$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\, a^{\frac{2}{3}}}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ પરથી બિંદુ $(a, 0)$ મળે.

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a\,,\,0)} = 0$$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 0$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. વક્ર $y = 3x^4 - 4x$ ને $x = 4$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

2. વક્ર $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ને $x = 10$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

3. વક્ર $y = x^3 - x + 1$ ના જે બિંદુનો x-યામ 2 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

4. વક્ર $y = x^3 - 3x + 2$ ના જે બિંદુનો x-યામ 3 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

5. $x = a\,cos^3\,\theta$, $y = a\,sin^3\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{4}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.

6. $x = 1 - a\,sin\,\theta$, $y = b\,cos^2\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.

7. વક્ર $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ને જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

8. વક્ર $y = (x - 2)^2$ નો એક સ્પર્શક વક્ર પરનાં બિંદુઓ $(2, 0)$ અને $(4, 4)$ ને જોડતી જીવાને સમાંતર હોય, તો તે સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ શોધો.

9. વક્ર $y = x^3 - 11x + 5$ ના કોઈ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x - 11$ હોય, તો વક્ર પરનું તે બિંદુ શોધો.

10. વક્ર $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ ને -1 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

11. વક્ર $y = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

12. વક્ર $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ને 0 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

13. વક્ર $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો

(i) X-અક્ષને સમાંતર હોય, (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

14. નીચે આપેલ વક્રોને દર્શાવેલ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(0, 5)$ બિંદુ આગળ

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(1, 3)$ બિંદુ આગળ

(iii) $y = x^3$ પરના $(1, 1)$ બિંદુ આગળ

(iv) $y = x^2$ પરના $(0, 0)$ બિંદુ આગળ

(v) $x = cos\,t$, $y = sin\,t$ પરના $t = \frac{\pi}{4}$ ને સંગત બિંદુ પર

15. વક્ર $y = x^2 - 2x + 7$ ના (a) રેખા $2x - y + 9 = 0$ ને સમાંતર તથા (b) રેખા $5y - 15x = 13$ ને લંબ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

16. વક્ર $y = 7x^3 + 11$ ના $x = 2$ તથા $x = -2$ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે તેમ સાબિત કરો.

17. વક્ર $y = x^3$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ તે બિંદુના y-યામ જેટલો હોય, તે બિંદુઓ શોધો.

18. વક્ર $y = 4x^3 - 2x^5$ ના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ શોધો.

19. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ નાં જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય, તે બિંદુઓ મેળવો.

20. વક્ર $ay^2 = x^3$ ના (am^2, am^3) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

21. $y = x^3 + 2x + 6$ ના રેખા $x + 14y + 4 = 0$ ને સમાંતર અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો.

22. પરવલય $y^2 = 4ax$ ના $(at^2, 2at)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

23. ***જો બે વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોય, તો તે બે વક્રો લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય.***
જો $8k^2 = 1$ હોય, તો વક્રો $y^2 = x$ તથા $xy = k$ લંબચ્છેદી છે, તેમ સાબિત કરો.

24. અતિવલય $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

25. વક્ર $y = \sqrt{3x-2}$ ના રેખા $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

પ્રશ્નો 26 તથા 27 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

26. વક્ર $y = 2x^2 + 3\sin x$ ને $x = 0$ આગળ દોરેલ અભિલંબનો ઢાળ .... છે.

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

27. વક્ર $y^2 = 4x$ ના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x + 1$ છે.

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

6.5 આસન્ન મૂલ્યો

આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ નિશ્ચિત રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

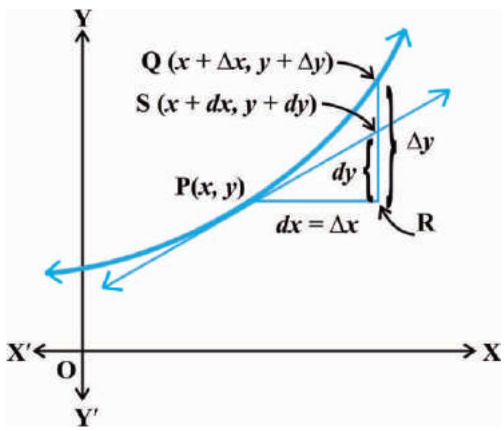
ધારો કે, $f : D \to R$, $D \subset R$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. વળી, $y = f(x)$ છે. ધારો કે x માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર એ Δx છે. x માં થતા સૂક્ષ્મ ફેરફારને અનુરૂપ y માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર Δy વડે દર્શાવાય.

તેને $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય. આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા આપીએ :

(i) dx વડે દર્શાવાતું x નું વિકલ $dx = \Delta x$ થી વ્યાખ્યાયિત થાય.

(ii) y નું વિકલ dy વડે દર્શાવાય છે. તેને

$$dy = f'(x)\, dx \text{ અથવા } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \text{ થી દર્શાવી શકાય.}$$



આકૃતિ 6.8

જો x ની સાથે તુલના કરીએ તો $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો છે તથા dy એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે. તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.

Δx, Δy, dx અને dy ના ભૌમિતિક અર્થઘટન માટે, આકૃતિ 6.8 જુઓ.

☛ નોંધ : આકૃતિ 6.8 તથા ઉપર્યુક્ત ચર્ચાના સંદર્ભમાં આપણે નોંધીએ કે અવલંબી ચલનું વિકલ એ અવલંબી ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય તે આવશ્યક નથી. જ્યારે સ્વતંત્ર ચલનું વિકલ એ ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય છે.

ઉદાહરણ 21 : વિકલના ઉપયોગથી $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = \sqrt{x}$; $x = 36$ તથા $\Delta x = 0.6$.

$$\therefore \quad \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$= \sqrt{36.6} - \sqrt{36}$$

$$= \sqrt{36.6} - 6$$

અથવા $\sqrt{36.6} = \Delta y + 6$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે અને $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) \qquad (y = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6)$$

$$= 0.05$$

આથી, $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $6 + 0.05 = 6.05$ છે.

ઉદાહરણ 22 : વિકલના ઉપયોગથી $(25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = x^{\frac{1}{3}}$; $x = 27$ તથા $\Delta x = -2$

$$\therefore \quad \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - (x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

$$\therefore \quad (25)^{\frac{1}{3}} = \Delta y + 3$$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે. $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad \left(y = x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2)$$

$$= \frac{-2}{27} = -0.074$$

$\therefore \quad (25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $3 + (-0.074) = 2.926$ છે.

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ હોય, તો $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = 3$ અને $\Delta x = 0.02$

$$\therefore \quad f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

વળી, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\therefore \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

$\approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ **$(dx = \Delta x)$**

$\therefore \quad f(3.02) \approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\,\Delta x$

$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)\,(0.02)$ **$(x = 3, \Delta x = 0.02)$**

$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\,(0.02)$

$= 45 + 0.46$

$= 45.46$

આથી, $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય 45.46 છે.

ઉદાહરણ 24 : જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર હોય તથા તેની બાજુની લંબાઈમાં 2 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $V = x^3$

$$\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \Delta x$$

$= (3x^2) \cdot \Delta x$

$= (3x^2)\,(0.02x)$ **(x ના 2 % $= 0.02x$)**

$= 0.06\,x^3$ મી^{3}

$\therefore$ સમઘનના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર $0.06\,x^3$ મી^{3} એટલે કે 6 %.

ઉદાહરણ 25 : ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 સેમીની ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 સેમી માપવામાં આવી હોય, તો ગોલકના ઘનફળના માપનમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ પ્રવેશે તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ગોલકની ત્રિજ્યા r તથા તેની ત્રિજ્યાના માપનમાં રહી ગયેલ ત્રુટિ Δr છે, જ્યારે $r = 9$ સેમી ત્યારે $\Delta r = 0.03$ સેમી છે.

હવે, ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

આથી, $\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \Delta r$

$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$

$= 4\pi(9)^2\,(0.03)$

$= 9.72\,\pi$ સેમી^{3}

આથી, ગોલકના ઘનફળના માપમાં પ્રવેશતી ત્રુટિ $9.72\,\pi$ સેમી^{3} છે.

સ્વાધ્યાય 6.4

1. વિકલના ઉપયોગથી, નીચેનાં આસન્ન મૂલ્યો 3 દશાંશસ્થળ સુધી મેળવો :

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

(iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

(vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

(x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

(xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. જો $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ હોય, તો $f(2.01)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

3. જો $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ હોય, તો $f(5.001)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

4. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

5. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો ઘટાડો થતો હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં આશરે કેટલો ઘટાડો થાય તે શોધો.

6. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.02 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 7 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના ઘનફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

7. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 8 તથા 9 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. જો $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ હોય, તો $f(3.02)$નું આસન્ન મૂલ્ય .... હોય.

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો તેની બાજુની લંબાઈમાં 3 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય .... છે.

(A) $0.06\ x^3$ (મીટર)^3 (B) $0.6\ x^3$ (મીટર)^3 (C) $0.09\ x^3$ (મીટર)^3 (D) $0.9\ x^3$ (મીટર)^3

6.6 મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો

આ વિભાગમાં, આપણે ભિન્ન વિધેયોનાં ઈષ્ટતમ મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું. હકીકતમાં, આપણે વિધેયના આલેખ પર ***નિર્ણાયક બિંદુઓ*** શોધીશું. આથી, વિધેયનો આલેખ તે નિર્ણાયક બિંદુઓ (કે સંખ્યા) આગળ ***સ્થાનીય મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) (local maximum or minimum)*** સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે. આવાં બિંદુઓ (અથવા સંખ્યા)નું જ્ઞાન આપેલ વિધેયનો આલેખ દોરવા માટે જરૂરી છે. વધુમાં, આપણે આપેલ વિધેયના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ માટે ઉપયોગી હોય તેવા ***વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) (global or absolute) મહત્તમ*** અને ***વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ*** મૂલ્યો શોધીશું.

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, રોજિંદા જીવનમાં ઉદ્ભવતી સમસ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈએ :

(i) જમીનમાં પ્રતિ એકર થતા નારંગીના વૃક્ષની સંખ્યા x હોય અને નારંગીના વૃક્ષના વેચાણથી થતો નફો $P(x) = ax + bx^2$; (a, b અચળ) હોય, તો મહત્તમ નફો મેળવવા માટે જમીનમાં પ્રતિ એકર નારંગીના કેટલાં વૃક્ષ વાવવા જોઈએ ?

(ii) 60 મીટર ઊંચા મકાનની છત પરથી એક દડાને હવામાં ફેંકવામાં આવે છે. તે $f(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ ના માર્ગે મુસાફરી કરે છે. અહીં, x એ દડાનું મકાનથી સમક્ષિતિજ અંતર તથા $h(x)$ એ દડાની ઊંચાઈ હોય, તો દડો મહત્તમ કેટલી ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે ?

(iii) દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $f(x) = x^2 + 7$ ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ (1, 2) આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને ગોળીથી વીંધવા ઇચ્છે છે, તો આ ન્યૂનતમ અંતર શું હોઈ શકે ?

ઉપર્યુક્ત તમામ કૂટપ્રશ્નોમાં કંઈક સામ્યતા રહેલી છે, એટલે કે આપણે આપેલ વિધેયનાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા ઇચ્છીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, આવી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે, સૌપ્રથમ આપણે વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો, સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં નિર્ણાયક બિંદુઓ અને આવાં બિંદુઓ નક્કી કરવા માટેની કસોટીઓ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વ્યાખ્યા 3 : ધારો કે f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(a) કોઈ સંખ્યા $c \in I$ એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in I$ માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય, તો વિધેય f એ I માં મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

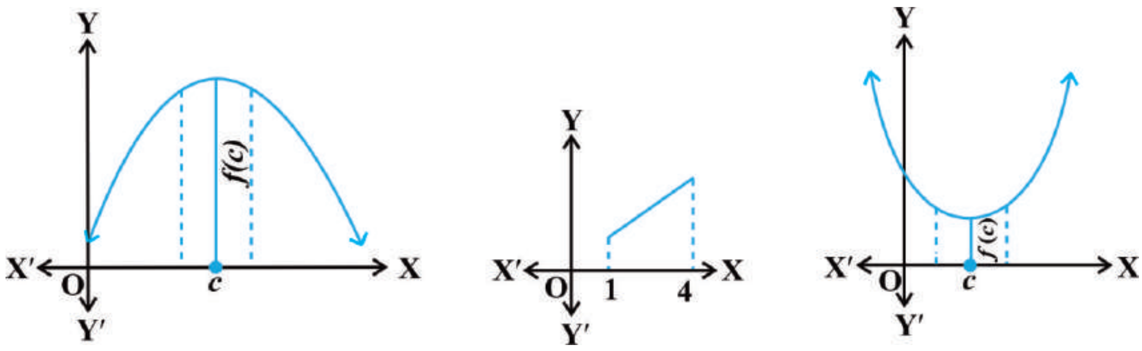
(b) કોઈ સંખ્યા c એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in I$ માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય તો, વિધેય f એ I માં ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

(c) કોઈ સંખ્યા $c \in I$ એવી મળે કે જેથી $f(c)$ એ વિધેય f ની I માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત હોય તો વિધેય f એ I માં આત્યંતિક મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f નું I માં આત્યંતિક મૂલ્ય કહે છે તથા સંખ્યા c ને આત્યંતિક સંખ્યા કહે છે.

નોંધ : અમુક વિશિષ્ટ વિધેયોના આલેખો આકૃતિ 6.9 (i), (ii) તથા (iii) માં દર્શાવેલ છે. તે આપણને વિધેય કયા બિંદુ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય દર્શાવે છે તે શોધવા માટે મદદ કરે છે. હકીકતે, આલેખ દ્વારા, આપણે વિધેય વિકલનીય ન હોય તેમ છતાં પણ વિધેયના તે બિંદુ આગળ મહત્તમ/ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી શકીએ છીએ. (ઉદાહરણ 27 જુઓ.)



(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 6.9

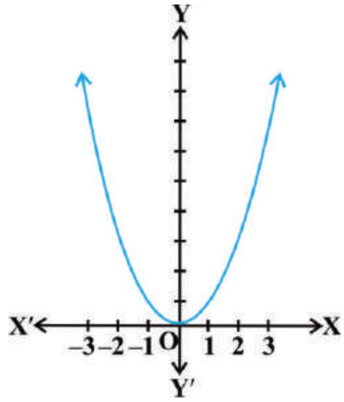
ઉદાહરણ 26 : વિધેય $f(x) = x^2$; $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.10) પરથી,

જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

વળી, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = 0$ આગળ મળે છે. વધુમાં, વિધેયના આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે, f ને મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



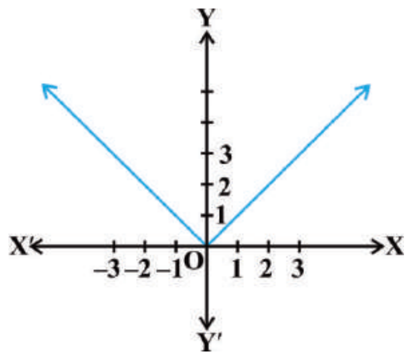
આકૃતિ 6.10

☛ નોંધ : જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો f ની $x = -2$ આગળ મહત્તમ કિંમત $(-2)^2 = 4$ મળે.

ઉદાહરણ 27 : જો વિધેય $f(x) = |x|$, $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યોનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.11) પરથી નોંધીએ કે, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$ અને જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને $x = 0$ આગળ આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે. વળી, વિધેય f ના આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f ને R માં મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



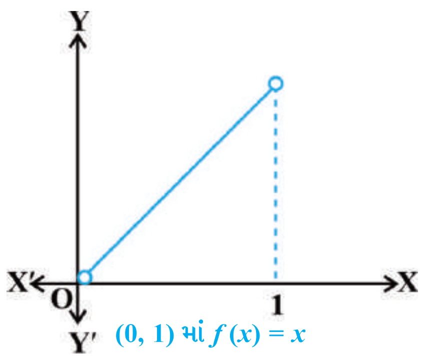
આકૃતિ 6.11

☛ નોંધ : (1) જો આપણે વિધેયનો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો વિધેય f નું મહત્તમ મૂલ્ય $|-2| = 2$ મળે.

(2) ઉદાહરણ 27 માં આપણે નોંધીશું કે વિધેય f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 28 : જો વિધેય $f(x) = x$, $x \in (0, 1)$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય f એ અંતરાલ $(0, 1)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. વિધેય f ના આલેખ (આકૃતિ 6.12) પરથી, જોઈ શકાય છે કે, f ને શૂન્યની જમણી તરફ, 0 ની નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય તેમ લાગે છે તથા 1ની ડાબી તરફ, 1ની સૌથી નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ મહત્તમ મૂલ્ય હોય તેવું લાગે છે. શું આવાં બિંદુઓ ઉપલબ્ધ છે ? ના, તે નથી. આવાં બિંદુઓ દર્શાવવાં શક્ય નથી. હકીકતમાં, જો x_0 એ શૂન્યની નજીક હોય, તો આપણે પ્રત્યેક $x_0 \in (0, 1)$ માટે, $\frac{x_0}{2} < x_0$ મેળવી શકીશું. વળી, જો x_1 એ 1 ની નજીક હોય, તો પ્રત્યેક $x_1 \in (0, 1)$ માટે, આપણે $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ મેળવી શકીશું.



આકૃતિ 6.12

આથી, આપેલ વિધેય f ને અંતરાલ $(0, 1)$ માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી.

નોંધ : વાચકે ઉદાહરણ 28માં નોંધ્યું હશે કે, જો આપણે વિધેય f ના પ્રદેશમાં સંખ્યાઓ 0 અને 1નો સમાવેશ કરીએ, એટલે કે જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ $[0, 1]$ સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય fને $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય તથા $x = 1$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે. હકીકતમાં, આપણી પાસે નીચેનું પરિણામ છે વર્તમાન પાઠ્યપુસ્તકમાં આ પરિણામની સાબિતીને અવકાશ નથી.

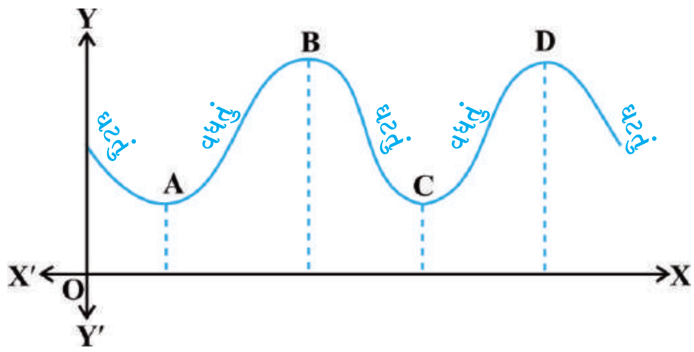
પ્રત્યેક વધતું (અથવા ઘટતું) વિધેય તે જેમાં વ્યાખ્યાયિત છે તે પ્રદેશનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) મૂલ્ય ધારણ કરે. (પ્રદેશ કોઈક સંવૃત અંતરાલ છે.)

વ્યાપક પરિણામ : જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો તેને તેના પ્રદેશમાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

☛ નોંધ : અંતરાલ I માં વ્યાખ્યાયિત એકસૂત્રી વિધેય f એટલે વિધેય f એ અંતરાલ I માં વધતું વિધેય છે અથવા ઘટતું વિધેય છે.

હવે, આ વિભાગમાં, $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંગેની ચર્ચા કરીશું.

ચાલો, આપણે આકૃતિ 6.13 માં દર્શાવેલ વિધેયના આલેખને ચકાસીએ. જુઓ કે, આલેખ પરનાં બિંદુઓ A, B, C અને D આગળ વિધેયનો પ્રકાર ઘટતાંથી વધતાં અથવા વધતાંથી ઘટતાં એ પ્રમાણે બદલાય છે. આ બિંદુઓને આપેલ વિધેયનાં **નિર્ણાયક બિંદુઓ** કહે છે. વધુમાં જુઓ કે, આ નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ આલેખ નાની **ટેકરી (શૃંગ)** અથવા **નાની ખીણ (ગર્ત)** સ્વરૂપે છે. ટૂંકમાં, વિધેયને બિંદુઓ A અને C આગળ (અનુક્રમે તેમની ખીણના તળિયે) કોઈક સામીપ્યમાં (અંતરાલમાં) ન્યૂનતમ કિંમત છે. આ જ રીતે, વિધેયને બિંદુઓ B અને D આગળ (અનુક્રમે ટેકરીના મથાળે) કોઈક સામીપ્યમાં મહત્તમ કિંમત છે. આ કારણે, બિંદુઓ A અને C ને વિધેયનાં સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત ન્યૂનતમ મૂલ્ય) તથા બિંદુઓ B અને D ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત મહત્તમ મૂલ્ય) કહે છે. વિધેયનાં સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યને અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ કહીશું.



આકૃતિ 6.13

હવે, આપણે નીચે પ્રમાણેની વ્યાખ્યા વિધિવત્ રીતે આપીએ.

વ્યાખ્યા 4 : ધારો કે સંખ્યા c વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલ છે.

(a) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી, પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

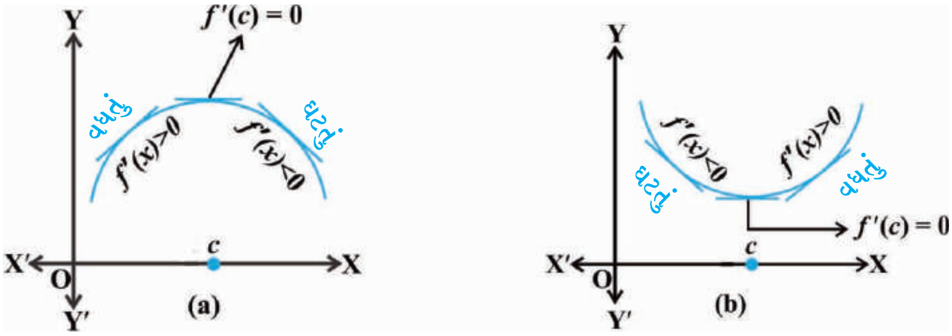
$f(c)$ને f ની સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત કહે છે.

(b) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ ને f ની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે.

નોંધ : $(c - h, c + h)$ વિધેયના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય, તે જરૂરી છે.

ભૌમિતિક રીતે, ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા સૂચવે છે કે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(a) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હશે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f અંતરાલ $(c - h, c)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$).

તે સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.



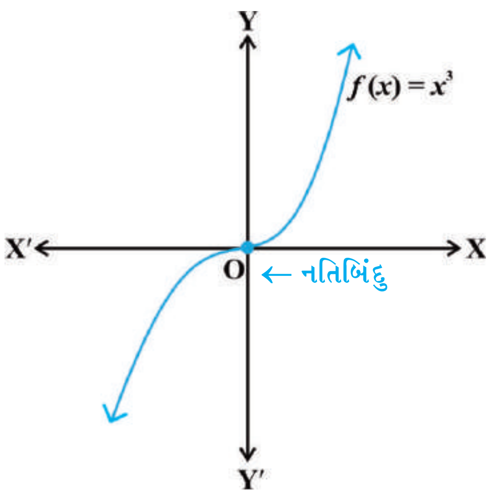
આકૃતિ 6.14

આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હોય. અહીં વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$). આ પણ સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા આપણને નીચેના પ્રમેય તરફ દોરી જાય છે. (આ પ્રમેયને સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું.)

પ્રમેય 2 : ***ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે તથા $c \in I$. જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય નથી.***

નોંધ : ઉપર્યુક્ત પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય હોય તે જરૂરી નથી. એટલે કે કોઈ બિંદુ આગળ વિકલિત શૂન્ય થઈ જાય તો તે બિંદુ આગળ વિધેયનું સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, જો $f(x) = x^3$ તો $f'(x) = 3x^2$ અને આથી, $f'(0) = 0$. પરંતુ વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)



આકૃતિ 6.15

> **☛ નોંધ :** કોઈ પ્રદેશ D_f પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $c \in D_f$ હોય તો, $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને f ની નિર્ણાયક સંખ્યા કહે છે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત હોય અને $f'(c) = 0$ હોય, તો કોઈક $h > 0$ માટે વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે, આપણે માત્ર પ્રથમ કક્ષાના વિકલિતોના ઉપયોગથી વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (કે x ની કિંમતો) શોધવા માટેના કાર્યનિયમ આપીશું.

પ્રમેય 3 : (પ્રથમ વિકલિત કસોટી) : ધારો કે f એ $\mathrm{I} = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in \mathrm{I}$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે તથા f એ c આગળ સતત છે.

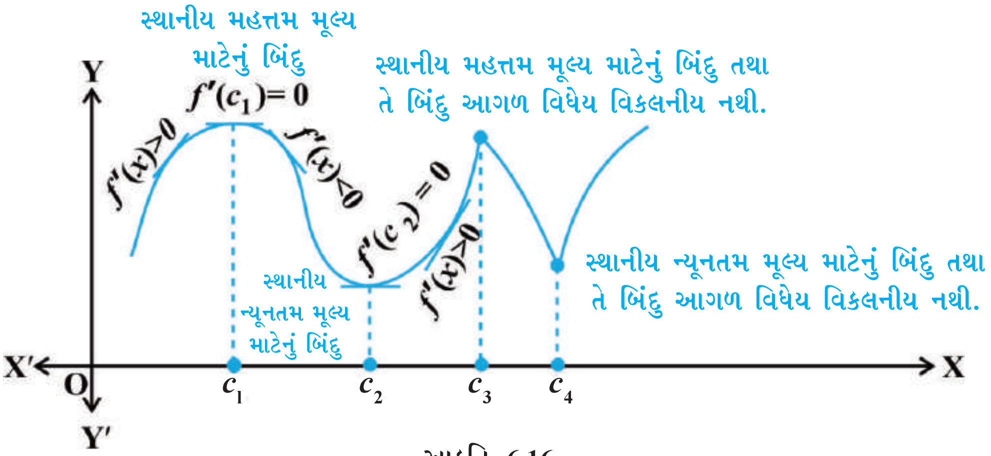
(i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ધનમાંથી ઋણ થાય, એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset \mathrm{I}$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ઋણમાંથી ધન બને, એટલે કે, જો કોઈ ધન સંખ્યા h માટે $(c - h, c + h) \subset \mathrm{I}$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેનાં મૂલ્યો (ધનમાંથી ઋણ કે ઋણમાંથી ધન) ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ (Point of Inflection) કહે છે. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)

> **☛ નોંધ :** જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

આકૃતિઓ 6.15 અને 6.16, પ્રમેય 3ની ભૌમિતિક સમજ આપે છે.



આકૃતિ 6.16

ઉદાહરણ 29 : વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 3$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -1$ અથવા $x = 1$ મળે.

આથી, $x = \pm 1$ એ વિધેય fનાં સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ છે. ચાલો, સૌપ્રથમ આપણે $x = 1$ આગળ ચકાસણી કરીએ.

નોંધીએ કે, જેમ $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to 1_-$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f એ $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે અને વિધેય f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(1) = 1$ છે. હવે $x = -1$ના કિસ્સામાં, નોંધો કે, જેમ $x \to -1_-$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to -1_+$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા વિધેય f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(-1) = 5$ છે.

x ની કિંમતો		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ની નિશાની
1ની નજીક	1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, 1.1)	> 0
	1_- (ઉદાહરણ તરીકે, 0.9)	< 0
–1ની નજીક	-1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, –0.9)	< 0
	-1_- (ઉદાહરણ તરીકે, –1.1)	> 0

ઉદાહરણ 30 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$
$$= 6(x-1)^2$$
$$\therefore \quad x = 1 \text{ આગળ } f'(x) = 0$$

આથી, માત્ર $x = 1$ એ જ વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે. હવે, આપણે આ સંખ્યા માટે વિધેય f ના સ્થાનીય મહત્તમ અને/અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે તપાસ કરીએ. નોંધો કે, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે, $f'(x) \geq 0$ અને વિશેષમાં, જેમ $x \to 1_-$ તથા $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેયને $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 30 માં જોઈ ગયાં કે, $f'(x)$ એ R માં તેની નિશાની બદલતું નથી. તેમજ વિધેય f ના આલેખને વળાંક (સંક્રાંતિ બિંદુ) નથી. આથી, વિધેય x ની કોઈ કિંમત આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

હવે, આપણે આપેલ વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ચકાસવા માટે બીજી કસોટી આપીશું. પ્રથમ વિકલિત કસોટી કરતાં આ કસોટીનો વધુ સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય છે.

પ્રમેય 4 : *(દ્વિતીય વિકલિત કસોટી) : ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in$ I. ધારો કે $f''(c)$નું અસ્તિત્વ છે.*

(i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = f'(c) = 0$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

(iii) ના જેવા સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને $x = c$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ, સ્થાનીય ન્યૂનતમ કે નતિબિંદુ છે તે નક્કી કરીશું.

> ☛ **નોંધ :** $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે એનો અર્થ એ થયો કે, વિધેય f નું $x = c$ આગળ દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 31 : વિધેય $f(x) = 3 + |x|$, $x \in R$ નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : નોંધીશું કે આપેલ વિધેય $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી. આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. ચાલો, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી અજમાવીએ. નોંધીએ કે fની નિર્ણાયક સંખ્યા 0 છે.

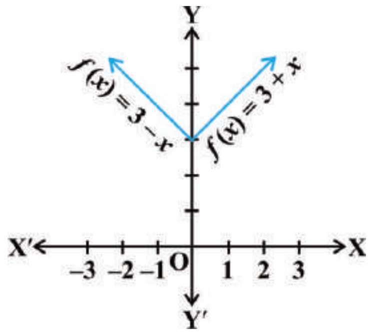
હવે, $x < 0$ માટે, $f(x) = 3 - x$.

તેથી, $f'(x) = -1 < 0$ મળે.

વળી, $x > 0$ માટે, $f(x) = 3 + x$

તેથી, $f'(x) = 1 > 0$

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ છે.



આકૃતિ 6.17

નોંધ : $|x| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 3$. આથી, $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 32 : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$

$$\therefore \quad f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x + 2)(x - 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 0$, $x = 1$ અને $x = -2$ મળે.

વળી, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$

$$= 12(3x^2 + 2x - 1)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(0) = 12$ છે. વળી, $x = 1$ તેમજ $x = -2$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો છે. તે અનુક્રમે $f(1) = 7$ અને $f(-2) = -20$ છે.

ઉદાહરણ 33 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

$$= 6(x - 1)^2$$

અથવા $f''(x) = 12(x - 1)$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ મળે. પણ $f''(1) = 0$

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. આથી, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું.

અગાઉ ઉદાહરણ 30 માં, પ્રથમ વિકલિત કસોટીના ઉપયોગથી જોઈ ગયાં છીએ કે, $x = 1$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 34 : જેમનો સરવાળો 15 હોય તથા જેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ પૈકીની એક સંખ્યા x છે. આથી, બીજી સંખ્યા $(15 - x)$ થાય. ધારો કે $S(x)$ એ આ બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો દર્શાવે છે. આથી,

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 30x + 225$$
$$\therefore \quad S'(x) = 4x - 30$$
$$\therefore \quad S''(x) = 4$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{15}{2}$ મળે. વળી, $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = \frac{15}{2}$ આગળ S સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે. આથી, જ્યારે સંખ્યાઓ $\frac{15}{2}$ તથા $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ હોય, ત્યારે તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

નોંધ : ઉદાહરણ 34ની જેમ સાબિત કરી શકાય કે, બે ધન સંખ્યાઓનો સરવાળો k હોય તથા તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય તો તે સંખ્યાઓ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ છે.

જો $x + y = k$ તો $S(x) = x^2 + (k - x)^2 = \frac{(2x-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}$ ન્યૂનતમ થવા માટે $x = \frac{k}{2}$.

ઉદાહરણ 35 : $0 \le c \le 5$ હોય, તો પરવલય $y = x^2$થી બિંદુ $(0, c)$ નું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y = x^2$ પરનું કોઈ બિંદુ (h, k) છે.

ધારો કે બિંદુઓ (h, k) તથા $(0, c)$ વચ્ચેનું અંતર D છે.

$$\therefore \quad D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2}$$
$$= \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad ...(1)$$

વળી, બિંદુ (h, k), પરવલય $y = x^2$ પર હોવાથી, $k = h^2$ મળે.

આથી, (1) પરથી,

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$
$$\therefore \quad D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{2\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

$D'(k) = 0$ લેતાં, $k = \frac{2c-1}{2}$ મળે.

જુઓ, કે જ્યારે $k < \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $1 + 2(k - c) < 0$. એટલે કે, $D'(k) < 0$.

પણ જ્યારે $k > \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $D'(k) > 0$.

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, $k = \frac{2c-1}{2}$ માટે $D(k)$ ન્યૂનતમ છે.

આથી, માંગેલ ન્યૂનતમ અંતર $D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$

☛ **નોંધ :** વાચકે નોંધ્યું હશે કે, ઉદાહરણ 35 માં આપણે અગાઉની જેમ દ્વિતીય વિકલિત કસોટીને બદલે પ્રથમ વિકલિત કસોટીનો ઉપયોગ કરેલ છે. અહીં તે ટૂંકી અને સરળ છે.

ઉદાહરણ 36 : ધારો કે બિંદુઓ A તથા B આગળ અનુક્રમે AP તથા BQ એમ બે શિરોલંબ સ્તંભ છે. જો AP = 16 મીટર, BQ = 22 મીટર અને AB = 20 મીટર હોય, તો $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ થાય તે શરત અનુસાર મળતા $\overline{AB}$ પરના બિંદુ R નું બિંદુ A થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે R એ AB પર માંગ્યા પ્રમાણેનું બિંદુ છે.

AR = x મીટર

$\therefore$ RB = $(20 - x)$ મીટર (AB = 20 મીટર)

આકૃતિ 6.18 પરથી,

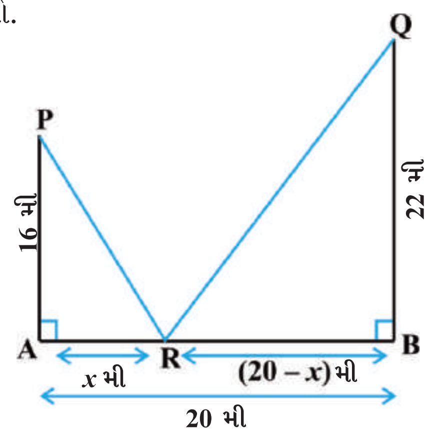
$RP^2 = AR^2 + AP^2$

અને $RQ^2 = RB^2 + BQ^2$

$\therefore \quad RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$

$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$

$= 2x^2 - 40x + 1140$



આકૃતિ 6.18

ધારો કે $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$

$\therefore \quad S'(x) = 4x - 40$

હવે $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = 10$ મળે. તેમજ $S''(x) = 4 > 0, \forall x$

અને તેથી $S''(10) > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = 10$ આગળ S ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. આથી, $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ બને તે માટે $\overline{AB}$ પરના બિંદુ Rનું બિંદુ Aથી અંતર AR = x = 10 મીટર.

ઉદાહરણ 37 : જો સમલંબ ચતુષ્કોણની આધાર સિવાયની ત્રણેય બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 10 સેમી હોય, તો તે સમલંબ ચતુષ્કોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ સમલંબ ચતુષ્કોણ આકૃતિ 6.19 માં દર્શાવેલ છે.

$\overline{AB}$ પર લંબ $\overline{DP}$ તથા $\overline{CQ}$ દોરો.

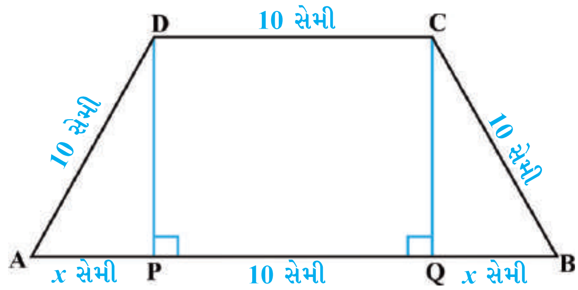
ધારો કે AP = x સેમી

અહીં, $\Delta APD \cong \Delta BQC$

આથી, QB = x સેમી

પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી,

$$DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$$



આકૃતિ 6.19

ધારો કે, સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$\therefore \quad S \equiv S(x) = \frac{1}{2}$(સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો)(ઊંચાઈ)

$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$

$= (x + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$

$\therefore \quad S'(x) = (x + 10)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}} + (\sqrt{100-x^2})$

$= \dfrac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100-x^2}}$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $2x^2 + 10x - 100 = 0$ એટલે કે, $x = 5$ તથા $x = -10$ મળે.

પરંતુ x એ અંતર દર્શાવે છે. તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, $x = 5$.

નોંધ : $S''(5) = \dfrac{-4x-10}{\sqrt{100-x^2}}$

$= \dfrac{-30}{5\sqrt{3}} < 0$

કારણ કે ગુણાકારના નિયમથી વિકલન કરતાં બીજું પદ તો $x = 5$ માટે શૂન્ય જ છે.

હવે, $S''(x) = \dfrac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$

$= \dfrac{2x^3 - 300x - 1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (સાદું રૂપ આપતાં)

અથવા $S''(5) = \dfrac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-2250}{75\sqrt{75}} = \dfrac{-30}{\sqrt{75}} < 0$

આથી, $x = 5$ આગળ સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

$\therefore$ મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $S(5) = (5 + 10)\sqrt{100-(5)^2}$

$= 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 38 : જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા આપેલ શંકુને અંતર્ગત લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ આપેલ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $OC = r$ = શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને $OA = h$ = શંકુની ઊંચાઈ

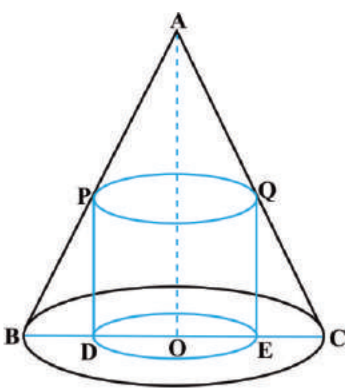
ધારો કે આપેલ શંકુને અંતર્ગત નળાકારની ત્રિજ્યા $OE = x$ (આકૃતિ 6.20)

નળાકારની ઊંચાઈ = QE

$\therefore \quad \dfrac{QE}{OA} = \dfrac{EC}{OC}$ $(\Delta QEC \sim \Delta AOC)$

$\therefore \quad \dfrac{QE}{h} = \dfrac{r-x}{r}$

$\therefore \quad QE = \dfrac{h(r-x)}{r}$



આકૃતિ 6.20

ધારો કે નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$\therefore \quad S \equiv S(x) = \dfrac{2\pi x h(r-x)}{r} = \dfrac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$

$\therefore \quad \begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r - 2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{r}{2}$ મળે. વળી, પ્રત્યેક x માટે, $S''(x) < 0$ અને તેથી $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$.

આથી, $x = \frac{r}{2}$ આગળ S મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે.

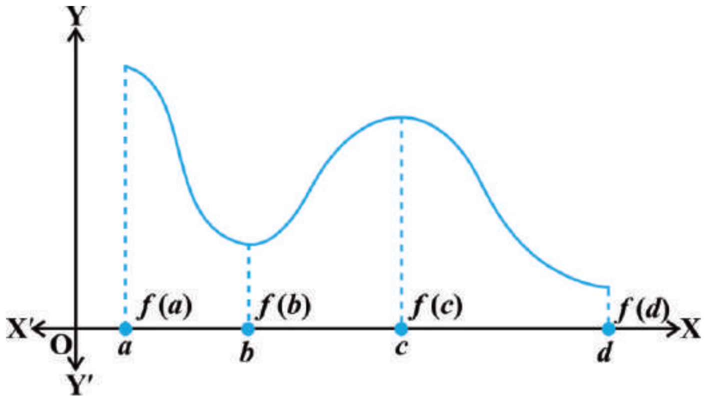
આથી, આપેલ શંકુને અંતર્ગત જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે.

6.6.1 સંવૃત અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં આત્યંતિક મૂલ્યો

ધારો કે $f(x) = x + 2$, $x \in (0, 1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

જુઓ કે, વિધેય f એ $(0, 1)$ પર સતત છે અને તેને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. વધુમાં, આપણે નોંધીશું કે વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય પણ નથી.

તેમ છતાં પણ, જો વિધેયનો પ્રદેશ $[0, 1]$ સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો તો ન જ મળે. પરંતુ તેને મહત્તમ મૂલ્ય $f(1) = 3$ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 2$ મળે. વિધેય f ની $x = 1$ આગળની મહત્તમ કિંમત 3 ને અંતરાલ $[0, 1]$ પર વિધેય f નું ***નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય) (Absolute or Global maximum value)*** કહે છે. આ જ રીતે, વિધેય f ની $x = 0$ આગળની ન્યૂનતમ કિંમત 2 ને વિધેય f નું અંતરાલ $[0, 1]$ પરનું ***નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય) (Absolute or Global minimum value)*** કહે છે.



આકૃતિ 6.21

આકૃતિ 6.21માં સંવૃત અંતરાલ $[a, d]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેયનો આલેખ આપેલ છે. નોંધીશું કે, વિધેય f ને $x = b$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(b)$ છે. વળી, $x = c$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

વળી, આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, વિધેય f ને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય $f(a)$ તથા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(d)$ છે. વધુમાં, નોંધીએ કે વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય એ f ના સ્થાનીય મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય કરતાં જુદું પડી શકે છે.

હવે, આપણે સંવૃત અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયના વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યોને સંબંધિત નીચેના બે પ્રમેયો (સાબિતી વગર) સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 5 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર સતત વિધેય છે. વિધેય f એ ઓછામાં ઓછી કોઈ એક સંખ્યા $c \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા કોઈ એક સંખ્યા $d \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે.*

પ્રમેય 6 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર વિકલનીય છે તથા કોઈ એક સંખ્યા $c \in (a, b)$ માટે,*

(i) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

(ii) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત પ્રમેયોના સંદર્ભમાં, સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને/અથવા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટે આપણે નીચેનો કાર્યનિયમ ધ્યાનમાં લઈશું.

કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : *આપેલ સંવૃત અંતરાલમાં વિધેય f ની તમામ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ શોધો. આપણે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા વિધેય f એ x આગળ વિકલનીય ન હોય તેવી x ની કિંમતો શોધીશું.*

સોપાન 2 : *અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ વિધેય f ની કિંમત શોધો. નિર્ણાયક સંખ્યાઓ આગળ શક્ય હોય, તો સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તેવી સંખ્યાઓ પસંદ કરો.*

સોપાન 3 : *આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમત શોધો.*

સોપાન 4 : *વિધેય f ની સોપાન 3માં મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.*

ઉદાહરણ 39 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, $x \in [1, 5]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$
$$= 6(x - 2)(x - 3)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ અથવા $x = 3$ મળે.

$$f''(x) = 12x - 30$$

હવે, આપણે x ની આ કિંમતો આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. તદુપરાંત અંતરાલ $[1, 5]$નાં અંત્યબિંદુઓ આગળ પણ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. એટલે કે $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ તથા $x = 5$ આગળ વિધેયનાં મૂલ્યો મેળવીશું.

આથી, $f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) + 1 = 24$

$$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) + 1 = 56$$

આથી, આપણે કહી શકીએ વિધેય f ને $x \in [1, 5]$ માં $x = 5$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 56 છે અને $x = 1$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય 24 છે.

નોંધ : $f''(2) = -6$, $f''(3) = 6$ આથી, $f(2)$, $f(3)$ અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે.

ઉદાહરણ 40 : વિધેય $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{1}{8}$ મળે. વધુમાં, $x = 0$, આગળ $f'(x)$ વ્યાખ્યાયિત નથી. આથી, $x = 0$ અને $x = \frac{1}{8}$ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ/બિંદુઓ છે. હવે, આ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ તથા અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીએ.

$$\therefore\ f(-1) = 12(-1)^{\frac{4}{3}} - 6(-1)^{\frac{1}{3}} = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4} \text{ તથા}$$

$$f(1) = 12(1)^{\frac{4}{3}} - 6(1)^{\frac{1}{3}} = 6$$

આથી, આપણે કહી શકીએ કે, વિધેય f ને $x = -1$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 18 તથા $x = \frac{1}{8}$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $\frac{-9}{4}$ મળે છે.

નોંધ : ખરેખર તો $x^{\frac{p}{q}}$ વ્યાખ્યાયિત થવા માટે $x > 0$ જરૂરી છે. $(-1)^{\frac{4}{3}}$ ને (-1) ના 4 ઘાતના ઘનમૂળ તરીકે મૂલવવા જોઈએ. તે જ રીતે $(-1)^{\frac{1}{3}}$ એ (-1) નું ઘનમૂળ છે.

ઉદાહરણ 41 : $x \geq 0$ માટે દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $y = x^2 + 7$ ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ (3, 7) આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને નિશાન તાકી નીચે પાડવા ઇચ્છે છે, તો તેમની વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે, હેલિકૉપ્ટરનું સ્થાન $(x, x^2 + 7)$ બિંદુએ છે. આથી, (3, 7) આગળ ઊભેલ સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$ એટલે કે, $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ છે.

ધારો કે, $f(x) = (x-3)^2 + x^4$

$$\therefore\ f'(x) = 2(x-3) + 4x^3$$
$$= 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $2x^2 + 2x + 3 = 0$ મળે.

પરંતુ, $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ નથી. જેના માટે $f'(x) = 0$ હોય, તેવા ગણમાં ઉમેરવા માટે અંતરાલનું કોઈ અંત્યબિંદુ છે જ નહિ. એટલે કે, માત્ર એક જ નિર્ણાયક સંખ્યા $x = 1$ મળે. આ બિંદુ આગળ વિધેય f નું મૂલ્ય $f(1) = (1-3)^2 + (1)^4 = 5$ મળે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$.

નોંધીએ કે, $\sqrt{5}$ એ મહત્તમ મૂલ્ય કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોઈ શકે.

વળી, $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$

આ દર્શાવે છે કે, $\sqrt{5}$ એ $\sqrt{f(x)}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત છે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર $\sqrt{5}$ છે.

નોંધ : $f''(x) = 12x^2 + 2$

$$\therefore\ f''(1) = 14 > 0$$

$$\therefore\ \sqrt{f(1)} = \sqrt{5} \text{ ન્યૂનતમ છે.}$$

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x-1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. નીચેનાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = sin\,(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\,sin\ 4x + 3\,|$

(v) $h(x) = x + 1,\ x \in (-1, 1)$

3. નીચે આપેલાં વિધેયોને સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = sin\,x + cos\ x;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (iv) $f(x) = sin\ x - cos\ x;\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};\ x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x},\ 0 < x < 1$

4. સાબિત કરો કે નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી :

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. આપેલ અંતરાલમાં નીચેનાં વિધેયોનાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો :

(i) $f(x) = x^3,\ x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = sin\ x + cos\ x,\ x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. જો કંપનીએ પ્રાપ્ત કરેલ નફાનું વિધેય, $P(x) = 41 - 72x - 18\,x^2$ હોય, તો કંપનીને પ્રાપ્ત થતો મહત્તમ નફો શોધો.

7. વિધેય $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25,\ x \in [0, 3]$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

8. વિધેય $f(x) = sin\ 2x,\ x \in [0, 2\pi]$ એ x ની કઈ કિંમતો આગળ મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરશે ?

9. $f(x) = sin\ x + cos\ x$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

10. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 24x + 107,\ x \in [1, 3]$ માટે, f નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો. આ જ વિધેય માટે, $x \in [-3, -1]$ હોય, તો f નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો.

11. જો વિધેય $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9,\ x \in [0, 2]$ એ $x = 1$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે છે તેમ આપેલ હોય, તો a ની કિંમત શોધો.

12. વિધેય $f(x) = x + sin\ 2x,\ x \in [0, 2\pi]$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

13. જેમનો સરવાળો 24 હોય અને જેમનો ગુણાકાર મહત્તમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

14. $x + y = 60$ થાય તથા xy^3 મહત્તમ થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો.

15. જેમનો સરવાળો 35 થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો જેથી ગુણાકાર x^2y^5 મહત્તમ બને.

16. જેમનો સરવાળો 16 હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો જેથી તેમના ઘનનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

17. જેમની બાજુનું માપ 18 સેમી હોય તેવા પતરાના ચોરસ ટુકડાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને અને બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય તે માટે કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ શોધો.

18. 45 સેમી × 24 સેમી લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને તથા બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય, તે માટે પતરામાંથી કાપવામાં આવતા ચોરસની લંબાઈ શોધો.

19. સાબિત કરો કે નિયત વર્તુળમાં અંતર્ગત તમામ લંબચોરસોમાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે.

20. લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ અચળ હોય, તો નળાકારના આધારનો વ્યાસ એ તેની ઊંચાઈ જેટલો હોય ત્યારે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ છે તેમ સાબિત કરો.

21. આપેલ તમામ બંધ (લંબવૃત્તીય) નળાકાર કેનમાંથી પ્રત્યેક કેનનું કદ 100 સેમી^{3} હોય તો, તે કેનનું પૃષ્ઠફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે તેનાં પરિમાણ શોધો.

22. 28 મીટર લાંબા વાયરને કાપીને બે ટુકડા બનાવવામાં આવે છે. તેના એક ટુકડામાંથી ચોરસ અને બીજા ટુકડામાંથી વર્તુળ બનાવવામાં આવે છે. તેમાંથી એવી રચના બને કે જ્યારે બંનેનું કુલ ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે વાયરના બંને ટુકડાની લંબાઈ શોધો.

23. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનું ઘનફળ ગોલકના ઘનફળ કરતાં $\frac{8}{27}$ ગણું છે તેમ સાબિત કરો.

24. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટી ન્યૂનતમ હોય અને ઘનફળ આપેલ હોય ત્યારે શંકુની ઊંચાઈ એ તેના આધારની ત્રિજ્યા કરતાં $\sqrt{2}$ ગણી છે તેમ સાબિત કરો.

25. તિર્યક ઊંચાઈ (l) આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

26. લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ S આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ છે તેમ સાબિત કરો.

પ્રશ્નો 27 થી 29 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

27. વક્ર $x^2 = 2y$ પરનું (0, 5) થી સૌથી નજીકનું બિંદુ .... હોય.

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) (0, 0) (D) (2, 2)

28. વિધેય $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $\forall x \in R$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. વિધેય $f(x) = [x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $x \in [0, 1]$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 42 : એક ગાડી $t = 0$ સેકન્ડના સમયે બિંદુ P થી ગતિ શરૂ કરીને t સેકન્ડે; બિંદુ Q આગળ પહોંચીને અટકે છે. આ સમય દરમિયાન ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$ મીટર હોય, તો ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય શોધો તથા આ બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર PQ શોધો.

ઉકેલ : t સેકન્ડમાં ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ તેનો વેગ $V = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4 - t)$

આથી, $V = 0$ લેતાં, $t = 0$ તથા $t = 4$ મળે.

હવે, બિંદુઓ P તથા Q આગળ $V = 0$ છે.

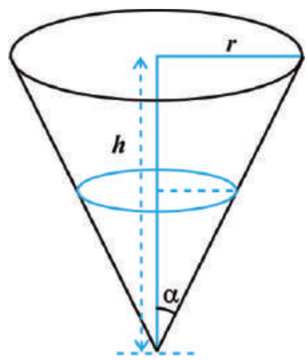
બિંદુ P આગળ $t = 0$. આથી Q આગળ $t = 4$

આથી, ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય 4 સેકન્ડ છે. 4 સેકન્ડ દરમિયાન કાપેલું અંતર

$$(x)_{t=4} = 4^2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ મીટર}$$

ઉદાહરણ 43 : પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}(0.5)$ છે. આ ટાંકીમાં 5 મી^{3}/કલાકના દરે પાણી રેડવામાં આવે છે. જ્યારે ટાંકીમાં પાણીની ઊંડાઈ 4 મીટર હોય, ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, શંકુના આધારની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h તથા અર્ધશિરઃકોણ α છે. આ માહિતી આકૃતિ 6.22 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.22

$\therefore \quad tan\,\alpha = \frac{r}{h}$

આથી, $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = tan^{-1}(0.5)$ (આપેલ છે.)

અથવા $\frac{r}{h} = 0.5$

$\therefore \quad r = \frac{h}{2}$

ધારો કે, શંકુનું ઘનફળ V છે.

$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$

આથી, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) \cdot \frac{dh}{dt}$ (સાંકળના નિયમ પરથી)

$= \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

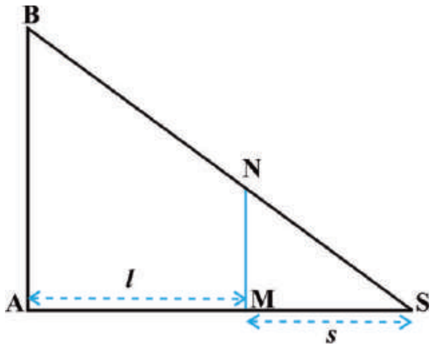
હવે ઘનફળમાં થતા ફેરફારનો દર $= \frac{dV}{dt} = 5$ મી^{3}/કલાક અને $h = 4$ મીટર

આથી, $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

અથવા $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}$ મીટર/કલાક $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

આથી, પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર $\frac{35}{88}$ મીટર/કલાક છે.

ઉદાહરણ 44 : 2 મીટર ઊંચો એક માણસ 5 કિમી/કલાકના દરે પ્રકાશના સ્રોતથી અચળ ઝડપે દૂર જઈ રહ્યો છે. પ્રકાશના સ્રોતની જમીનથી ઊંચાઈ 6 મીટર છે, તો તેના પડછાયાની લંબાઈના વધવાનો દર શોધો.



આકૃતિ 6.23

(MN = 2 અને AB = 6 આપેલ છે.)

ઉકેલ : આકૃતિ 6.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ધારો કે AB = પ્રકાશનો સ્રોત તથા B એ ગોળાની સ્થિતિ દર્શાવે છે. વળી, MN એ t સમયે માણસની સ્થિતિ અને AM = l મીટર છે. MS એ માણસનો પડછાયો છે.

ધારો કે, MS = s મીટર

નોંધીએ કે, $\Delta MSN \sim \Delta ASB$

$$\therefore \quad \frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

અથવા AS = $3s$

આથી AM = $3s - s = 2s$. પરંતુ AM = l

તેથી $l = 2s$

$$\therefore \quad \frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

વળી, $\frac{dl}{dt} = 5$ કિમી/કલાક છે, તેથી $\frac{ds}{dt} = \frac{5}{2}$ કિમી/કલાક

આથી, પડછાયાની લંબાઈમાં $\frac{5}{2}$ કિમી/કલાકની ઝડપે વધારો થાય છે.

ઉદાહરણ 45 : વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x^2 = 4y$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ મળે.

ધારો કે (h, k) એ વક્ર $x^2 = 4y$ પરનું સ્પર્શબિંદુ છે.

આથી, ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ (h, k) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,\ k)} = \frac{h}{2}$ મળે.

આથી, બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-2}{h}$. **($h \neq 0$)**

આથી બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - k = \frac{-2}{h}(x - h) \qquad ...(1)$$

વળી, તે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore \quad 2 - k = \frac{-2}{h}(1 - h)$$

અથવા $k = 2 + \frac{2}{h}(1 - h)$ ...(2)

વળી, બિંદુ (h, k) વક્ર $x^2 = 4y$ પર છે.

$$\therefore \quad h^2 = 4k \qquad ...(3)$$

આથી, (2) તથા (3) પરથી, $h = 2$ તથા $k = 1$ મળે.

h અને kની આ કિંમતો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં, માંગેલ અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x - 2)$$

$\therefore \quad x + y = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 46 : વક્ર $y = cos\,(x + y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$ ના રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : $y = cos\,(x + y)$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)}$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \dfrac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)}$

વળી, આપેલ વક્રના સ્પર્શકો રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર હોવાથી, સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{-1}{2}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$\therefore \quad sin\,(x + y) = 1$

$\therefore \qquad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2};\ n \in Z$

આથી, $y = cos\,(x + y) = cos\left(n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}\right);\ n \in Z$

$= 0;\quad \forall n \in Z$

વળી, $-2\pi \le x \le 2\pi$ હોવાથી, $x = \frac{-3\pi}{2}$ તથા $x = \frac{\pi}{2}$ મળે. $(sin\,(x + y) = 1)$

આથી, રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર આપેલ વક્રના સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ છે. આથી, માંગેલ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ

$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y + 3\pi = 0$

અને $y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y - \pi = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 47 : જે અંતરાલમાં $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ (a) ચુસ્ત વધતું વિધેય (b) ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 6x + \frac{36}{5}$

$= \frac{6}{5}(x - 1)(x + 2)(x - 3)$ (સાદું રૂપ આપતાં)

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $x = -2$ અથવા $x = 3$ મળે.

x ની આ કિંમતો, વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ચાર ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ તથા $(3, \infty)$માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.24 જુઓ.)

આકૃતિ 6.24

અંતરાલ $(-\infty, -2)$ એટલે કે, $-\infty < x < -2$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) < 0$ અને $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = -3$ માટે, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = (-4)(-1)(-6) < 0$)

આથી, જ્યારે $-\infty < x < -2$ ત્યારે $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(-\infty, -2)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(-2, 1)$ એટલે કે, $-2 < x < 1$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = 0$ માટે $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$
$= (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

આથી, $-2 < x < 1$ માટે, $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(-2, 1)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(1, 3)$ એટલે કે, $1 < x < 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 3) < 0$ મળે.

આથી, $1 < x < 3$ માટે, $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(1, 3)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતમાં, અંતરાલ $(3, \infty)$ એટલે કે, $x > 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) > 0$ મળે.

આથી જ્યારે $x > 3$ ત્યારે $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 48 : સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$ એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{1 + (sin\ x + cos\ x)^2}(cos\ x - sin\ x)$$

$$= \frac{cos\ x - sin\ x}{2 + sin\ 2x} \qquad \text{(સાદું રૂપ આપતાં)}$$

આપણે નોંધીએ કે, પ્રત્યેક $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માટે $2 + sin\ 2x > 0$.

આથી, જો $(cos\ x - sin\ x) > 0$ તો $f'(x) > 0$.

અથવા જો $\cos x > \sin x$ અથવા $\cot x > 1$ તો $f'(x) > 0$.

હવે, જો $0 < \tan x < 1$ તો અને તો જ $\cot x > 1$

એટલે કે, જો $0 < x < \frac{\pi}{4}$ તો $f'(x) > 0$.

આથી, વિધેય f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 49 : 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળી એક વર્તુળાકાર તક્તીને ગરમ કરવામાં આવે છે. આથી વિસ્તારના કારણે તેની ત્રિજ્યા 0.05 સેમી/સે ના દરે વધી રહી છે. જ્યારે તક્તીની ત્રિજ્યા 3.2 સેમી હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ તક્તીની ત્રિજ્યા r તથા ક્ષેત્રફળ A છે.

$\therefore \quad A = \pi r^2$

અથવા $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

હવે, ત્રિજ્યામાં થતા વધારાનો દર $= \frac{dr}{dt} = 0.05$ સેમી/સે

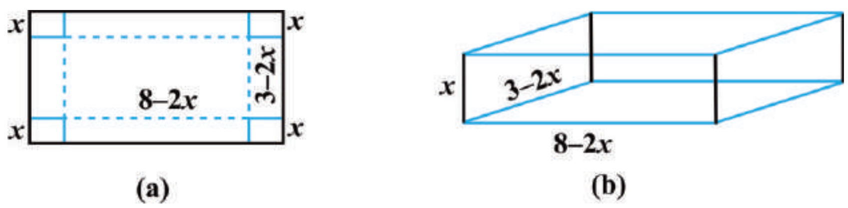
$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 2\pi\,(3.2)(0.05)$ ($r = 3.2$ સેમી)

$= 0.320\pi$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 50 : 3 મીટર × 8 મીટર માપના ઍલ્યુમિનિયમના લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપી દરેક બાજુ વાળીને ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. આ રીતે બનતી પેટીનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે દરેક ખૂણેથી કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. આથી, પેટીની ઊંચાઈ x મીટર, લંબાઈ $8 - 2x$ મીટર તથા પહોળાઈ $3 - 2x$ મીટર છે. (આકૃતિ 6.25 જુઓ.)



આકૃતિ 6.25

જો આ પેટીનું ઘનફળ V(x) હોય, તો

$$V(x) = x(3 - 2x)(8 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

આથી, $V'(x) = 12x^2 - 44x + 24$

$= 4(x - 3)(3x - 2)$

$\therefore \quad V''(x) = 24x - 44$

હવે, $V'(x) = 0$ લેતાં, $x = 3, \frac{2}{3}$ મળે. પરંતુ $x \neq 3$ (શા માટે ?)

આથી, $x = \frac{2}{3}$ લેતાં, $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44$

$= -28 < 0$

આથી, $x = \frac{2}{3}$ માટે મહત્તમ કિંમત મળે. એટલે કે, આપણે પતરાના દરેક ખૂણેથી $\frac{2}{3}$ મીટરની લંબાઈ ધરાવતો ચોરસ દૂર કરીએ અને બાકીના ભાગમાંથી પેટી બનાવીએ, તો મળતી પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય.

$\therefore \quad V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{200}{27}$ (મીટર)^3

ઉદાહરણ 51 : કોઈ એક ઉત્પાદક પ્રત્યેક એકમના ₹ $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ના દરે x વસ્તુઓનું વેચાણ કરે છે. જો x વસ્તુઓની પડતર કિંમત ₹ $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ હોય, તો ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે કેટલી વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે ?

ઉકેલ : ધારો કે x વસ્તુઓની વેચાણકિંમત $S(x)$ તથા પડતર કિંમત $C(x)$ છે.

હવે, $S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right) x = 5x - \frac{x^2}{100}$

અને $C(x) = \frac{x}{5} + 500$

આથી, નફાનું વિધેય $P(x) = S(x) - C(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

$\therefore \quad P(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$

એટલે કે, $P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$

$\therefore \quad P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$

હવે, $P'(x) = 0$ લેતાં, $x = 240$ મળે.

વળી, $P''(x) = \frac{-1}{50}$. આથી, $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$.

આથી, $x = 240$ આગળ મહત્તમ કિંમત મળે. આથી ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે 240 વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. વિકલનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં વિધેયોનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધો :

(a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{\frac{-1}{5}}$

2. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે.

3. એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના અચળ આધારનું માપ b છે તથા તેની બે સમાન લંબાઈની બાજુઓનાં માપ 3 સેમી/સે ના દરે ઘટી રહ્યા છે. જ્યારે આ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓનાં માપ આધારના માપ જેટલાં થાય ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપથી ઘટે ?

4. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

5. $x = acos\theta + a\theta sin\theta$, $y = a\,sin\theta - a\theta cos\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો θ બિંદુ આગળનો અભિલંબ ઊગમબિંદુથી અચળ અંતરે આવેલો છે તેમ સાબિત કરો.

6. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = \dfrac{4\,sin\,x - 2x - x\,cos\,x}{2 + cos\,x}$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો.

7. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ (a) વધતું વિધેય અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

8. જેનું શીર્ષ પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ હોય તેવા ઉપવલય $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. લંબચોરસ આધાર તથા પૃષ્ઠો ધરાવતી એક ખુલ્લી ટાંકીની ઊંડાઈ 2 મીટર તથા ઘનફળ 8 (મીટર)^3 છે. જો આ ટાંકીના આધારના બાંધકામની કિંમત ₹ 70 પ્રતિ(મીટર)^2 તથા પૃષ્ઠોના બાંધકામની કિંમત ₹ 45 પ્રતિ(મીટર)^2 હોય, તો ટાંકી બનાવવા માટે થતો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

10. એક ચોરસની પરિમિતિ તથા વર્તુળના પરિઘનો સરવાળો અચળ k છે. સાબિત કરો કે જ્યારે ચોરસની બાજુની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતાં બમણી હોય ત્યારે તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે.

11. એક બારી લંબચોરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે. બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મીટર છે. બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ પ્રવેશી શકે તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.

12. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુનાં કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર a તથા b છે (a, b અચળ છે) સાબિત કરો કે, કર્ણની મહત્તમ લંબાઈ $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ છે.

13. જે બિંદુઓ આગળ (અથવા x ની જે કિંમતો આગળ) વિધેય $f(x) = (x - 2)^4 (x + 1)^3$, (a) સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (b) સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય (c) નતિબિંદુ ધરાવે તે બિંદુઓ (અથવા x ની કિંમતો) શોધો.

14. વિધેય $f(x) = cos^2x + sin\,x$, $x \in [0, \pi]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

15. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ $\dfrac{4r}{3}$ છે તેમ સાબિત કરો.

16. ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે.

17. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ છે તેમ સાબિત કરો. આ નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

18. h ઊંચાઈવાળા અને અર્ધશિરઃકોણ α હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ એ શંકુની ઊંચાઈ કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેમ સાબિત કરો અને સાબિત કરો કે નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ $\dfrac{4\pi}{27} h^3\,tan^2\alpha$ છે.

પ્રશ્નો 19 થી 24 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. 10 મીટર ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર પીપમાં 314 (મીટર)^3/કલાકના દરે ઘઉં ભરવામાં આવે છે, તો ઘઉંની ઊંડાઈના વધવાનો દર .... હોય.

(A) 1 મીટર/કલાક (B) 0.1 મીટર/કલાક (C) 1.1 મીટર/કલાક (D) 0.5 મીટર/કલાક

20. $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $(2, -1)$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21. રેખા $y = mx + 1$ એ વક્ર $y^2 = 4x$ નો સ્પર્શક હોય, તો m = ...

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22. વક્ર $2y + x^2 = 3$ ના બિંદુ $(1, 1)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

23. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતાં અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24. વક્ર $9y^2 = x^3$ પરનાં .... બિંદુઓ આગળ દોરેલ અભિલંબ યામાક્ષો સાથે સમાન અંતઃખંડ બનાવે.

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, -\frac{8}{3}\right)$ (C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

સારાંશ

- જો કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, તો $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે તથા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે $x = x_0$ આગળ થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.
- જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, એટલે કે જો $x = f(t)$ અને $y = g(t)$ આપેલ હોય, તેમજ $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.
- કોઈ એક વિધેય f માટે,

  (a) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \ge 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

  (b) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \le 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય, તો આ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર છે તથા તેનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો વક્ર $y = f(x)$ ને $x = x_0$ આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = 0.$
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} (x - x_0)$

  દ્વારા મેળવી શકાય. અહીં, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0.$
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ હોય, તો અભિલંબનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય (અથવા $\dfrac{dy}{dx}$ અવ્યાખ્યાયિત હોય), તો અભિલંબ X-અક્ષને સમાંતર હોય અને તેનું સમીકરણ $y = y_0$ છે.
- ધારો કે, Δx એ x માં થતું 'સૂક્ષ્મ પરિવર્તન' છે અને તેને અનુરૂપ Δy એ $y = f(x)$ માં થતું 'સૂક્ષ્મ પરિવર્તન' છે. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. આથી, y નું વિકલ, $dy = f'(x)\, dx$ તથા

  $dy = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Delta x$ એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે.

  $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો હોય ત્યારે તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.
- કોઈ એક સંખ્યા $c \in D_f$ એવી મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા નિર્ણાયક બિંદુ) કહે છે.
- **પ્રથમ વિકલિત કસોટી :** ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા બિંદુ) છે તથા f એ c આગળ સતત છે.

  (i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ધનમાંથી ઋણ બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.

  (ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ઋણમાંથી ધન બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.

  (iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેની નિશાની ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.
- **દ્વિતીય વિકલિત કસોટી :** ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in I$ છે. ધારો કે $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.

  (i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = 0 = f'(c)$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

આ સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને વિધેયને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય, સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કે નતિબિંદુ છે, તે નક્કી કરીશું.

- વૈશ્વિક મહત્તમ અને/અથવા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટેનો કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : આપેલ અંતરાલમાં વિધેય f નાં તમામ નિર્ણાયક બિંદુઓ (અથવા નિર્ણાયક સંખ્યાઓ) શોધવાં એટલે કે, x ની એવી કિંમતો શોધીશું કે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા x ની તે કિંમતો આગળ f વિકલનીય ન હોય.

સોપાન 2 : અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ વિધેય f ની કિંમતો શોધો. નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો તે શોધો.

સોપાન 3 : આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2 માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમતો શોધો.

સોપાન 4 : વિધેય f ની સોપાન 3 માં, મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો ઓળખી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.

પરિશિષ્ટ 1

: ગણિતમાં સાબિતીઓ :

A.1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 9, 10 અને 11માં આપણે વિધાન, સંયુક્ત વિધાન, વિધાનનું નિષેધ, સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ, પૂર્વધારણાઓ, અટકળો, પ્રમેયો અને અનુમાનિત તર્ક શીખી ગયાં.

અહીં, આપણે ગાણિતિક સાધ્યોને જુદી-જુદી પદ્ધતિથી સાબિત કરવાની ચર્ચા કરીશું.

A.1.2 સાબિતી શું છે ?

ગાણિતિક વિધાનની સાબિતી એ વિધાનોની શ્રેણીથી બને છે અને માત્ર તાર્કિક નિયમોનો ઉપયોગ કરી પ્રત્યેક વિધાનની યથાર્થતાની ચકાસણી વ્યાખ્યા અથવા પૂર્વધારણા અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય દ્વારા અનુમાનિક પદ્ધતિથી થાય છે.

આમ, પ્રત્યેક સાબિતી એ પરિકલ્પના અને તારવણી હોય તેવી અનુમાનિક દલીલોની સાંકળ છે. મોટા ભાગે, આપણે સાધ્યમાં આપેલ તથ્યોનો સીધો ઉપયોગ કરી સાધ્ય સાબિત કરીએ છીએ. પરંતુ ઘણી વાર સાધ્યને સાબિત કરવા કરતાં તેના જેવા અન્ય સાધ્યની સાબિતી આપવાનું સરળ બને છે. સાધ્યની સાબિતી આપણને બે માર્ગ તરફ દોરી જાય છે; પ્રત્યક્ષ અથવા પરોક્ષ. આ રીતે મેળવેલી સાબિતીઓને પ્રત્યક્ષ સાબિતી અને પરોક્ષ સાબિતી કહેવાય તથા હજુ આગળ વધીએ તો દરેકની સાબિતી માટે ત્રણ જુદી-જુદી રીતો છે તેની ચર્ચા નીચે પ્રમાણે છે :

પ્રત્યક્ષ સાબિતી : પ્રમેયમાં આપેલ તથ્યોનો ઉપયોગ કરી આપણે પ્રત્યક્ષ રીતે જ સાબિતી આપવાની શરૂઆત કરીએ તેને પ્રમેયની સાબિતી આપવાની પ્રત્યક્ષ રીત કહે છે.

(i) **પ્રત્યક્ષ અભિગમ :** આપેલ અથવા સ્વીકારેલ તથ્યોની પૂર્વધારણાઓ, વ્યાખ્યાઓ અથવા આગળ સાબિત કરેલ પ્રમેયોની મદદ લઈ તર્કના નિયમોના ઉપયોગથી સાધ્ય કરવા માટેની દલીલોની એક શૃંખલા તરફ દોરી જાય છે. આ રીતને **પ્રત્યક્ષ અભિગમ (Straight Forward Approach)** કહે છે. નીચેના ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે જો $x^2 - 5x + 6 = 0$ હોય, તો $x = 3$ અથવા $x = 2$.

ઉકેલ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (આપેલ છે.)

$\therefore \ (x - 3)(x - 2) = 0$ (આપેલ પદાવલિનું તેને સમતુલ્ય બીજી પદાવલિ દ્વારા પરિવર્તન કરતાં)

$\therefore \ x - 3 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$ (સાબિત કરેલા પ્રમેય $a, b \in R$ માટે, $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ અથવા $b = 0$ પરથી)

$\therefore \ x - 3 + 3 = 0 + 3$ અથવા $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (સમીકરણની બંને બાજુ સમાન રાશિ ઉમેરતાં સમીકરણનું સ્વરૂપ બદલાતું નથી.)

$\therefore \ x + 0 = 3$ અથવા $x + 0 = 2$. (પૂર્ણાંકના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$\therefore \ x = 3$ અથવા $x = 2$. (પૂર્ણાંકના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

આમ, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ અથવા $x = 2$.

સ્પષ્ટતા : ધારો કે, આપેલ વિધાન '$p : x^2 - 5x + 6 = 0$' છે અને વિધાન q નિષ્કર્ષ વિધાન $x = 3$ અથવા $x = 2$ છે. વિધાન p માં $x^2 - 5x + 6$ અભિવ્યક્તિને, $x^2 - 5x + 6$ ને સમાન બીજી અભિવ્યક્તિ $(x - 3)(x - 2)$ થી પરિવર્તિત કરીને આપણે વિધાન p માંથી વિધાન $r : (x - 3)(x - 2) = 0$ તારવ્યું.

અહીં, બે પ્રશ્ન ઉદ્ભવે છે :

(i) પદાવલિ $(x - 3)(x - 2)$ એ પદાવલિ $x^2 - 5x + 6$ ને સમાન કેવી રીતે થાય ?

(ii) એક પદાવલિને આગળના જેવી બીજી પદાવલિ દ્વારા આપણે કેવી રીતે પરિવર્તિત કરી શકીએ ?

પ્રથમ પ્રશ્ન માટેની સાબિતી અગાઉના ધોરણમાં અવયવીકરણ દ્વારા આપેલ છે. અર્થાત્

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$= x(x - 3) - 2(x - 2)$$
$$= (x - 3)(x - 2)$$

જ્યારે બીજા પ્રશ્ન માટેની સાબિતી દલીલ સ્વરૂપની કાયદેસરતા (તર્કના નિયમ) પરથી આપેલ છે.

હવે, વિધાન r પક્ષ બને છે. વિધાન $s : x - 3 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$ તારવવામાં આવે છે અને તેનાં કારણો કૌંસમાં આપ્યાં છે.

આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી નિષ્કર્ષ પર ના પહોંચીએ ત્યાં સુધી સતત ચાલ્યા કરે છે.

દલીલની પ્રતિકાત્મક સમાનતા $p \Rightarrow q$ સત્ય છે તેવા તારણ પર આવવા માટે છે.

p થી શરૂ કરી, આપણે $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ તારવીએ છીએ. આથી, "$p \Rightarrow q$" સત્ય છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$

$f(x) = 2x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોય, તો f એક-એક વિધેય થાય.

(એક-એક વિધેયની વ્યાખ્યા)

હવે, આપેલ છે કે, $f(x_1) = f(x_2)$

અર્થાત્ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (બંને તરફ સમાન રાશિ ઉમેરતાં)

$\therefore\ 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\therefore\ 2x_1 = 2x_2$ (વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટેના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકનો ઉપયોગ કરતાં)

$\therefore\ \frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે બંને બાજુને ભાગતાં)

$\therefore\ x_1 = x_2$

આથી, આપેલ વિધેય એક-એક છે.

(ii) ગાણિતિક અનુમાન : ગાણિતિક અનુમાન એ લાક્ષણિક રીતે અનુમાનિક હોય તેવાં સાધ્યોને સાબિત કરવાની એક વ્યૂહરચના છે. સાબિતીની આ સંપૂર્ણ પ્રક્રિયા નીચેની ત્રણ પૂર્વધારણા પર આધારિત હોય છે :

આપેલ $\mathbf{N}$ ના ઉપગણ S માટે, જો,

(i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા $1 \in \mathrm{S}$ અને

(ii) જ્યારે પ્રાકૃતિક સંખ્યા $k \in \mathrm{S}$ ત્યારે $k + 1 \in \mathrm{S}$, તો $\mathrm{S} = \mathbf{N}$.

જો વિધાન "$n = 1$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય હોય" (અથવા અન્ય કોઈ શરૂઆતની સંખ્યા j માટે સત્ય હોય), તથા જો "$n = k$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય હોય" તે પરથી "$n = k + 1$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય થાય." (કોઈ પણ પૂર્ણાંક $k \geq j$ માટે) તો આપેલ વિધાન ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n (પૂર્ણાંક $n \geq j$) માટે સત્ય છે.

આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ તો $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ઉકેલ : અહીં, $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

આપણે નોંધીએ કે, $P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

આથી, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $P(k)$ સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

આપણે સાબિત કરવું છે કે, જ્યારે $P(k)$ સત્ય હોય ત્યારે $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે. અર્થાત્

$P(k + 1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$ સત્ય છે.

હવે, $A^{k+1} = A^k \cdot A$

$P(k)$ સત્ય હોવાથી,

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(શ્રેણિકના ગુણાકાર પરથી)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

આમ, જ્યારે $P(k)$ સત્ય હોય ત્યારે, $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે.

આથી, પ્રત્યેક $n \geq 1$ માટે $P(n)$ સત્ય છે. (ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી)

(iii) વિકલ્પો દ્વારા અથવા વિકલ્પો પૂરા થઈ જાય ત્યાં સુધી :

સાબિતી : જો $p = r \vee s \vee t$ (જ્યાં '$\vee$' એ 'અથવા' માટેનો સંકેત છે.) થાય તેવાં r, s, t વિધાનોમાં p ને વિભાજિત કરીએ તો વિધાન $p \Rightarrow q$ સાબિત કરવા આ રીત શક્ય છે.

જો આપણે પ્રેરણ શરતો $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

અને $t \Rightarrow q$

સાબિત કરીએ, તો $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ સાબિત થાય અને આથી, $p \Rightarrow q$ સાબિત થાય.

આ રીતને **વિકલ્પો દ્વારા અથવા વિકલ્પો પૂરા થઈ જાય ત્યાં સુધી (Proof by Cases or by Exhaustion)** કહે છે.

આ રીતમાં સાધ્યની પ્રત્યેક શક્યતાને ચકાસવાનો સમાવેશ થાય છે. જ્યારે વિકલ્પોની સંખ્યા ઓછી હોય ત્યારે જ વ્યવહારુ રીતે આ રીત અનુકૂળ થાય.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણ ABC માટે, $a = b \cos C + c \cos B$

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન p, "ABC એ કોઈ પણ ત્રિકોણ છે." અને વિધાન q "$a = b \cos C + c \cos B$" છે.

એક ત્રિકોણ ABC લો. A માંથી BC પર વેધ AD દોરો. (જરૂર પડે તો BC ને લંબાવીને)

આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પણ ત્રિકોણ એ લઘુકોણ, ગુરુકોણ કે કાટકોણ હોય, આથી આપણે p ને ત્રણ વિધાન r, s અને t માં વહેંચી શકીએ. જ્યાં

r : ત્રિકોણ ABC લઘુકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ લઘુકોણ છે.

s : ત્રિકોણ ABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ ગુરુકોણ છે.

t : ત્રિકોણ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ કાટકોણ છે.

આથી, આપણે પ્રમેયની સાબિતી ત્રણ વિકલ્પો દ્વારા આપીશું.

વિકલ્પ (i) : જ્યારે $\angle C$ લઘુકોણ હોય (આકૃતિ A1.1)

કાટકોણ ત્રિકોણ ADB માં,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

અર્થાત્ $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

કાટકોણ ત્રિકોણ ADC માં,

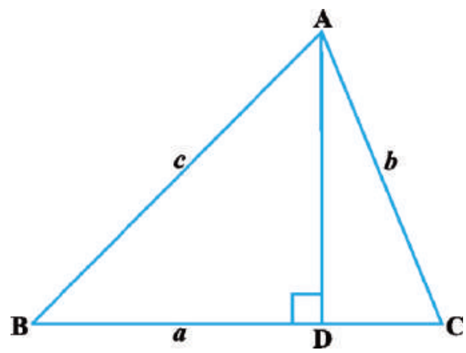
$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

અર્થાત્ $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

હવે, $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$ ...(1)



આકૃતિ A1.1

વિકલ્પ (ii) : જ્યારે $\angle C$ ગુરુકોણ હોય (જુઓ આકૃતિ A1.2.)

કાટકોણ ત્રિકોણ ADB માં,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

અર્થાત્ $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

કાટકોણ ત્રિકોણ ADC માં,

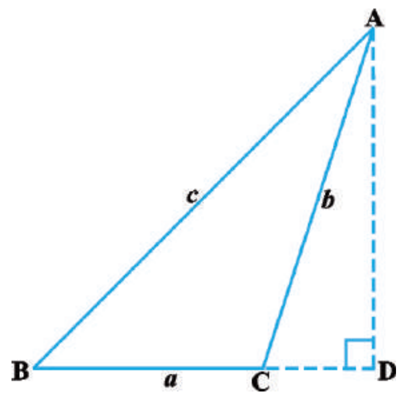
$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180^o - C)$

$= -\cos C$

અર્થાત્ $CD = -AC \cos C$

$= -b \cos C$



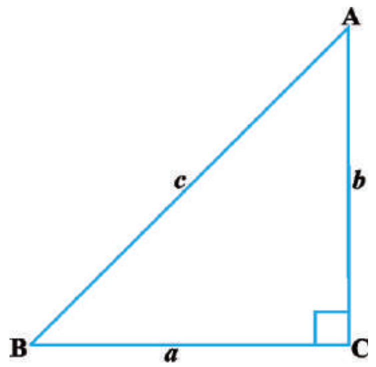
આકૃતિ A1.2

હવે, $a = BC = BD - CD$

અર્થાત્ $a = c \cos B - (-b \cos C)$

$= c \cos B + b \cos C$ ...(2)

વિકલ્પ (iii) : જ્યારે $\angle C$ કાટકોણ હોય (જુઓ આકૃતિ A1.3.)



આકૃતિ A1.3

કાટકોણ ત્રિકોણ ACB માં,

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

અર્થાત્ $BC = AB \cos B$

$= c \cos B$

અને $b \cos C = b \cos 90^o = 0$

આમ, $a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B$ લખી શકાય. ...(3)

(1), (2), (3) પરથી આપણે તારવી શકીએ કે કોઈ પણ ત્રિકોણ ABC માટે,

$$a = b \cos C + c \cos B$$

વિકલ્પ (1) પરથી, $r \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

વિકલ્પ (2) પરથી, $s \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

વિકલ્પ (3) પરથી, $t \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

આમ, વિકલ્પોમાં આપેલ સાબિતીઓથી $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ સાબિત થાય છે. અર્થાત્ $p \Rightarrow q$ સિદ્ધ થયું.

પરોક્ષ સાબિતી :

આપેલ પરિકલ્પનાની પ્રત્યક્ષ સાબિતી આપવાના સ્થાને, તેના જેવી પરિકલ્પના પ્રસ્થાપિત કરી તેને સાબિત કરીએ. આ રીતને **પરોક્ષ સાબિતી (Indirect proof)** કહે છે.

(i) અનિષ્ટાપત્તિની રીતે સાબિતી : અહીં, આપણે એ ધારણા સાથે શરૂઆત કરીએ છીએ કે, આપેલ વિધાન અસત્ય છે. તર્કના નિયમોનો ઉપયોગ કરી, આપણી ધારણા કરતાં વિરોધી નિષ્કર્ષ પર પહોંચીએ છીએ અને આથી કહી શકાય કે આપણી ધારણા અસત્ય છે અને આથી અનુમાન કરીશું કે આપેલ વિધાન સત્ય છે. આ રીતને **અનિષ્ટાપત્તિ (Contradiction)ની રીતે સાબિતી (Reductio Ad Absurdum)** કહે છે.

ચાલો, આ રીત આપણે એક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.

ઉકેલ : ધારો કે p અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે. આપણે આપેલ વિધાન 'અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.'નું નિષેધ લઈએ. અર્થાત્ આપણે ધારીએ કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ સાન્ત છે. આથી, આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ $p_1, p_2, ..., p_k$ (ધારો)ની યાદી બનાવી શકીએ. આપણે નોંધીએ કે ધારેલ $p_1, p_2, ..., p_k$ સિવાયની કોઈ પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

હવે, $n = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k) + 1$ લો. ...(1)

યાદીની સંખ્યાઓ કરતાં n મોટો હોવાથી n આ યાદીમાં નથી. ક્યાં તો n અવિભાજ્ય અથવા વિભાજ્ય છે. જો n અવિભાજ્ય હોય, તો (1) પરથી કહી શકાય કે, આપણી યાદીમાં ન હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાનું અસ્તિત્વ છે.

અન્યથા જો n વિભાજ્ય હોય, તો તેનો અવિભાજ્ય ભાજક હોવો જોઈએ. પરંતુ n નો ભાગાકાર $p_1, p_2, ..., p_k$ પૈકી દરેક વડે કરતાં શેષ 1 વધતી હોવાથી આપણી યાદીની કોઈ પણ સંખ્યા વડે n વિભાજ્ય નથી. આથી, યાદી સિવાયનો અવિભાજ્ય ભાજક હોવો જોઈએ.

આમ, n ભાજ્ય હોય કે અવિભાજ્ય, એ બંને વિકલ્પોમાં આપણે અવિભાજ્ય સંખ્યાની યાદીથી વિરોધાભાસી અંત પર પહોંચ્યા.

આથી, આપણી ધારણા કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ સાન્ત છે, તે ખોટી છે.

આમ, અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.

☛ નોંધ : જુઓ કે, ઉપરની સાબિતીમાં આપણે વિકલ્પોની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.

(ii) આપેલ વિધાનના સમાનાર્થી વિધાન દ્વારા સાબિતી : અહીં આપણે શરતી વિધાન $p \Rightarrow q$ સાબિત કરવાને બદલે તેનું સમાનાર્થી વિધાન $\sim q \Rightarrow \sim p$ (વિદ્યાર્થીઓ ચકાસી શકશે.) સાબિત કરીશું.

શરતી વિધાનનું **સમાનાર્થી વિધાન (Contrapositive)** પક્ષ અને સાધ્યની અદલબદલ કરી તે બંનેના નિષેધ લઈ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $f(x) = 2x + 5$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ એક-એક છે.

ઉકેલ : વિધેય f માટે, જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોય, તો તે એક-એક છે.

આનો ઉપયોગ કરવા આપણે સાબિત કરવું પડે કે "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$". જે $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું છે. અહીં, p એ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ અને $q : x_1 = x_2$ છે. આપણે ઉદાહરણ 2 માં "પ્રત્યક્ષ રીત"થી આ સાબિત કરેલ છે.

આપણે આ જ વિધાન સમાનાર્થી પ્રેરણનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરી શકીએ. હવે, આપેલ વિધાનનું સમાનાર્થી વિધાન $\sim q \Rightarrow \sim p$ અર્થાત્ "જો $f(x_1) = f(x_2)$ તો $x_1 = x_2$"નું સમાનાર્થી વિધાન "જો $x_1 \neq x_2$ હોય, તો $f(x_1) \neq f(x_2)$".

હવે, $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2$

$\Rightarrow 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

"$\sim q \Rightarrow \sim p$" અને "$p \Rightarrow q$" સમાન હોવાથી સાબિતી પૂર્ણ થઈ.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, "જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય હોય, તો A સામાન્ય છે."

ઉકેલ : ઉપરના વિધાનને સાંકેતિક રીતે લખતાં,

$p \Rightarrow q$, જ્યાં p એ "શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય છે." અને q "શ્રેણિક A સામાન્ય છે." મળે.

આપેલ વિધાન સાબિત કરવાને બદલે, આપણે તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ સાબિત કરીશું. અર્થાત્, જો A અસામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય નથી. જો A સામાન્ય શ્રેણિક ના હોય, તો તેનો અર્થ A અસામાન્ય શ્રેણિક છે. અર્થાત્ $|\mathrm{A}| = 0$.

આથી, $|\mathrm{A}| = 0$ હોવાથી, $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{adj\,\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

આથી, A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શક્ય નથી.

આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે જો A સામાન્ય શ્રેણિક ન હોય, તો A નો વ્યસ્ત શક્ય નથી.

અર્થાત્ $\sim q \Rightarrow \sim p$

આમ, જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય હોય, તો A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

(iii) પ્રતિ ઉદાહરણ દ્વારા સાબિતી : ગણિતના ઇતિહાસમાં એવા ઘણા પ્રસંગો બને છે કે જ્યાં માન્ય સાબિતી આપવાના બધા જ પ્રયત્નો નિષ્ફળ જાય અને વિધાનના મૂલ્યની સત્યાર્થતાની નિશ્ચિતતા અપ્રાપ્ય રહે.

આવી સ્થિતિમાં, વિધાન અસત્ય છે તે સાબિત કરવા આપણે p ની અસત્યાર્થતા માટે એક ઉદાહરણ શોધી કાઢીએ તો એ લાભકારક રહે. કોઈ વિધાનને અસત્ય સાબિત કરવા અપાતા આવા ઉદાહરણને ***પ્રતિઉદાહરણ* (counter example)** કહેવાય છે. સાધ્ય $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે, તે સાબિત કરવા સાધ્ય $\sim(p \Rightarrow q)$ સત્ય છે તે બતાવવું પૂરતું છે. આથી, આ પણ સાબિતીની એક રીત છે.

ઉદાહરણ 8 : પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : આ વિધાન સત્ય છે, તેવો એક વખત વિચાર આવે કેમકે,

$2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ અવિભાજ્ય છે.

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ અવિભાજ્ય છે.

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ અવિભાજ્ય છે.

આમ, પ્રથમ દૃષ્ટિએ એવું લાગે કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. પરંતુ આખરે આપણે એ દર્શાવીશું કે, $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ એ અવિભાજ્ય નથી. કેમકે,

$4294967297 = 641 \times 6700417$ (બે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર)

આમ, વ્યાપક રીતે "પ્રત્યેક n માટે, $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે ($n \in N$)" એ અસત્ય છે.

$2^{2^5} + 1$ એ એક જ ઉદાહરણ, વ્યાપક વિધાન અસત્ય છે, તેમ બતાવવા પૂરતું છે. આને પ્રતિઉદાહરણ કહેવાય.

આમ આપણે સાબિત કર્યું કે, "પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે."ની વ્યાપકતા સત્ય નથી.

ઉદાહરણ 9 : પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય છે.

ઉકેલ : આપણે નીચેનાં કેટલાંક વિધેયોનો વિચાર કરીએ :

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

આ વિધેયો x નાં પ્રત્યેક મૂલ્યો માટે સતત છે. જો આપણે તેની વિકલનીયતા ચકાસીએ તો જણાય છે કે, x નાં પ્રત્યેક મૂલ્યો માટે તે વિકલનીય પણ છે. તે આપણને "પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય છે" સત્ય માનવા પ્રેરે છે. પરંતુ આપણે સતત વિધેય "$\phi(x) = |x|$"ની વિકલનીયતા ચકાસીએ તો જણાય છે કે, $x = 0$ આગળ તે વિકલનીય નથી. આથી કહી શકાય કે, "પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય" તે વ્યાપક રીતે અસત્ય છે. આમ, માત્ર એક વિધેય "$\phi(x) = |x|$" એ વિધાન અસત્ય છે તે બતાવવા પૂરતું છે. આમ, "$\phi(x) = |x|$"ને પ્રતિઉદાહરણ કહીશું, જેના દ્વારા વિધાન "પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય" નું ખંડન થાય છે.

પરિશિષ્ટ 2

: ગાણિતિક મૉડેલિંગ :

A.2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 11 માં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના કેટલાક અંશોનો ગાણિતિક ભાષામાં અભ્યાસ કરવાના હેતુસર ગાણિતિક મૉડેલિંગ શીખી ગયાં છીએ. કેટલીક ઉચિત શરતોનો ઉપયોગ કરીને કોઈ ભૌતિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક ભાષામાં રૂપાંતર એ ગાણિતિક મૉડેલિંગ છે. સામાન્ય રીતે કહીએ તો, ગાણિતિક મૉડેલિંગ એ એક એવી પ્રવૃત્તિ છે કે, જેમાં આપણે વિવિધ ઘટનાઓને અનુરૂપ થતા વ્યવહારોનું વર્ણન કરી શકાય તે હેતુથી કોઈ નમૂના (મૉડેલ)ની રચના કરીએ છીએ. તેમાં આપણા રસ અનુસાર વિવિધ પ્રકારના શબ્દો, ચિત્રો કે રેખાચિત્રો, કમ્પ્યૂટર પ્રોગ્રામો કે ગાણિતિક સૂત્રો વગેરેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

અગાઉના ધોરણમાં આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે, વિવિધ ગાણિતિક સંકલ્પનાઓનો સમાવેશ થતો હોય તેવી ઘણી સમસ્યાઓના ઉકેલ સાથે ગાણિતિક મૉડેલિંગ એક યા બીજી રીતે સંકળાયેલ છે. આથી ગાણિતિક મૉડેલિંગનો એક અલગ વિષય તરીકે અભ્યાસ કરવો ખૂબ જ અગત્યનો છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગાણિતિક મૉડેલિંગનો અભ્યાસ કરીશું. તેમાં આપણે શ્રેણિક, કલનશાસ્ત્ર, સુરેખ આયોજનનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીશું.

A.2.2 ગાણિતિક મૉડેલિંગ શા માટે ?

વિદ્યાર્થીઓ અંકગણિત, બીજગણિત, ત્રિકોણમિતિ તથા સુરેખ આયોજન વગેરેમાં આવતી શાબ્દિક સમસ્યાઓના ઉકેલથી પરિચિત છે. કેટલીક વાર આપણે ભૌતિક રીતે પરિસ્થિતિજન્ય સમસ્યાઓમાં ઊંડા ઊતર્યા સિવાય આંતરસૂઝ દ્વારા સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી શકીએ છીએ. પરિસ્થિતિજન્ય સમસ્યાઓને ઉકેલવા માટે ભૌતિક રીતે તે સમસ્યા અંગે ઊંડાણપૂર્વક વિચારવું જરૂરી છે. અર્થાત્ પ્રાપ્ત થયેલ ગાણિતિક પરિણામો સાથે પ્રાયોગિક કિંમતની સરખામણી થઈ શકે તે માટે કેટલાક ભૌતિક સિદ્ધાંતો તથા સંકેતોનો પરિચય કેળવવો જરૂરી છે. આપણી સમક્ષ પ્રસ્તુત હોય તેવી ઘણી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે આપણને કોઈ યુક્તિ કે પ્રયુક્તિની આવશ્યકતા રહે છે. તેને ગાણિતિક મૉડેલિંગ કહે છે. ચાલો આપણે નીચે પ્રમાણેની કેટલીક સમસ્યાઓને ધ્યાનમાં લઈએ :

(i) નદીની પહોળાઈ શોધવી. (વિશેષમાં, જ્યારે નદી ઓળંગવી મુશ્કેલ હોય)

(ii) શોટ-પુટ (ગોળાફેંક)માં ખૂણાનું ઇષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવું. (ગોળો ફેંકનારની ઊંચાઈ, માધ્યમનો અવરોધ, ગુરુત્વપ્રવેગ વગેરે જેવા ચલોને ધ્યાનમાં રાખીને)

(iii) મિનારા (ટાવર)ની ઊંચાઈ શોધવી. (વિશેષમાં, જ્યારે મિનારાની ટોચ પર પહોંચવું અશક્ય હોય.)

(iv) સૂર્યની સપાટીનું ઉષ્ણતામાન શોધવું.

(v) હૃદયની બીમારી ધરાવતા દર્દીઓએ શા માટે લિફ્ટનો ઉપયોગ ન કરવો જોઈએ ? (મનુષ્યનું શરીર-વિજ્ઞાન જાણ્યા સિવાય)

(vi) પૃથ્વીનું દળ શોધવું.

(vii) ભારતમાં ઊભા પાક દ્વારા કઠોળ/દાળના ઉત્પાદન વિશે અંદાજ લગાવવો. (કોઈ પણ વ્યક્તિને તે પાક કાપવાની છૂટ ન હોય ત્યારે)

(viii) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલ લોહીનું ઘનફળ શોધવું (જ્યારે તે વ્યક્તિનું લોહી સંપૂર્ણપણે બહાર કાઢવાની છૂટ ન હોય.)

(ix) વર્ષ 2020માં ભારતની વસ્તીનો અંદાજ લગાવવો. (વ્યક્તિને ત્યાં સુધી રાહ જોવાની છૂટ ન હોય ત્યારે)

ઉપર્યુક્ત તમામ સમસ્યાઓને ઉકેલી શકાય છે અને હકીકતમાં, ગણિતની મદદ દ્વારા ગાણિતિક મૉડેલિંગનો ઉપયોગ કરીને આ સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં આવી છે. વાસ્તવમાં તમે આમાંથી કેટલીક સમસ્યાઓને ઉકેલવાની રીતોનો અભ્યાસ વર્તમાન પાઠ્યપુસ્તકમાં કર્યો છે. તેમ છતાં પણ જો શક્ય હોય, તો સૌપ્રથમ તમે તેને ગણિતનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય સ્વપ્રયત્ને ઉકેલવાની કોશિશ કરો તો તે શિક્ષણપ્રદ થશે અને તો જ તમે ગણિતની ક્ષમતા તથા ગાણિતિક મૉડેલિંગની જરૂરિયાતને જાણી શકશો.

A.2.3 ગાણિતિક મૉડેલિંગના સિદ્ધાંતો

ગાણિતિક મૉડેલિંગ એ સૈદ્ધાંતિક ક્રિયા છે અને તેથી તેને સંબંધિત કેટલાક સિદ્ધાંતો છે. મોટે ભાગે, આ સિદ્ધાંતો દાર્શનિક સ્વરૂપે છે. ગાણિતિક મૉડેલિંગના કેટલાક પાયાના સિદ્ધાંતોની યાદી નીચે આપેલ છે તે સૂચનાત્મક સ્વરૂપમાં છે :

(i) મૉડેલ માટેની જરૂરિયાત જાણવી. **(આપણે શા માટે મૉડેલની શોધમાં છીએ ?)**

(ii) મૉડેલ માટે જરૂરી એવા ચલ/પ્રચલની યાદી બનાવવી.

(iii) ઉપલબ્ધ હોય તેવી સંબંધિત માહિતીને ઓળખવી. **(શું આપેલ છે ?)**

(iv) ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવી પરિસ્થિતિઓને ઓળખવી. **(ધારણાઓ)**

(v) ભૌતિક સિદ્ધાંતોનું નિયમન કરવું.

(vi) ઓળખો :

(a) ઉપયોગી હોય તેવાં સમીકરણો

(b) કરવી જરૂરી હોય તેવી ગણતરીઓ

(c) પરિણામ સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થતો ઉકેલ

(vii) નીચે પ્રમાણેનું પરીક્ષણ કરી શકે તેવી કસોટીઓ ઓળખવી.

(a) મૉડેલની સુસંગતતા

(b) મૉડેલની ઉપયોગિતા

(viii) મૉડેલને વધુ અસરકારક બનાવી શકે તેવા પ્રચલની કિંમતો ગણવી.

ગાણિતિક મૉડેલિંગના ઉપર્યુક્ત સિદ્ધાંતો આપણને તે માટેના જરૂરી એવાં નીચેનાં સોપાનો (પગલાંઓ) તરફ દોરી જાય છે :

પગલું 1 : ભૌતિક પરિસ્થિતિ ઓળખવી.

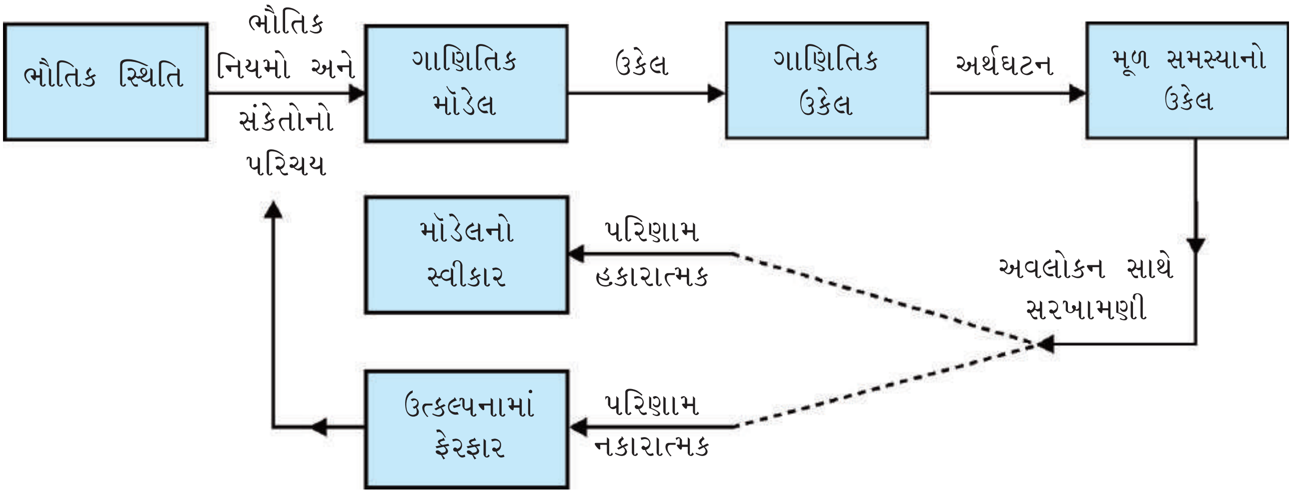
પગલું 2 : પ્રચલ/ચલની રજૂઆત અને ભૌતિક નિયમો તથા સંકેતોના ઉપયોગ દ્વારા ભૌતિક સ્થિતિને ગાણિતિક મૉડેલમાં પરિવર્તિત કરવી.

પગલું 3 : ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવો.

પગલું 4 : પરિણામનું મૂળ સમસ્યાના સંદર્ભમાં અર્થઘટન કરવું અને પરિણામની અવલોકનો કે પ્રયોગો સાથે સરખામણી કરવી.

પગલું 5 : જો પરિણામ હકારાત્મક હોય, તો મૉડેલ સ્વીકાર્ય છે. અન્યથા ઉત્કલ્પનાઓ/ધારણાઓમાં ભૌતિક સ્થિતિ પ્રમાણે ફેરફાર કરો અને પગલા 2 પર જાઓ.

ઉપર્યુક્ત પગલાંઓને આકૃતિ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :



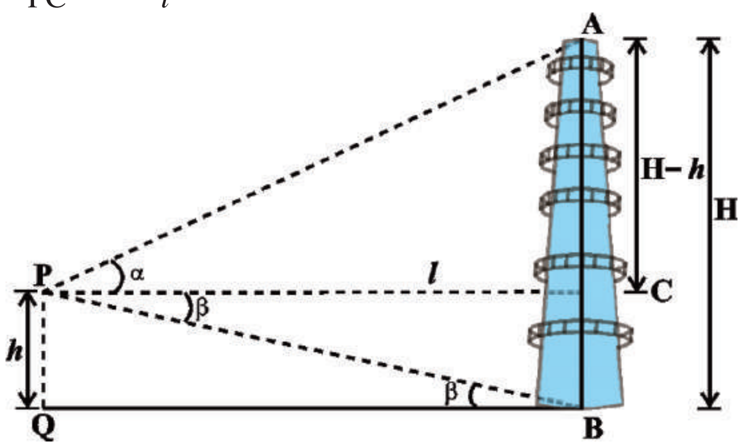
આકૃતિ A.2.1

ઉદાહરણ 1 : ગાણિતિક મૉડેલિંગના ઉપયોગથી આપેલ મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : પગલું 1 : "આપેલ મિનારાની ઊંચાઈ શોધવી" એ ભૌતિક પરિસ્થિતિ છે.

પગલું 2 : ધારો કે AB આપેલ મિનારો છે. (આકૃતિ A.2.2) ધારો કે કોઈ નિરીક્ષક (PQ)ની આંખ બિંદુ P આગળ છે અને તે મિનારાની ઊંચાઈ માપે છે. ધારો કે PQ = h તથા મિનારાની ઊંચાઈ H છે. ધારો કે વ્યક્તિની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધીનો ઉત્સેધકોણ α છે તથા l = QB = PC.

હવે, $\tan\alpha = \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{H-h}{l}$ અથવા $H = h + l\tan\alpha$ ...(1)



આકૃતિ A.2.2

પગલું 3 : અહીં નોંધીએ કે, (ષષ્ટાંક યંત્રના ઉપયોગથી) જો નિરીક્ષક પ્રચલો h, l તથા α ની કિંમતો જાણતા હોય, તો પરિણામ (1) પરથી સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

પગલું 4 : જો મિનારાનો આધાર સુલભ ન હોય, એટલે કે નિરીક્ષકને જ્યારે l ની જાણકારી ન હોય તેવા કિસ્સામાં, ધારો કે બિંદુ P થી મિનારાના તળિયા સુધીનો અવસેધકોણ β છે. આથી ΔPQB પરથી આપણને

$$tan\,\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ અથવા } l = h\,cot\,\beta \text{ મળે.}$$

પગલું 5 : પ્રચલો h, l, β તથા α ની કિંમતોની જાણ હોય તેવી પરિસ્થિતિમાં પગલાં 5 ની જરૂર રહેતી નથી.

ઉદાહરણ 2 : ધારો કે કોઈ એક વ્યાવસાયિક કંપની ત્રણ પ્રકારનાં ઉત્પાદનો P_1, P_2 અને P_3 માટે ત્રણ પ્રકારના કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો ઉપયોગ કરે છે. ધારો કે બે ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 કંપની પાસેથી ખરીદીની માંગ કરે છે; પરંતુ કંપની પાસે અનુક્રમે R_1, R_2 તથા R_3 નો મર્યાદિત જથ્થો છે. આ પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં રાખીને, ગ્રાહકોની માંગને સંતોષી શકે તથા તે માટે જરૂરી કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નું પ્રમાણ નક્કી કરી શકે તેવું મૉડેલ તૈયાર કરો.

ઉકેલ : પગલું 1 : સમસ્યામાં ભૌતિક સ્થિતિ સરળતાથી ઓળખી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગ દર્શાવતો શ્રેણિક A છે. તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

ધારો કે ઉત્પાદિત વસ્તુઓ P_1, P_2 અને P_3 ના દરેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી એવો કાચો માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો જથ્થો દર્શાવતો શ્રેણિક B છે. આથી,

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

પગલું 3 : બે શ્રેણિકો A તથા B નો ગુણાકાર AB (જે આ પરિસ્થિતિમાં સુવ્યાખ્યાયિત છે) નીચેના શ્રેણિક દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

તે હકીકતમાં, ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગને પૂર્ણ કરી શકે તે માટે જરૂરી કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નું પ્રમાણ નક્કી કરી આપે છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$ તથા કાચા માલ R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો અને R_3 ના 140 એકમો ઉપલબ્ધ હોય, તો ઉદાહરણ 2 માં આપેલ મૉડેલનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : અહીં નોંધીએ કે,

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

આ શ્રેણિક સ્પષ્ટપણે દર્શાવે છે કે, ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગને પૂરી કરવા માટે કાચો માલ R_1 ના 335 એકમો, R_2 ના 467 એકમો તથા R_3 ના 147 એકમોની જરૂર છે. તે ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થા કરતાં ઘણા વધારે છે. વળી, ત્રણેય ઉત્પાદનના પ્રત્યેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી કાચા માલનું પ્રમાણ સુનિશ્ચિત છે. આથી આપણે કાં તો ઉપલબ્ધ કાચા માલનો જથ્થો વધારી શકીએ અથવા ગ્રાહકોને તેમની ખરીદીની માંગ ઘટાડવા માટેનું નિવેદન કરી શકીએ.

નોંધ : જો આપણે ઉદાહરણ 3 માં A ના સ્થાને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો શ્રેણિક A_1 લઈએ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

એટલે કે, જો ગ્રાહકો તેમની ખરીદીની માંગમાં ઘટાડો કરવા સહમત થાય, તો

$$A_1B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

આ દર્શાવે છે કે, R_1 ના 311 એકમો, R_2 ના 436 એકમો તથા R_3 ના 138 એકમો જરૂરી છે. તે ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થા કરતાં ઓછા છે. એટલે કે, R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો તથા R_3 ના 140 એકમો કરતાં ઓછા છે. આથી, જો ગ્રાહકો દ્વારા શ્રેણિક A_1 પ્રમાણે ખરીદીની માંગમાં ફેરફાર કરવામાં આવે, તો કંપની ગ્રાહકોની ખરીદી માટેની માંગ પ્રમાણેનો માલ સરળતાથી આપી શકે.

> ☛ **નોંધ :** ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણ ઉપયોગ થાય તે માટે કોઈ વ્યક્તિ A માં ફરીથી સુધારો કે ફેરફાર કરી શકે છે.

પ્રશ્ન : શ્રેણિક B તથા ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થાને ધ્યાનમાં રાખીને, કંપનીના માલિકને સહાય મળે તે હેતુથી, ગ્રાહકોને તેમની માંગમાં ફેરફાર કરવાનો અનુરોધ કરવામાં આવે, જેના દ્વારા કંપની ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ કરી શકે. શું આપણે આવું ગાણિતિક મૉડેલ તૈયાર કરી શકીએ ?

આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચેના ઉદાહરણમાં આપેલ છે :

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે P_1, P_2, P_3 અને R_1, R_2, R_3 ઉદાહરણ 2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જ છે. ધારો કે કંપની પાસે R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો અને R_3 ના 140 એકમો ઉપલબ્ધ છે અને ધારો કે ત્રણેય ઉત્પાદનોના પ્રત્યેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી કાચો માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો જથ્થો નીચે આપેલ શ્રેણિકમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો છે. તો,

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ થાય તે માટે પ્રત્યેક ઉત્પાદનના કેટલા એકમો બનાવવાં જોઈએ ?

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિને સરળતાથી ઓળખી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે કંપની P_1 ના x એકમો, P_2 ના y એકમો તથા P_3 ના z એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. વળી, (શ્રેણિક B જુઓ.) ઉત્પાદન P_1 ના પ્રત્યેક એકમ માટે R_1 ના 3 એકમો, P_2 ના પ્રત્યેક એકમ માટે R_1 ના 7 એકમો તથા P_3 માટે R_1 ના 5 એકમો તેમજ તમામ એકમો મળીને R_1 ના 330 એકમો ઉપલબ્ધ હોય, તો

$3x + 7y + 5z = 330$ મળે. **(કાચા માલ R_1 માટે)**

આ જ રીતે, આપણને

$4x + 9y + 12z = 455$ તથા **(કાચા માલ R_2 માટે)**

$3y + 7z = 140$ મળે. **(કાચા માલ R_3 માટે)**

સમીકરણોની આ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

પગલું 3 : પ્રાથમિક હાર-ક્રિયાનો ઉપયોગ કરીને આપણે

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$ મેળવી શકીએ.

તે પરથી $x = 20$, $y = 35$, $z = 5$ મળે. આથી, ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ થાય તે માટે કંપની P_1 ના 20 એકમો, P_2 ના 35 એકમો તથા P_3 ના 5 એકમોનું ઉત્પાદન કરી શકે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે જો નિર્માતા ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગ પ્રમાણે (ઉદાહરણ 3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) નહિ પરંતુ ઉપલબ્ધ કાચા માલ પ્રમાણે નિર્માણ કરવાનું નક્કી કરે તો પણ તે ગ્રાહકોની માંગને સંતોષી શકે નહિ કારણ કે ગ્રાહક F_1 એ P_3 ના 6 એકમોની માંગ કરે છે જ્યારે નિર્માતા P_3 ના માત્ર પાંચ એકમ જ ઉત્પાદિત કરી શકે છે.

ઉદાહરણ 5 : એક દવા-નિર્માતા દવાઓ M_1 તથા M_2 ના ઉત્પાદન માટેની યોજના તૈયાર કરે છે. M_1ની 20000 તથા M_2ની 40000 શીશીઓ બનાવવા માટે પૂરતા પ્રમાણમાં કાચો માલ ઉપલબ્ધ છે. પરંતુ નિર્માતા બેમાંથી ગમે તે એક દવા શીશીમાં ભરી શકે તે માટે તેની પાસે 45000 શીશીઓ જ છે. વધુમાં, M_1 ની 1000 શીશીઓ ભરી શકાય તે માટે પૂરતી સામગ્રી તૈયાર કરતાં તેને 3 કલાક જેટલો સમય લાગે છે તથા M_2 ની 1000 શીશીઓ ભરી શકાય તે માટે પૂરતી સામગ્રી તૈયાર કરતાં 1 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. આ ક્રિયા માટે નિર્માતા પાસે 66 કલાક ઉપલબ્ધ છે. M_1 ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 8 જ્યારે M_2ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 7 છે. મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવા-નિર્માતાએ કેવી ઉત્પાદન યોજના બનાવવી જોઈએ ?

ઉકેલ : પગલું 1 : આપેલ ઉત્કલ્પના/પરિસ્થિતિને અંતર્ગત, મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવાઓ M_1 તથા M_2 ની શીશીઓની સંખ્યા શોધવી.

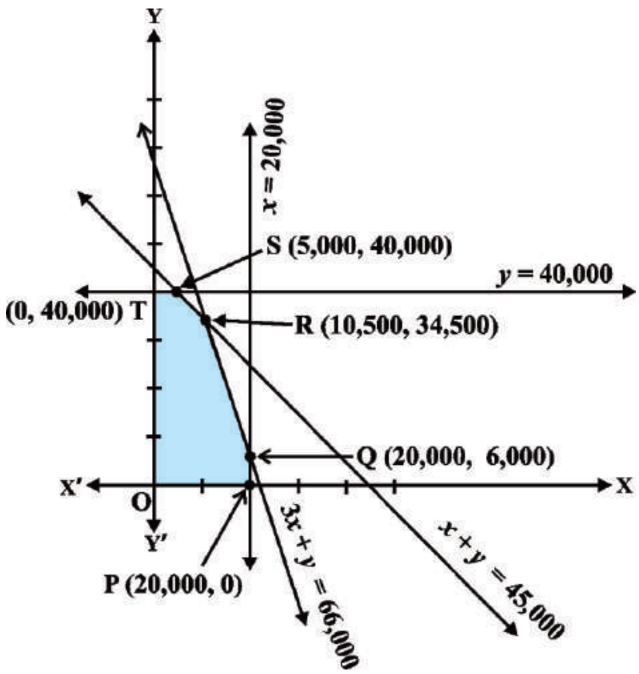
પગલું 2 : ધારો કે M_1 પ્રકારની દવા માટે ઉપલબ્ધ શીશીઓની સંખ્યા x તથા M_2 પ્રકારની દવા માટે ઉપલબ્ધ શીશીઓની સંખ્યા y છે. M_1 માટેની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 8 તથા M_2 ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 7 હોવાથી, મળતું હેતુલક્ષી વિધેય (મહત્તમ મૂલ્ય માટે)

$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$ છે.

નીચેની મર્યાદાઓને અધીન, હેતુલક્ષી વિધેય મહત્તમ થવું જોઈએ. (સુરેખ આયોજન પરનું પ્રકરણ 12 જુઓ.)

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots(1)$$

પગલું 3 : છાયાંકિત પ્રદેશ OPQRST એ (1)માં આપેલ મર્યાદાઓ માટેનો શક્ય ઉકેલ પ્રદેશ છે. શિરોબિંદુઓ O, P, Q, R, S તથા T અનુક્રમે (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) અને (0, 40000) છે.



આકૃતિ A.2.3

આપણે નોંધીએ કે,

O(0, 0) = 0 આગળ Z = 0

P(20000, 0) આગળ $Z = 8 \times 20000 = 160000$

Q(20000, 6000) આગળ $Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$

R(10500, 34500) આગળ $Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

S(5000, 40000) આગળ $Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

T(0, 40000) આગળ $Z = 7 \times 40000 = 280000$

આથી, સ્પષ્ટ છે કે, $x = 10500$ અને $y = 34500$ આગળ મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય છે તથા મહત્તમ નફાનું મૂલ્ય ₹ 325500 છે. આથી, દવા-નિર્માતાએ મહત્તમ નફો ₹ 325500 પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવા M_1 ની 10500 શીશીઓ તથા M_2 ની 34500 શીશીઓનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : ધારો કે કોઈ એક કંપની એક નવી બનાવટનું ઉત્પાદન કરવા અંગે વિચારે છે, પરંતુ તે માટે કેટલીક કિંમતો (નિર્ધારિત અને ચલિત) લાગુ પડે છે. તેમજ કંપની તે બનાવટને કોઈ ચોક્કસ કિંમતે વેચવાની યોજના તૈયાર કરે છે, તો કંપનીને થતી નફાકારકતા ચકાસી શકાય તે માટેનું ગાણિતિક મૉડેલ તૈયાર કરો.

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિ સંપૂર્ણપણે સ્પષ્ટ છે.

પગલું 2 : સૂત્રીકરણ : અહીં નિર્ધારિત તથા ચલિત એમ બે પ્રકારની કિંમતો લાગુ પડે છે તેમ આપેલ છે. નિર્ધારિત કિંમત એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યાથી સ્વતંત્ર છે. (ઉદાહરણ તરીકે, ભાડું, દર વગેરે) જ્યારે ચલિત કિંમત ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા વધે તેમ વધે છે. (ઉદાહરણ તરીકે, સામગ્રી). શરૂઆતમાં આપણે ધારીશું કે, ચલિત કિંમત એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે - તેનાથી આપણું મૉડેલ સરળતાથી તૈયાર થશે. કંપની તેની ઉત્પાદિત વસ્તુના વેચાણ દ્વારા કોઈ ચોક્કસ નાણાકીય રકમ કમાય અને તેને તે મહત્તમ કરવા ઇચ્છે. સરળતા ખાતર આપણે ધારીશું કે ઉત્પાદિત થયેલ તમામ એકમ તુરત જ વેચાઈ જાય છે.

ગાણિતિક મૉડેલ :

ધારો કે, x = ઉત્પાદિત થયેલ અને વેચાણ થયેલ એકમોની સંખ્યા

C = કુલ ઉત્પાદન-ખર્ચ (રૂપિયામાં)

I = વેચાણ દ્વારા થતી આવક (રૂપિયામાં)

P = નફો (રૂપિયામાં)

ઉપર દર્શાવેલ આપણી ધારણાઓ પ્રમાણે C બે ભાગને સમાવે છે.

(i) નિર્ધારિત કિંમત = a (રૂપિયામાં)

(ii) ચલિત કિંમત = b (રૂપિયા/ઉત્પાદિત એકમ)

આથી, $C = a + bx$ ...(1)

વળી, આવક I એ વેચાણકિંમત s (રૂપિયા/એકમ) પર આધારિત છે.

આથી, $I = sx$ ...(2)

આવક તથા ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત નફો P દર્શાવે છે.

આથી, $P = I - C$

$= sx - (a + bx)$

$= (s - b)x - a$ ...(3)

હવે આપણને ચલિત રાશિઓ x, C, I, P, a, b, s તથા સમીકરણો (1)થી (3) વચ્ચેના પારસ્પરિક સંબંધો દર્શાવતું ગાણિતિક મૉડેલ પ્રાપ્ત થશે. આ તમામ ચલને નીચે પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકાય :

સ્વતંત્ર ચલ	x
અવલંબી ચલ	C, I, P
પ્રચલો	a, b, s

જો નિર્માતાને x, a, b, s જ્ઞાત હોય, તો P નક્કી કરી શકે.

પગલું 3 : (3) પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, સરભર બિંદુ (એટલે કે નહિ નફો, નહિ નુકસાન) માટે P = 0 એટલે $x = \frac{a}{s-b}$ એકમ.

પગલું 4 અને 5 : સરભર બિંદુના સંદર્ભમાં, આપણે તારવી શકીએ કે, જો કંપની ઓછા એકમનું ઉત્પાદન કરે એટલે કે, $x = \frac{a}{s-b}$ એકમ કરતાં ઓછા એકમનું ઉત્પાદન કરે, તો કંપનીને નુકસાન થશે અને જો કંપની વધુ એકમનું ઉત્પાદન કરે એટલે કે $\frac{a}{s-b}$ કરતાં વધુ એકમોનું ઉત્પાદન કરે, તો કંપનીને વધુ નફો પ્રાપ્ત થશે. વધુમાં, જો સરભર બિંદુ અવાસ્તવિક સાબિત થાય, તો અન્ય મૉડેલ બનાવવા પ્રયત્ન કરી શકાય અથવા રોકડ વ્યવહારને સંબંધિત આપણી ધારણામાં ફેરફાર કરી શકાય.

નોંધ : (3) પરથી, $\frac{d\text{P}}{dx} = s - b$

એટલે કે, x ને સાપેક્ષ P માં થતા ફેરફારનો દર રાશિ $s - b$ પર આધારિત છે. તે વેચાણકિંમત અને પ્રત્યેક ઉત્પાદનની ચલિત કિંમતના તફાવત જેટલો છે. આથી, નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે આ તફાવત ધન હોવો જરૂરી છે. તથા વધુ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે એક જ સમયે વિશાળ સંખ્યામાં એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ અથવા ચલિત કિંમત ન્યૂનતમ કરવાનો પ્રયત્ન કરવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ધારો કે એક ટાંકીમાં 1000 લિટર લવણજળ સમાયેલું છે. તેમાં પ્રતિ લિટરે 250 ગ્રામ મીઠું સમાયેલું છે. પ્રતિ લિટરે 200 ગ્રામ મીઠું સમાવતા લવણજળને પ્રતિ મિનિટ 25 લિટરના દરેથી ટાંકીમાં રેડવામાં આવે છે અને આ જ દરથી ટાંકીમાંથી બહાર કાઢવામાં આવે છે. ધારો કે પ્રત્યેક ક્ષણે મિશ્રણને એકસરખી રીતે હલાવવામાં આવે છે, તો કોઈ t સમયે ટાંકીમાં રહેલા મીઠાનું પ્રમાણ શું હશે ?

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિને સરળતાથી જાણી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે $y = y(t)$ એ આંતરપ્રવાહ અને બહિર્પ્રવાહ શરૂ થયા પછી કોઈ t સમયે (મિનિટમાં), ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ (કિલોગ્રામમાં) દર્શાવે છે. વધુમાં, ધારો કે y એ વિકલનીય વિધેય છે.

જ્યારે $t = 0$ એટલે કે, લવણજળનો આંતરપ્રવાહ - બહિર્પ્રવાહ શરૂ થાય તે પહેલાં,

$y = 250$ ગ્રામ $\times 1000 = 250$ કિલોગ્રામ

આપણે નોંધીએ કે મિશ્રણના આંતરપ્રવાહ તથા બહિર્પ્રવાહને કારણે y માં ફેરફાર ઉદ્‌ભવે છે.

હવે, લવણજળનો આંતરપ્રવાહ 5 કિલોગ્રામ પ્રતિ મિનિટના દરે ટાંકીમાં મીઠું લાવે છે (કારણ કે, 25×200 ગ્રામ $= 5$ કિલોગ્રામ) તથા બહિર્પ્રવાહ $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ કિલોગ્રામ પ્રતિમિનિટના દરે ટાંકીમાંથી મીઠું બહાર લઈ જાય છે. (t સમયે ટાંકીમાં $\frac{y}{1000}$ કિલોગ્રામ મીઠું છે.)

આથી, t ની સાપેક્ષે મીઠાના પ્રમાણમાં થતા ફેરફારનો દર

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40}$$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. (શા માટે ?)

અથવા $$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad ...(1)$$

આ પરિણામ આપેલ સમસ્યા માટે એક ગાણિતિક મૉડેલ આપશે.

પગલું 3 : સમીકરણ (1) સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે અને તેને સરળતાથી ઉકેલી શકાય છે. સમીકરણ (1)નો ઉકેલ

$$y \cdot e^{\frac{t}{40}} = 200\, e^{\frac{t}{40}} + c$$ અથવા

$$y(t) = 200 + ce^{-\frac{t}{40}} \qquad ...(2)$$

દ્વારા આપી શકાય, જ્યાં c એ સંકલનનો અચળ છે. નોંધીશું કે, જ્યારે $t = 0$, ત્યારે $y = 250$

$\therefore$ $250 = 200 + c$ અથવા

$c = 50$

$\therefore$ સમીકરણ (2) પરથી, $y = 200 + 50e^{-\frac{t}{40}}$ ...(3)

અથવા $$\frac{y-200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

અથવા $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

$$\therefore \quad t = 40 \log_e\left(\frac{50}{y-200}\right) \qquad ...(4)$$

અહીં, સમીકરણ (4), ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ y કિલોગ્રામ હોય ત્યારે મળતો સમય દર્શાવે છે.

પગલું 4 : (3) પરથી, $e^{-\frac{t}{40}}$ હંમેશાં ધન હોય છે. આપણે તારવી શકીએ કે પ્રત્યેક સમયે $y > 200$ છે. આથી ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનો ન્યૂનતમ જથ્થો 200 કિલોગ્રામ છે.

વળી, (4) પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, જો $0 < y - 200 < 50$ હોય તો અને માત્ર તો જ $t > 0$ એટલે કે, જો $200 < y < 250$ હોય, તો અને માત્ર તો જ લવણજળનો આંતરપ્રવાહ અને બહિર્પ્રવાહ શરૂ થયા પછી ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ (જથ્થો) 200 કિલોગ્રામથી 250 કિલોગ્રામની વચ્ચે છે.

ગાણિતિક મૉડેલની મર્યાદાઓ :

અત્યાર સુધીમાં ઘણાં ગાણિતિક મૉડેલ્સ વિકસાવવામાં આવ્યા છે અને અનેકવિધ પરિસ્થિતિઓને ઊંડાણપૂર્વક સમજી શકાય તે માટે તેનો સફળતાપૂર્વક ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. કેટલાક વિષયો જેવા કે ગાણિતિક ભૌતિકશાસ્ત્ર, ગાણિતિક અર્થશાસ્ત્ર, ક્રિયાત્મક સંશોધન, જીવ-ગણિતશાસ્ત્ર વગેરે લગભગ ગાણિતિક મૉડેલિંગના પર્યાય જેવાં છે.

પરંતુ, આજે પણ ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી છે કે, જેના મૉડેલ હજુ બનાવવાના બાકી છે. જેની પાછળનું કારણ એ છે કે કાં તો પરિસ્થિતિ ખૂબ જ જટિલ છે અથવા તો ગાણિતિક રીતે મૉડેલ વિકસાવવું અશક્ય હોય.

પરિસ્થિતિઓની સંખ્યા ઘણી મોટી હોય (અથવા જટિલ પરિસ્થિતિ હોય) તોપણ આપણે શક્તિશાળી કમ્પ્યૂટરો અને અતિસક્ષમ (સુપર) કમ્પ્યૂટરના વિકાસને કારણે ગાણિતિક મૉડેલ બનાવવા માટે સક્ષમ છીએ. અતિ ઝડપી અને અદ્યતન કમ્પ્યૂટરના કારણે આપણે વધુ વાસ્તવિક મૉડેલની રચના કરી શકીએ છીએ કે જે અવલોકનોની સાથે વધુ સારો હકારાત્મક અભિગમ આપી શકે.

આપણી પાસે ગાણિતિક મૉડેલ માટે ઉપયોગમાં લીધેલ ચલ કે પ્રચલની અંદાજિત કિંમતો (મૂલ્યાંકન) કે પસંદગી માટેનું યોગ્ય માર્ગદર્શન નથી તેમ છતાં પણ, હકીકતે આપણે પાંચ કે છ ચલ કે પ્રચલની પસંદગી દ્વારા માહિતીને અનુરૂપ યથાર્થ મૉડેલ તૈયાર કરી શકીએ છીએ. તેના યોગ્ય મૂલ્યાંકન માટે ચલ/પ્રચલની સંખ્યા ન્યૂનતમ રાખવી જોઈએ.

જટિલ કે બૃહદ પરિસ્થિતિઓના ગાણિતિક મૉડેલિંગને તેની પોતાની વિશિષ્ટ સમસ્યાઓ હોય છે. સામાન્ય રીતે આ પ્રકારની પરિસ્થિતિઓ પર્યાવરણ, સમુદ્રવિજ્ઞાન, વસતીનિયંત્રણ વગેરેના વૈશ્વિક મૉડેલના અભ્યાસ દરમિયાન ઉદ્‌ભવે છે. શિક્ષણની શાખાઓ જેવી કે ગણિત, કમ્પ્યૂટર વિજ્ઞાન, ભૌતિકવિજ્ઞાન, ઇજનેરીવિદ્યા, સમાજશાસ્ત્ર વગેરે સાથે સંકળાયેલા ગાણિતિક નિદર્શકો આ પરિસ્થિતિને હિંમતપૂર્વક પડકારની જેમ સ્વીકારે છે.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

(ii) સ્વવાચક નથી અને સંમિત નથી પરંતુ પરંપરિત છે.

(iii) સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(iv) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.

(v) (a) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.

(b) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.

(c) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

(d) સ્વવાચક અને સંમિત નથી પરંતુ પરંપરિત છે.

(e) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

3. સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

5. સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

9. (i) $\{1, 5, 9\}$ (ii) $\{1\}$

12. T_1 એ T_3 ને સંબંધિત છે.

13. તમામ ત્રિકોણોનો ગણ

14. રેખાઓ $y = 2x + c$, $c \in R$ નો ગણ

15. B

16. C

સ્વાધ્યાય 1.2

1. ના

2. (i) એક-એક વિધેય છે, પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(ii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(iii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(iv) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(v) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

7. (i) એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(ii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

9. ના

10. હા

11. D

12. A

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$

3. (i) $(gof)(x) = |\,5\,|x|-2\,|$, $(fog)(x) = |\,5x-2\,|$ (ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

4. $f^{-1} = f$

5. (i) ના, કારણ કે, f અનેક-એક વિધેય છે.

(ii) ના, કારણ કે g અનેક-એક વિધેય છે.

(iii) હા, કારણ કે, h એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

6. $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$; $y \neq 1$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

7. $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

11. $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

13. C

14. B

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (i) ના (ii) હા (iii) હા (iv) હા (v) હા

2. (i) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

(ii) * એ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે, પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(iii) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(iv) * એ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે, પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(v) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

(vi) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

3.

^	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ અને $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) હા (iii) 1 **5.** હા

6. (i) $5 * 7 = 35,\ 20 * 16 = 80$ (ii) હા (iii) હા (iv) 1 (v) 1 **7.** ના

8. * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. * ને N માં કોઈ એકમ ઘટક નથી.

9. (ii), (iv), (v) ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે. (v) જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે

10. (v) **11.** એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

12. (i) અસત્ય (ii) સત્ય **13.** B

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. $g(y) = \dfrac{y-7}{10}$ **2.** $f^{-1} = f$

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** ના **10.** $n\,!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$ (ii) F^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી. **12.** ના

15. હા **16.** A **17.** B **18.** B **19.** B

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $\dfrac{-\pi}{6}$ **2.** $\dfrac{\pi}{6}$ **3.** $\dfrac{\pi}{6}$ **4.** $\dfrac{-\pi}{3}$

5. $\dfrac{2\pi}{3}$ **6.** $\dfrac{-\pi}{4}$ **7.** $\dfrac{\pi}{6}$ **8.** $\dfrac{\pi}{6}$

9. $\dfrac{3\pi}{4}$ **10.** $\dfrac{-\pi}{4}$ **11.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **12.** $\dfrac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

સ્વાધ્યાય 2.2

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ **6.** $\frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x$ **7.** $\frac{x}{2}$ **8.** $\frac{\pi}{4} - x$

9. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ **10.** $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** 0

13. $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\frac{\pi}{3}$

17. $\frac{-\pi}{4}$ **18.** $\frac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

21. B

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

1. $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **13.** $x = \frac{\pi}{4}$ **14.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. D **16.** C **17.** C

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) 19, 35, -5, 12, $\frac{5}{2}$

2. 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2, 24×1; 1×13, 13×1

3. 1×18, 2×9, 3×6, 6×3, 9×2, 18×1; 1×5, 5×1

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1$, $y = 4$, $z = 3$

(ii) $x = 4$, $y = 2$, $z = 0$ અથવા $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$

(iii) $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$

7. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B - C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3, y = -4$ **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

19. (a) ₹ 15,000, ₹ 15,000 (b) ₹ 5000, ₹ 25,000

20. ₹ 20,160 **21.** A **22.** B

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

સ્વાધ્યાય 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

6. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **7.** $x = -1$ **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) બજાર I માં થતી કુલ આવક = ₹ 46,000; બજાર II માં થતી કુલ આવક = ₹ 53,000
(b) ₹ 15,000; ₹ 17,000

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1 (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) -12 (ii) 46 (iii) 0 (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$ (ii) $x = 2$ **8.** B

સ્વાધ્યાય 4.2

15. C **16.** C

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$ (ii) $\frac{47}{2}$ (iii) 15

3. (i) 0, 8 (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$ (ii) $x - 3y = 0$ **5.** D

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) $M_{11} = 3$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = -4$, $M_{22} = 2$, $A_{11} = 3$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d$, $M_{12} = b$, $M_{21} = c$, $M_{22} = a$

$A_{11} = d$, $A_{12} = -b$, $A_{21} = -c$, $A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$, $M_{21} = 0$, $M_{22} = 1$, $M_{23} = 0$, $M_{31} = 0$, $M_{32} = 0$, $M_{33} = 1$

$A_{11} = 1$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 0$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11$, $M_{12} = 6$, $M_{13} = 3$, $M_{21} = -4$, $M_{22} = 2$, $M_{23} = 1$, $M_{31} = -20$, $M_{32} = -13$, $M_{33} = 5$

$A_{11} = 11$, $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = -20$, $A_{32} = 13$, $A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x - y)(y - z)(z - x)$ **5.** D

સ્વાધ્યાય 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

14. $a = -4,\ b = 1$

15. $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

17. B

18. B

સ્વાધ્યાય 4.6

1. સુસંગત

2. સુસંગત

3. સુસંગત નથી

4. સુસંગત

5. સુસંગત નથી.

6. સુસંગત

7. $x = 2,\ y = -3$

8. $x = \frac{-5}{11},\ y = \frac{12}{11}$

9. $x = \frac{-6}{11},\ y = \frac{-19}{11}$

10. $x = -1,\ y = 4$

11. $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{-3}{2}$

12. $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$

13. $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

14. $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

15. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix},\quad x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

16. 1 કિલોગ્રામ ડુંગળીની કિંમત = ₹ 5

1 કિલોગ્રામ ઘઉંની કિંમત = ₹ 8

1 કિલોગ્રામ ચોખાની કિંમત = ₹ 8

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 4

3. 1

5. $x = \frac{-a}{3}$

7. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $-2(x^3 + y^3)$

10. xy

16. $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$

17. A

18. A

19. D

સ્વાધ્યાય 5.1

2. f એ $x = 3$ આગળ સતત છે.

3. તમામ (a), (b), (c) તથા (d) સતત વિધેયો છે.

5. f એ $x = 0$ અને $x = 2$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

6. $x = 2$ આગળ અસતત

7. $x = 3$ આગળ અસતત

8. $x = 0$ આગળ અસતત

9. કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી.

10. કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી.

11. કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી. **12.** f એ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

13. f એ $x = 1$ આગળ અસતત છે. **14.** f એ $x = 1$ અને $x = 3$ આગળ અસતત છે.

15. માત્ર $x = 1$ આગળ જ અસતત છે. **16.** સતત **17.** $a = b + \frac{2}{3}$

18. λ ની કોઈ પણ કિંમત માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત નથી, પરંતુ f એ λ ની કોઈ પણ કિંમત માટે $x = 1$ આગળ સતત છે.

20. f એ $x = \pi$ આગળ સતત છે. **21.** (a), (b) તથા (c) તમામ સતત

22. $\forall x \in R$, *cos* વિધેય સતત છે; $x = n\pi$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *cosec* વિધેય સતત છે; $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *sec* વિધેય સતત છે તથા $x = n\pi$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *cot* વિધેય સતત છે.

23. કોઈ પણ સંખ્યા માટે અસતત નથી. **24.** હા, $\forall x \in R$, f સતત વિધેય છે.

25. $\forall x \in R$, f સતત વિધેય છે. **26.** $k = 6$ **27.** $k = \frac{3}{4}$ **28.** $k = \frac{-2}{\pi}$

29. $k = \frac{9}{5}$ **30.** $a = 2, b = 1$

34. કોઈ પણ સંખ્યા માટે અસતત નથી.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $2x \cos (x^2 + 5)$ **2.** $-\cos x \sin (\sin x)$ **3.** $a \cos (ax + b)$

4. $$\frac{\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

5. $a \cos (ax + b) \sec (cx + d) + c \sin (ax + b) \tan (cx + d) \sec (cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\frac{-2\sqrt{2}x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$ **8.** $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $\frac{\cos x - 2}{3}$ **2.** $\frac{2}{\cos y - 3}$ **3.** $-\frac{a}{2by + \sin y}$

4. $\frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$ **5.** $-\frac{(2x + y)}{(x + 2y)}$ **6.** $-\frac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$

7. $\frac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$ **8.** $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ **9.** $\frac{2}{1 + x^2}$

10. $\frac{3}{1 + x^2}$ **11.** $\frac{2}{1 + x^2}$ **12.** $\frac{-2}{1 + x^2}$

13. $\frac{-2}{1 + x^2}$ **14.** $\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$ **15.** $-\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in Z$

2. $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1, 1)$

3. $3x^2 e^{x^3}$

4. $-\dfrac{e^{-x} \cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x, \ e^x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in N$

6. $e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x > 0$

8. $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$

9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$

10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right) \sin(\log x + e^x), x > 0$

સ્વાધ્યાય 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x \ [\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

4. $x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x} \cos x \log 2$

5. $(x + 3)(x + 4)^2(x + 5)^3(9x^2 + 70x + 133)$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1 + \log x \cdot \log(\log x)] + 2x^{\log x - 1} \cdot \log x$

8. $(\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] + (\sin x)^{\cos x}[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$

10. $x^{x \cos x}[\cos x \cdot (1 + \log x) - x \sin x \log x] - \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x \cos x)^x \ [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1}+y^{x}\log y}{x^{y}\log x+xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\dfrac{y(x-1)}{x(y-1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1)=120$

17. $5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$

સ્વાધ્યાય 5.6

1. t^2

2. $\dfrac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$

6. $-\cot\dfrac{\theta}{2}$

7. $-\cot 3t$

8. $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

10. $\tan\theta$

સ્વાધ્યાય 5.7

1. 2

2. $380\,x^{18}$

3. $-x\cos x-2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$

5. $x(5+6\log x)$

6. $2e^x(5\cos 5x-12\sin 5x)$

7. $9\,e^{6x}(3\cos 3x-4\sin 3x)$

8. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$

10. $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\operatorname{cosec}^2 y$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

1. $27(3x^2-9x+5)^8(2x-3)$

2. $3\sin x\cos x(\sin x-2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x}-6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$

5. $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2x+7}}+\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$

7. $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log(\log x)}{x}\right],\ x>1$

8. $(a\sin x-b\cos x)\sin(a\cos x+b\sin x)$

9. $(\sin x-\cos x)^{\sin x-\cos x}(\cos x+\sin x)(1+\log(\sin x-\cos x)),\ \sin x>\cos x$

10. $x^x(1+\log x)+ax^{a-1}+a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

12. $\frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\frac{sec^3 t}{at}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (a) 6π સેમી^{2}/સેમી (b) 8π સેમી^{2}/સેમી

2. $\frac{8}{3}$ સેમી^{2}/સે **3.** 60π સેમી^{2}/સે **4.** 900 સેમી^{3}/સે

5. 80π સેમી^{2}/સે **6.** 1.4π સેમી/સે

7. (a) –2 સેમી/મિનિટ (b) 2 સેમી^{2}/મિનિટ

8. $\frac{1}{\pi}$ સેમી/સે **9.** 400π સેમી^{3}/સેમી **10.** $\frac{8}{3}$ સેમી/સે

11. (4, 11) અને $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π સેમી^{3}/સે

13. $\frac{27}{8}\pi\ (2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ સેમી/સે **15.** ₹ 20.967

16. ₹ 208 **17.** B **18.** D

સ્વાધ્યાય 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ માટે ચુસ્ત ઘટતું અને $x > -1$ માટે ચુસ્ત વધતું

(b) $x > \frac{-3}{2}$ માટે ચુસ્ત ઘટતું અને $x < \frac{-3}{2}$ માટે ચુસ્ત વધતું

(c) $-2 < x < -1$ માટે ચુસ્ત વધતું અને $x < -2$ તથા $x > -1$ માટે ચુસ્ત ઘટતું

(d) $x < \frac{-9}{2}$ માટે ચુસ્ત વધતું અને $x > \frac{-9}{2}$ માટે ચુસ્ત ઘટતું

(e) (1, 3) અને $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું તથા $(-\infty, -1)$ અને (–1, 1) માં ચુસ્ત ઘટતું

8. $0 < x < 1$ અને $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a = -2$ **19.** D

સ્વાધ્યાય 6.3

1. 764 **2.** $\frac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

5. 1 **6.** $\frac{-a}{2b}$ **7.** (3, –20) અને (–1, 12)

8. (3, 1) **9.** (2, –9)

10. (i) $y + x + 1 = 0$ અને $y + x - 3 = 0$

11. વક્રને 2 ઢાળવાળો કોઈ સ્પર્શક ન મળે.

12. $y = \frac{1}{2}$ **13.** (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$

14. (i) સ્પર્શક : $10x + y = 5$; અભિલંબ : $x - 10y + 50 = 0$

(ii) સ્પર્શક : $y = 2x + 1$; અભિલંબ : $x + 2y - 7 = 0$

(iii) સ્પર્શક : $y = 3x - 2$; અભિલંબ : $x + 3y - 4 = 0$

(iv) સ્પર્શક : $y = 0$; અભિલંબ : $x = 0$

(v) સ્પર્શક : $x + y - \sqrt{2} = 0$; અભિલંબ : $x = y$

15. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$

17. $(0, 0)$, $(3, 27)$ **18.** $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$

19. $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my - am^2(2 + 3m^2) = 0$

21. $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

22. $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$

24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

25. $48x - 24y = 23$ **26.** D **27.** A

સ્વાધ્યાય 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8

(iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875

(vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009

(x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.984

(xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

2. 28.21 **3.** –34.995 **4.** $0.03\ x^3$ મી^{3} **5.** $0.12\ x^2$ મી^{2}

6. $3.92\ \pi$ મી^{3} **7.** $2.16\ \pi$ મી^{2} **8.** D **9.** C

સ્વાધ્યાય 6.5

1. (i) ન્યૂનતમ કિંમત = 3 (ii) ન્યૂનતમ કિંમત = –2

(iii) મહત્તમ કિંમત = 10 (iv) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

2. (i) ન્યૂનતમ કિંમત = –1, મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(ii) મહત્તમ કિંમત = 3, ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

(iii) ન્યૂનતમ કિંમત = 4, મહત્તમ કિંમત = 6

(iv) ન્યૂનતમ કિંમત $= 2$, મહત્તમ કિંમત $= 4$

(v) ન્યૂનતમ કે મહત્તમ કિંમત ન મળે.

3. (i) $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 0$

(ii) $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -2$

$x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= 2$

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= \sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= 19$

$x = 3$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 15$

(vi) $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 2$

(vii) $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= \frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) (નિરપેક્ષ) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -8$; વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય $= 8$

(ii) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -1$; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $= \sqrt{2}$

(iii) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -10$; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $= 8$

(iv) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 3$; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $= 19$

6. મહત્તમ નફો $= 113$ એકમ

7. $x = 2$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -39$

$x = 0$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; મહત્તમ મૂલ્ય $= 25$

8. $x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ

9. મહત્તમ મૂલ્ય $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય $= 89$

$x = -2$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય $= 2\pi$

$x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે, ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 0$

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 સેમી **18.** $x = 5$ સેમી

21. ત્રિજ્યા $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી અને ઊંચાઈ $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી

22. $\frac{112}{\pi + 4}$ સેમી; $\frac{28\pi}{\pi + 4}$ સેમી **27.** A **28.** D **29.** C

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. (a) 0.677 (b) 0.497 **3.** $b\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

4. $x + y - 3 = 0$

6. (i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x < -1$ અને $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **9.** ₹ 1000

11. લંબાઈ $= \frac{20}{\pi + 4}$ મીટર; પહોળાઈ $= \frac{10}{\pi + 4}$ મીટર

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે.

(ii) $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે.

(iii) $x = -1$ આગળ નતિબિંદુ

14. વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $= \frac{5}{4}$; વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 1$

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **19.** A **20.** B **21.** A

22. B **23.** A **24.** A