باب 14

شماریات (STATISTICS)

14.1 تعارف (Introduction)

روزانہ ہمیں عددی حقیقتیں اشکال، جدول اور گراف وغیرہ کی شکل میں بہت سی اہم اطلاعات ملتی ہیں۔ یہ اطلاعات ہمیں اخبار، ٹی وی، میگزین اور دوسرے ترسیل کے ذرائع سے حاصل ہوتی ہیں۔ ان کا تعلق کرکٹ میں بالنگ اور بلے بازی، کسی کمپنی کا منافع، شہروں کے درجۂ حرارت، پنج سالہ منصوبہ میں مختلف سیکٹر میں ہوئے اخراجات، الیکشن کے نتائج وغیرہ سے ہوتا ہے۔ یہ اشکال یا حقیقتیں جو عددی ہوتی ہیں، ان کو ایک خاص مقصد کے لئے اکھٹا کیا جاتا ہے آنکڑے کہلاتے ہیں۔ آپ کے لئے لفظ اعداد و شمار، نیا نہیں ہے۔ آپ پچھلی جماعتوں میں اعداد و شمار اور ان کے بارے میں کافی کچھ جان چکے ہیں۔

یہ دنیا اب بہت سی اہم اطلاعات سے پُر ہے۔ ہماری زندگی کے ہر حصہ میں آنکڑے کسی نہ کسی شکل میں استعمال ہوتے ہیں۔ اس لئے ہمارے لئے یہ ضروری ہوگیا ہے کہ یہ جانیں کہ اعداد و شمار سے کس طرح اہم اطلاعات فراہم کی جاتی ہیں۔ سے اس طرح سے اہم اطلاعات فراہم کرنے کو ہم ریاضی کی ایک اہم شاخ شماریات میں پڑھتے ہیں۔

لفظ شماریات، ایک لاطینی لفظ (status) سے لیا گیا ہے جس کے معنی ہیں، ایک صوبہ (سیاسی) ابتدا میں شماریات صرف لوگوں کی زندگی کے مختلف پہلوؤں کے بارے میں آنکڑے اکھٹا کرنا جو صوبہ کے لیے مفید ہوں، لیکن کافی عرصہ سے اس کا اسکوپ بڑھ گیا ہے۔ شماریات کا مقصد صرف آنکڑے اکھٹا کرنے تک ہی محدود نہیں ہے بلکہ ان کی ترجمانی اور ان سے نتائج اخذ کرنا بھی ہے۔ شماریات کا کام اعداد و شمار کو اکھٹا کرنا ان کو منظّم کرنا ان کا تجزیہ کرنا اور ترجمانی کرنا ہے۔ لفظ شماریات کے مختلف context n میں مختلف معنی ہوتے ہیں۔ آیئے مندرجہ ذیل جملوں پر غور کرتے ہیں:

1. کیا میں Educational Statistics of India کی سب سے بعد میں چھپی کاپی لے سکتا ہوں۔

© NCERT not to be republished

2. میں Statistic (شماریات) کا مطالعہ کرنا پسند کرتا ہوں کیوں کہ روزمرہ کی زندگی میں اسکا استعمال ہوتا ہے۔

پہلے جملہ میں شماریات جمع کے مفہوم میں استعمال ہوا ہے جس کے معنی ہیں اعداد وشمار جس میں ہندوستان کے بہت سے تعلیمی ادارے اور مختلف صوبوں میں خواندگی شرح وغیرہ شامل ہیں۔ دوسرے جملہ میں لفظ شماریات ایک واحد اسم کے طور پر استعمال ہوا ہے جس کہ معنی ہیں وہ مضمون جس میں ہم آنکڑوں کو اکھٹا کرنا' انکوپیش کرنا' ان کا تجزیہ کرنا اور ان سے بامعنی نتائج اخذ کرنا' کے بارے میں پڑھتے ہیں۔ اس باب میں بھی ہم آنکڑوں سے متعلق بہت سے اہم پہلوؤں پر غور وخوض کریں گے۔

14.2 اعداد وشمار کو اکھٹا کرنا (Collection of Data)

آیئے ہم اعداد وشمار جمع کرنے کے مندرجہ ذیل مشغلہ سے شروع کرتے ہیں۔

مشغلہ 1: اپنے کلاس کے تمام طلباء کو چار گروپ میں بانٹو۔ ہر گروپ کو مندرجہ ذیل میں دئے گئے مختلف قسم کے اعداد وشمار میں سے ایک کو جمع کرنے کا کام دیجیے

(i) آپ کی کلاس کے 20 طلباء کی اونچائی

(ii) ایک مہینہ میں آپ کی کلاس میں غیر حاضر رہنے والے طلباء کی تعداد۔

(iii) آپ کے کلاس کے ساتھیوں کے خاندان میں کل افراد کی تعداد۔

(iv) اسکول کے چاروں طرف پھیلے ہوئے 15 پودوں کی اونچائی۔

آیئے طلباء کے ذریعہ جمع کئے گئے نتائج کو دیکھتے ہیں۔ ہر ایک گروپ نے اعداد وشمار کو کس طرح اکھٹا کیا؟

(i) کیا انھوں نے معلومات حاصل کرنے کے لئے متعلقہ طالب علم' گھر یا شخص سے اطلاعات اکھٹی کیں۔

(ii) کیا انھوں نے کسی اور ذرائع جیسے اسکول کے ریکارڈ سے اطلاعات حاصل کیں۔

پہلی حالت میں جب چھان بین کرنے والا خود ذہن میں کسی خاص مقصد کو رکھ کر اطلاعات فراہم کرتا ہے۔ اس طرح سے حاصل اعداد وشمار ابتدائی اعداد وشمار (Primary Data) کہلاتے ہیں۔ دوسری حالت میں جب اطلاعات ایسے ذرائع سے اکھٹا کی جائے جہاں وہ پہلے ہی سے جمع ہوتی ہے۔ ثانوی اعداد وشمار (Secondary Data) کہلاتے ہیں خاص طور سے اس بات کا زیادہ خیال رکھنا چاہئے کہ وہ ذرائع جن سے اطلاعات جمع کی جائیں قابل اعتماد ہوں۔ اب تک آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ آنکڑوں کو کس طرح اکھٹا کیا جاتا ہے اور ابتدائی اور ثانوی آنکڑوں میں کیا فرق ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

مشق 14.1

1. ایسے پانچ آنکڑوں کی مثالیں دیجیے جن کو آپ روزمرّہ زندگی سے جمع کرسکتے ہوں۔
2. درج بالا آنکڑوں کی درجہ بندی ابتدائی اور ثانوی اعداد وشمار کے طور پر کیجیے۔

14.3 اعداد وشمار کو پیش کرنا

جیسے ہی اعداد وشمار اکھٹا کرنے کا کام ختم ہوتا ہے۔ چھان بین کرنے والے کو وہ طریقہ معلوم کرنے چاہئیں جن کی مدد سے وہ ان اعداد وشمار کو با معنی انداز میں پیش کرسکے تاکہ ایک ہی نظر میں اس کے خاص نقاط کو آسانی سے سمجھا جاسکے۔ اسے اب کچھ مثالوں سے اعداد وشمار کو پیش کرنے کے طریقوں کو دہراتے ہیں۔

مثال 1: ریاضی کی ایک جانچ سیٹ میں 10 طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ مندرجہ ذیل نمبروں پر غور کیجیے

55	36	95	73	60	42	25	78	75	62

اس شکل میں اعداد وشمار خام آنکڑے کہلاتے ہیں

ان اعداد وشمار کو دیکھ کر کیا آپ سب سے زیادہ اور سب سے کم نمبر معلوم کرسکتے ہیں۔ کیا آپ کو سب سے زیادہ اور سب سے کم اس کو جاننے میں کچھ وقت لگا؟ کیا ان میں اس وقت کم وقت نہیں لگتا جب یہ گھٹتی یا بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے ہوئے ہوتے؟ آیئے ان نمبروں کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں۔

25	36	42	55	60	62	73	75	78	95

اب ہم صاف طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ سب سے کم نمبر 25 اور سب سے زیادہ نمبر 95 ہے۔ اعداد وشمار کی سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے فرق کو اعداد وشمار کی وسعت (range) کہتے ہیں۔ اس طرح اس سوال میں وسعت $95-25=70$ ہے۔

ایسی حالت میں جب کسی تجربہ میں مشاہدات کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اعداد وشمار کو گھٹتی یا بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھنا کافی دیر طلب کام ہوتا ہے۔ جیسا کہ دوسری مثال سے پتہ چلتا ہے

مثال 2: کسی اسکول کے 9ویں کلاس کے 30 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں (100 میں سے) پر غور کیجیے:

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40

© NCERT not to be republished

88	60	60	70	60	56	50	50	40	92

یاد کیجیے کہ ان طلباء کی تعداد جنھوں نے یکساں نمبر حاصل کئے ہوں ان نمبروں کا تعدد (frequencies) کہلاتا ہے مثال کے طور 70 نمبر حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد 4 ہے۔ اس لیے 70 نمبروں کا تعدد 4 ہے۔ اعداد و شمار کو مزید آسانی سے سمجھنے کے لیے ہم ایک جدول میں لکھتے ہیں جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے

جدول 14.1

طلباء کی تعداد یعنی تعداد	نمبر
1	10
1	20
3	36
4	40
3	50
2	56
4	60
4	70
1	72
1	80
2	88
3	92
1	95
30	کل

جدول 14.1 ایک غیر مرتب تعدد بٹاؤ جدول یا صرف تعداد بناؤ جدول کہلاتا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ آپ ان جدول کو بنانے کے لیے ٹیلی مارک کا استعمال کرتے ہیں۔ جیسا کہ اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے

© NCERT not to be republished

مثال 3: ون مہتسو (Van Mahotsava) کے موقع پر 100 اسکولوں میں 100 پودے لگائے گئے ایک مہینہ بعد باقی بچے پودوں کی تعداد درج ذیل ہے

98	98	33	69	65	65	32	28	67	95
92	95	69	40	40	42	38	32	42	76
42	63	65	37	62	85	83	76	83	75
92	83	76	64	52	49	81	73	65	89
82	75	82	59	83	81	79	52	68	93
83	39	42	38	36	31	62	44	90	86
68	30	85	83	76	35	23	58	56	87
83	66	75	83	39	45	43	86	83	69
42	93	89	88	27	91	66	89	75	92
36	34	83	52	49	66	55	90	69	53

اتنی بڑی مقدار والے اعداد و شمار کو پیش کرنے کے لیے ہم ان کو گروپوں میں بانٹ دیتے ہیں تا کہ ان کو آسانی سے سمجھا جا سکے جیسے 20-29، 30-39، 90-99 (کیوں کہ ہمارے آنکڑے 22 اور 99 کے درمیان میں ان گروپوں کو ہم کلاس وقفہ کہتے ہیں اور ان کا سائز کلاس سائز یا کلاس کی چوڑائی کہلاتی ہے۔ جو کہ ان مثال میں 10 ہے۔ ان کلاس وقفوں میں چھوٹا عدد نچلی کلاس حد اور بڑا عدد اوپری کلاس حد کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 20-29 میں نچلی کلاس حد 20 اور اوپری کلاس حد 29 ہے۔

یاد کیجیے کہ ٹیلی مارک کو استعمال کرکے ہم مذکورہ بالا اعداد و شمار کو کلاس وقفوں کی شکل میں درج ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں:

<table>
<tr><th>باقی بچے ہوئے پودے</th><th>ٹیلی مارکس</th><th>اسکولوں کی تعداد</th></tr>
<tr><td>20-29</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>30-39</td><td>卌 卌 ||||</td><td>14</td></tr>
<tr><td>40-49</td><td>卌 卌 ||</td><td>12</td></tr>
<tr><td>50-59</td><td>卌 |||</td><td>8</td></tr>
</table>

© NCERT not to be republished

60-69	卌 卌 卌 |||	18
70-79	卌 卌	10
80-89	卌 卌 卌 卌 |||	23
90-100	卌 卌 ||	12
کل		100

اعدادوشمار کو اس طرح سے گروپوں میں رکھنے سے ان کے بارے میں بہت سی اہم باتوں کو ایک ہی نظر میں آسانی سے بتا سکتے ہیں۔ اس کو ہم مرتب تعداد بتاؤ جدول کہتے ہیں یہاں ہم آسانی سے مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ 50 فیصد یا اس سے زیادہ پودے 8+18+6+23+12=71

71 اسکول میں باقی بچتے ہیں

ہم مشاہدہ کرتے ہیں مندرجہ بالا جدول میں کلاس وقفہ ایک دوسرے تہہ وبالا overlap نہیں کرتے۔ یہ بات نوٹ کیجیے کہ ہم کچھ بڑے کلاس وقفہ کم وقفہ اور چھوٹے کلاس وقفہ کے زیادہ وقفہ بنا سکتے تھے جن کا سائز بڑا ہو جیسے وقفہ 22-26,27-31 وغیرہ بھی ہو سکتے ہیں۔ اس میں کوئی متعین بات نہیں ہے صرف اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ کلاس وقفہ ایک دوسرے کو overlap نہ کریں۔

مثال 4: مندرجہ ذیل تعداد بتاؤ جدول پر غور کیجیے جس میں 38 طلباء کے اوزان دیے گئے ہیں

جدول 14.3

اوزان (کلوگرام میں)	طلباء کی تعداد
31-35	9
36-40	5
41-45	14
46-50	3
51-55	1
56-60	2
61-65	2
66-70	1
71-75	1
کل	38

© NCERT not to be republished

اب اگر 35.5 کلوگرام اور 40.5 کلوگرام والے دو نئے طلباء کا اس کلاس میں داخلہ ہوتا ہے تب ان کو ہم کون سے کلا۔ وقفہ میں شامل کریں گے؟ ہم ان کو 35 یا 40 پر ختم ہونے والے وقفوں میں شامل نہیں کر سکتے اور نہ ہی ان سے نیچے والوں میں ۔ یہ اس وجہ سے کہ دو لگا تار کلاسوں نچلی اور اوپری کلاس حدوں کے درمیان gap ہے۔ اس کے لیے ہمیں وقفوں کو اس طرح بانٹنا چاہئے کہ کسی وقفہ کی اوپری کلاس حد اور اس سے اگلے وقفہ کی نچلی کلاس حد یکساں ہو۔ اس کے لیے ہم کسی کلاس کی اوپری کلاس حد اور اس سے اگلی کلاس کی نچلی حد کے درمیان فرق نکال لیتے ہیں۔ پھر ہم اس فرق کے آدھے کو اوپری کلاس حد میں جمع کر دیتے ہیں۔ اور نچلی کلاس حد میں سے گھٹا دیتے ہیں

مثال کے طور پر 35-31 اور 40-36 کلاس وقفوں پر غور کیجیے۔

$36-40$ کی نچلی کلاس حد 36

$31-35$ کی اوپری کلاس حد 35

ان کا فرق $= 36 - 35 = 1$ اس لئے اس فرق کا آدھا $= \frac{1}{2} = 0.5$

اس طرح سے نئے کلاس وقفہ ہوئے (31-35) کی جگہ (35+05) (31-0.5)

30.5-35.5=

اسی طرح سے 36-40 سے بنا نیا وقفہ ہو (40+0.5) - (35-0.5)

35.5-40.5=

اسی طرح سے جاری رکھتے ہوئے جاری کلاسیں بن جاتی ہیں جو میں

30.5-35-5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50-5, 50.5-55.5, 55.5-60.5

(60.5-65.5) 65.5-70.5 70.5-75.5

اب ہمارے لئے ممکن ہے کہ ہم نئے طلباء کا وزن اس میں شامل کر سکیں۔ لیکن اب ایک نیا مسئلہ ہمارے سامنے آتا ہے کہ 35.5 دونوں کلاسوں 30.5-35.5 اور 35.5-40.5 میں نظر آتا ہے تو آپ کے لحاظ سے اس کو کس کلاس میں شامل کرنا چاہئے؟

اگر یہ دونوں کلاسوں میں شامل کیا جائے تو اس کی گنتی دوبار ہو جائے گی۔

رواج یہ ہے کہ 35.5 کو ہم 35.5-40.5 میں شامل کریں گے نہ کہ 30.5-35.5 میں۔ اس طرح سے 40.5 کو ہم 40.5-45.5 میں شامل کریں گے۔ 30.5-35.5 میں نہیں۔ اس طرح سے نئے وزنوں 35.5 کلوگرام اور 40.5 کلوگرام کی 35.5 - 40.5 اور

35.5-40.5 میں شامل کیا جائے گا۔ اب ان مفروضات کے ساتھ نئی تعدد بٹاؤ جدول مندرجہ ذیل ہے:

جدول 14.4

طلباء کی تعداد	اوزان کلوگرام
9	30.5-35.5
6	35.5-40.5
15	40.5-45.5
3	45.5-50.5
1	50.5-55.5
2	55.5-60.5
2	60.5-65.5
1	65.5-70.5
1	70.5-75.5

© NCERT not to be republished

آیئے اب ان اعداد و شمار کی طرف چلتے ہیں جن کو مشق 1 میں جمع کیا گیا تھا۔ اب آپ سے کہا جاتا ہے کہ ان کو تعدد بٹاؤ جدول میں پیش کرو۔

سرگرمی 2: انھیں چار گروپوں سے جاری کرتے ہوئے اپنے اعداد و شمار کو تعدد بٹاؤ جدول میں تبدیل کیجیے۔ اعداد و شمار کی قسم اور ان کی وسط کو ذہن میں رکھتے ہوئے مناسب سائز والے کلاس وقفہ چنئے۔

مشق 14.2

1. VIII کلاس کے 30 طلباء کا بلڈ گروپ مندرجہ ذیل میں ریکارڈ کیا گیا ہے

A,B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A,O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

ان اعداد وشمار کا اظہار تعدد بٹاؤ جدول میں کیجیے اور معلوم کیجیے کہ ان طلباء میں سب سے مشترک (عام) بلڈ گروپ کون سا ہے اور سب سے الگ یا (نایاب) بلڈ گروپ کون سا ہے

.2 40 خاتون انجینئروں کا اُن کے گھر سے ان کے کام کرنے کی جگہ کا فاصلہ کلومیٹر میں مندرجہ ذیل ہے۔

21	12	7	13	11	25	20	10	3	5
2	16	17	32	11	18	17	12	10	19
3	18	15	12	5	3	8	7	9	7
12	6	7	15	15	6	9	2	14	12

مندرجہ بالا اعداد وشمار کی 5 سائز کی مرتّب تعدد بتاؤ جدول بنائیے۔ پہلا وقفہ 5-0 (5 کو شامل نہیں ہے) لیجیے۔ اس جدولی اظہار میں آپ کیا خاص بات نوٹ کرتے ہیں؟

.3 کسی شہر کے ایک مہینہ کے 30 دنوں کی متعلق نمی (relative humidity) (فیصد میں) مندرجہ ذیل ہے۔

95.1	94.2	96.3	92.9	95.3	86.5	90.3	99.2	98.6	98.1
97.3	95.2	93.3	97.2	95.1	92.7	93.5	97.1	92.3	89.2
89	92.1	95.1	97.3	98.3	95.7	90.2	84.9	92.1	96.2

(i) مندرجہ بالا اعداد وشمار کی تعداد تقسیمی جدول درجات 88–86, 86–84 وغیرہ کی مدد سے بناتے۔

(ii) آپ کیا سوچتے ہیں کہ دئے گئے اعداد وشمار کس موسم یا کس مہینہ کے ہیں۔

(iii) مندرجہ بالا اعداد وشمار کی حد کیا ہے؟

.4 50 طلباء کی اونچائی نزدیکی سینٹی میٹروں میں مندرجہ ذیل ہے۔

151	150	162	154	161	168	165	154	150	161
170	160	172	156	154	158	165	171	164	162
164	165	168	166	165	162	170	161	159	153
166	173	161	160	162	158	156	153	152	154
159	154	153	158	159	168	167	162	159	161

© NCERT not to be republished

(i) 160-165، 165-170 وغیرہ کے کلاس وقفہ لےکران اعداد وشمار کا اظہار مرتب تعدد بٹاؤ جدول میں کیجیے۔

(ii) جدول سے ان کی اونچائیوں کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

.5 ایک مطالعہ کے ذریعہ کسی شہر کی ہوا میں سلفر ڈائی آکسائڈ ایک ملین حصّے parts per million (ppm) کی موجودگی معلوم کی گئی۔30 دن میں ملے آنکڑے مندرجہ ذیل ہیں

0.03	0.08	0.08	0.09	.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) کلاس وقفہ 0.04 - 0.00، 0.08 - 0.04 کے وقفہ لےکران اعداد وشمار کی مرتب تعدد بٹاؤ جدول بنائیے

(ii) کتنے دنوں تک سلفر ڈائی اکسائڈ کا concentration 0.11 parts per million زیادہ تھا۔

.6 تین سکّوں کو 30 ہر مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔مرتبہ آنے والے head کی تعداد کو مندرجہ ذیل میں نوٹ کیا گیا ہے۔

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

دیئے ہوئے اعداد وشمار کی تعدد بٹاؤ جدول بنائیے

.7 مندرجہ ذیل میں II کی اعشاریہ کے 50 ہندسوں تک کی قیمت دی گئی ہے۔

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) اعشاریہ کے بعد لکھے گئے 9-0 تک ہندسوں کی فہرست بنائیے اور اس کا تعدد بٹاؤ جدول بنائے

(ii) سب سے زیادہ اور سب سے کم ظاہر ہونے والے ہندسہ کیا ہیں۔

.8 بچوں سے پوچھا گیا کہ پچھلے ہفتہ ان لوگوں سے کتنے گھنٹے T.V دیکھا۔پایا گیا نتیجہ مندرجہ ذیل ہے:

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

© NCERT not to be republished

(i) 5-10 کا کلاس۔وقفہ اورکلاس کی چوڑائی 5 لیتے ہوئے ان آنکڑوں کا مرتب تعدد بٹا ؤ جدول بنا لیتے

(ii) کتنے بچوں نے ایک ہفتہ میں 15 گھنٹہ یا اس سے زیادہ T.V دیکھا۔

9. ایک کمپنی ایک خاص قسم کی کار بیٹری بناتی ہے۔ایسی 40 بیٹریوں کی عمر (سالوں میں) مندرجہ ذیل میں ریکارڈ کی گئی ہے۔

4.5	3.5	4.1	2.2	3.2	3.7	3.0	2.6
3.7	4.6	3.2	3.8	3.4	3.2	2.3	2.5
2.8	4.3	3.0	2.9	3.3	3.4	4.4	2.5
3.4	3.7	3.1	3.2	3.2	3.9	3.2	3.5
3.6	2.9	4.2	3.5	2.6	3.2	3.8	4.6

2-2.5 کے کلاس وقفوں سے شروع کرتے ہوئے 0.5 سائز کے کلاس وقفوں کے استعمال سے ان اعداد وشمار کا تعدد بٹا ؤ جدول بنائیے۔

14.4 اعداد وشمار کا گرافی اظہار (Graphical Representation of Data)

اعداد وشمار کو جدول کے ذریعہ اظہار کرنا ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں۔اب ہم اپنی توجہ ایک اور اظہار کی طرف مرکوز کرنا چاہتے ہیں یعنی گرافی اظہار کی طرف کیا خوب کہا ہے کسی نے ایک تصویر ہزار الفاظ سے بہتر ہوتی ہے۔

عام طور پر انفرادی اشیاء کے درمیان موازنہ گراف کے ذریعہ اچھی طرح سے کیا جا سکتا ہے۔اس طرح سے اصل اعداد وشمار کی نسبت ان کے اظہار کو سمجھنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔اس سیکشن میں ہم مندرجہ ذیل گرافی اظہار کے بارے میں پڑھیں گے۔

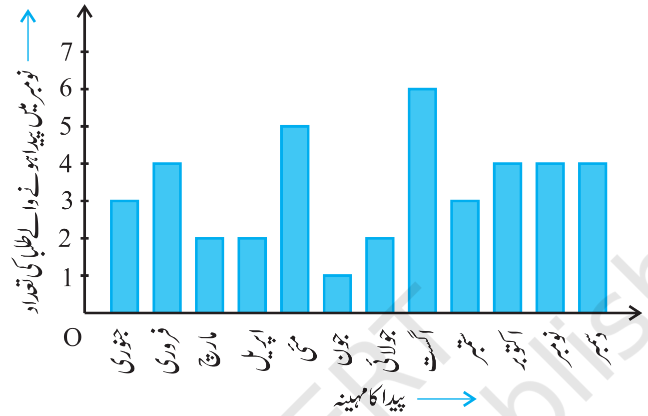
(A) بار گراف (B) یکساں اور مختلف چوڑائیوں کے ہسٹوگرام (C) تعدد کثیر ضلع

(A) بار گراف (Bar Graph)

پچھلی کلاسوں میں آپ بار گراف اور اس کی بناوٹ کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔یہاں ہم اس کو زیادہ رسمی طور پر سمجھنے کی کوشش کریں گے یاد کیجیے کہ یکساں چوڑائی والے بار گراف جن کے درمیان برابر فاصلہ ہوتا ہے صفر کو دکھانے کے لیے محور (مان لیجیے x- محور) پر بتایا جاتا ہے۔متغیر کی قیمتوں کو دوسرے محو (y- محور) پر دکھایا جاتا ہے اور بار کی اونچائی متغیر کی قیمت پر منحصر کرتی ہے۔

© NCERT not to be republished

مثال 5: نویں کلاس کے ایک خاص سیکشن کہ 40 طلباء سے ان کی پیدائش کے مہینہ کے بارے میں پوچھا گیا۔ اس طرح سے حاصل کردہ اعداد وشمار کا گراف مندرجہ ذیل میں بتایا گیا ہے



شکل 14.1

مندرجہ بالا بار گراف کا مشاہدہ کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں کتنے طلباء پیدا ہوئے

(ii) کون سے مہینہ میں سب سے زیادہ طلباء پیدا ہوئے؟

حل: آپ نوٹ کرتے ہیں کہ یہاں متغیر پیدائش کا مہینہ ہے اور متغیر کی قیمت پیدا ہوئے طلباء کی تعداد ہے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں 4 طلباء پیدا ہوئے

(ii) زیادہ تر طلباء اگست کے مہینہ میں پیدا ہوئے۔

آیئے اب دہراتے ہیں کہ مندرجہ ذیل مثال کو لے کر ہم بار گراف کس طرح بناتے ہیں

مثال 6: 20,000 روپے ماہانہ کی آمدنی والے ایک خاندان نے مختلف مدوں میں فی مہینہ خرچوں کو مندرجہ ذیل طریقہ سے پلان کیا۔ ان اعداد وشمار کا بار گراف بنایئے

جدول 14.5

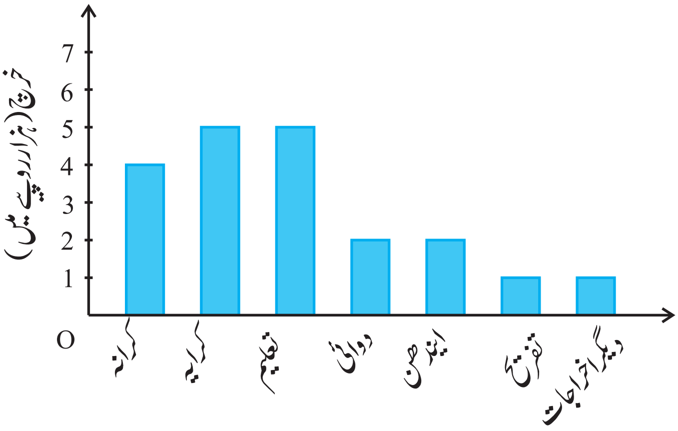
خرچ (1000 روپیوں میں)	مدیں
4	کرانہ
5	کرایہ
5	بچوں کی تعلیم
2	دوائیاں
1	تفریح
2	ایندھن
1	متفرق

© NCERT not to be republished

حل: ان اعداد وشمار کا بار گراف ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے بناتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ دوسرے کالم میں اکائی ہزار روپیوں میں ہے۔ اس لیے مسالہ کے آگے 4 کا مطلب ہے 4000 روپیے۔

1. کیوں کہ بار کی چوڑائی کوئی اہمیت نہیں رکھتی کوئی بھی پیمانہ چنتے ہوئے گراف کو مدوں (متغیر) کا اظہار ہم افقی محور پر کرتے ہیں لیکن صفائی ک لیے ہم ان بار کی یکساں چوڑائیاں لیتے ہیں اور ان کے درمیان یکساں فاصلہ (gap) برقرار رکھتے ہیں مان لیجیے ایک مد کا اظہار ایک اکائی سے ہوتا ہے۔
2. ہم خرچ (قیمت) کو عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں کیوں کہ زیادہ سے زیادہ خرچ Rs. 5000 ہے۔ ہم اپنا پیمانہ ایک اکائی =100 روپے لے سکتے ہیں۔
3. اپنے پہلے مد یعنی کرانہ، کو ظاہر کرنے کے لئے ہم 1 اکائی چوڑائی اور 4 اکائی اونچائی والے مستطیل بار بناتے ہیں۔
4. اسی طرح سے دو لگاتار باروں کے درمیان 1 اکائی کا (gap) دیتے ہوئے باقی مدوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہاں آپ آسانی سے ایک ہی نظر میں اعداد وشمار کی خصوصیات کو دیکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تعلیم پر کیا گیا خرچ دواؤں پر کیے گئے خرچ کے دوگنے سے زیادہ ہے۔ اس طرح سے کچھ باتوں میں جدولی اظہار سے یہ اظہار زیادہ بہتر ہے۔



شکل 14.2

سرگرمی 3: مشغلہ کے انھیں 4 گروپوں کو جاری رکھتے ہوئے آنکڑوں کو مناسب بارگراف سے ظاہر کیجیے آیئے اب دیکھتے ہیں جاری کلاس۔وقفوں کی تعدد بٹاؤ جدول گرافی طور پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

(B) ہسٹوگرام (Histogram)

یہ بھی بارگراف ہی کی طرح ایک قسم کا اظہار ہے جسے چار کلاس وقفوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 14.6 میں دکھائے گئے ایک کلاس کے 36 طلباء کے وزنوں کے تعدد بٹاؤ پر غور کیجیے۔

جدول 14.6

طلباء کی تعداد	وزن کلوگرام میں
9	305-35.5
6	35.5-405
15	40.5-45.5
3	45.5-50.5
1	50.5-55.5
2	55.5-60.5
36	کل

© NCERT not to be republished

آیئے مذکورہ بالا اعداد و شمار کو گرافی طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے اظہار کرتے ہیں۔

(i) ایک مناسب پیمانہ لے کر وزنوں کو افقی محور پر ظاہر کیجیے۔ ہم پیمانہ 1cm=5kg چن سکتے ہیں مزید کیوں کہ پہلا کلاس وقفہ 0 سے نہیں 30.5 سے شروع ہو رہا ہے۔ اس لیے ہم اس کو محور پر ایک (ٹوٹی ہوئی لائن) کنک کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔

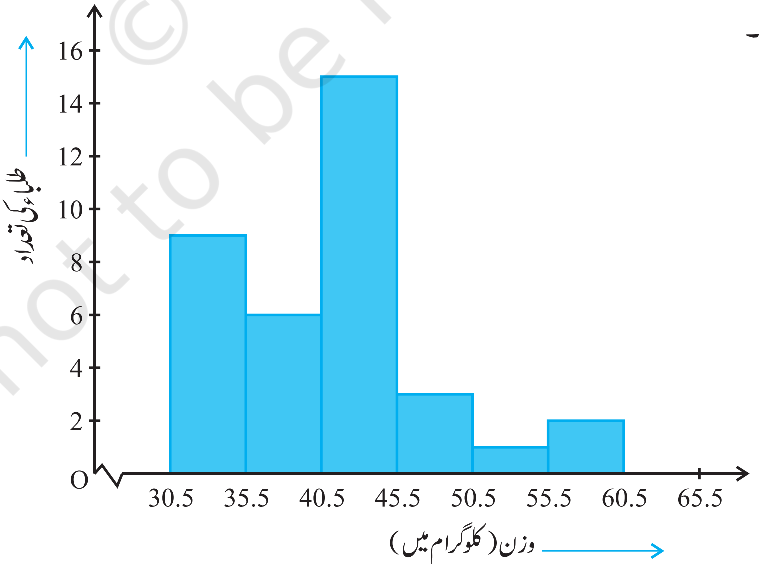
(ii) ہم طلباء کی تعداد (تعدد) کو مناسب پیمانہ لے کر عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں۔ کیوں کہ سب سے زیادہ تعدد 15 ہے۔ اس لئے ہم ایسا پیمانہ چنتے ہیں جس میں یہ تعداد 15 آسانی سے آجائے۔

(iii) اب ہم کلاس سائز کی چوڑائی والے مستطیلی (یا مستطیلی بار) بناتے ہیں جن کی لمبائی ان کی کلاس وقفہ کی نظیری تعدد کے برابر ہوتی مثال کے طور پر کلاس وقفہ 30.5-35.5 کا مستطیل وہ ہوگا جس کی چوڑائی 1cm اور لمبائی 4.5cm

(iv) اس طرح سے ہمیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا گراف حاصل ہوتا ہے۔

مشاہدہ کیجیے کیوں کہ دو لگاتار مستطیلوں کے درمیان کوئی gap نہیں ہے اس لیے نتیجہ کے طور پر ملا گراف ایک ٹھوس شکل کی طرح دکھتا ہے یہ ہسٹوگرام کہلاتا ہے۔ جو کہ جاری کلاسوں والی تعدد بتاؤ کا گرافی اظہار ہے۔ مزید یہ کہ اس کی بناوٹ میں بار کی چوڑائی ایک بہت اہم کردار ادا کرتی ہے جو بار گراف میں نہیں۔

درحقیقت یہاں بنائے گئے سیدھے مستطیلوں کا رقبہ ان کی نظیری تعدد کے تناسب میں کیوں کہ مستطیلوں کی چوڑائی یکساں ہوتی ہے اس لئے مستطیلوں کی لمبائی اس کی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔ اس طرح سے ہم (iii) کے مطابق ہم لمبائی کھینچتے ہیں۔



شکل 14.3

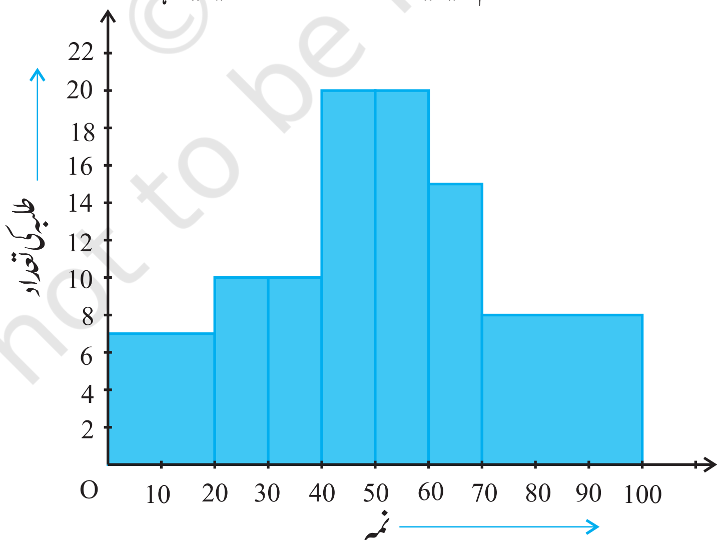
© NCERT not to be republished

اب ہم مذکورہ بالا سے مختلف ایک صورتحال پر غور کرتے ہیں

مثال 7: ایک استاد 100 نمبروں والے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں طلباء کے دو سیکشنوں کی کارکردگی کا تجزیہ کرنا چاہتا تھا۔ ان کی کارکردگی کو دیکھ کر اس نے پایا کہ کچھ طلباء 20 سے کم اور کچھ نے 70 یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کئے۔ اس لئے اس نے طے کیا کہ ان کو مختلف سائز والے گروپوں میں گروپ کیا جائے جو ہوں گے 0-20، 20.30 ... 60.70، 70-100۔ پھر اس نے مندرجہ ذیل جدول بنایا:

نمبر	طلباء کی تعداد
0-20	7
20-30	10
30-40	10
40-50	20
50-60	20
60-70	15
70 سے زیادہ	8
کل	90

ایک طالب علم کے ذریعے اس جدول کا ہسٹوگرام بنایا گیا جو کہ شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 14.4

اس گرافی اظہار کی احتیاط سے جانچ کرنے کے بعد کیا آپ سوچتے ہیں کہ اس نے اعداد و شمار کا صحیح اظہار کیا ہے؟ نہیں یہ گراف ہماری غلط رہنمائی کرتا ہے۔ جیسا ہم نے پہلے بیان کیا تھا کہ مستطیلوں کا رقبہ ہسٹوگرام میں دئے گئے تعدد کے تناسب سے ہوتا ہے۔ پہلے یہ مسئلہ نہیں اٹھا تھا۔ کیوں کہ تمام مستطیلوں کی چوڑائی برابر تھی کیوں کہ یہاں مستطیلوں کی چوڑائی مختلف ہے۔ اس لئے یہ ہسٹوگرام صحیح تصویر نہیں دیتا۔ مثال کے طور پر یہ 100-70 کے وقفہ میں 70-60 کے وقفہ سے زیادہ تعدد ہوتا ہے۔

اس لئے یہ ضرورت ہے کہ ہم مستطیلوں کی لمبائیوں میں کچھ تبدیلیاں کریں تا کہ ان کا رقبہ ان کے تعدد کے پھر تناسب میں ہو جائے۔

اس میں کئے گئے اقدام مندرجہ ذیل ہیں

1. ایک سب سے چھوٹے کلاس سائز والے ایک کلاس وقفہ کو چنئے۔ مذکورہ بالا مثال میں سب سے چھوٹا کلاس سائز 10 ہے۔

2. اس طرح سے مستطیل کی لمبائی تبدیل ہو کر کلاس سائز 10 کے متناسب میں ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر جب کلاس سائز 20 ہے۔ مستطیل کی لمبائی 7 ہے۔ اس لئے جب کلاس سائز 10 ہے تو مستطیل کی لمبائی ہے $\frac{7}{10}$ 10 = 3.5

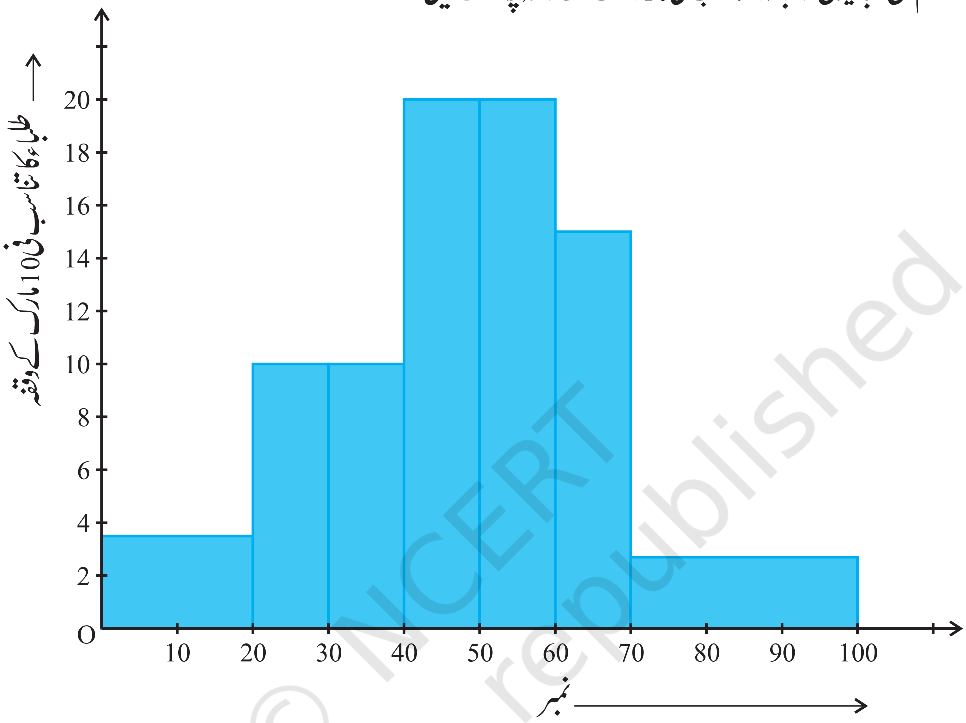
اسی طرح سے آگے بڑھتے ہوئے ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے:

نمبر	تعداد	کلاس کی چوڑائی	مستطیل کی لمبائی
0-20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20-30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30-40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40-50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50-60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60-70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70-100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

© NCERT not to be republished

کیوں کہ ہم نے ہر ایک حالت میں 10 نمبروں کے لئے ان لمبائیوں کی تحسیب کی ہے

ہم ان لمبائیوں کو طلباء کا تناسب فی 10 مارک کے وقفہ پکارتے ہیں



شکل 14.5

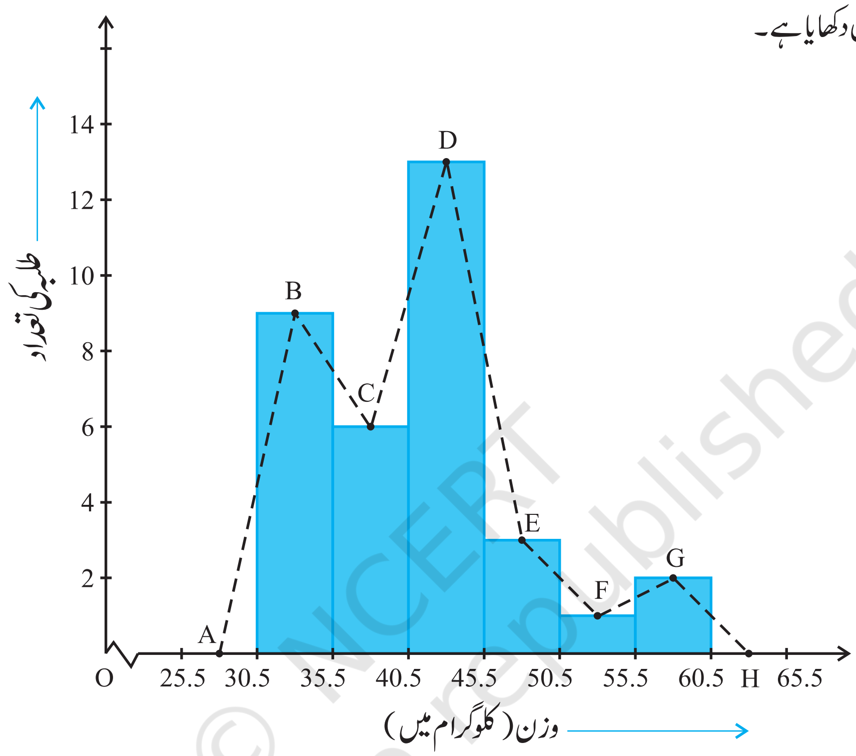
اس طرح سے صحیح ہسٹوگرام جسکی چوڑائیاں مختلف ہیں شکل 14.5 میں دیا گیا ہے

(C) تعدد کثیر ضلعی (Frequency Polygon)

مقداری اعداد وشمار اور ان کے تعدد کو ظاہر کرنے کے لئے ایک اور طریقہ ہے۔ یہ ایک کثیر ضلعی ہے۔ اس سے ہماری مراد کیا ہے یہ دیکھنے کے لئے شکل 14.3 میں دیے گئے ہسٹو گرام کو دیکھیے۔ آیئے ان میں متصل مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو قطعہ خط سے ملا دیجیے ان وسطی نقاط کو B، C، D، E، F، G نام دیجئے۔ جب ان کو قطعات خط سے ملایا گیا تو ہمیں شکل BCDEFG حاصل ہوئے۔ کثیر ضلعی کو مکمل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ایک کلاس وقفہ ایسا ہے جس کا تعدد 0 ہے۔ اور جو 5-35-30.5 سے پہلے ہے اور 5-60-55.5 کے بعد میں ہے اور ان کے وسطی نقاط بالترتیب A اور H

© NCERT not to be republished

ہیں اس طرح سے ABCDEFGH شکل 14.3 میں دکھائے گئے اعداد وشمار کی نظیری تعدد کثیر ضلعی ہے۔ اس کو ہم نے شکل 14.6 میں دکھایا ہے۔



شکل 14.6

حالاں کہ سب سے چھوٹے کلاس وقفہ 5 سے پہلے اور سب بڑے کلاس۔ وقفہ کے بعد کوئی کلاس نہیں ہے۔ صفر تعدد والی دو کلاسوں کو شامل کرنے سے تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹو گرام کے رقبہ کے برابر ہو جاتا ہے۔ نتیجہ کے طور پر تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ کل تعداد کے مناسب ہوگا۔ کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ تعداد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹو گرام کے رقبہ کے برابر کیوں ہوتا ہے؟

[اشارہ: متماثل مثلثوں کی خصوصیات استعمال کیجیے]

مسئلہ جب پیدا ہوتا ہے جب پہلی کلاس سے پہلے کوئی کلاس نہیں ہوتی۔ اس لئے ایسی ایک صورت حال پر غور کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ اس صورت حال میں تعدد کثیر ضلعی کس طرح بنایا جاتا ہے

مثال 8: ایک کلاس ٹیسٹ میں 51 طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ نمبروں 100 میں سے' پر جدول 14.9 میں دیئے گئے ہیں:

جدول 14.9

طلباء کی تعداد	نمبر
5	0-10
10	10-20
4	20-30
6	30-40
7	40-50
3	50-60
2	60-70
2	70-80
3	80-90
9	90-100
51	کل

© NCERT not to be republished

اس تعدد بٹاؤ جدول کے نظیری تعدد کثیر ضلعی بنائیے

حل: آیئے سب سے پہلے اعداد وشمار کا ہسٹوگرام بناتے ہیں اور مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو بالترتیب B، C، D، E، F، G، H، I، J، K مارک کیجیے یہاں پہلی کلاس 0-10 ہے یہاں 0-10 سے پہلے کلاس معلوم کرنے کے لئے افقی خط کو منفی سمت میں بڑھاتے ہیں۔اور کلاس وقفہ (0-10-) کا وسطی نقطہ معلوم کرتے ہیں۔ پہلا سرے کا نقطہ یعنی B کو افقی محور پر منفی سمت میں صفر تعدد والے وسطی نقطہ سے ملا دیجیے۔اس نقطہ جہاں یہ قطعہ خط افقی خط سے ملتا ہے' کو A مارک کرتے ہیں۔ مان لیجیے نقطہ L' دئے ہوئے آخری کلاس وقفہ سے اگلی کلاس کا وسطی نقطہ ہے تب ABCDEFGHIJKL ایک تعدد کثیر ضلعی ہے جو شکل 14.7 میں دکھائی گئی ہے۔