता है।

प्र.7. μ_s एवं μ_k में किसका मान अधिक होता है?

उत्तर– स्थैतिक घर्षण गुणांक μ_s का मान गतिक घर्षण गुणांक μ_k की तुलना में अधिक होता है।

प्र.8. एक समान वृत्तीय गति में कौनसा बल विद्यमान होता है?

उत्तर– एक समान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्रीय बल विद्यमान होता है।

प्र.9. समतल वृत्ताकार पथ पर एक वाहन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कैसे प्राप्त होता है?

उत्तर- समतल वृत्ताकार पथ पर वाहन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल घर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है?

प्र.10. एक बंकित वृत्ताकार पथ पर घर्षण बल के अलावा आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कैसे प्राप्त होता है?

उत्तर- अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R के घटक $R\sin\theta$ द्वारा जबकि θ सड़क का बंकन कोण या करवट कोण है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. स्पष्ट कीजिए कि क्यों किसी तीव्र गति से चल रही बस के यकायक रूकने पर यात्री आगे की ओर गिरते है?

उत्तर- इसका कारण है कि यात्री के शरीर का निचला हिस्सा बस के साथ विरामावस्था में आ जाता है परन्तु ऊपरी हिस्सा गति के जड़त्व के कारण आगे की ओर गतिमान रहता है। जिससे यात्री आगे की ओर गिरता है।

प्र.2. न्यूटन के गति के प्रथम नियम को जड़त्व का नियम क्यों कहते हैं?

उत्तर- न्यूटन का गति का प्रथम नियम निम्न दो तथ्यों में बाँटा जा सकता है :

(i) प्रत्येक वस्तु अपनी स्थिरावस्था का बनाए रखती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल आरोपित नहीं किया जाये।

(ii) प्रत्येक वस्तु अपनी सरल रेखीय एक समान गति को बनाए रखती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य असंतुलित बल आरोपित नहीं किया जाये।

मूल रूप से जड़त्व की परिभाषा यही है। इस कारण गति का प्रथम नियम जड़त्व का नियम कहलाता है।

प्र.3. क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को लपकते समय अपने हाथ गेंद के साथ पीछे की ओर क्यों खींचता है?

उत्तर- इसका कारण है कि खिलाड़ी हाथ पीछे की तरफ खींचकर गेंद के कैच लेने के समय को बढ़ाता है ताकि हाथ पर आरोपित कम बल के कारण उसे चोट नहीं लगे।

प्र.4. बल की परिभाषा दीजिए।

उत्तर- बल वह भौतिक राशि है जो स्थिर वस्तु को गतिमान या गतिमान वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करता है अथवा ऐसा करने का प्रयास करता है।

प्र.5. एक जड़त्वीय तंत्र के अन्तर्गत एक कण का त्वरण मापने पर शून्य आता हैं। क्या हम कह सकते हैं कि कण पर कोई बल कार्यरत नहीं है? स्पष्ट कीजिए।

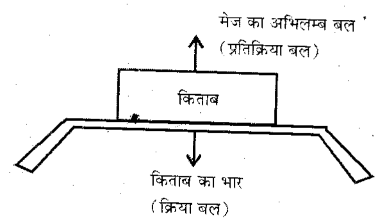
उत्तर- एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के अन्तर्गत एक कण का त्वरण मापने पर शून्य आता है। अत: गतिशील होने की दिशा में कण समान वेग से गतिशील होगा या स्थिर रहेगा क्योंकि इस दिशा में कोई बल या बल का घटक कार्यकारी नहीं होगा किन्तु गति के लम्बवत दिशा में बल कार्यकारी हो सकता है।

प्र.6. न्यूटन के गति के तृतीय नियम के अनुसार रस्साकशी के खेल में प्रत्येक टीम अपनी विरोधी टीम को समान बल से खींचता है तो फिर एक टीम जीतती है और दूसरी टीम हार जाती है, ऐसा क्यों?

उत्तर- रस्साकशी के खेल में प्रत्येक टीम विरोधी टीम को समान बल से खींचती है किन्तु मध्य में लगी गाँठ के इर्दगिर्द दोनों टीमों के द्वारा रस्सी में उत्पन्न तनाव भिन्न-भिन्न होता है। इस तनाव की भिन्नता के कारण एक टीम की ओर परिणामी बल दूसरी ओर की तुलना में बढ़ जाने से वह टीम जीत जाती है और दूसरी हार जाती है।

प्र.7. एक मेज पर एक किताब रखी हुई हैं। किताब का भार एवं मेज द्वारा किताब पर लगाया गया अभिलम्ब बल परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत है। क्या इसे न्यूटन के तृतीय नियम का उदाहरण माना जा सकता है? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- जब मेज पर किताब रखी जाती है तब किताब का भार मेज पर क्रिया बल के रूप में तथा मेज द्वारा किताब पर लगाया गया अभिलम्ब बल प्रतिक्रिया बल के रूप में होता है। किताब संतुलन में होने के कारण क्रिया व प्रतिक्रिया बल परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत है एवं दोनों बल भिन्न-भिन्न पिण्डों पर आरोपित है जोकि न्यूटन के गति के तृतीय नियम का पालन करते हैं।



चित्र: 4.42

प्र.8. किसी वस्तु पर लगने वाले आवेग की परिभाषा लिखिए।

उत्तर- किसी पिण्ड की गति पर बल के कुल प्रभाव को आवेग कहते हैं। इसका मान वस्तु पर आरोपित बल तथा जितने समयान्तराल के लिए बल कार्यरत हैं का गुणनफल होता है।

यदि किसी वस्तु पर कोई बल $\vec{F}$ अल्प समय dt के लिए कार्यरत हैं तब बल का आवेग

$$d\vec{I} = \vec{F}dt$$

प्र.9. आवेगी बल क्या होते हैं?

उत्तर- परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए कम समय के लिए कार्यरत अत्यधिक परिमाण के बल को आवेगी बल कहते हैं।

प्र.10. आवेग-संवेग प्रमेय लिखिए।

उत्तर- इस प्रमेय के अनुसार किसी बल का आवेग, उस बल के कारण संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है।

प्र.11. संवेग संरक्षण का नियम लिखिए।

उत्तर- इस नियम के अनुसार कुल बाह्य बल की अनुपस्थिति में किसी निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है।

प्र.12. विलगित निकाय किसे कहते हैं?

उत्तर- वह निकाय जिसका बाह्य वातावरण से कोई सम्बन्ध नहीं हो, विलगित या पृथक्कित निकाय कहलाता है।

प्र.13. किसी बन्दूक से एक गोली छोड़ने पर बन्दूक पीछे की ओर प्रतिक्षिप्त क्यों होती है?

उत्तर- प्रारंभ में गोली के बंदूक से निकलने से पहले गोली तथा बन्दूक मिलकर एक निकाय के रूप में होते हैं तथा इस निकाय का कुल संवेग शून्य होता है। इस संवेग को संरक्षित (शून्य) रखने के लिए बन्दूक का संवेग, गोली के संवेग के बराबर व विपरीत होता है जिससे गोली आगे की ओर निकलती है तो बन्दूक पीछे की ओर प्रतिक्षिप्त होती है।

प्र.14. घर्षण कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर- सामान्यत: घर्षण दो प्रकार के होते हैं-

(1) स्थैतिक घर्षण तथा

(2) गतिक घर्षण

इसके अतिरिक्त घर्षण सर्पी घर्षण, बेलनी या लोटनी घर्षण भी होते हैं।

प्र.15. अभिकेन्द्रीय त्वरण को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10 पर देखें।

प्र.16. किसी वृत्ताकार मोड़ पर एक सड़क को बंकित क्यों किया जाता है?

उत्तर- सड़क के मोड़ पर वाहनों को घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने हेतु सड़क के बाहरी भाग को आन्तरिक भाग की अपेक्षाकृत थोड़ा ऊँचा उठा दिया जाता है अर्थात् बंकित किया जाता है।

प्र.17. जड़त्वीय निर्देश तंत्र को परिभाषित कीजतिए।

उत्तर- निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण रहित दिखायी देती है, जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है।

प्र.18. अजड़त्वीय निर्देश तंत्र को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं होते हैं तथा बाह्य बल की अनुपस्थिति में कण की गति त्वरण सहित दिखायी देती है, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है।

प्र.19. क्या पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र है?

उत्तर- नहीं, पृथ्वी जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं है क्योंकि पृथ्वी सूर्य के चारों ओर घूमती है तथा साथ ही अपने स्वयं की अक्ष पर भी घूर्णन करती है। इसलिए यह घूमता हुआ निर्देश तंत्र है। अत: पृथ्वी एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र है।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. न्यूटन के गति का द्वितीय नियम क्या है? इसे परिभाषित करिए। इससे गति के प्रथम नियम को व्युत्पन्न करिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.4 पर देखें।

प्र.2. न्यूटन के गति का तृतीय नियम परिभाषित कीजिए। इसे दो उदाहरणों द्वारा समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.6 पर देखें।

प्र.3. आवेग-संवेग प्रमेय को लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए। ग्राफीय विधि से आवेग का मान कैसे ज्ञात करेंगे?

उत्तर- अनुच्छेद 4.5 पर देखें।

प्र.4. किसी N कणों के निकाय के लिए संवेग संरक्षण का नियम लिखिए। न्यूटन के द्वितीय नियम का उपयोग करते हुए इसे व्युत्पन्न करिये। एक उदाहरण द्वारा संवेग संरक्षण के नियम को समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.7 पर देखें।

प्र.5. रॉकेट की गति का वर्णन करिये तथा इसके वेग के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.8 भाग 3 पर देखें।

प्र.6. घर्षण कितने प्रकार का होता है? उनके नाम लिखिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.7. स्थैतिक घर्षण की दिशा कैसे ज्ञात करेंगे? समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.8. स्थैतिक एवं गतिज घर्षण गुणांकों को परिभाषित कीजिए। इनका मान कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

उत्तर- अनुच्छेद 4.9 पर देखें।

प्र.9. क्षैतिज तल में एक पिण्ड की वृत्ताकार गति का वर्णन कीजिए तथा आवर्तकाल के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10.1 का भाग (i) पर देखें।

प्र.10. ऊर्ध्वाधर तल में एक पिण्ड की वृत्ताकार गति का वर्णन करिए। वृत्त के उच्चतम एवं निम्नतम बिन्दुओं पर एक डोरी में उत्पन्न तनाव के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए। क्रान्तिक वेग किसे कहते हैं? इसका सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.10.1 का भाग (ii) पर देखें।

प्र.11. एक समतल वृत्ताकार पथ पर एक वाहन की गति का वर्णन करते हुए वाहन की अधिकतम गति के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.11 पर देखें।

प्र.12. वृत्ताकार मोड़ पर एक सड़क को बंकित क्यों किया जाता है? ऐसे मोड़ पर एक वाहन की अधिकतम गति के लिए आवश्यक सूत्र ज्ञात कीजिए। यदि सड़क में घर्षण को नगण्य मान लिया जाय तो बंकन कोण के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 4.11 पर देखें।

प्र.13. एक आनत तल पर एक पिण्ड की गति का वर्णन करिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.12 पर देखें।

प्र.14. जड़त्वीय एवं अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों में अन्तर स्पष्ट करिये। क्या पृथ्वी निर्देश तंत्र है? स्पष्ट कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 4.13 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.13 है तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिये जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिये आवश्यक है।

उत्तर– दिया गया है– $\mu_s = 0.13,\ g = 9.8\ m/s^2,\ a_{max} = ?$

प्रश्नानुसार बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण है।

अतः $ma \le (f_s)_{max}$

$\Rightarrow\quad ma \le \mu_s R$

$\Rightarrow\quad ma \le \mu_s mg$

$$a_{max} = \mu_s g = 0.13 \times 9.8 = 1.27\ m/s^2$$

प्र.2. 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किये 3m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है, टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जायेगा?

हल– पुस्तक उदाहरण 4.8 से देखें।

प्र.3. किसी विस्फोट में एक बम के तीन टुकड़े हो जाते हैं जिसके दो टुकड़े एक दूसरे के लम्बवत् गति करते हैं। यदि प्रथम टुकड़े का द्रव्यमान 2kg व वेग 12 ms^{-1}, दूसरे का द्रव्यमान 1kg व वेग 8ms^{-1} तथा तीसरे टुकड़े का वेग 20 ms^{-1} हो तो उसके द्रव्यमान की गणना कीजिये।

हल– दिया गया है– $m_1 = 2kg,\ v_1 = 12m/s$

$m_2 = 1\ kg,\ v_2 = 8\ m/s,\ v_3 = 20\ m/s,\ m_3 = ?$

संवेग संरक्षण नियम से–

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow\quad \vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$\because$ $\vec{p}_1$ व $\vec{p}_2$ परस्पर लम्बवत् है।

$$\therefore\quad p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$m_3 v_3 = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{v_3}$$

$$= \frac{\sqrt{(2)^2 \times (12)^2 + (1)^2 \times (8)^2}}{20}$$

$$m_3 = \frac{\sqrt{4 \times 144 + 1 \times 64}}{20} = \frac{\sqrt{640}}{20} = 1.26\ kg$$

प्र.4. किसी हल्की घर्षण रहित घिरनी पर चढ़ी डोरी के दो सिरों पर 8kg व 12kg द्रव्यमान के दो पिण्डों को बाँधा गया है। पिण्डों को मुक्त छोड़ने पर उनके त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिये।

हल– दिया गया है– $m_1 = 8kg,\ m_2 = 12kg$

यहाँ $m_2 > m_1$

त्वरण

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g = \left(\frac{12-8}{8+12}\right)10 = \frac{4}{20} \times 10 = 2\ m/s^2$$

$$\text{तनाव}\ T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$= \left(\frac{2 \times 8 \times 12}{8+12}\right)10 = \frac{2 \times 8 \times 12 \times 10}{20} = 96N$$

प्र.5. कोई बल्लेबाज किसी गेंद को 45° के कोण पर विक्षेपित कर देता है। ऐसा करने पर वह गेंद की आरम्भिक चाल 54km h^{-1} में कोई परिवर्तन नहीं करता है तो गेंद के आवेग की गणना कीजिये यदि गेंद का द्रव्यमान 0.15 kg हों।

हल– माना कि बल्ले की स्थिति 'O' है। चित्रानुसार m द्रव्यमान की गेंद प्रारंभ में v चाल से AO के अनुदिश गतिशील होकर बल्ले से टकरा कर यह OB के अनुदिश प्रतिक्षिप्त होती है।

$$\angle AOB = 45°$$

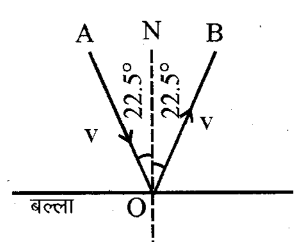
माना ON बल्ले पर अभिलम्ब है तथा

$$\angle AON = \angle NOB = \theta = \frac{45°}{2} = 22.5°$$

दिया गया है– v = 54 किमी./घंटा

$$= \frac{54 \times 1000}{3600}\ \text{मी./से.}$$

= 15 मी./से.



चित्र 4.43

गेंद का प्रारंभिक संवेग = $mv\ \cos\theta$

$$p_i = 0.15 \times 15 \times \cos 22.5°$$

$= 2.25 \times 0.9239$

$= 2.08$ किग्रा. × मी./से.

(दिशा NO के अनुदिश)

गेंद का अंतिम संवेग = $-m\,v\cos\theta$

$p_f = -2.08$ किग्रा.× मी./से.

(दिशा ON के अनुदिश)

$\because$ गेंद को प्रदत्त आवेग = गेंद के रैखिक संवेग में परिवर्तन

$= p_f - p_i$
$= -mv\cos\theta - mv\cos\theta$
$= -2.08 - 2.08 = -4.16$

आवेग का परिमाण = 4.16 किग्रा.× मी./से.

प्र.6. $15 ms^{-1}$ की आरम्भिक चाल से गतिशील 20kg द्रव्यमान के एक पिण्ड पर 50N का स्थाई मंदन बल आरोपित है तो पिण्ड को रुकने में लगे समय की गणना कीजिये।

हल– दिया गया है:– $u = 15\frac{\text{मी.}}{\text{से.}}$, m = 20 किग्रा.

F = – 50 न्यूटन (मंदन बल)

$v = 0\frac{\text{मी.}}{\text{से.}}$, t = ?

$\because$ $F = ma$

$\Rightarrow$ $a = \frac{F}{m} = \frac{-50}{20} = -2.5\ \frac{\text{मी.}}{\text{से.}^2}$

$\because$ $v = u + at$

$\Rightarrow$ $0 = 15 + (-2.5)\times t$

$\Rightarrow$ $t = \frac{15}{2.5} = 6$ सेकण्ड

प्र.7. 100 kg द्रव्यमान की किसी तोप से 0.020kg का गोला दागा जाता है। यदि गोले की नालमुखी चाल $80\ ms^{-1}$ है तो तोप की प्रतिक्षेप चाल क्या होगी।

हल– दिया गया है–तोप का द्रव्यमान $m_g = 100$ किग्रा.

गोले का द्रव्यमान $m_b = 0.020$ किग्रा.

गोले की चाल $v_b = 80$ मी./से.

तोप की प्रतिक्षेप चाल $v_g = ?$

संवेग संरक्षण नियमानुसार

निकाय का प्रारंभिक संवेग= निकाय का अंतिम संवेग

$\Rightarrow$ $0 = m_b v_b + m_g v_g$ [$\because$ निकाय (तोप +गोला) प्रारंभ में विराम में है।]

$\Rightarrow$ $v_g = -\frac{m_b}{m_g} v_b$

$\Rightarrow$ $v_g = -\frac{0.020}{100}\times 80$

$= -0.016$ मी./से.

अतः तोप की प्रतिक्षेप चाल $= 0.016$ मी./से.

प्र.8. यदि 0.1 kg द्रव्यमान के एक कण की गति $y = \left(0.3t + \frac{9.8}{2}t^2\right)$ मीटर से वर्णित है तो उस कण पर लगने वाले बल की गणना कीजिये।

हल– $\because$ कण का विस्थापन $y = 0.3t + \frac{9.8}{2}t^2 = 0.3t + 4.9t^2$

$\therefore$ वेग $V = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0.3t + 4.9t^2) = 0.3(1) + 4.9(2t)$

$v = 0.3 + 9.8\,t$ मी/से.

त्वरण $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.3 + 9.8t) = 0 + 9.8(1)$

$a = 9.8$ मी/से^{2}

$\therefore$ कण पर कार्यरत बल F = ma

F = 0.1 × 9.8 = 0.98 न्यूटन

प्र.9. किसी डोरी के एक सिरे से बँधा 0.25 किग्रा. संहति का कोई पत्थर क्षैतिज तल में 1.5m त्रिज्या के वृत्त पर 40 rev/min की चाल से चक्कर लगाता है। डोरी में तनाव कितना है? यदि डोरी 200N के अधिकतम तनाव को सहन कर सकती है, तो वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को घुमाया जा सकता है।

हल– दिया गया है– m = 0.25 किग्रा.

आवृत्ति $f = 40$ परिक्रमण/मिनट

$= \frac{40}{60}$ परिक्रमण/सेकण्ड

$\because$ कोणीय चाल $\omega = 2\pi f$

$= 2\times 3.14\times\frac{40}{60}$ रेडियन/सेकण्ड

$= 4.19$ रेडियन/सेकण्ड

$\because$ डोरी में तनाव T आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है अतः

$$T = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

$= 0.25\times 1.5\times(4.19)^2$ न्यूटन

$= 6.58 \approx 6.6$ न्यूटन

अब प्रश्नानुसार डोरी 200 न्यूटन का अधिकतम तनाव सहन कर सकती है अतः

$\therefore$ $T_{max} = \frac{m v_{max}^2}{r}$

$\Rightarrow$ $v_{max} = \sqrt{\frac{T_{max} r}{m}} = \sqrt{\frac{200\times 1.5}{0.25}}$

$= 34.64$ मी./से.

प्र.10. 5.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर 8N व 6N के दो लंबवत् बल आरोपित हैं। पिण्ड के त्वरण का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

उत्तर– माना कि $\vec{F_1}$ तथा $\vec{F_2}$ दो परस्पर लम्बवत् बल है।

दिया गया है : $F_1 = 8$ न्यूटन, $F_2 = 6$ न्यूटन

अतः पिण्ड पर कार्यरत परिणामी बल का परिमाण

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

= 10 न्यूटन

त्वरण $a = \frac{F}{m} = \frac{10}{5}$

= 2 मी./से.^{2}

यदि परिणामी बल $\vec{F}$, बल $\vec{F_1}$ के साथ θ कोण बनाता है तब

$$\tan\theta = \frac{F_2}{F_1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\theta = 37°$$

यह परिणामी बल की दिशा है, अतः पिण्ड के त्वरण की दिशा, बल की दिशा ही होगी।