Government of Tamilnadu

గణితము

(MATHEMATICS-TELUGU)

పదవ తరగతి

X-STANDARD

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamil Nadu
First Edition - 2011
Revised Edition - 2015
(Published under Uniform System of School Education scheme)

Textbook Preparation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Price : Rs.

Printed by Web Offset at :

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

తొలిపలుకు

తమిళనాడులో విద్యయందు, ప్రత్యేకంగా పాఠశాల విద్యయందు ఆశ్చర్యకరమైన మార్పు ఏర్పడి, వీటి మూలంగా అన్ని పాఠశాలలో ఒకే విద్యావిధానం, క్రమబద్ధమైన పాఠ్యప్రణాళిక ఆధారంగా 'ఏకీకృత విద్యావిధానం' అమలు చేయుట మనస్సునకు ఆనందాన్ని కలిగిస్తున్నది. తమిళనాడు ప్రభుత్వం ఏర్పరచిన ఈ సదవకాశాన్ని సంపూర్ణ విద్యాభివృద్ధికై ఉపయోగించుకొనవలెను.

విజ్ఞానశాస్త్రమునన్నింటికి "రాణి" అయిన గణితశాస్త్రం స్వత:సిద్ధమైన విలువను, దీనికి తగు అందాన్ని కలిగి ఎల్లప్పుడూ ప్రకాశించు ఒక పాఠ్యాంశముగానున్నది. విజ్ఞానశాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్ మరి యు ఇతర పాఠ్యాంశములలో గణితం విడదీయరాని సంబంధం కలిగియున్నది. కావున, విజ్ఞానశాస్త్రం మరియు సాంకేతికాభివృద్ధికి వ్యక్తిగతంగా ఒకరు ఎన్నుకొను రంగంలో ప్రకాశించుటకు గణితజ్ఞానము మిక్కిలి ఆవశ్యమగును. కఠోర గణిత శిక్షణ అనునది ఒకనికి గణిత జ్ఞానముతో కూడిన, క్రమమైన చింతన సామర్థ్యము, సంక్లిష్ట సమస్యలను విశ్లేషించు సామర్థ్యమునిచ్చును.

తమిళ కవులలో దీర్ఘదర్శి అయిన తిరువళ్ళువర్, సుమారు రెండు వేల సంవత్సరములకు ముందే గణిత విద్యా విలువను మరియు వాటి ముఖ్యత్వమును తెలుపు విధంగా,

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

అనగా సంఖ్యలు మరియు అక్షరములు భువిలోని ప్రజలకు రెండు కళ్ళువంటివి అని అర్థము.

మన నిత్యజీవితంలో ఏర్పడు సమస్యలను సాధించుట, వీటిని ఎదుర్కొనుటకు కావలసిన సామర్థ్యము అవసరమగుచున్నది. గణితము అనునది సమస్యలను సాధించుటకు ఉపయోగపడు సాధనము మాత్రమేగాదు, అది మిక్కిలి శక్తివంతమైన సృజనాత్మకతను పెంపొందించు శక్తిగానున్నది. ఈ సత్యాలన్నింటిని విద్యార్థులు మనస్సునందుంచుకొని, వీరి మనస్సంతోషం కోసం, అభివృద్ధికోసం గణితంను మరల మరల అభ్యసనం చేయవలెను.

దేశంలో భావితరాల వారికి మంచి భవిష్యత్తును ఏర్పరుచుటకు మంచి గణిత శిక్షణ అవసరము. ప్రస్తుతము నేర్చుకొను గణిత ప్రాథమిక భావనలు ఉన్నత విద్యలో గణితం మరియు విజ్ఞానశాస్త్ర పాఠ్యాంశములకు ఆధారముగానుండును. గణిత ప్రాథమిక భావనలను నేర్చుకొనుటయేగాక, వాటిని ఏవిధంగా సమస్యల సాధనకు అన్వయించవలయునో నేర్చుకొనవలెను.

గణితశాస్త్ర అభ్యసనమునకు రెండు ముఖ్య కారకములైన ప్రాథమిక సిద్ధాంతములు మరియు సమస్య పరిష్కారములను లోతుగా అర్థం చేసుకొను దిశగా ఈ పుస్తకమునందు చర్యలు తీసుకొనబడినది. గణిత ప్రాథమిక భావనలను మరియు సమస్య పరిష్కారంలో వీటిని ఉపయోగించి, అర్థం చేసుకొనుటకు సహాయపడునని అభిప్రాయపడుచున్నాము. వివిధ పరిస్థితులలో గణితం ఎట్లు అభివృద్ధి చెందుతున్నదో, ఎట్లు ఉపయోగపడుచున్నదో తెలియజేయుటకు ఎక్కువ శ్రద్ధ వహించితిమి, ఈ పాఠ్యపుస్తకములోని అధ్యాయములు సహజంగాను, తర్కరీతిగాను, మంచి ఉదాహరణలతోను క్రమపరచియున్నాము. ఇంకను, గణితాభ్యాసం చేయుటకు గణిత భావనలను అర్థం చేసుకొనుటకు అవసరమైనరీతిలో ఒక్కొక్క అధ్యాయముగా క్రమపరచబడినది. విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయుల సహాయముతో గణిత భావనలను, వీటి సంబంధములను తెలుసుకొన్న తరువాత అభ్యాస లెక్కలకు జవాబులు కనుగొనుట మంచి పద్ధతియని నమ్ముతున్నాము.

సంఖ్యా విజ్ఞానశాస్త్రము, గణిత శాస్త్రములో ఒక భాగముగా విస్తరించియున్నదని జ్ఞప్తియందుచుకొనుము. విద్యార్థులు గణితం అభ్యసించుటయందు తరగతిలోని ఉపాధ్యాయుని పాత్ర చాలా ముఖ్యమైనది. అతని సహాయము, ఆలోచనలు, మార్గదర్శకములు అభ్యసనమునకు ఎనలేనివి. ప్రాథమిక గణితం నుండి ఉన్నత గణితమునకు మారు దశలో ఉపాధ్యాయులు ప్రముఖ పాత్ర వహించుదురు. ఈ ఉద్దేశ్యమును పూర్తిచేయుటకు ఒక ఉత్ప్రేరకముగా ఈ పాఠ్యపుస్తకము అమరియున్నదని నమ్ముతున్నాము. ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు ఇరువైపుల విషయ పరిజ్ఞాన మార్పునకు ఉపాధ్యాయుడు శ్రమించిన, ఈ పాఠ్యపుస్తకము నుండి అత్యధిక ఫలితం పొందవచ్చును. విదార్థి–కేంద్ర అభ్యసన తరగతులకు ఈ ప్రయత్నం నిస్సందేహంగా ఉపకరించును. గణితాన్వేషణకు అన్ని విధాల సామర్థ్యమును పెంపొందించు మార్గము ఈ పాఠ్యపుస్తక ముఖ్యోద్దేశ్యమగును. ఇంతకు ముందే తెలిపిన విధంగా గణితాభ్యసనము రెండు విధములు. అందులో ఒకటి గణిత ప్రాథమిక అభ్యసము, మరొకటి సమస్యల పరిష్కారములో వాటిని ఉపయోగించుట అగును. ఉదాహరణలను అభ్యసనము చేయుట ద్వారా, పద్ధతులను సరైన రీతిలో అర్థం చేసుకొనవచ్చును. ప్రాథమిక భావనలను అభ్యాస సమస్యలయందు ఉపయోగించిన తరువాత వాటితో నూతన సమస్యలను సృష్టించుట ద్వారా మాత్రమే ఒకరి గణితజ్ఞానము పెంపొందును.

"గణిత సమస్యలను సాధన చేయుట ద్వారా గణితమును నేర్చుకొనవచ్చు"

(We Learn Mathematics by doing Mathematics)

మేధావులు, ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థులు ఈ పాఠ్యపుస్తకాభివృద్ధికి సలహాలిచ్చిన, మేము మిక్కిలి సంతోషించగలము.

రచయితల బృందం

పాఠ్య ప్రణాళిక

పాఠము	పాఠ్యాంశము	ఆశించు అభ్యసన ఫలితములు	బోధనా పద్ధతులు	పీరియడ్ల సంఖ్య
I. సమితులు మరియు ప్రమేయములు	• పరిచయం • సమితి పరిక్రియల ధర్మములు • డీ మార్గన్ సూత్రములు– వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూచుట • $n(A \cup B \cup C)$సూత్రము • ప్రమేయములు	• సమితి పరిక్రియల ఆధార భావనలు – పునర్విమర్శ • సమితి పరిక్రియల ధర్మములు అర్థం చేసుకొనుట – వ్యత్యయ న్యాయము, సహచర్య న్యాయము, విభాగ న్యాయము (మూడు సమితులు మాత్రమే) • పూరక సమితుల న్యాయములను అర్థం చేసుకొనుట. • డీ మార్గన్ సూత్రములను అర్థం చేసుకొనుట, వెన్ చిత్రము ద్వారా వివరించుట. • పద సమస్యలను సూత్రము ద్వారా, వెన్ చిత్రము ద్వారా సాధించుట. • నిర్వచనము, రకములు, ప్రమేయముల ను తెలుపు పద్ధతులను అర్థం చేసుకొనుట. • ప్రమేయముల రకములను సులభ ఉదాహరణలతో అర్థం చేసుకొనుట.	అన్ని వివరణలను వెన్ చిత్రమును ఉపయోగించుము. ఆర్థికశాస్త్రం, వైద్యశాస్త్రం, విజ్ఞానశాస్త్రం మొదలగు వాటి నుండి ప్రమేయములకు ఉదాహరణలిమ్ము.	26
II. వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత శ్రేణులు	• పరిచయం • వరుసలు • అంకశ్రేఢి (A.P) • గుణశ్రేఢి (G.P) • శ్రేణులు	• అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢిలను గుర్తించి అర్థంచేసుకొనుట. • అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢిలోని 'n' వ పదమును కనుగొనుట. • అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢి 'n' పదముల మొత్తమును తీర్మానించుట. • కొన్ని పరిమిత శ్రేణుల మొత్తమును నిర్ణయించుట.	నిర్మాణ పద్ధతిని ఉపయోగించుము. బిందు నిర్మాణ పద్ధతిని –బోధన ఉపకరణంగా ఉపయోగించుము. నిర్మాణ పద్ధతి ఉపయోగించి సూత్రమును ఉత్పాదించుము.	27
III. బీజగణితము	• రేఖీయ సమీకరణముల సాధన. • బహుపద సమాసములు. • సంయోజిత భాగహారము • గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) మరియు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము(క.సా.గు). • అకరణీయ సమాసములు • వర్గమూలము • వర్గసమీకరణములు	• రెండు చలరాశుల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల భావనను అర్థంచేసుకొనుట. • రెండు చలరాశుల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను తొలగించు పద్ధతి. • అడ్డుగుణకార పద్ధతి ద్వారా సాధించుట. • ఒక ప్రత్యేక వర్గ సమీకరణము నుండి బహుపద సమాసముల శూన్యములకు మరియు గుణకములకు మధ్య గల సంబంధము అర్థంచేసుకొనుట.	ఉదాహరణలతో వివరించుట. చార్టులను బోధనోపకరణముగా ఉపయోగించుము. మొదటగా సంఖ్యల గ.సా.భా, క.సా.గు లను పునర్విమర్శ చేయుట.	

III. బీజగణితము		• ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము యొక్క శేషము, భాగఫలమును సంయోజిత భాగాహార పద్ధతి ద్వారా నిర్ణయించుట. • సంయోజిత భాగాహార పద్ధతి ద్వారా ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము యొక్క కారణాంకములు నిర్ణయించుట. • అకరణీయ సమాసముల గ.సా.భా మరియు క.సా.గు మధ్య గల భేదమును అర్థం చేసుకొనుట. • అకరణీయ సమాసముల ను సూక్ష్మీకరించుట.(సులభ సమస్యలుగా) • వర్గమూలమును అర్థం చేసుకొనుట. • వర్గసమీకరణ నియమ రూపమును అర్థం చేసుకొనుట. • వర్గసమీకరణమును సాధించుట (వాస్తవ మూలములు మాత్రమే)–కారణాంక పద్ధతి, వర్గము పూరించు పద్ధతి, వర్గసమీకరణ సూత్రములను ఉపయోగించి. • వర్గసమీకరణమును అనుసరించి పద సమస్యలను సాధించుట. • మూలముల స్వభావము మరియు విచక్షణీల మధ్య గల పరస్పర సంబంధమును తెలుసుకొనుట. • మూలములివ్వబడిన వర్గసమీకరణమును ఏర్పరుచుట.	భిన్నముల ప్రక్రియలను పోల్చుట. సంఖ్యలలో వర్గమూలముల ప్రక్రియలను పోల్చుట. మూలముల స్వభావమును బీజగణితము, రేఖాచిత్రము ద్వారా ఊహించుటకు సహాయపడుట.	40
IV. మాత్రికలు	• పరిచయం • పరిచయము మాత్రికల రకములు • సంకలనము, వ్యవకలనము • గుణకము • మాత్రికల సమీకరణము	• మాత్రికలను అమర్చుట, తరగతిని గుర్తించుట. • మాత్రికల రకములను తెలుసుకొనుట. • ఇవ్వబడిన మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము చేయుట. • ఒక మాత్రికను అదిశ మాత్రికతోను, వ్యత్యయ మాత్రికతోను గుణించుట. • ఇవ్వబడిన మాత్రికలను గుణించుట (2x2; 2x3; 3x2 తగిన మాత్రికలతో). • రెండు చలరాశుల సమీకరణములను మాత్రికల పద్ధతి ద్వారా సాధించుట.	దీర్ఘ చతురస్రాకార పద్ధతిన సంఖ్యలను అమర్చుట. నిజ జీవిత పరిస్థితులను ఉపయోగించుట సంఖ్యా వ్యవస్థలను ఉపయోగించుట.	16

V. నిరూపక జ్యామితి	• పరిచయం • రెండు బిందువుల మధ్య దూరము–పునర్విమర్శ • విభజన సూత్రము, మధ్య బిందువు సూత్రము, గురుత్వకేంద్ర సూత్రము • త్రిభుజ మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యము • సరళరేఖ	• రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును పునర్విమర్శ ఇవ్వబడిన రెండు బిందువుల మధ్య బిందువును గుర్తించుట. • విభజన సూత్రము ద్వారా విభజన బిందువును నిర్ణయించుట. • త్రిభుజ వైశాల్యమును లెక్కించుట. • రెండు బిందువులు, సమీకరణములు ఇవ్వబడిన సరళరేఖ వాలును కనుగొనుట. • ఇవ్వబడిన వివరములతో ఒక సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుట. • వాలు–అంతరఖండ రూపము, బిందువు–వాలు రూపము, రెండు బిందువుల రూపము అంతరఖండ రూపము ద్వారా సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుట. • ఒక బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖకు (i) సమాంతరముగా (ii) లంబముగానున్న సరళరేఖా సమీకరణమును కనుగొనుట.	సరళ జ్యామితీయ ఫలితమును త్రిభుజము మరియు చతుర్భుజములకు సంబంధపరచి, ఉపయోగమును సరిచూడుము. $y = mx + c$ రూపమును ప్రారంభ బిందువుగా తీసుకొనుట.	25
VI. రేఖాగణితము	• ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (నిరూపణతో) • ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యము (నిరూపణతో) • కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతం (నిరూపణ–అంతరం మాత్రమే) • కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంత విపర్యము (నిరూపణ – అంతరం మాత్రమే) • సరూప త్రిభుజములు • పైథాగరస్ సిద్ధాంతము • స్పర్శరేఖా–జ్యా సిద్ధాంతము	• సిద్ధాంతములను అర్థం చేసుకొనుటకు వాటిని సాధించుటకు సులభ సమస్యలను చేయుట.	కాగితము మడుచుట ద్వారా సౌష్టవమును తెలుసుకొనుట, మార్పుల సాంకేతికతను తెలుసుకొనుట. సరైన నిరూపణలను తెలుసుకొనుట. పటములను గీయుట పటములతో కూడిన, తర్క రీతిగా, సోపానములుగా నిరూపణలు – వివరించుట మరియు చర్చించుట.	20
VII. త్రికోణమితి	• పరిచయం • సర్వసమీకరణములు • ఎత్తులు మరియు దూరములు	• త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు తెలుసుకొనుట, వీటిని సులభ సమస్యలో ఉపయోగించుట. • త్రికోణమితి నిష్పత్తులను అర్థం చేసుకొనుట మరియు వీటిని ఎత్తులు, దూరమును కనుగొనుటకు ఉపయోగించుట. (రెండు లంబకోణ త్రిభుజములను మించక)	బీజీయ సూత్రములు ఉపయోగించుట. త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు ఉపయోగించుట. రమారమి విలువుల స్వభావమును వివరించుట.	21

VIII. గణనము	• పరిచయం • స్తూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము, శంఖుఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము. • సంయుక్త ఆధారముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము. • స్థిర ఘనపరిమాణము.	• స్తూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము, శంఖుఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము తెలుసుకొనుట (నిర్ణయించుట) • సంయుక్త ఆకారముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము (రెండు మాత్రమే). • స్థిర ఘనపరిమాణములలో కొన్ని సమస్యలు.	సంయుక్త ఆకారములను తయారుచేయుటకు త్రిపరిమాణమును ఉపయోగించుట(మోడల్స్) మోడల్స్, చిత్రపటములను బోధనాపకరణములుగా ఉపయోగించుట. నిజ జీవిత పరిస్థితుల నుండి కొన్ని ఉదాహరణలను ఎన్నుకొనుట.	24
IX. ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	• పరిచయం • వృత్తమునకు స్పర్శరేఖల నిర్మాణము • త్రిభుజ నిర్మాణము • చక్రీయ చతుర్భుజ నిర్మాణము	• వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట. • త్రిభుజమును నిర్మించుట. ఇవ్వబడినవి ఆధారము, శీర్షకోణము మరియు (a) మధ్యదూరము (b) ఎత్తు • చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించుట.	స్పర్శరేఖల పొడవులు బీజగణిత పద్ధతిలో సరిచూచుటను పరిచయము చేయుట. వృత్తములో కోణములు ధర్మములను పటము గీయుటకు ముందు పునర్విమర్శచేయుట.	15
X. రేఖా చిత్రములు	• పరిచయం • ద్విఘాత రేఖాచిత్రములు • ప్రత్యేక రేఖాచిత్రములు	• ద్విఘాత సమీకరణమును రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధించుట. • పద సమస్యలను రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధించుట.	నిజ జీవిత పరిస్థితులను పరిచయము చేయుట.	10
XI. సాంఖ్యక శాస్త్రము	• కేంద్రస్థానపు కొలతలు – పునర్విమర్శ • విస్తరణ కొలతలు • విచలన గుణకము	• సమూహము మరియు సమూహము కాని దత్తాంశముల అంకమధ్యమము–పునర్విమర్శ. • విస్తరణ భావనను అర్థంచేసుకొనుట మరియు వ్యాప్తి, క్రమవిచలనము, విచలనము కనుగొనుట. • విచలన గుణకమును లెక్కించుట.	పరీక్షలు, ఆటలు వంటి నిజజీవిత పరిస్థితులను ఉపయోగించుట.	16
XII. సంభావ్యత	• పరిచయం • సిద్ధాంతపరంగా సంభావ్యత • సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము	• యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములు, ప్రతిరూప ఆవరణ, ఘటనలు–పరస్పర వర్జితములు, పూరకములు, ఖచ్చిత మరియు అసాధారణ ఘటనలు అర్థం చేసుకొనుట. • సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమును సులభ సమస్యల సాధనకు ఉపయోగించుట, వాటిని అర్థము చేసుకొనుట.	నాణెమును ఎగురవేయుట, పాచికలు దొర్లించుట, పేక కట్టనుండి పేక ముక్కను తీయుట.	15

విషయసూచిక

1.	సమితులు మరియు ప్రమేయములు	1-34
1.1	పరిచయం	1
1.2.	సమితులు	1
1.3.	సమితుల పరిక్రియలు	3
1.4.	సమితుల పరిక్రియల ధర్మములు	5
1.5.	డీ మార్గన్ సూత్రములు	13
1.6.	సమితుల ఆదిసంఖ్య	16
1.7.	సంబంధములు	19
1.8.	ప్రమేయములు	21
2.	వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత వరుసలు మరియు శ్రేణులు	35-68
2.1.	పరిచయం	35
2.2.	వరుసలు	36
2.3.	అంకశ్రేఢి	39
2.4.	గుణశ్రేఢి	44
2.5.	శ్రేణులు	50
3.	బీజగణితము	69-121
3.1	పరిచయం	69
3.2	రెండు చలరాశుల ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థ	70
3.3	వర్గసమాసములు	81
3.4	సంయోజిత భాగాహారం	83
3.5	గరిష్ట సామాన్య భాజకము మరియు కనిష్ట సామాన్య గుణిజం	87
3.6	అకరణీయ సమాసములు	94
3.7	వర్గమూలము	99
3.8	వర్గసమీకరణములు	103
4.	మాత్రికలు	122-145
4.1	పరిచయం	122
4.2	మాత్రికల అమరిక	123
4.3	మాత్రికల రకములు	125
4.4	మాత్రికల పరిక్రియలు	130
4.5	మాత్రికల సంకలన ధర్మములు	133
4.6	మాత్రికల గుణకారము	135
4.7	మాత్రికల గుణకార ధర్మములు	138
5.	నిరూపక జ్యామితి	146-177
5.1	పరిచయం	146
5.2	విభజన సూత్రము	147

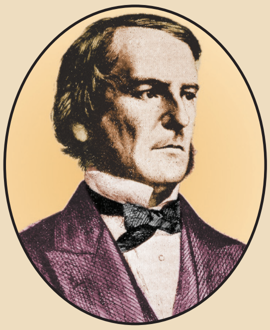
5.3	త్రిభుజ వైశాల్యము	153
5.4	మూడు బిందువుల ఏకరేఖీయత	154
5.5	చతుర్భుజ వైశాల్యము	155
5.6	సరళరేఖలు	158
5.7	సరళరేఖ సమీకరణ సామాన్య రూపము	171
6.	రేఖాగణితము	178-202
6.1	పరిచయం	178
6.2	ప్రాథమిక అనుపాత మరియు కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము	179
6.3	సరూప త్రిభుజములు	189
6.4	వృత్తములు మరియు స్పర్శరేఖలు	196
7.	త్రికోణమితి	203-225
7.1	పరిచయం	203
7.2	త్రికోణమితి సర్వసమీకరణములు	203
7.3	ఎత్తులు మరియు దూరములు	212
8.	గణనము	226-256
8.1	పరిచయం	226
8.2	ఉపరితల వైశాల్యము	226
8.3	ఘనపరిమాణము	237
8.4	సంయుక్త ఘనములు	247
9.	ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	257- 274
9.1	పరిచయం	257
9.2	వృత్తమునకు స్పర్శరేఖల నిర్మాణము	258
9.3	త్రిభుజముల నిర్మాణము	262
9.4	చక్రీయ చతుర్భుజముల నిర్మాణము	267
10.	రేఖాచిత్రములు	275-286
10.1	పరిచయం	275
10.2	ద్విఘాత రేఖాచిత్రములు	275
10.3	కొన్ని ప్రత్యేక రేఖాచిత్రములు	283
11.	సాంఖ్యాక శాస్త్రము	287-306
11.1	పరిచయం	287
11.2	విస్తరణ కొలతలు	288
12.	సంభావ్యత	307 - 324
12.1	పరిచయం	307
12.2	సంభావ్యత సాంప్రదాయ నిర్వచనము	310
12.3	సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము	317

1

సమితులు మరియు ప్రమేయాలు

"A set is Many that allows itself to be thought of as a One"
- Georg Cantor

- పరిచయం
- సమితులు
- సమితి పరిక్రియల ధర్మములు
- డీ-మోర్గాన్ సూత్రములు
- ప్రమేయములు



జార్జ్ బూలే
(1815-1864)
ఇంగ్లాండ్

తర్క సంబంధములను తెలియజేయు సంకేతములకు మరియు బీజీయ సంకేతములకు మధ్య చాలా దగ్గరి పోలిక గలదని బూలే విశ్వసించెను.

ఇతను తర్క సంబంధములను తెలియజేయుటకు గణిత సంకేతములను ఉపయోగించెను. అతని కాలములో కంప్యూటర్ లేనప్పటికి ప్రస్తుత కంప్యూటర్ అంకగణితమునకు బూలన్ బీజగణితమే మూలాధారము.

నవీన కంప్యూటర్ తర్కమునకు మూలాధారముగా నుండునది ఈ బూలన్ తర్కము. కనుక కంప్యూటర్ విజ్ఞానశాస్త్రమునకు పునాదివేసినది బూలేయే అని చెప్పవచ్చు.

1.1. పరిచయం

గణితశాస్త్ర మౌళిక భావనలలో, సమితి భావన అనునది ఒకటి. సమితి సిద్ధాంతములోని సంకేతము మరియు పరిభాష, గణితశాస్త్రంలోని ప్రతిభాగములో ఉపయోగపడుచున్నది. కావున సమితి సిద్ధాంతమును గణితశాస్త్రము యొక్క భాష అని చెప్పవచ్చును. ఈ పాఠ్యాంశము 19వ శతాబ్దము చివరిలో **జార్జ్ బూలే** (1815 – 1864) మరియు **జార్జ్ కాంటర్** (1845 – 1918) లు చేసిన సేవల నుంచి ఉత్పన్నమైనది. ఆ తర్వాత 20 వ శతాబ్దములో గణితశాస్త్రంలోని అన్ని విభాగముల అభివృద్ధికి లోతైన ప్రభావమును చూపినది. ఇది సంబంధము లేని అనేక ఆలోచనలను ఏకీకృతము చేయుటకు సహాయపడి, గణితశాస్త్ర పురోగతికి దోహదపడినది.

9 వ తరగతిలో రెండు సమితుల సమితి పరిక్రియలయిన సమ్మేళనము, ఛేదనము మరియు భేదములను గూర్చి నేర్చుకొంటిమి. ఇచట సమితులకు సంబంధించిన మరికొన్ని భావనలను మరియు గణితశాస్త్రంలోని మరియొక ముఖ్య సమితుల ప్రమేయమును గూర్చి నేర్చుకొనెదము. మొదట కొన్ని ఉదాహరణలతో ప్రాథమిక నిర్వచనములను పునఃశ్చరణ చేసుకొనెదము. మనము సహజ సంఖ్యల సమితిని $\mathbb{N}$ తోను, వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని $\mathbb{R}$ తోను సూచించెదము.

1.2 సమితులు (Sets)

నిర్వచనము

బాగుగా నిర్దేశించబడిన వస్తువుల సముదాయమును సమితి అని అందురు. ఆ సమితిలోని వస్తువులను ఆ సమితి యొక్క మూలకములు లేక సభ్యులు అని అందురు.

ఇచట "బాగుగా నిర్దేశించబడినది" అనగా ఆ వస్తువు సమితికి చెందినదా లేదా అను లక్షణమును ఎటువంటి సందేహము లేకుండా నిర్వచింపబడునది.

ఉదాహరణకు "చెన్నైలోని పొడవైన వ్యక్తులు" అను సేకరణ సమితిని రూపొందించదు. ఎందుకనగా ఇక్కడ " పొడవైన వ్యక్తులు " అను నిర్ణయించు లక్షణమును స్పష్టముగా నిర్వచింపబడలేదు. కావున, ఈ సేకరణ సమితిని నిర్వచింపదు.

సంకేతము (Notation):

సాధారణంగా సమితులను A, B, X మొదలగు పెద్ద అక్షరములతో సూచింతురు. సమితిలోని మూలకములను సూచించుటకు x, y మొదలగు చిన్న అక్షరములను వాడుదుము. $x \in Y$ అనగా x అనునది Y సమితిలోని ఒక మూలకము. $t \notin Y$ అనగా t అనునది Y సమితికి చెందిన మూలకము కాదు.

ఉదాహరణలు

(i) తమిళనాడులోని అన్ని ఉన్నత పాఠశాలల విద్యార్థుల సమితి.

(ii) తమిళనాడులోని అన్ని ఉన్నత పాఠశాలలు లేక కళాశాలలో గల విద్యార్థుల సమితి.

(iii) పూర్ణాంకములలోని అన్ని ధనాత్మక సరి సంఖ్యల సమితి.

(iv) పూర్ణాంకముల వర్గము ఋణాత్మకముగా నుండు సమితి.

(v) చంద్రునిపై దిగిన వ్యక్తుల సమితి.

పై (i), (ii), (iii), (iv) మరియు (v) లలో నిర్వచించిన వాటిని క్రమముగా A, B, C, D మరియు E సమితులను సూచించుననుకొనెదము. ఏ పూర్ణాంక వర్గమైనను సున్న లేక ధనాత్మక పూర్ణాంకముగా నుండును మరియు వర్గము ఋణాత్మకమగు ఎటువంటి పూర్ణసంఖ్య లేదనుటను గమనింపుము. కావున, D ఎటువంటి మూలకమును కలిగియుండదు. అటువంటి సమితిని శూన్య సమితి అని అందురు. శూన్య సమితిని ϕ తో సూచించెదము.

నిర్వచనము

(i) పరిమిత సంఖ్య గల మూలకములను కలిగియున్న సమితిని పరిమిత సమితి *(Finite Set)* అని అందురు.

(ii) పరిమిత కాని సమితిని అపరిమిత సమితి *(Infinite Set)* అని అందురు.

పైన ఇవ్వబడిన వాటిలో A సమితి, ఒక పరిమిత సమితి అలాగే C సమితి ఒక అపరిమిత సమితి. శూన్య సమితిలో ఎటువంటి మూలకములు లేకుండుటను గమనింపుము. అనగా శూన్య సమితిలోని మూలాకముల సంఖ్య సున్న. కావున శూన్య సమితి కూడ ఒక పరిమిత సమితి అగును.

నిర్వచనము

X అనునది ఒక పరిమిత సమితి అయిన X లోని మూలకముల సంఖ్యను ఆది సంఖ్య లేక సమితి పరిమాణము అని అందురు. X అనునది ఒక అపరిమిత సమితి అయిన X యొక్క ఆది సంఖ్యను ∞ సంకేతముతో సూచించెదము. సమితి X యొక్క ఆది సంఖ్యను $n(X)$ చే సూచించెదము.

పై ఉదాహరణలలో A, B సమితులను గమనించిన, A లోని ప్రతి మూలకము B లోను మూలకముగా నుండుటను చూడవచ్చు. ఇటువంటి సందర్భములలో A ని B యొక్క ఉపసమితి అని చెప్పెదము. మనమిప్పుడు 9 వ తరగతిలో నేర్చుకొనిన కొన్ని నిర్వచనములను పున:శ్చరణ చేసెదము.

ఉపసమితి (Subset): X, Y అనునవి రెండు సమితులనుకొనుము. X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అని చెప్పిన X లోని ప్రతిమూలకము Y లోను మూలకమగును. అనగా X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అనిన $z \in X$ అయితే $z \in Y$ అగును

X అనునది Y యొక్క ఉపసమితి అయిన దానిని $X \subseteq Y$ అని సూచించెదము.

సమితి సమానత్వము (Set Equality): రెండు సమితులు X, Y అనునవి సమానము అనుటకు రెండింటిలోను ఖచ్చితంగా ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండవలెను. అటువంటి సందర్భములో $X = Y$ అని వ్రాసెదము. అనగా $X = Y$ అయినచో $X \subseteq Y$ మరియు $Y \subseteq X$ అగును.

తుల్య సమితులు (Equivalent Sets): $n(X) = n(Y)$. అయిన X, Y అను రెండు పరిమిత సమితులను తుల్య సమితులు అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు, $P = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ మరియు $Q = \{3, -2\}$ అనుకొనుము. ఇచట P, Q లు ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండుటను చూడవచ్చు. కనుక $P = Q$ అగును. $F = \{3, 2\}$ అయిన, అపుడు F, Q లు తుల్య సమితులు. కానీ $Q \neq F$.

ప్రమేయ భావననుపయోగించి, రెండు అపరిమిత సమితుల తుల్యత్వమును నిర్వచింపవచ్చును.

ఘాతసమితి (Power Set): A అను సమితి ఇవ్వబడినది, A యొక్క అన్ని ఉపసమితుల సముదాయమును $P(A)$ తో సూచించిన, $P(A)$ అనునది సమితి A యొక్క ఘాతసమితి.

$n(A) = m$ అయితే, $P(A)$ లోని మూలకముల సంఖ్య $n(P(A)) = 2^m$

ఉదాహరణకు $A = \{a,b,c\}$ అయితే $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}. \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ మరియు $n(P(A)) = 8$.

ఇవ్వబడిన రెండు సమితులను ఉపయోగించి క్రొత్త సమితులను ఏవిధంగా ఏర్పరచగలము?

రెండు సమితులలోని మూలకములను ఒకటిగా చేర్చి ఒక కొత్త సమితిగా ఏర్పరచడం ఒక పద్ధతి. మరొక పద్ధతిలో రెండు సమితులలో ఉమ్మడిగానున్న మూలకములను మాత్రము తీసుకొని సమితిగా ఏర్పరచడం మరియు ఒక సమితిలో మాత్రము ఉండి మరొక్క సమితిలో లేని మూలకములను తీసుకొని సమితిని ఏర్పరచడం. వీటిని సూత్రీకరించుటకు క్రింది నిర్వచనములు దోహదపడును. ప్రతి నిర్వచనమునకు వేన్ చిత్రములు చేర్చబడినవి.

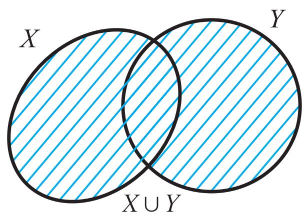
1.3 సమితులలో పరిక్రియలు (Operations on Sets):

X, Y అనునవి రెండు సమితులనుకొనుము. క్రింది కొత్త సమితులను నిర్వచించెదము

(i) **సమ్మేళనం:** $X \cup Y = \{z / z \in X$ లేక $z \in Y\}$

(X సమ్మేళనము Y అని చదువుము)

$X \cup Y$ అనునది X లోని అన్ని మూలకములను మరియు Y లోని అన్ని మూలకములను కలిగియుండుటను గమనింపుము. దీనిని పటము 1.1 లో చూపబడినది. మరియు $X \subseteq X \cup Y$; $Y \subseteq X \cup Y$ అగుటను గమనింపుము.

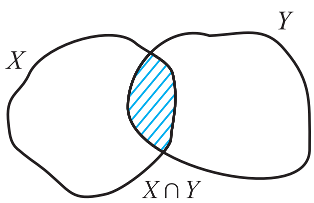


పటము.1.1

(ii) **ఖండనము లేక ఛేదనము:** $X \cap Y = \{z / z \in X$ మరియు $z \in Y\}$

(X ఖండనము Y అని చదువుము)

$X \cap Y$ అనునది X మరియు Y అను రెండింటిలోను ఉమ్మడిగా ఉన్న మూలకములగుటను గమనింపుము. దీనిని పటము 1.2 లో చూపబడినది. మరియు $X \cap Y \subseteq X$; $X \cap Y \subseteq Y$ అగుటను గమనింపుము.

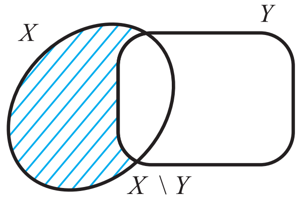


పటము.1.2

(iii) **సమితిభేదం(వ్యత్యాసం):** $X\backslash Y = \{z/z \in X$ కానీ $z \notin Y\}$

(X భేదం Y అని చదువుము)

$X \setminus Y$ అనునది X లో మాత్రము ఉండి Y లో లేని మూలకములు. దీనిని పటము 1.3 లో చూపబడినది. కొందరు రచయితలు $A\backslash B$ కి బదులు $A - B$ ని వాడుదురు. మనము $A\backslash B$ అను సంకేతమునే వాడుదుము. ఎందుకనగా గణితశాస్త్రంలో ఈ సంకేతమునే విరివిగా వాడుచున్నారు.

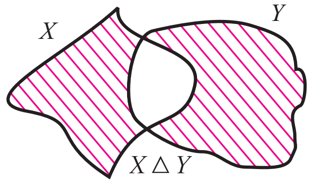


పటము.1.3

(iv) **సౌష్ఠవ భేదం:** $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

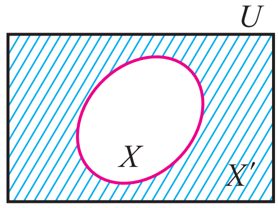
(X సౌష్ఠవ భేదం Y అని చదువుము).

$X \triangle Y$ అనునది $X \cup Y$ లో మాత్రము ఉండి $X \cap Y$ లో లేని మూలకములు.



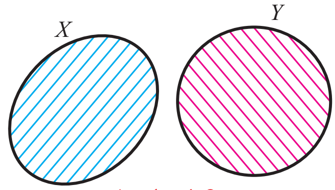
పటము.1.4

(v) **పూరకము:** U ని విశ్వసమితి అనుకొనిన, $X \subseteq U$ అయితే $U \setminus X$ ని U పరముగా X యొక్క పూరకము అందురు. అయితే మనము తీసుకొన్న విశ్వసమితి స్థిరమైనదయితే $U \setminus X$ ని X' చే సూచించెదము మరియు దీనినే X పూరకము అందురు.



పటము.1.5

(vi) **వియుక్త సమితులు:** రెండు సమితులు X మరియు Y అనునవి వియుక్తము అనుకొనిన వాటికి ఉమ్మడిగా ఏ మూలకము ఉండదు. అనగా X మరియు Y అనునవి వియుక్తమైన $X \cap Y = \phi$ అగును.



పటము.1.6

సూచన

సాధారణముగా వెన్ చిత్రముల ద్వారా సమితులను తెలియజేయుటకు వృత్తములను ఉపయోగించెదము. అయినను వెన్ చిత్రము ద్వారా సమితిని తెలియజేయుటకు ఏదేని మూయబడిన వక్రమును కూడా ఉపయోగించెదము. కాని సమితిలోని మూలకములను వ్రాయునపుడు ఒకసారి వ్రాసినది మరొక్కసారి వ్రాయరాదు.

మనము ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూసెదము:

A= {x/x అనునది 12 కన్నా తక్కువగా నుండు ధనాత్మక పూర్ణాంకము}, $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$ మరియు $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$. అనుకొనుము. ఇప్పుడు క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) $A \cup B = \{x/x \in A$ లేక $x \in B\}$

= {x/x అనునది 12 కన్నా తక్కువగా నుండు ధనాత్మక పూర్ణాంకము, లేక x=12 లేక x=15}

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y/y \in C$ మరియు $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A\backslash C = \{x/x \in A$ కానీ $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A\backslash C) \cup (C\backslash A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \,/\, x$ అనునది పూర్ణాంకము$\}$ ను విశ్వసమితి అనుకొనుము.

0 అనునది ఋణాత్మకమో, ధనాత్మకమో కాదు. కావున $0 \notin A$.

ఇప్పుడు $A' = U \setminus A = \{x/x$ అనునది ఒక పూర్ణాంకము కానీ A లో లేనిది$\}$

$= \{x/x$ అనునది సున్న లేక ఋణ పూర్ణాంకము లేక 12 అంతకన్నా ఎక్కువగా ఉండు ధనపూర్ణాంకములు$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ఉపయోగకరమైన కొన్ని ఫలితములను క్రోడీకరించెదము.

U అనునది విశ్వసమితి మరియు A, B లు U యొక్క ఉపసమితులనుకొనిన క్రిందివి వర్తించును.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$ (ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ (iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$ (vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

సమితి పరిక్రియల ధర్మముల కొన్నింటిని నిర్వచించెదము.

1.4 సమితి పరిక్రియల ధర్మములు(న్యాయములు) (Properties of Set Operations)

A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులకు, ఈ క్రిందివి వర్తించును.

(i) స్థిత్యంతర లేక వినిమయ ధర్మము

(a) $A \cup B = B \cup A$ (సమితి సమ్మేళనము వినిమయమగును)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (సమితి ఖండనము వినిమయమగును)

(ii) సహచర్య ధర్మము

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (సమితి సమ్మేళనము సహచర్యమగును)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (సమితి ఖండనము సహచర్యమగును)

(iii) విభాగ ధర్మము

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (సమ్మేళనము మీద ఖండనమును విభజించుట)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ఖండనము మీద సమ్మేళనమును విభజించుట)

అనేకముగా ఇవ్వబడిన సమితుల ద్వారా ఈ ధర్మములను సరిచూచెదము.

పై ధర్మములను ఉదాహరణలతో నిరూపించుటకన్నా, గణితశాస్త్రయ నిరూపణలివ్వడమే ఉత్తమం. ఇది ఈ పుస్తక ఉద్దేశ్యమునకు ఎక్కువే అయినను కఠినమైన గణిత నిరూపణలను అర్థంచేసుకొని అభినందించుటకు మనము ఒక ధర్మమును తీసుకొని నిరూపించెదము.

(i) వినిమయ ధర్మము

ఈ భాగములో A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు సమితులయిన $A \cup B$ మరియు $B \cup A$ సమానమని నిరూపించవలెను. సమితుల సమానత్వ నిర్వచనం నుండి రెండు సమితులు సమానమనిన అవి ఒకే రకమైన మూలకములను కలిగియుండవలెను.

మొదట $A \cup B$ లోని ప్రతి మూలకము $B \cup A$ లోను మూలకమగునని చూపెదము. కావున $z \in A \cup B$ అనునది ఒక స్వతంత్రమైన మూలకమనుకొనిన, A మరియు B యొక్క సమ్మేళన నిర్వచనం నుండి $z \in A$ లేక $z \in B$ అనగా

ప్రతి $z \in A \cup B \implies z \in A$ or $z \in B$

$\implies z \in B$ or $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$ ($B \cup A$ నిర్వచనం నుండి) (1)

ప్రతి $z \in A \cup B$ కి (1) సత్యమగుటచే పైదాని నుండి $A \cup B$ లోని ప్రతి మూలకము $B \cup A$ లోను మూలకమగును. కాబట్టి ఉపసమితి నిర్వచనం నుండి $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ అగును

ఆ తర్వాత $y \in B \cup A$ ను ఒక స్వతంత్ర మూలకముగా తీసుకొని, y అనునది $A \cup B$ లోను మూలకమగునని చూసెదము.

ఇప్పుడు, ప్రతి $y \in B \cup A \implies y \in B$ లేక $y \in A$

$\implies y \in A$ లేక $y \in B$

$\implies y \in A \cup B$ ($A \cup B$ నిర్వచనం నుండి) (2)

ప్రతి $y \in B \cup A$ కి (2) సత్యమగుటచే పై దాని నుండి $B \cup A$ లోని ప్రతిమూలకము $A \cup B$ లోను మూలకమగును. కాబట్టి ఉపసమితుల నిర్వచనం నుండి $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ అగును.

కావున $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ మరియు $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ అని చూపబడినది. ఇది $(A \cup B) = (B \cup A)$ అయినప్పుడు మాత్రమే సంభవించును. ఇదే పద్ధతిలో తక్కిన ధర్మములను నిరూపించవచ్చు.

గణితశాస్త్రంలో నిరూపణ గురించి (About proofs in Mathematics)

గణితశాస్త్రంలో ఒక ప్రవచనమును సత్యప్రవచనము అనిన అది ఎల్లప్పుడూ సత్యముగానే ఉండవలెను. ఒక ప్రవచనము ఏదేని ఒక సందర్భములో అసత్యమైన దానిని అసత్య ప్రవచనము అని అందురు. ఉదాహరణకు క్రింది కొన్ని ప్రవచనములను చూసెదము.

(i) ఏదేని ఒక ధనాత్మక బేసి పూర్ణాంకము ప్రధానాంకమగును. (ii) త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం 180^0

(iii) ప్రతి ప్రధానాంకము ఒక బేసి పూర్ణాంకము

(iv) A మరియు B అను ఏవేని రెండు సమితులలో $A \setminus B = B \setminus A$ అగును

ఇక్కడ ప్రవచనము (i) అసత్యము, ఎందుకనగా అనేకమైన ధనాత్మక బేసి పూర్ణాంకములు ప్రధానాంకములైనను, 9, 15, 21, 45 వంటి మొదలగు పూర్ణాంకములు ధనాత్మకము మరియు బేసి సంఖ్యలు, కానీ ప్రధానాంకములు కాదు.

ప్రవచనము (ii) సత్యము, ఎందుకనగా ఏ త్రిభుజమును తీసుకొన్నను కోణముల మొత్తము 180^0 కు సమానము.

ప్రవచనము (iii) అసత్యము, ఎందుకనగా 2 ప్రధానాంకము, కానీ సరి పూర్ణాంకము. 2 తప్ప మిగిలిన ప్రధానాంకములకు ప్రవచనము (iii) సత్యమగును. కావున ఒక ప్రవచనమును సత్యమని నిరూపించవలెనన్న అది అన్ని సందర్భములలోను సత్యముగా నుండవలెను. ఒక ప్రవచనము అసత్యమని నిరూపించుటకు, ఏదేని ఒక సందర్భములో అసత్యమని చూపిన చాలు.

ప్రవచనము (iv) అసత్యము. ఈ ప్రవచనమును విశ్లేషించెదము. మనము $A\backslash B$ కనుగొనుటకు A నుంచి B లో ఉన్న మూలకములన్నింటిని తొలగించెదము. అదే విధంగా $B\setminus A$ ని కనుగొనెదము.. కావున ఖచ్చితంగా ఈ ప్రవచనం అసత్యము. ఉదాహరణకు A = {2, 5, 8} మరియు B = {5, 7, –1} అయిన $A\setminus B=\{2,8\}$ మరియు $B\setminus A=\{7,-1\}$. కనుక $A\setminus B\neq B\setminus A$. కావున ప్రవచనము (iv) అసత్యము.

ఉదాహరణ 1.1

A = {–10, 0, 1, 9, 2, 4, 5}, B = {–1, –2, 5, 6, 2, 3, 4} సమితులకు

(i) సమితి సమ్మేళనము వినిమయమని సరిచూడుము మరియు వెన్ చిత్రము ద్వారా నిరూపించుము.

(ii) సమితి ఖండనము వినిమయమని సరిచూడుము మరియు వెన్ చిత్రము ద్వారా నిరూపించుము.

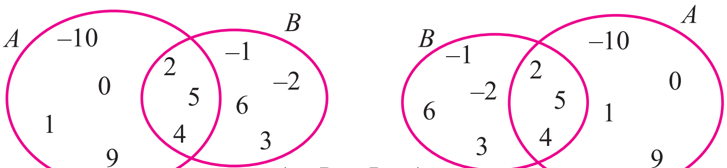
సాధన

(i) $$A\cup B=\{-10,0,1,9,2,4,5\}\cup\{-1,-2,5,6,2,3,4\}$$
$$=\{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\} \qquad (1)$$

మరియు $$B\cup A=\{-1,-2,5,6,2,3,4\}\cup\{-10,0,1,9,2,4,5\}$$
$$=\{-10,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,9\} \qquad (2)$$

కనుక (1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup B=B\cup A$ అని నిరూపించబడినది.

వెన్ చిత్రము ద్వారా



$A\cup B=B\cup A$

పటము.1.7

కనుక నిరూపించబడినది

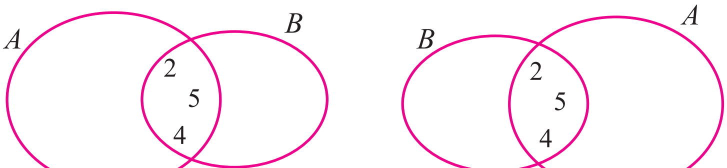
(ii) సమితి ఖండనముల వినిమయ న్యాయమును నిరూపించుట..

$$A\cap B=\{-10,0,1,9,2,4,5\}\cap\{-1,-2,5,6,2,3,4\}$$
$$=\{2,4,5\}. \qquad (1)$$

మరియు $$B\cap A=\{-1,-2,5,6,2,3,4\}\cap\{-10,0,1,9,2,4,5\}$$
$$=\{2,4,5\}. \qquad (2)$$

కనుక (1) మరియు (2) ల నుండి $A\cap B=B\cap A$ అని నిరూపించబడినది.

వెన్ చిత్రము ద్వారా



$A\cap B=B\cap A$

పటము.1.8

కనుక నిరూపించబడినది

ఉదాహరణ 1.2

A= {1,2,3,4,5}, B= {3,4,5,6} మరియు C= {5,6,7,8} లకు (i) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$. అని చూపుము మరియు (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) $B\cup C = \{3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\} = \{3,4,5,6,7,8\}$

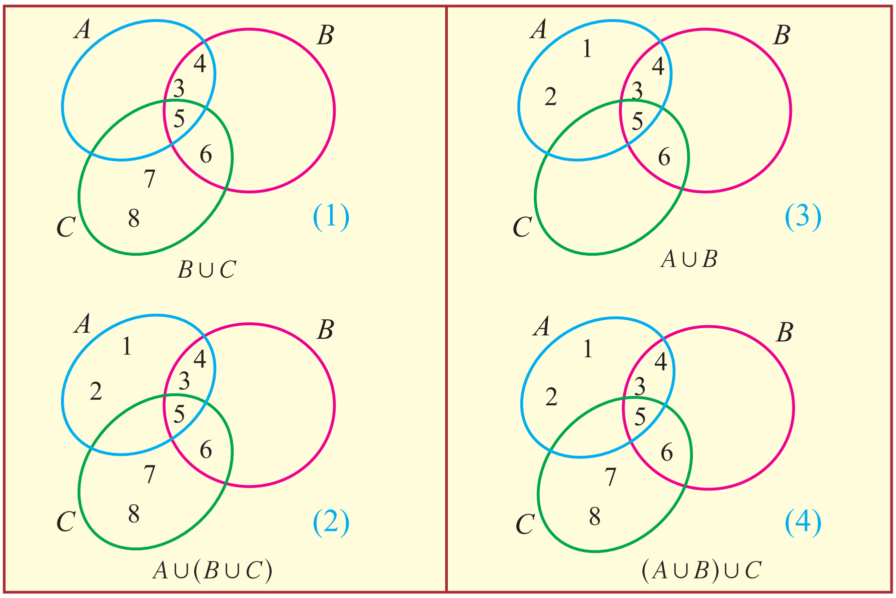
$\therefore\ A\cup(B\cup C) = \{1,2,3,4,5\}\cup\{3,4,5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (1)

మరియు $A\cup B = \{1,2,3,4,5\}\cup\{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore\ (A\cup B)\cup C = \{1,2,3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ అని నిరూపించబడినది.

(ii) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి



పటము.1.9

కనుక (2) మరియు (4) నుండి సమితి సమ్మేళనములో సహచర్య న్యాయము నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 1.3

A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e} మరియు C = {a, e} లకు (i) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. అని చూపుము మరియు (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e} మరియు C = {a, e} అని ఇవ్వ బడినది.

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ అని నిరూపించుటకు మొదట $A\cap(B\cap C)$ తీసుకొనెదము.

$B\cap C = \{a,c,e\}\cap\{a,e\} = \{a,e\}$

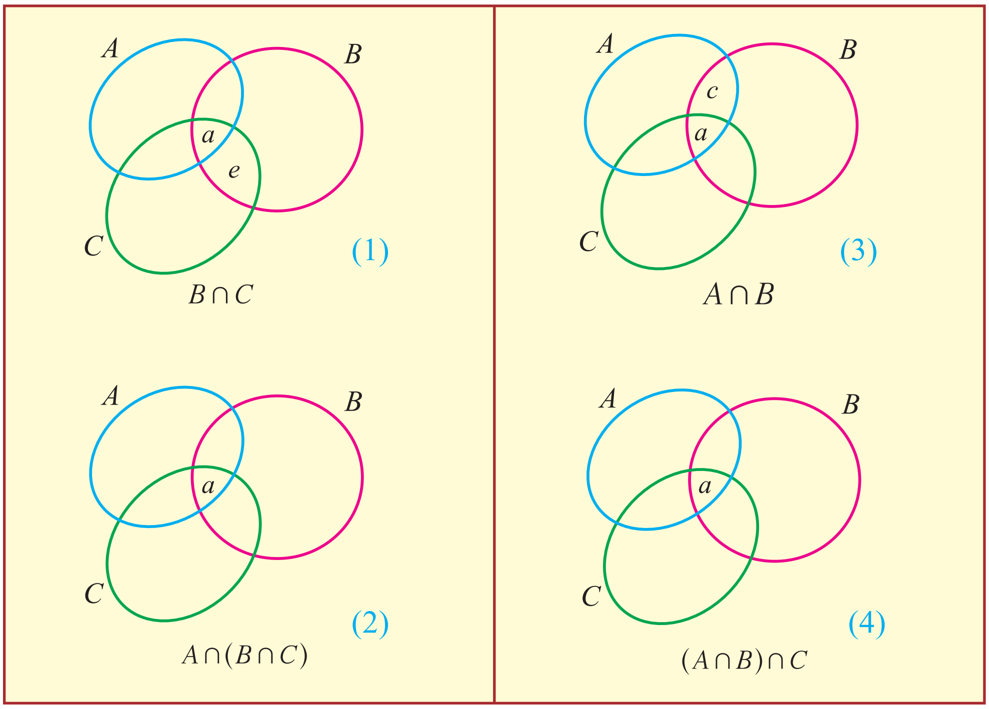
$A\cap(B\cap C) = \{a,b,c,d\}\cap\{a,e\} = \{a\}.$ (1)

తరువాత $A \cap B = \{a,b,c,d.\} \cap \{a,c,e\} = \{a,c\}$

$(A \cap B) \cap C = \{a,c\} \cap \{a,e\} = \{a\}$ (2)

(1) మరియు (2) లు మనకు కావలసిన ఫలితము ఇచ్చును.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



కనుక (2) మరియు (4) నుండి $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ సరిచూడబడినది. పటము.1.10

ఉదాహరణ 1.4

ఇవ్వబడిన A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు C = $\{c, d, e, u\}$ లకు

(i) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ అని చూపుము (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) మొదట $A \setminus (B \setminus C)$ ని కనుగొనెదము.

$(B \setminus C) = \{a,e,i,o,u\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$

$A \setminus (B \setminus C) = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}.$ (1)

తరువాత $(A \setminus B) \setminus C$ ను కనుగొనెదము.

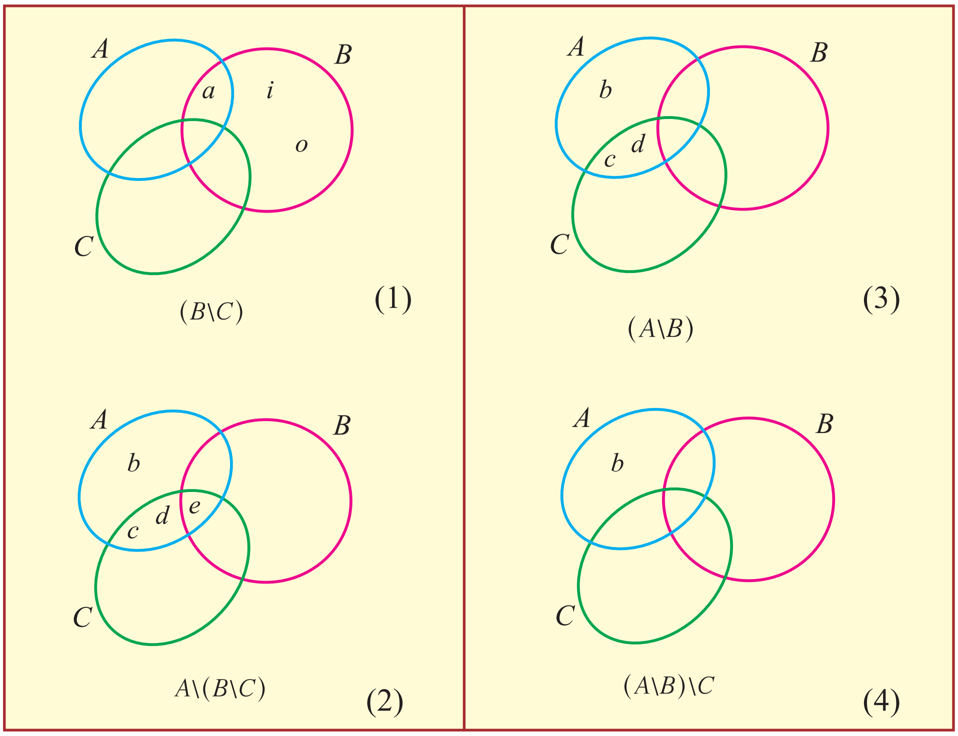
$A \setminus B = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$

$(A \setminus B) \setminus C = \{b,c,d\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{b\}.$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

కావున సహచర్య న్యాయము సమితి భేదమునకు వర్తించదు.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



కావున (2) మరియు (4) నుండి $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ సరిచూడబడినది. పటము.1.11

సూచనలు

సమితి భేదం సాహచర్య న్యాయమును పాటించదు. అయినను A, B మరియు C సమితులు పరస్పర వియుక్తములయిన $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$ అగును. దీనిని సులభముగా నిరూపించవచ్చును. B మరియు C వియుక్తములయిన $B\setminus C=B$ అగును. A, B లు వియుక్తమయిన $A\setminus B=A$ అగును. కావున $A\setminus(B\setminus C)=A$ అగును. మరల, $A\setminus B=A$ మరియు A, C లు వియుక్తములయిన $A\setminus C=A$ అగును. కావున $(A\setminus B)\setminus C=A$. కావున మనము అనుకున్నట్లు $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$ అగును. కాబట్టి పరస్పర వియుక్త సమితులకు సమితి భేదములో సహచర్య న్యాయము వర్తించును.

ఉదాహరణ 1.5

$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ మరియు $C=\{2, 4, 6, 7\}$ అయిన

(i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ అని చూపుము. (ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన

(i) మొదట $A\cup(B\cap C)$ కనుగొనెదము.

$$B\cap C=\{1,-2,3,4,5,6\}\cap\{2,4,6,7\}=\{4,6\}$$

$$A\cup(B\cap C)=\{0,1,2,3,4\}\cup\{4,6\}=\{0,1,2,3,4,6\}. \quad (1)$$

తరువాత $$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}\cup\{1,-2,3,4,5,6\}$$

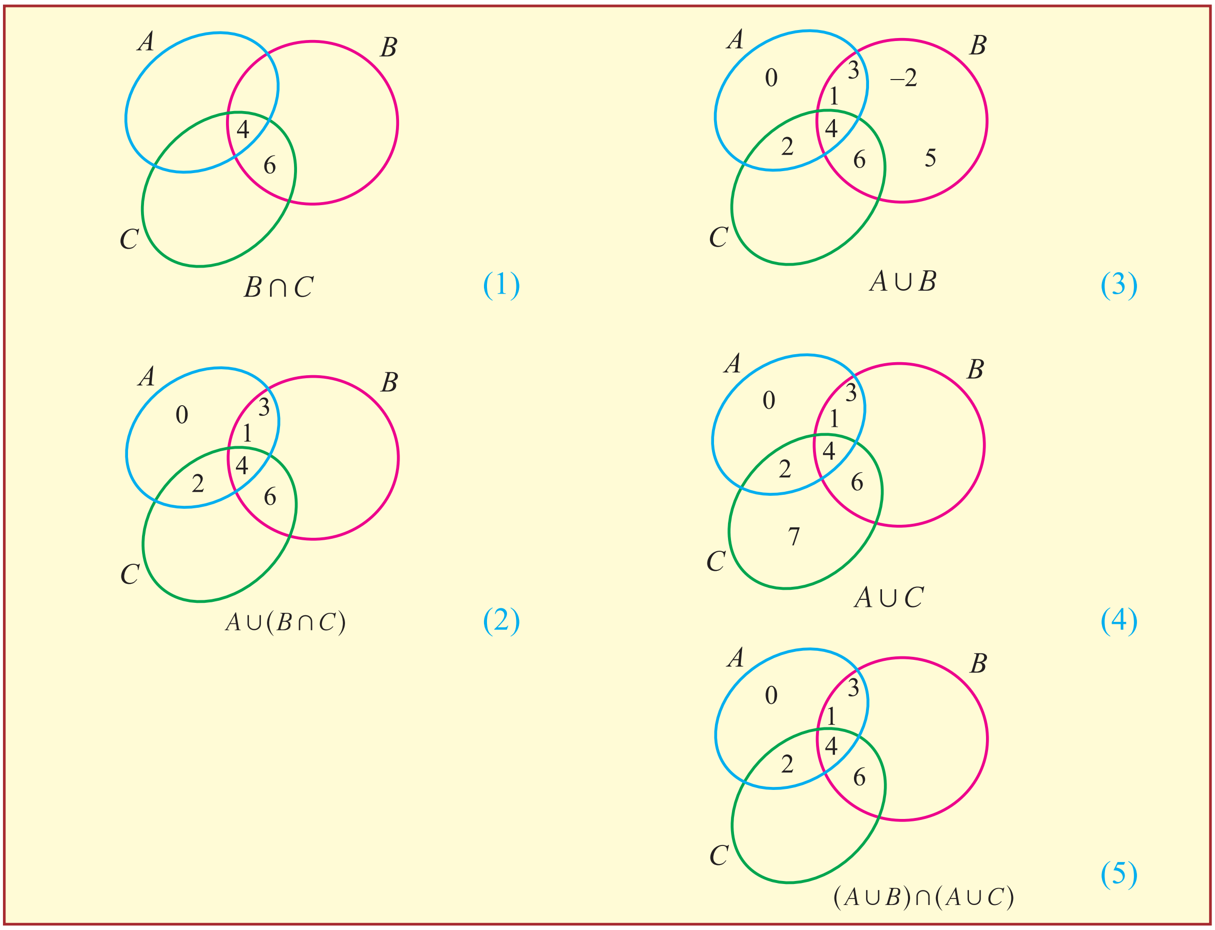
$$=\{-2,0,1,2,3,4,5,6\},$$

$$A\cup C=\{0,1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,7\}=\{0,1,2,3,4,6,7\}.$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,1,2,3,4,6,7\}$$
$$= \{0,1,2,3,4,6\}. \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ అని నిరూపితమైనది.

(ii) వెన్ చిత్రము ద్వారా



పటము.1.12

(2) మరియు (5) ల నుండి $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.6

$A = \{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}, B=\{x\,|\,x<5, x\in\mathbb{N}\}$ మరియు

$C=\{-5,-3,-1,0,1,3\}$ అయిన $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ అని చూపండి.

సాధన మొదట గమనించవలసినది సమితి A నందు -3 లేక అంతకంటే ఎక్కువ మరియు 4 కంటె తక్కువ గల వాస్తవ సంఖ్యలు (పూర్ణాంకములే కాకుండా) కలవు.

సమితి B లో 5 కంటే తక్కువ గల అన్ని ధన పూర్ణాంకములు కలవు. కావున,

$A=\{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}$; అనగా A లో -3 నుండి 4 వరకు గల వాస్తవసంఖ్యలు కలవు. అయితే 4 చేరదు.

మరియు $B=\{x\,|\,x<5, x\in\mathbb{N}\}=\{1,2,3,4\}$.

ఇపుడు కనుగొనవలసినది $\quad B\cup C = \{1,2,3,4\}\cup\{-5,-3,-1,0,1,3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$; కావున

$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1)

తరువాత కనుగొనవలసినది $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap B = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$;

మరియు $A \cap C = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$. కావున

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3,\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

అభ్యాసము 1.1

1. $A \subset B$ అయిన $A \cup B = B$ అని చూపుము (వెన్ చిత్రము ఉపయోగించి).
2. $A \subset B$ అయిన $A \cap B$ మరియు $A \setminus B$ కనుగొనుము (వెన్ చిత్రము ఉపయోగించి).
3. P = $\{a, b, c\}$, Q = $\{g, h, x, y\}$ మరియు R = $\{a, e, f, s\}$ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.
   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. A = {4, 6, 7, 8, 9}, B = {2, 4, 6} మరియు C= {1, 2, 3, 4, 5, 6} అయిన
   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$ లను కనుగొనుము.
5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ సమితి సమ్మేళనముల వినిమయ న్యాయమును సరిచూడుము.
6. $A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}$ మరియు $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$ లకు సమితి ఖండనముల వినిమయ న్యాయమును సరిచూడుము.
7. A = $\{x/x$ అనునది 42 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములు$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$ మరియు $C = \{1, 4, 5, 6\}$ అయిన $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ సరిచూడుము.
8. P = $\{a, b, c, d, e\}$, Q = $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు R = $\{a, c, e, g\}$ అయిన సమితి ఖండనముల సహచర్య న్యాయమును సరిచూడుము.
9. A = {5, 10, 15, 20}, B = {6, 10, 12, 18, 24} మరియు C = {7, 10, 12, 14, 21, 28} అయిన $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ అని సరిచూడుము. మీ జవాబును న్యాయపరచుము.
10. A = {–5, –3, –2, –1}, B = {–2, –1, 0} మరియు C = {–6, –4, –2} అయిన A\(B\C) మరియు (A\B)\C లను కనుగొనుము. సమితి భేద పరిక్రియల గూర్చి మీ అభిప్రాయమేమి?
11. A = {–3, –1, 0, 4, 6, 8, 10}, B = {–1, –2, 3, 4, 5, 6} మరియు C = {–1, 2, 3, 4, 5, 7} అయిన
    (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని చూపుము
    (iii) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి (i) ని సరిచూడుము. (iv) వెన్ చిత్రమునుపయోగించి (ii) ని సరిచూడుము.

1.5 డీ మార్గన్ న్యాయములు

అగస్టన్ డీమార్గాన్ తండ్రి (ఆంగ్లేయుడు) ఇండియాలోని తూర్పిండియా కంపెనీలో పని చేస్తుండెను. అగస్టీన్ డీ మార్గన్ (1806 – 1817) భారతదేశమునందు తమిళనాడులోని మధురై నందు జన్మించెను. కేంబ్రిడ్జ్‌లో ట్రినిటి కళాశాల నందు విద్యనభ్యసించెను. సమ్మేళనము, ఖండనము మరియు పూరకము అను మూడు ప్రాథమిక సమితి పరిక్రియల ద్వారా డీ మార్గన్ న్యాయములను సంబంధపరచవచ్చును.

సమితి భేదమునకు డీ మార్గన్ న్యాయములు:

A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులు అనుకొనిన

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

సమితి పూరకమునకు డీ మార్గన్ న్యాయములు:

U విశ్వసమితి యందు A మరియు B సమితులు గలవని అనుకొనిన

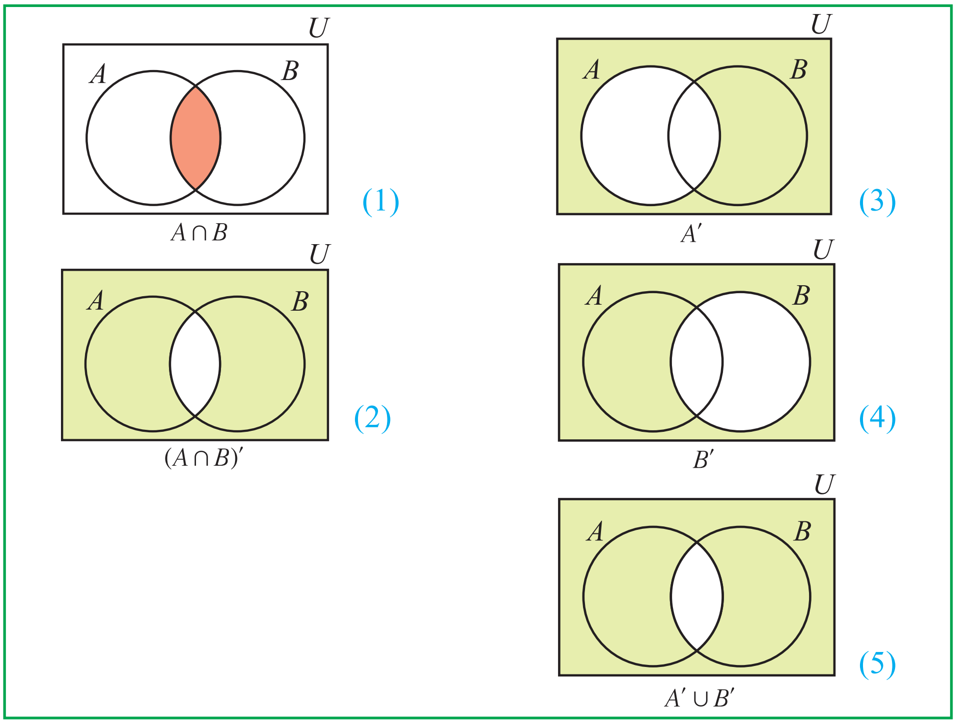
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

సమితి భేదము నుంచి సమితి పూరక న్యాయ నిరూపణ కోసము, ఏదేని ఒక సమితి D కి $D' = U \setminus D$ అగునని పరిశీలించవచ్చును. దీనిని మనము నిరూపించవలసిన అవసరంలేదు. అయితే సమస్య పరిష్కారములో ఈ న్యాయములను ఎట్లు ఉపయోగించవలెనో తెలుసుకొనవలయును.

ఉదాహరణ 1.7

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ ను వెన్ చిత్రమునుపయోగించి సరిచూడుము.

సాధన



పటము.1.13

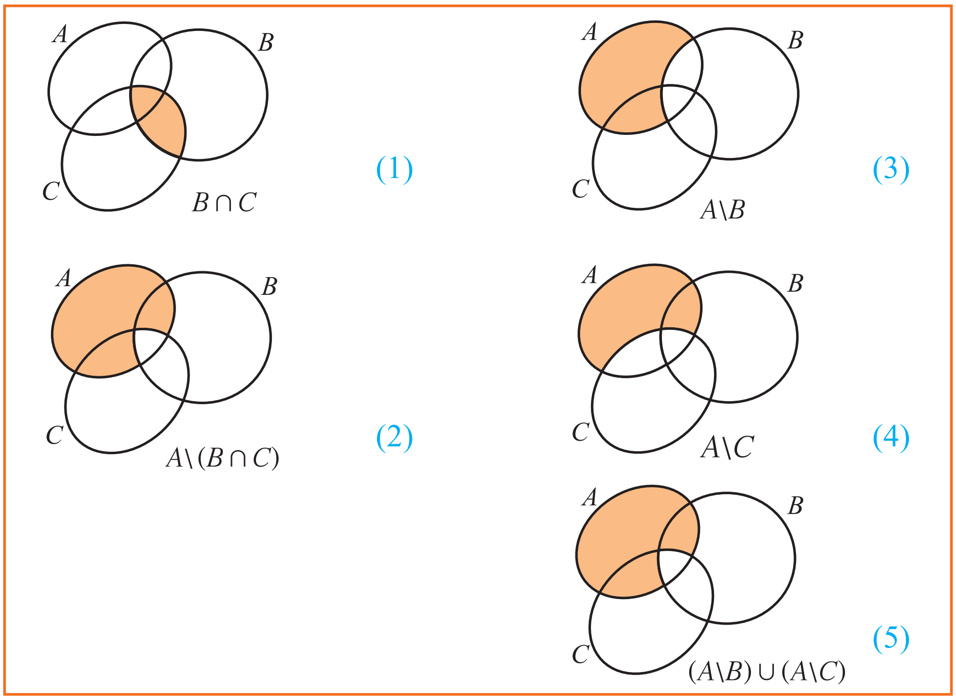
(2) మరియు (5) ల నుండి $(A \cap B)' = A' \cup B'$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.8

వెన్ చిత్రమునుపయోగించి సమితి భేదములకు డీ మార్గన్ న్యాయమును సరిచూడుము.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

సాధన



పటము.1.14

(2) మరియు (5) ల నుండి $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ సరిచూడబడినది.

ఉదాహరణ 1.9

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ మరియు $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ అనుకొనిన, సమితి పూరకముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము.

సాధన మొదట సరిచూడవలసినది $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ఇందులో తీసుకొనవలసినది

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \quad (1)$$

తరువాత కనుగొనవలసినది $A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

కావున $A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \quad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

ఇదే విధముగా పై సమితులనుపయోగించి $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ను సరిచూడవచ్చును. వివరణలు అభ్యాసమునకు వదిలివేయబడినవి.

ఉదాహరణ 1.10

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ మరియు $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$ అయిన $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ను సరిచూడుము.

సాధన మొదట కనుగొనవలసినది $B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$$

$$= \{a, b, x, z\}. \quad (1)$$

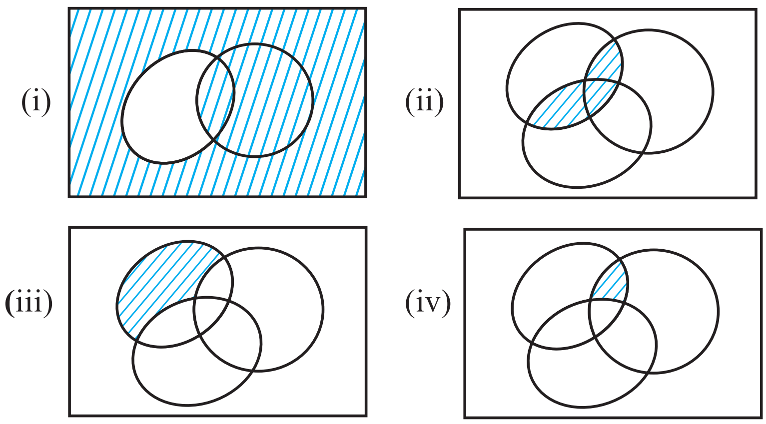
$A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ మరియు $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

అదేవిధముగా $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}$. (2)

కావున (1) మరియు (2) ల నుండి $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

అభ్యాసము 1.2

1. క్రింది వాటిని వెన్ చిత్రము ద్వారా తెలుపుము.
   (i) U = {5, 6, 7, 8, ..., 13}, A = {5, 8, 10, 11} మరియు B = {5, 6, 7, 9, 10}
   (ii) U = {a, b, c, d, e, f, g, h}, M = {a, b, f, g} మరియు N = {a, b, d, e, g}
2. ఛాయ వేసిన ప్రతి ప్రాంతమును వివరించుము. U, $A, B, C, \cup, \cap$, $'$ మరియు $\setminus$ అను గుర్తులను అవసరమగుచోట ఉపయోగించుము.



3. క్రింద వివరించిన A, B మరియు C అను మూడు సమితులను వెన్ చిత్రము ద్వారా గీయుము?
   (i) $A \cap B \cap C$ (ii) A మరియు B వియుక్తములు కాని రెండు C యొక్క ఉపసమితులు
   (iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$
   (vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$
4. $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ ను వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడుము.
5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ మరియు $B = \{4, 16, 20, 28\}$ అయిన $(A \cup B)'$ మరియు $(A \cap B)'$ కనుగొనుము.

6. ఇవ్వబడిన $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, A = $\{a, b, f, g\}$ మరియు B = $\{a, b, c\}$ లకు సమితి పూరకముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము.

7. క్రింద ఇవ్వబడిన సమితులను ఉపయోగించి సమితి భేదముల డీ మార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము:

   A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}, B = {1, 2, 5, 7} మరియు C = {3, 9, 10, 12, 13}.

8. $A = \{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$, $B = \{1,5,10,15,20,30\}$ మరియు

   $C = \{7,8,15,20,35,45,48\}$ అయిన $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ను సరిచూడుము.

9. వెన్ చిత్రమునుపయోగించి క్రిందివి సరియైనవేనని చూపుము.

   (i) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.6 సమితుల పరిమాణత్వము (లేక) ఆది సంఖ్య (Cardinality of sets)

IX వ తరగతిలో $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ అను సూత్రమునుపయోగించి, రెండు సమితుల సమస్యలను సాధించుటను నేర్చుకొంటిమి. A, B మరియు $A \cap B$ యొక్క ఆదిసంఖ్యలు తెలిసినపుడు $A \cup B$ సమితి యొక్క ఆదిసంఖ్యను గణించుటకు ఈ సూత్రము ఉపయోగపడును. A, B మరియు C మూడు సమితులు అనుకొనిన, $A \cup B \cup C$ యొక్కఆదిసంఖ్యను కనుగొనుటకు అనురూప సూత్రము ఏమి? ఈ సందర్భంలో ఈ సూత్రము ఇవ్వబడినది.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

పై సూత్రము ఉపయోగమును క్రింది ఉదాహరణతో విశదీకరించ వచ్చును.

ఉదాహరణ 1.11

ఒక విద్యార్థుల సమూహములో, 65 మంది కాలి బంతి, 45 మంది హాకీ, 42 మంది క్రికెట్, 20 మంది కాలిబంతి మరియు హాకీ, 25 మంది కాలిబంతి మరియు క్రికెట్, 15 మంది హాకీ మరియు క్రికెట్ మరియు 8 మంది మూడింటిని ఆడెదరు. అయిన సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము. (సమూహములోని ప్రతి విద్యార్థి కనీసము ఒక ఆటను ఆడుదురని అనుకొనుము.)

సాధన F, H మరియు C అనునవి క్రమముగా కాలిబంతి, హాకీ మరియు క్రికెట్ ఆడువారి సంఖ్యగా తీసుకొనిన

$n(F) = 65$, $n(H) = 45$ మరియు $n(C) = 42$.

మరియు $n(F \cap H) = 20$, $n(F \cap C) = 25$, $n(H \cap C) = 15$ మరియు $n(F \cap H \cap C) = 8$.

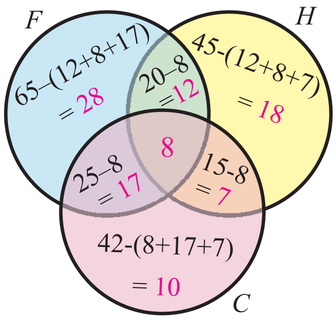
మొత్తం సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య $n(F \cup H \cup C)$ ను కనుగొనుట.

సూత్రము ద్వారా
$$n(F \cup H \cup C) = n(F) + n(H) + n(C) - n(F \cap H) - n(H \cap C) - n(F \cap C) + n(F \cap H \cap C)$$
$$= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100.$$

కావున, సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య = 100.

మరొక పద్ధతి:

వెన్ చిత్రము ద్వారా ఇదే సమస్యను సాధించవచ్చును. ప్రస్తుతము నిత్య జీవితములో వచ్చు కొన్ని సమస్యలను వెన్ చిత్రము మరియు తర్కము ద్వారా సాధించుటకు వీలగును. వెన్ చిత్రముయందు 3 ఖండన సమితులు కలవు. ప్రతి ఒక్కటీ ఒక ఆటను తెలుపును. పటమును చూచి, సమూహములో గల ఆటగాళ్ళ సంఖ్యను ఇవ్వబడిన వాక్యములను చదివి జాగ్రత్తగా లెక్కించి పూరింపుము.



పటము.1.15

సమూహములోని విద్యార్థుల సంఖ్య

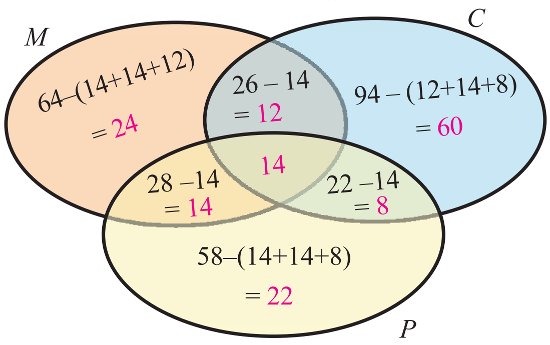
$$= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.$$

ఉదాహరణ 1.12

విశ్వవిద్యాలయ విద్యార్థుల పరిశీలనలో, 64 మంది గణితము, 94 మంది సంగణక శాస్త్రము, 58 మంది భౌతిక శాస్త్రము, 28 మంది గణితము మరియు భౌతిక శాస్త్రము, 26 మంది గణితము మరియు సంగణక శాస్త్రము, 22 మంది సంగణక శాస్త్రము మరియు భౌతిక శాస్త్రము, మరియు 14 మంది మూడింటిని తీసుకొనిరి. పరిశీలనలో గల విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము. ఒకే ఒక విభాగమును మాత్రము తీసుకొన్నవారు ఎందరు. కనుగొనుము.

సాధన ఇచ్చిన వివరములు వెన్ చిత్రములో తెలుపవలెను.

M, C, P అనునవి క్రమముగా విద్యార్థులు తీసుకొనిన గణితశాస్త్రము, సంగణక శాస్త్రము మరియు భౌతిక శాస్త్రము అనుకొనిన, ఇచ్చిన వివరములు వెన్ చిత్రములో పూరింపబడినవి.



పటము.1.16

$$n(M \cap C \cap P) = 14$$

$$n(M \cap C \cap P') = 26 - 14 = 12$$

$$n(M \cap P \cap C') = 28 - 14 = 14$$

$$n(C \cap P \cap M') = 22 - 14 = 8$$

పరిశీలనలో గల విద్యార్థుల సంఖ్య

$$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$$

గణిత శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 64 – (14+14+12) = 24$

సంగణక శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 94 - (12+14+8) = 60$

భౌతిక శాస్త్రము మాత్రము తీసుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $= 58 - (14+14+8) = 22$

ఒకే ఒక విభాగమును మాత్రము తీసుకొనిన విద్యార్థుల సంఖ్య $= 24 + 60 + 22 = 106$

ఉదాహరణ 1.13

ఒక ఆకాశవాణి కేంద్రము 190 విద్యార్థులపై వారికి ఇష్టమైన సంగీత రకములను తెలుసుకొనుటకు పరిశీలన జరిపెను. ఈ పరిశీలనలో 114 మంది రాక్ సంగీతము, 50 మంది జానపద సంగీతము, 41 మంది శాస్త్రీయ సంగీతము ఇష్టపడిరి. 14 మంది రాక్ సంగీతము మరియు జానపద సంగీతము, 15 మంది రాక్ సంగీతము మరియు శాస్త్రీయ సంగీతము, 11 మంది శాస్త్రీయ సంగీతము మరియు జానపద సంగీతము, 5 మంది మూడింటిని ఇష్టపడిరి. అయిన

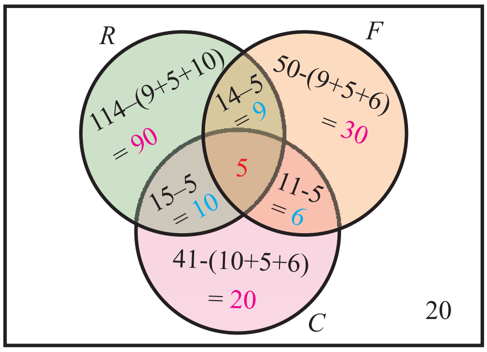
(i) మూడింటిని ఇష్టపడనివారు ఎంత మంది?

(ii) రెండు రకములను మాత్రము ఇష్టపడువారు ఎంత మంది?

(iii) రాక్ సంగీతము కాక జానపద సంగీతము ఇష్టపడువారు ఎంత మంది? కనుగొనుము.

సాధన R, F మరియు C అనునవి క్రమముగా రాక్ సంగీతము, జానపద సంగీతము మరియు శాస్త్రీయ సంగీతము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సమితి అనుకొనిన,

ఇవ్వబడిన వివరములను వెన్ చిత్రములో పూరింపుము.



పటము.1.17

$n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$

వెన్ చిత్రము నుండి 3 రకముల సంగీతములలో ఏదేని ఒక రకమును ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య

$90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170.$

పరిశీలన చేయబడిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 190.

మూడింటిని ఇష్టపడని విద్యార్థుల సంఖ్య = 190 – 170 = 20.

రెండింటిని మాత్రము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య = 9 + 6 + 10 = 25.

రాక్ సంగీతము కాక జానపదసంగీతము ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య = 30 + 6 = 36.

అభ్యాసము 1.3

1. A మరియు B లు రెండు సమితులు మరియు U అనునది విశ్వసమితి, $n(U) = 700$, $n(A) = 200$, $n(B) = 300$ మరియు $n(A \cap B) = 100$ అయిన $n(A' \cap B')$ ను కనుగొనుము.

2. $n(A) = 285$, $n(B) = 195$, $n(U) = 500$, $n(A \cup B) = 410$ ఇవ్వబడిన $n(A' \cup B')$ ను కనుగొనుము.

3. A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులు $n(A) = 17$, $n(B) = 17$, $n(C) = 17$, $n(A \cap B) = 7$, $n(B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 5$ మరియు $n(A \cap B \cap C) = 2$ అయిన $n(A \cup B \cup C)$ ను కనుగొనుము.

4. క్రింద ఇవ్వబడిన సమితులనుపయోగించి

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$ ని సరిచూడుము.

   (i) A = {4, 5, 6}, B = {5, 6, 7, 8}, మరియు C = {6, 7, 8, 9}

   (ii) A = {a, b, c, d, e}, B = {x, y, z}, మరియు C = {a, e, x}

5. ఒక కళాశాలలో 60 మంది విద్యార్థులు రసాయన శాస్త్రము, 40 మంది భౌతిక శాస్త్రము, 30 మంది జీవ శాస్త్రము, 15 మంది రసాయన మరియు భౌతిక శాస్త్రములు, 10 మంది భౌతిక మరియు జీవ శాస్త్రములు, 5 మంది జీవ మరియు రసాయన శాస్త్రములందు చేరిరి. మూడింటిలో ఏ ఒక్కరూ చేరలేదు. అయిన కనీసము ఒక పాఠములోనైన చేరిన వారెందరు?

6. ఒక నగరంలో ప్రజలు 85% తమిళము, 40% ఆంగ్లము, 20% హిందీ మాట్లాడుదురు మరియు 32% ఆంగ్లము మరియు తమిళము, 13% తమిళము మరియు హిందీ మరియు 10% ఆంగ్లము మరియు హిందీ మాట్లాడుదురు. అయిన మూడు భాషలను మాట్లాడు ప్రజల శాతమును కనుగొనుము?

7. ఒక ప్రకటనా సంస్థ తన 170 మంది ఖాతాదారులలో 115 మంది దూరదర్శిని, 110 మంది ఆకాశవాణి, 130 మంది వార్తా పత్రికలను మరియు 85 మంది దూరదర్శిని మరియు వార్తా పత్రికలు, 75 మంది దూరదర్శిని మరియు ఆకాశవాణి, 95 మంది ఆకాశవాణి మరియు వార్తా పత్రికలు మరియు 70 మంది మూడింటిని వాడుదురు. ఈ వివరములను వెన్ చిత్రము ద్వారా తెలుపుము.

   (i) ఎంత మంది ఆకాశవాణి మాత్రము వాడుదురు?

   (ii) ఎంత మంది దూరదర్శిని మాత్రము వాడుదురు?

   (iii) ఎంత మంది ఆకాశవాణి కాక దూరదర్శిని మరియు వార్తా పత్రికలు వాడుదురు?

8. 4000 మంది విద్యార్థులు గల పాఠశాలయందు 2000 మంది ఫ్రెంచ్ తెలిసినవారు, 3000 మంది తమిళము, 500 మంది హిందీ, 1500 మంది ఫ్రెంచ్ మరియు తమిళము, 300 మంది ఫ్రెంచ్ మరియు హిందీ, 200 మంది తమిళము మరియు హిందీ మరియు 50 మంది మూడు భాషలు తెలిసినవారు కలరు.

   (i) ఏ ఒక్క భాష తెలియని వారెందరు?

   (ii) కనీసము ఒక భాష తెలిసిన వారెందరు?

   (iii) రెండు భాషలు తెలిసిన వారెందరు?

9. 120 కుటుంబములు గల ఒక గ్రామములో, 93 కుటుంబములు వంట చెఱకు, 63 కుటుంబాలు కిరోసిన్, 45 కుటుంబములు వంటగ్యాస్, 45 కుటుంబములు వంట చెఱకు మరియు కిరోసిన్, 24 కుటుంబములు కిరోసిన్ మరియు వంటగ్యాస్, 27 కుటుంబములు వంటగ్యాస్ మరియు వంట చెఱకు వాడుదురు. అయిన వంట చెఱకు, కిరోసిన్ మరియు వంటగ్యాస్ వాడు వారెందరో కనుగొనుము?

1.7 సంబంధములు

మనము సమితి భావనను గూర్చి ముందు భాగమునందు చూచితిమి. ఇచ్చిన సమితులకు సమ్మేళనము, ఖండనము మరియు పూరకముల ద్వారా నూతన సమితులను ఎట్లు సృష్టించవచ్చునో చూచితిమి. ఇపుడు మరొక పద్ధతిలో ఇచ్చిన రెండు సమితులు A మరియు B ద్వారా నూతన సమితులను సృష్టించుటను చూడబోతున్నాము. మరొక ముఖ్యమైన గణిత భావనలు "సంబంధము" మరియు "ప్రమేయము" లను నిర్వచించుటలో ఈ నూతన సమితి ముఖ్య పాత్ర వహించును.

A మరియు B రెండు శూన్యేతర సమితులు అయిన, A తో B యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధము $A\times B$ (A క్రాస్ B) అను నూతన సమితి నిర్వచనము క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

$$A\times B = \{(a,b)\backslash a \in A \text{ మరియు } b \in B\}.$$

అదే విధముగా $B\times A$ (B క్రాస్ A) అను సమితిని ఈ విధముగా నిర్వచింపవచ్చును.

$$B\times A= \{(b,a)\backslash b \in B \text{ మరియు } a \in A\}$$

సూచనలు

(i) $(a,\ b)$ అను యుగ్మములో క్రమము ముఖ్యమైనది. అనగా $a\neq b$ అయినపుడు $(a,\ b)\neq(b,\ a)$.

(ii) $A\times B$ కార్టీషియన్ లబ్ధములో A మరియు B సమితులు సమానమైన ఇది సాధ్యమగును .

ఒక ఉదాహరణ చూచెదము

ఒక సెల్‌ఫోన్ దుకాణము C_1, C_2, C_3 అను మూడు రకముల సెల్‌ఫోన్లను విక్రయించెను. C_1 ధర ₹1200, C_2 ధర ₹2500 మరియు C_3 ధర ₹2500 అనుకొనుము.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ మరియు $B = \{1200, 2500\}$ గా తీసుకొనుము.

ఈ సందర్భమున , $A\times B=\{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3,2500)\}$

కానీ $B\times A= \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,),(1200, C_3), (2500, C_3)$.

$A\neq B$ అయితే $A\times B\neq B\times A$ అని సులభముగా తెలుసుకొనవచ్చును.

$F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ అనునది $A\times B$ యొక్క ఒక ఉపసమితి అనుకొనుము.

పై క్రమయుగ్మములో ప్రతి మొదటి మూలకము ఏకైక మూలకముతో సంబంధము కలిగియున్నది. అనగా మొదటి స్థానములో ఏ మూలకమూ, రెండవ స్థానములోని ఒకటి కన్నా ఎక్కువ మూలకములతో యుగ్మము కలిగియుండుట లేదు.

F లో సాధారణంగా మొదటి మూలకము ధరను రెండవ మూలకము సూచించును. తరువాత $E= \{(1200,\ C_1),\ (2500,\ C_2),\ (2500,\ C_3)\}$ అనునది $B\times A$ యొక్క ఉపసమితి అయిన, ఇచట C_2 మరియు C_3 అను రెండు వేర్వేరు మూలకములు 2500 అను మొదటి మూలకముతో సంబంధము కలిగియున్నది.

నిర్వచనము

A మరియు B అనునవి రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనిన, A నుండి B కు గల సంబంధము R అనునది $A\times B$ యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి అగును. అనగా $R\subseteq A\times B$

R యొక్క ప్రదేశము $= \{x \in A/(x,y) \in R$ కొన్ని $y \in B$ కి$\}$

R యొక్క వ్యాప్తి $= \{y \in B/(x,y) \in R$ కొన్ని $x \in A$ కి$\}$

1.8 ప్రమేయములు (Functions)

పీటర్ డిరిచ్లెట్

(1805-1859)

జెర్మనీ

సంఖ్యా సిద్ధాంతము, వైశ్లేషకము మరియు యాంత్రికశాస్త్ర విభాగములలో డిరిచ్లెట్ ఎనలేని కృషి చేసిరి.

ఇతడు 1837 లో ప్రమేయమును $y = f(x)$ అను గుర్తుతో నవీన భావనను పరిచయంచేసెను. మరియు ఇతను సుపరిచితమైన ఫిజియాన్‌హోల్ సూత్రమును సూత్రీకరించెను.

A మరియు B లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనుము. ఒక ప్రమేయం A నుండి B కి గల సంబంధము,

$f \subseteq A \times B$ అగుటకు ఈ క్రిందివి వర్తించవలెను:

(i) f ప్రదేశం $= A$.

(ii) $(x, y) \in f$ అగుటకు, ప్రతి $x \in A$ కు ఒకే ఒక $y \in B$ గా నుండవలెను.

A నుండి B కు గల ప్రమేయము అనునది ఒక ప్రత్యేక సంబంధము కలిగియుండి పై *(i)*, *(ii)* లను తృప్తిపరచునదిగా నుండుటను గమనించుము. అటువంటి ప్రమేయమును ప్రతిసర్జనము (mapping) అని అందురు.

A నుండి B కు గల ప్రమేయము f ను $f\colon A \to B$ గా సూచించ వలయును. మరియు $(x, y) \in f$ అయిన దానిని $y = f(x)$ అని వ్రాయవలెను.

సంబంధముల భావనను ఉపయోగించకుండా ప్రమేయమును సవరించి క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును. అయినను అనేక సమయాల్లో ఈ సూత్రీకరణను, ప్రమేయము యొక్క వాడుకలోని నిర్వచనముగా ఉపయోగపడుచున్నది.

నిర్వచనము

A మరియు B లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనుము. A నుండి B కు ఒక ప్రమేయం f అగుటకు నియమం, ప్రతి మూలకం $x \in A$ కు ఏకైక మూలకం $y \in B$ గా వుండును. మనము దీనిని $y = f(x)$ గా సూచించవచ్చును అనగా x ప్రమేయం y అని అర్థం.

ప్రమేయం యొక్క **ప్రదేశం (domain)** సమితి A అగును. ప్రమేయం యొక్క **సహ ప్రదేశం (co-domain)** సమితి B అగును. f లో x యొక్క **ప్రతిబింబమును (image)** y అనబడును మరియు y యొక్క **పూర్వబింబము (pre-image)** x అనబడును. f లో A యొక్క అన్ని ప్రతిబింబముల మూలకముల సమితిని f యొక్క **వ్యాప్తి (range)** అందురు. సహప్రదేశము యొక్క ఉపసమితిని ఆ ప్రమేయం యొక్క వ్యాప్తి అగునని గమనింపుము.

1837 ప్రాంతములో, **పీటర్ డిర్చలెట్** మరియు **నికోలై లాబచెవస్కైలు** వేర్వేరుగా ప్రమేయమునకు ఆధునిక నిర్వచనం ఇచ్చెరి. దీనికి ముందు ప్రమేయమునకు సరైన నిర్వచనం లేదు.

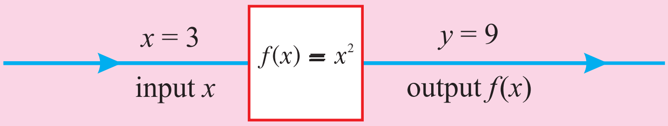
పై నిర్వచనములకు ముందు విభాగము 1.7 లో పరిగణింపబడిన ఉదాహరణ నుండి, సమితి

$F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ అనునది ఒక ప్రమేయమును తెలియజేయును. ఎందుకనగా $F \subseteq A \times B$ అను సంబంధము *(i)*, *(ii)* నియమములను తృప్తిపరచుచున్నది.

$E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ అనునది ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ అనునది *(ii)* వ నియమమును తృప్తిపరచడంలేదు..

సూచన

(i) ప్రమేయము f ను ఒక యంత్రముగా భావించిన ప్రతి x యొక్క ఉత్పాదకము (input) విలువకు y కు ఏకైక ఉత్పన్నము (output) లభించును.



(ii) ఒక ప్రమేయమును నిర్వచించుటకు ప్రదేశము, సహప్రదేశము మరియు ప్రదేశములోని ప్రతి మూలకము, సహప్రదేశములోని ఏకైక మూలకముతో సంబంధమును పాటించుట అవసరమగుచున్నది.

ఉదాహరణ 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ అనుకొనుము.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ఒక సంబంధము అయిన R ప్రమేయమా అని చూపుము మరియు ప్రదేశము, సహప్రదేశము, R యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

సాధన R ప్రదేశము $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

ప్రతి $x \in A$ కు ఒకే ఒక $y \in B$. కనుక $y = R(x)$.

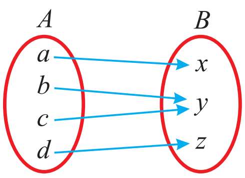
$\therefore$ R ఒక ప్రమేయము. B అనునది సహప్రదేశము అగును.

కనుక $R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ మరియు $R(4) = 9$. $\therefore$ R వ్యాప్తి $\{3, 6, 10, 9\}$.

ఉదాహరణ 1.15

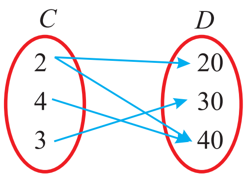
క్రింది బాణా చిత్రములు ఏవి ప్రమేయములగును? వివరింపుము.

(i)



పటము.1.18

(ii)



పటము.1.19

సాధన బాణా చిత్రము *(i)* లో A లోని ప్రతి మూలకమునకు ఏకైక ప్రతిబింబములున్నవి. కావున ఇది ఒక ప్రమేయము. బాణా చిత్రము *(ii)* లో C సమితిలో ఉన్నటువంటి మూలకము 2 నకు రెండు ప్రతిబింబములు 20 మరియు 40 లను కలిగివున్నది. కావున ఇది ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.16

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. అయిన క్రింది సంబంధములు X నుండి X కు ప్రమేయములు అగునో కాదో వివరింపుము?

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

సాధన

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

f ప్రమేయము కాదు ఎందుకనగా మూలకం 2 కు రెండు వేర్వేరు మూలకములు 3 మరియు 1 తో సంబంధము కలిగియున్నది.

(ii) సంబంధము $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా మూలకము 1 కి ప్రతిబింబము లేదు. $\therefore$ g ప్రదేశము $= \{2, 3, 4\} \neq X$.

(iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$ ను తీసుకొనగా.

X లోని ప్రతి మూలకము X లోని ఏకైక మూలకంతో జతపరచబడినది. కనుక h అనునది ఒక ప్రమేయం.

ఉదాహరణ 1.17

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$, $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$ కు క్రింది సంబంధములలో ఏవి ప్రమేయములగును? ప్రమేయములయితే వాటి వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

సాధన (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకము B లోని ఏకైక మూలకముతో సంబంధమును కలిగియున్నది కనుక f_1 ఒక ప్రమేయమగును.

$\therefore$ f_1 వ్యాప్తి $= \{-1, 2, -3, -4\}$.

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$.

f_2 ప్రమేయం కాదు. ఎందుకనగా మూలకం 1 కి రెండు వేర్వేరు ప్రతిబింబములు -4 మరియు -1 వున్నవి మరియు f_2 ప్రమేయము కాదనటను గమనింపుము. ఎందుకనగా 4 నకు ప్రతిబింబము లేదు.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకం B లో ఏకైక మూలకంతో కలుపబడినది. కనుక f_3 ఒక ప్రమేయం.

$\therefore$ f_3 వ్యాప్తి $= \{ 2 \}$.

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.

A లోని ప్రతి మూలకం B లో ఏకైక మూలకంతో జతపరచబడినది.

కనుక f_4 ఒక ప్రమేయం.

$\therefore$ f_4 వ్యాప్తి $= \{ 2, 5, -4\}$.

ఉదాహరణ 1.18

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ అనుకొనుము.}$$

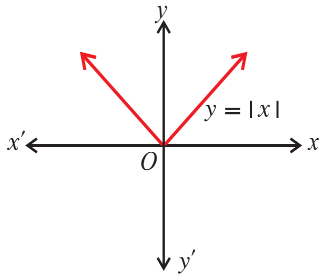
$\{ (x, y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ అను సంబంధము ప్రమేయమును నిర్వచించునా? వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

సాధన x యొక్క ప్రతి విలువకు $y = |x|$ లో ఏకైక విలువను కలిగియున్నది.

$\therefore$ ఇచ్చినటువంటి సంబంధము ప్రమేయమును నిర్వచించును.

వాస్తవ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{R}$ అనునది ప్రమేయ ప్రదేశం అవుతుంది.

కావున $|x|$ ఎల్లప్పుడు, ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు సున్న లేక ధనాత్మకం మరియు ఈ ప్రమేయం నుండి ప్రతి ధన వాస్తవ సంఖ్య ప్రతిబింబముగా ఏర్పడుతుంది. ఋణాత్మకం కాని వాస్తవ సంఖ్యాసమితి వ్యాప్తి అగును. (సున్న లేక ధనాత్మకంగా ఉండును)



పటము 1.20

సూచన

$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, ప్రమేయంను మూల్యము లేక పరమ మూల్యము ప్రమేయము అందురు.

ఉదాహరణకు $|-8| = -(-8) = 8$ మరియు $|8| = 8$

1.8.1 ప్రమేయమును సూచించు విధానములు:

ప్రమేయమును క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

(i) క్రమయుగ్మములు (ii) పట్టిక (iii) బాణపు చిత్రములు (iv) రేఖా చిత్రములు

$f : A \to B$ ఒక ప్రమేయము అనుకొనుము.

(i) సమితి $f = \{(x\,, y) : y = f(x), x \in A\}$ యొక్క అన్ని క్రమయుగ్మములు ప్రమేయమును సూచించును.

(ii) ప్రమేయము f ను పట్టిక రూపంలో x విలువలను మరియు వాటి ప్రతిబింబ విలువలను సూచించవచ్చును.

(iii) f ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశము మూలకములను వాటి ప్రతిబింబములకు బాణపు గుర్తులతో సూచింతురు.

(iv) $f = \{(x\,, y) : y = f(x), x \in A\}$ అను ఒక సమితి క్రమయుగ్మములన్నింటిని $x - y$ తలముపై గుర్తించవలయును. ఒక తలముపై అన్ని బిందువుల సమితిని f ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రము అగును.

కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా ప్రమేయములను వివిధ రూపములుగా సూచించుటను గమనింపుము.

అనేక ప్రమేయములకు వాటి రేఖాచిత్రములను పొందవచ్చును. కాని ప్రతి రేఖాచిత్రము ప్రమేయమును సూచించదు.

క్రింది పరీక్ష నుంచి ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రములు ప్రమేయమా కాదా అని నిర్ధారించుచున్నది.

1.8.2 నిలువు రేఖా పరీక్ష (లేక) లంబరేఖా పరీక్ష (Vertical line test)

ఒక రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కావలెనన్న ప్రతి నిలువు రేఖ, రేఖాచిత్రమును ఒక బిందువువద్ద ఖండించవలయును.

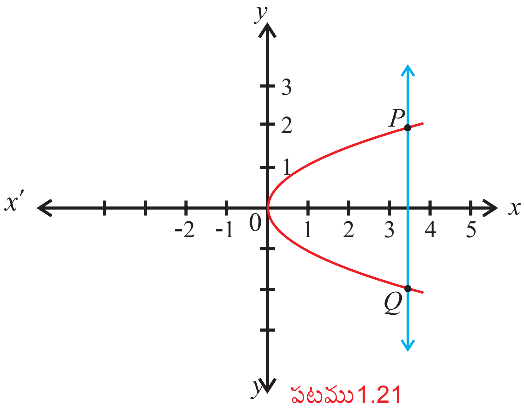
సూచన

కొన్ని నిలువు రేఖలు రేఖాచిత్రమును ఖండించలేకపోవును. ఇది సరియైనది. ఒక నిలువు రేఖ, రేఖా చిత్రములో ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువులను కలిసినచో అట్టి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు. ఈ సందర్భములో ఒక x విలువకు రెండు y విలువలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు $y^2 = x$ అను రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.19

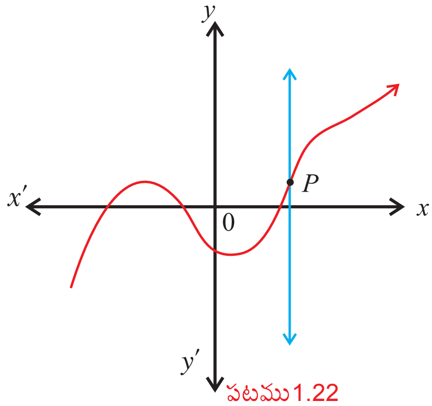
నిలువరేఖ పరీక్షను ఉపయోగించి క్రింది రేఖాచిత్రములు ఏవి ప్రమేయములను సూచించునో తెల్పుము?

(i)



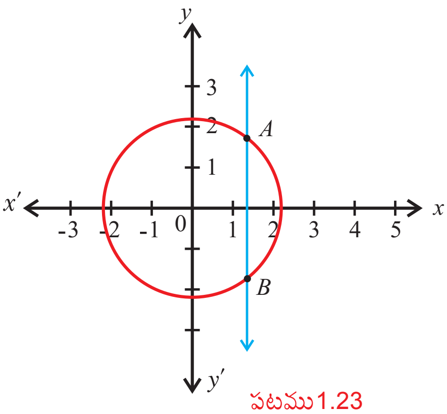
పటము 1.21

(ii)



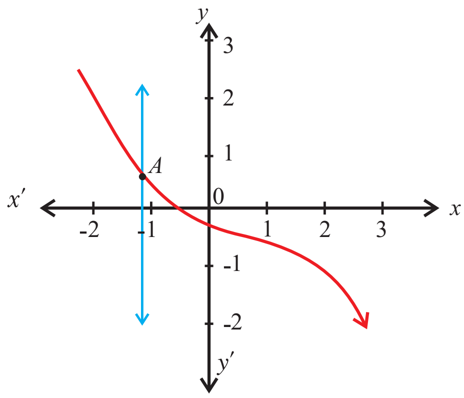
పటము 1.22

(iii)



పటము 1.23

(iv)



పటము 1.24

సాధన

(i) ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును రెండు బిందువులు P మరియు Q ల వద్ద ఖండించుచున్నది.

(ii) ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము. ఎందుకనగా నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును గరిష్ఠంగా ఒక బిందువు P వద్ద ఖండించుచున్నది.

(iii) నిలువురేఖ, రేఖాచిత్రమును రెండు బిందువులు A మరియు B ల వద్ద ఖండించుచున్నది. కనుక ఇచ్చినటువంటి రేఖాచిత్రము ప్రమేయము కాదు.

(iv) రేఖాచిత్రము నిలువు రేఖ పరీక్షను తృప్తిపరచుచున్నది. కనుక ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రము ప్రమేయమగును.

ఉదాహరణ 1.20

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ మరియు $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ రెండు సమితులు మరియు $f : A \to B$ ప్రమేయము $f(x) = 2x + 1$ అని నిర్వచింపబడినది ఈ ప్రమేయమును (i) క్రమయుగ్మములు (ii) పట్టిక (iii) బాణాచిత్రము (iv) రేఖాచిత్రములలో సూచించుము.

సాధన $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1, f(1) = 2(1)+1 = 3,\ f(2) = 2(2) + 1 = 5, f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) క్రమయుగ్మముల సమితి

క్రమయుగ్మముల సమితిని క్రింది ప్రమేయము f ద్వారా సూచించవచ్చును.

$$f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$$

(ii) పట్టిక రూపం

క్రింది విధంగా f ను పట్టిక పద్ధతిలో సూచించవలయును.

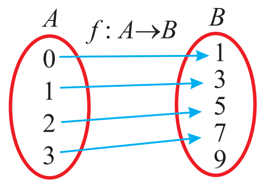
x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) బాణాచిత్రము (Arrow Diagram)

f ను బాణాచిత్రముగా సూచించవలయును.

రెండు సంవృత వక్రములను A మరియు B సమితులను తెలుపు విధంగా గీయవలయును.

అపుడు A లోని ప్రతి మూలకము B లో వాటి ఏకైక ప్రతిబింబములతో అనుసంధానమును బాణపు గుర్తులతో సూచించవలయును



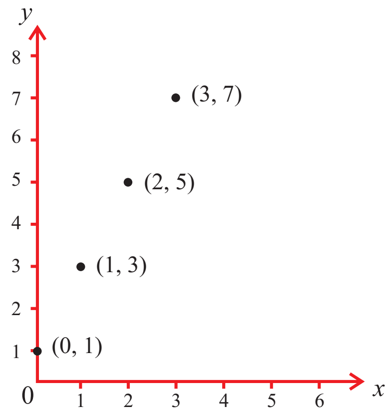
పటము 1.25

(iv) రేఖా చిత్రము

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}.$$

బిందువులు (0, 1) (1, 3) (2, 5) మరియు (3, 7) లను తలములో చూపిన విధముగా గుర్తించవలెను.

అన్ని బిందువులు ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రమును సూచించుచున్నవి.



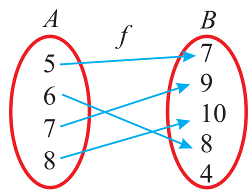
పటము 1.26

1.8.3 ప్రమేయముల రకములు

ప్రమేయముల ధర్మముల నాధారముగా ప్రమేయములను వివిధ రకములుగా విభజించవచ్చును.

(i) ఏక – ఏక ప్రమేయము (లేక) అన్వేక ప్రమేయము (One-One function)

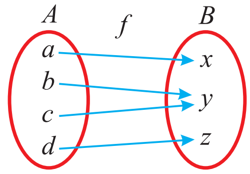
$f : A \to B$ ఒక ప్రమేయము అనుకొనుము. f అను ప్రమేయము A నుండి B కు గల ఏక – ఏక ప్రమేయము అగుటకు A లోని ప్రతి మూలకమునకు B లో విభిన్న మూలకాలతో సంబంధము కలిగి ఉండవలయును. f ఏక – ఏక అగుటకు A లో $u \neq v$ అయిన $f(u) \neq f(v)$ అగును. మరొక విధముగా B లోని మూలకము A లో ఒకటి కంటె ఎక్కువ మూలకాలతో సంబంధమును కలిగియుండ కూడదు.



పటము 1.27

ఏక – ఏక ప్రమేయమును అంతర ప్రమేయము అని కూడా అందురు. పై పటము ఏక – ఏక ప్రమేయమును సూచించును.

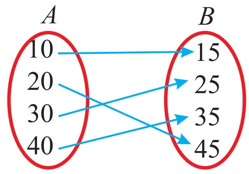
(ii) సంగ్రస్త ప్రమేయము (Onto function)



పటము 1.28

$f: A \rightarrow B$ సంగ్రస్త ప్రమేయము కావలెనన్న B లోని ప్రతి మూలకమునకు A లో పూర్వబింబములను కలిగియుండవలెను. f సంగ్రస్తం అగుటకు ప్రతి $b \in B$ కు కనీసం ఒక మూలకం $a \in A$ వుండవలయును. కావున $f(a) = b$, అదే విధంగా f వ్యాప్తి B అగును. సంగ్రస్త ప్రమేయమును బాహ్య ప్రమేయము (Surjective) అని కూడా అందురు. పై పటము నుండి f ఒక సంగ్రస్తము

(iii) ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయము (One-One and onto function)



పటము 1.29

ప్రమేయము $f: A \rightarrow B$ ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్తము కూడా అయితే f ను ద్విగుణ (Bijective) ప్రమేయము అందురు. $f: A \rightarrow B$ ఏక – ఏక సంగ్రస్తము అగుటకు A లోని విభిన్న మూలకములకు B లో అన్ని మూలకములకు విభిన్న ప్రతిబింబములు వుండవలెను.

గమనిక

(i) ఒక ప్రమేయము $f: A \rightarrow B$ సంగ్రస్తము అగుటకు $B = f$ వ్యాప్తి.

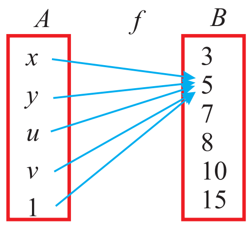
(ii) $f: A \rightarrow B$ ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్తము అగుటకు $f(a_1) = f(a_2)$ అయినపుడు A లో $a_1 = a_2$ అగును. మరియు B లో ప్రతి మూలకమునకు A లో కనీసము ఒక పూర్వబింబము వుండవలెను.

(iii) $f: A \rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయము అగుటకు A మరియు B లు పరిమిత సమితులు అయిన A మరియు B లలో మూలకముల సంఖ్య సమానముగా ఉండవలయును. పటము *1.29* నుండి f ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్తము.

(iv) $f: A \rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయము, అపుడు A మరియు B లు తుల్య సమితులు.

(v) ఏక–ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయమును ఏక–ఏక సమన్వయము అందురు.

(iv) స్థిర ప్రమేయము (Constant function)



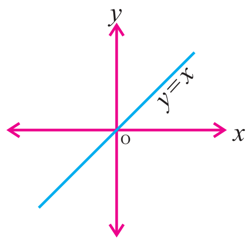
పటము 1.30

ఒక ప్రమేయము $f: A \rightarrow B$ స్థిర ప్రమేయము అగుటకు A లో ప్రతి మూలకమునకు B లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబము వుండవలయును.

స్థిర ప్రమేయము వ్యాప్తి ఏక మూలక సమితి అగును.

$A = \{x, y, u, v, 1\}$, $B = \{3, 5, 7, 8, 10, 15\}$ అనుకొనుము. $f: A \rightarrow B$ ను ప్రతి $x \in A$ కు $f(x) = 5$ అని నిర్వచించబడినది. ఇవ్వబడిన పటము స్థిర ప్రమేయమును సూచించును.

(v) తత్సమ ప్రమేయము (Identity function)



పటము 1.31

A ఒక శూన్యేతర సమితి. A ప్రమేయం $f: A \rightarrow A$ ఒక తత్సమ ప్రమేయము అగుటకు $f(a) = a \ \forall a \in A$ అగును. తత్సమ ప్రమేయంలో A లోని ప్రతి మూలకము A లోని అదే మూలకమునకు అనుసంధానమగును.

ఉదాహరణకు $A = \mathbb{R}$ అనుకొనుము. ప్రమేయం $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ అని నిర్వచించిన అది $\mathbb{R}$ పై తత్సమ ప్రమేయం అగును. పటము 1.31 $\mathbb{R}$ పై తత్సమ ప్రమేయమును సూచించును.

ఉదాహరణ 1.21

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$ మరియు $f : A \to B$ ను $f(x) = x^2$ అని నిర్వచితమయితే f యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము. ప్రమేయ రకమును గుర్తించుము?

సాధన $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$f : A \to B$ మరియు $f(x) = x^2$ అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1\ ;\ f(2) = 4\ ;\ f(3) = 9\ ;\quad f(4) = 16\ ;\quad f(5) = 25.$

f వ్యాప్తి $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

కావున విభిన్న మూలకములకు విభిన్న ప్రతిబింబములున్నవి. కావున ఇది ఏక - ఏక ప్రమేయము కాని సంగ్రస్తము కాదు. ఎందుకంటే $3 \in B$ కి అనుగుణంగా $x \in A$ లేదు కావున $f(x) = x^2 = 3$.

సూచన

ఒక ప్రమేయము $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $g(x) = x^2$ గా నిర్వచించిన అది ఏక - ఏక ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా $u = 1$ మరియు $v = -1$ అయిన $u \neq v$ కానీ $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$ కనుక సూత్రము ఒక్కటే ఏక-ఏక లేక సంగ్రస్త ప్రమేయమును ఏర్పరచదు. ఈ నియమమును పాటించవలెనన్న ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్తము నిర్ణయించుటకు ప్రదేశము మరియు సహప్రదేశములను పరిగణించవలెను.

ఉదాహరణ 1.22

ఒక ప్రమేయము $f : [1,\ 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & 1 \le x < 2 \\ 2x - 1\ , & 2 \le x < 4 \\ 3x^2 - 10, & 4 \le x < 6 \end{cases} \qquad (\text{ఇక్కడ } [1\ ,6) = \{x \in \mathrm{R} : 1 \le x < 6\})$$

అయిన క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము?

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$ (iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2\,f(5) - 3\,f(1)$

సాధన

(i) $f(5)$ విలువను కనుగొనుట: 4 మరియు 6 మధ్యలో 5 వుంటుంది కనుక $f(x) = 3x^2 - 10$ ను ఉపయోగించవలెను.

$\therefore\ f(5) = 3(5^2) - 10 = 65.$

(ii) $f(3)$ విలువను కనుగొనుట. 2 మరియు 4 ల మధ్యన 3 వుంది అని గమనించుము.

కనుక $f(x) = 2x - 1$ ను ఉపయోగించి $f(3)$ ని కనుగొనవలెను.

$\therefore\ f(3) = 2(3) - 1 = 5.$

(iii) $f(1)$ విలువ కనుగొనుట.

ఇపుడు 1 యొక్క అంతరము $1 \le x < 2$ అయినపుడు $f(x) = 1 + x$ ను ఉపయోగించవలెను.

$\therefore\ f(1) = 1 + 1 = 2.$

(iv) $f(2) - f(4)$ విలువ

ఇపుడు 2 అంతరము $2 \le x < 4$ కనుక $f(x) = 2x - 1$ ను ఉపయోగించవలయును.

కనుక $f(2) = 2(2) - 1 = 3.$

అదేవిధంగా 4 అంతరము $4 \le x < 6$ కనుక $f(x) = 3x^2 - 10$ ను ఉపయోగించవలయును.

$\therefore\ f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38.$

$\therefore\ f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35.$

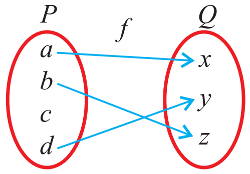
(v) $2\,f(5) - 3\,f(1)$ లెక్కించుట.

(i) మరియు (iii) విలువల నుండి $2\,f(5) - 3\,f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124.$

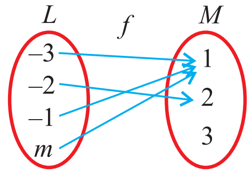
అభ్యాసము 1.4

1. ఈ క్రింది బాణాచిత్రములు ఏవి ప్రమేయములో తెల్పండి. మీ జవాబును సరిచూడుము.

(i)



(ii)



2. $F = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$ అను ప్రమేయం ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము?

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ మరియు $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3.$ అయిన ఈ క్రిందివి ఏ రకమైన ప్రమేయములో తెల్పుము? (కారణమును తెలుపుము)

(i) $f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$

(ii) $f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$

(iii) $f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ మరియు $f : X \to Y$ ఈ క్రిందివి ఏవి ప్రమేయములో కనుగొనుము? కారణం తెల్పుము మరియు ప్రమేయమైన ప్రమేయ రకమును తెల్పుము?

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2,\ x \in X,\ y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ అనునది తత్సమ ప్రమేయమును సూచించిన a, b, c మరియు d విలువలను కనుగొనుము.

6. $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$ మరియు $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ అయిన f వ్యాప్తిని వ్రాయుము. $f : A \to A$ ప్రమేయమగునా కనుగొనుము?

7. $f = \{ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3) \}$ అను ప్రమేయం $A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ల నుండి ఏర్పడినది. ఇది (i) ఏక – ఏక ప్రమేయమగునా (ii) సంగ్రస్త ప్రమేయము అగునా (iii) ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయమగునా అని తెలుపుము.

8. క్రింది ప్రమేయము నుండి 2 మరియు 3 ల పూర్వబింబములను వ్రాయుము.

$f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}.$

9. క్రింద పట్టిక $A = \{5, 6, 8, 10\}$ నుండి $B = \{19, 15, 9, 11\}$ కి ప్రమేయం. ఇక్కడ $f(x) = 2x - 1$ అయిన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

x	5	6	8	10
$f(x)$	9	11	15	19

10. $A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$; $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$ మరియు

$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$

(i) f మూలకములను వ్రాయుము

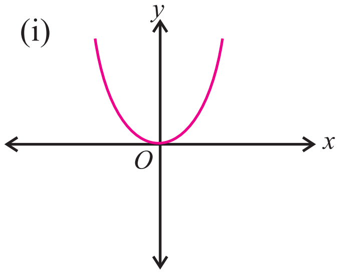
(ii) సహప్రదేశము

(iii) వ్యాప్తి

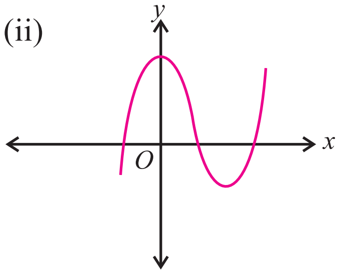
(iv) ప్రమేయము రకమును గుర్తించుము.

11. క్రింది రేఖాచిత్రములు ప్రమేయములా అని సరైన కారణములతో వివరించుము.

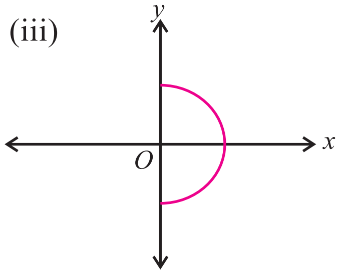
(i)



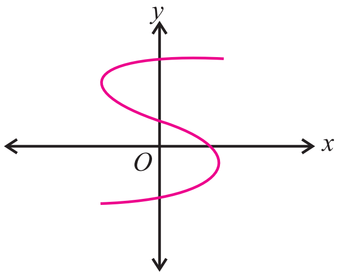
(ii)



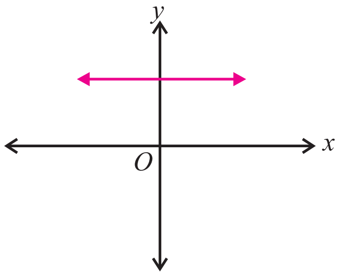
(iii)



(iv)



(v)



12. $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ను (i) పట్టిక (ii) బాణాచిత్రములుగా చూపించుము.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ మరియు $f : A \to B$ ను $f(x) = \dfrac{x-3}{3}$ గా నిర్వచించబడిన f ను

(i) బాణాచిత్రము

(ii) క్రమయుగ్మములు

(iii) పట్టిక

(iv) రేఖాచిత్రముల ద్వారా సూచించుము.

14. $A = \{4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $f : A \to B$ ను $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ గా నిర్వచించిన f ను (i) బాణా చిత్రము (ii) క్రమయుగ్మములు మరియు (iii) పట్టిక పద్ధతులలో సూచించుము?

15. ప్రమేయము $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ అనునది క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము?

(i) $f(5) + f(6)$

(ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$

(iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$.

16. ప్రమేయము $f: [-7,6) \to \mathbb{R}$ అనునది క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & -7 \le x < -5 \\ x + 5 & -5 \le x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x < 6 \end{cases}$$ అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము?

(i) $2\,f(-4) + 3\,f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\dfrac{4\,f(-3) + 2\,f(4)}{f(-6) - 3\,f(1)}$.

అభ్యాసము 1.5

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. A మరియు B అను రెండు సమితులలో $A \cup B = A$ అనుదానికి కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన

(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

2. $A \subset B$ అయిన $A \cap B =$

(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

3. P మరియు Q అను ఏవేని రెండు సమితులలో $P \cap Q =$

(A) $\{x / x \in P$ లేక $x \in Q\}$ (B) $\{x / x \in P$ మరియు $x \notin Q\}$

(C) $\{x / x \in P$ మరియు $x \in Q\}$ (D) $\{x / x \notin P, x \in Q\}$

4. If $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, s, t, u\}$ అయిన $A \backslash B =$

(A) $\{p, q\}$ (B) $\{t, u\}$ (C) $\{r, s\}$ (D) $\{p, q, r, s\}$

5. $n[p(A)] = 64$ అయిన $n(A) =$

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. A, B మరియు C అను ఏవేని మూడు సమితులలో $A \cap (B \cup C) =$

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

7. A మరియు B అను ఏవేని రెండు సమితులకు $\{(A \backslash B) \cup (B \backslash A)\} \cap (A \cap B)$ విలువ

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

8. క్రింది వాటిలో సత్యము కానిది ఏది?

(A) $A \backslash B = A \cap B'$ (B) $A \backslash B = A \cap B$

(C) $A \backslash B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \backslash B = (A \cup B) \backslash B$

9. A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులయిన $B \backslash (A \cup C) =$

(A) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ (B) $(B \backslash A) \cap (B \backslash C)$

(C) $(B \backslash A) \cap (A \backslash C)$ (D) $(A \backslash B) \cap (B \backslash C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$ మరియు $n(A \cup B) = 40$ అయిన $n(A \cap B)$ కి సమానమైనది

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ అనునది తత్సమ ప్రమేయాన్ని తెలియజేసిన, (x, y) అనునది

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ అనునది స్థిరప్రమేయాన్ని తెలియజేసిన, 'a' యొక్క విలువ

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ అనునది $\mathbb{N}$ నుండి $\mathbb{Z}$ కు ఇవ్వబడిన ఒక ప్రమేయమైన f యొక్క వ్యాప్తి

(A) $\{1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{1, -1\}$ (D) $\mathbb{Z}$

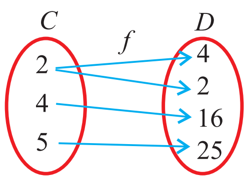
14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ అయిన 3 యొక్క పూర్వబింబము

(A) 5 మరియు –1 (B) 6 మరియు 8 (C) 8 మరియు –1 (D) 6 మరియు 5.

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$, $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ అనుకొనుము మరియు $f : A \to B$ ని $f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$గా ఇవ్వబడిన f అనునది

(A) ఏక – ఏక (B) సంగ్రస్త (C) ద్విగుణ (D) ప్రమేయము కాదు

16. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము తెలియజేయునది



(A) సంగ్రస్త ప్రమేయము (B) స్థిర ప్రమేయము

(C) ఏక – ఏక ప్రమేయము (D) ప్రమేయము కాదు

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$మరియు $f : A \to B$ ని $f(x) = x - 2$ గా నిర్వచించిన f యొక్క వ్యాప్తి

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ అయిన $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి ఏకమూలక సమితి అయిన అది

(A) ఒక స్థిర ప్రమేయము (B) ఒక తత్సమ ప్రమేయము

(C) ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము (D) ఒక ఏక – ఏక ప్రమేయము

20. $f : A \to B$ అనునది ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము మరియు $n(A) = 5$ అయిన $n(B)$ కి సమానమైనది

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

ముఖ్యాంశములు

సమితులు

- బాగుగా నిర్దేశించబడిన మూలకముల సముదాయము సమితి అగును.
  - సమితి సమ్మేళనములో వినిమయ మరియు సహచర్య న్యాయములు వర్తించును.
  - సమితి ఖండనములో వినిమయ మరియు సహచర్య న్యాయములు వర్తించును.
  - సమితి భేదములో వినిమయ న్యాయము వర్తించదు.
  - సమితులు పరస్పరము వియుక్తమయినపుడు మాత్రము సమితి భేదములో సహచర్య న్యాయము వర్తించును
- విభాగ న్యాయములు
  - $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- సమితి భేదములో డీ మోర్గాన్ న్యాయములు
  - $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$
  - $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$
- పూరకములో డీ మోర్గాన్ న్యాయములు
  - $(A\cup B)'=A'\cap B'$
  - $(A\cap B)'=A'\cup B'$
- సమితుల సమ్మేళనములో ఆదిసంఖ్య రీత్యా సూత్రములు
  - $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
  - $n(A\cup B\cup C)$

    $=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

ప్రమేయములు

- A తో B కార్టీజియన్ లబ్ధమును క్రింది విధముగా నిర్వచింపవచ్చును

  $A\times B=\{(a,b)/a\in A$ మరియు $b\in B\}$
- A నుంచి B కు గల సంబంధము R అనునది $A\times B$ యొక్క శూన్యేతర సమితి అనగా $R\subseteq A\times B$.
- ప్రమేయం $f:X\rightarrow Y$ నిర్వచింపబడినట్లయితే ఈ క్రింది నిబంధనలు వర్తించవలెను.

  ప్రతి $x\in X$ కు ఒక $y\in Y$ కి మాత్రము సంబంధము కలిగియుండవలెను.
- ప్రతి ప్రమేయమును రేఖాచిత్రము ద్వారా తెలుపవచ్చును. అయినను సాధారణంగా దీని విపర్యయము సరికాదు.
- ప్రతి నిలువు రేఖ, రేఖా చిత్రమును గరిష్టముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించిన, ఆ రేఖాచిత్రము ప్రమేయమును తెలియజేయును.
- ప్రమేయమును ఈ క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.
  - క్రమయుగ్మములు
  - బాణా చిత్రము
  - పట్టిక మరియు
  - రేఖాచిత్రము

* $y = |x|$ యొక్క మూల్యము లేక పరమ మూల్యమును క్రిందివిధంగా నిర్వచింపవచ్చు.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

* ప్రమేయములలోని కొన్ని రకములు:
  - ఏక – ఏక ప్రమేయము (వేర్వేరు మూలకములు వేర్వేరు ప్రతిబింబములను కలిగియుండును)
    (injective function)
  - సంగ్రస్త ప్రమేయము (వ్యాప్తి మరియు సహప్రదేశము సమానము)
    (surjective function)
  - ద్విగుణ ప్రమేయము (ఏక – ఏక మరియు సంగ్రస్తముగా నుండవలెను)
    (One-One and onto function)
  - స్థిర ప్రమేయము (వ్యాప్తి ఏక మూలక సమితి అగును)
    (Constant function)
  - తత్సమ ప్రమేయము (ప్రతి మూలకము అదే మూలకమునకు అనుసంధానమగును)
    (Identity function)

మీకు తెలుసా?

గణితశాస్త్రములో మిలియన్ల కొలది బహుమానముగా ఇచ్చుటకు అమెరికాలోని క్లే గణితశాస్త్ర సంస్థ 2000 సం॥లో ఏడు సమస్యలను ముందుంచెను. ఆగష్టు 2010 వరకు ఆరు సమస్యలు ఇంకను సాధించకనేయున్నది. సరైన సాధన ఇచ్చు ఏ సమస్యకైనను 10,00,000 అమెరికన్ డాలర్లను బహుమానముగా ఆ సంస్థ ఇచ్చును. 2010 సం॥లో రష్యాకు చెందిన గ్రిగోరీ పీర్లమేన్ అను గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ఒక Poincare conjecture అను సమస్యను సాధించెను. కానీ అతను ఆ మిలియన్ల బహుమానమును నిరాకరించెను. (ఇచట conjecture అనగా ఒక గణిత సమస్యను నిరూపించవచ్చు లేక నిరూపించలేము అని అర్థము)

2

వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత వరుసలు మరియు శ్రేణులు

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - *C.F.Gauss*

- పరిచయం
- వరుసలు
- అంకశ్రేఢి
- గుణశ్రేఢి
- శ్రేణులు

లియోనార్డో ఫిసానో

(ఫిభోనేసి)

(1170-1250)

ఇటలీ

ఫిభోనేసి ప్రాచీన గణితశాస్త్ర పునరుద్ధరణలో ప్రముఖ పాత్రను పోషించెను. ఆధునిక గణిత శాస్త్రంలో యుండు సంఖ్యా వరుసలను అతను వచ్చిన తరువాత ఫిబోనాసి సంఖ్యలుగా వాడబడుచున్నవి. ఈ విధంగా అతని పేరు పరిచయమైంది. కాని వీటిని అతను కనుగొనకపోయినను ఉదాహరణగా ఉపయోగించుచున్నారు.

2.1 పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో, వాస్తవ సంఖ్యల వరుసలు మరియు శ్రేణుల గురించి నేర్చుకొనెదము. దీర్ఘకాల చరిత్రలో వరుసలు అనునవి ప్రాథమిక గణిత ఉద్దేశ్యములు. నిత్య జీవిత సంఘటనలలో గణిత శాస్త్ర మరియు ఇతర భావనల అభివృద్ధికి ఇవి సాధనములు.

$\mathbb{N}$ మరియు $\mathbb{R}$ లను వరుసగా ధన పూర్ణాంకముల సమితి మరియు వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అని గుర్తుకు తెచ్చుకొనుము.

నిత్యజీవితంలో జరుగు క్రింది కొన్ని సంఘటనలను పరిగణించెదము:

(i) ఒక నిర్ణీత కాలంలో సముద్ర మట్టం నుండి ఉపగ్రహముల ఎత్తును ISRO శాస్త్రజ్ఞుల బృందం పరిశీలించుచు నమోదు చేస్తారు.

(ii) చెన్నై సెంట్రల్ రైల్వేస్టేషన్‌ను ఎంత మంది ప్రజలు రోజు వారి క్రమంలో ఉపయోగించుచున్నారని రైల్వే మంత్రిత్వశాఖ కనుగొనవలయునని కోరినది మరియు 180 రోజులుగా ప్రతిరోజు సెంట్రల్ రైల్వేస్టేషన్‌కు ప్రవేశించుచున్నవారి సంఖ్యను మంత్రిత్వ శాఖ నమోదు చేస్తుంది.

(iii) ఆసక్తి కలిగిన 9వ తరగతి విద్యార్థి కరణీయ సంఖ్యలో వచ్చు దశాంశ భాగమును కనుగొని $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ క్రింది విధంగా వ్రాసెను $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$.

(iv) ఒక విద్యార్థి లవము 1 తో ప్రారంభమగు ధనాత్మక భిన్నములను ఆసక్తితో కనుగొని ఈ విధంగా వ్రాసెను. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$.

(v) గణిత శాస్త్ర ఉపాధ్యాయురాలు తరగతిలో వుండు విద్యార్థుల పేర్లను అక్షరక్రమంలో వ్రాసి వారి మార్కులను $75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60$. గా వ్రాసెను.

(vi) అదే ఉపాధ్యాయురాలు ఆ దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసెను.

$35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100$.

పైన పేర్కొన్న ఉదాహరణలలో, కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యల సమితుల జాబితా ఒక ప్రత్యేకమైన క్రమంలో నున్నది.

(iii) మరియు (iv) అమరికలలో అపరిమిత సంఖ్యలో పదములున్నవి. (i), (ii), (v) మరియు (vi) లలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములున్నవి. కాని (v) మరియు (vi) లలో అదే సంఖ్యలు వేర్వేరు క్రమములలో నున్నవి.

2.2 వరుసలు (Sequences)

నిర్వచనము

ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో నున్న వాస్తవ సంఖ్యల **జాబితా లేక అమరికను** వాస్తవ సంఖ్యల వరుస అందురు.

(1) ఒక వరుసలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములుంటే దానిని పరిమిత వరుస అందురు.

(2) ఒక వరుసలో అపరిమిత సంఖ్యలో పదములుంటే దానిని అపరిమిత వరుస అందురు.

పరిమిత వరుసను $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ మరియు అపరిమిత వరుసను $S: a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ గా సూచిస్తాము ఇక్కడ a_k అనునది వరుస యొక్క k వ పదమును సూచించును. ఉదాహరణకు వరుసలో a_1 వ పదము మొదటి పదమును మరియు a_7 అనునది 7వ పదమును సూచించును.

పై ఉదాహరణలలో (i), (ii), (v) మరియు (vi) లు పరిమిత వరుసలు. అదే విధముగా (iii), (iv) లు అపరిమిత వరుసలు అగుటను గమనించుము.

కొన్ని సంఖ్యల సేకరణ జాబితాను ఒక వరుసగా తీసుకుంటే, ఆ వరుసను మొదటి పదము, రెండవ పదము, మూడవ పదము, ... మొదలైనవిగా అన్ని గుర్తించవలయును. ఇంతకు మునుపు కొన్ని ఉదాహరణలు చూశాము. మరికొన్ని క్రింది ఉదాహరణలను గమనించుము.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010$. (పదములు పరిమిత సంఖ్యలో గలవు)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$ (1 మరియు -1 మధ్య డోలనము చెందు పదములు)

(iii) π, π, π, π, π. (పదములు సమానము అటువంటి వరుసలను స్థిర వరుసలు అందురు)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots$. (అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల జాబితా)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots$. (అనంత పదముల సంఖ్య)

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$ ఇక్కడ $a_n = 1$ లేక 0 అనునది నాణెమును n సార్లు ఎగురవేయుటలో బొమ్మ లేక బొరుసు సంభవించును.

పై ఉదాహరణల నుండి (i) మరియు (iii) పరిమిత వరుసలు మరియు మిగిలినవి అపరిమిత వరుసలు పై వాటిలో (i) నుండి (v) వరకు నిర్దిష్టమైన నమూనా లేక ఒక నియమము ప్రకారము ఉన్నవి మరియు వరుసలోని ఏదైనా పదము యొక్క ప్రత్యేక స్థానమును కనుగొనవచ్చును. కాని (vi) లో ప్రత్యేక పదమును ముందుగా తెలుసుకొనలేము. అయినను అది ఖచ్చితముగా 1 లేక 0 గా వుండును. "నమూనా" అనుపదమును ఉపయోగించుటలో గల అర్థం వరుసలోని n వ పదమునకు ముందుగా వచ్చు మూలకములనుపయోగించి n

వ పదమును కనుగొనవచ్చును. సాధారణంగా వరుసలను ప్రయేయములుగా చూపించవచ్చును.

2.2.1 వరుసలను ప్రయేయములగా చూపించుట (Sequences viewed as functions)

ఒక వాస్తవ పరిమిత వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ను $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$గా నిర్వచించిన దానిని $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ అను ప్రమేయముగా చూపించ వచ్చును.

ఒక వాస్తవ అపరిమిత వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ లేక $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ను $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ గా నిర్వచించిన దానిని $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ అను ప్రమేయముగా చూచించవచ్చును.

$\forall$ అను సంకేతమునకు “ప్రతి ఒక్క దానికి” (for all) అని అర్థం. వరుస $\{a_k\}_1^{\infty}$యొక్క సాధారణ పదం a_k అని ఇవ్వబడిన, మొత్తము వరుసను మనము నిర్మించవచ్చును. సహజ సంఖ్యల యొక్క $\{1, 2, 3, \cdots,\}$ సమితి ప్రదేశముగా నున్నపుడు లేక సహజ సంఖ్యలలో కొన్ని ఉపసమితులు మరియు వాటి వ్యాప్తిలు, వాస్తవ సంఖ్యల ఉపసమితులయినపుడు ఒక వరుస ప్రమేయం అగును.

గమనిక

ఒక ప్రమేయం వరుస కానక్కరలేదు. ఉదాహరణకు ఒక ప్రయేయం $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ను $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ గా ఇచ్చిన ఇది వరుస కాదు. కనుక కావలసిన జాబితా ఏర్పడదు. f ప్రదేశం $\mathbb{N}$ గాను లేక $\mathbb{N}$ యొక్క ఉపసమితి $\{1, 2, \cdots, n\}$ గాను ఏర్పడుటలేదని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 2.1

ఒక వరుస యొక్క n వ పదము $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ అయిన మొదటి మూడు పదములను కనుగొనుము

సాధన

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$n = 1$, అయితే $$c_1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$$

$n = 2$, $$c_2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{2(3)(5)}{6} = 5.$$

$n = 3$, $$c_3 = \frac{3(3+1)(7)}{6} = \frac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$$

వరుస యొక్క మొదటి మూడు పదములు 1, 5, 14

పై ఉదాహరణ నుండి సాదారణ పదమునకు ఒక సూత్రంను ఇచ్చిన ప్రత్యక్షముగా ఒక ప్రత్యేక పదమును కనుగొనుటకు ఉపయోగపడును. క్రింది ఉదాహరణ నుండి ఇంకొక పద్ధతిలో ఒక వరుస ఉత్పన్నమును చూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.2

క్రింది వరుసలకు మొదటి ఐదు పదములను వ్రాయుము

(i) $a_1 = -1,\qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1,\qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

సాధన

(i) $a_1 = -1$ మరియు $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\ n > 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ కావలసిన వరుస పదములు $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}, -\frac{1}{840}$.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ n = 3, 4, 5, ...$

$F_1 = 1, F_2 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$\therefore$ వరుస యొక్క మొదటి ఐదు పదములు 1, 1, 2, 3, 5.

సూచన

వరుస $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n = 3, 4, \cdots$ ను ఫిబోనేసి వరుస అందురు. ఆ పదములు వరుసగా 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...... గా ఏర్పడును. ఈ ఫిబోనేసి వరుస సూర్యకాంతి పుష్పములోని విత్తనముల అమరిక వలె ఉండును. సూర్యకాంతి పుష్పములోని విత్తనములు వ్యతిరేక దిశలలో వుండు సర్పిలాకారముల సంఖ్యలు ఫిబోనేసి వరుస యొక్క వరుస సంఖ్యలు అగును.

అభ్యాసము 2.1

1. క్రిందివ్వబడిన వరుసల n వ పదములకు మొదటి మూడు పదములను కనుగొనుము.

   (i) $a_n = \dfrac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \dfrac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. క్రింది వరుసల n వ పదములు ఇవ్వబడినవి. వరుసలో సూచించిన పదములను కనుగొనుము.

   (i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3};\ a_7, a_9$ (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1);\ a_5, a_8$

   (iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1;\ a_5, a_7$ (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2);\ a_5, a_8$

3. క్రింది నిర్వచించిన విధముగా వరుస యొక్క 18వ మరియు 25వ పదములను కనుగొనుము.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ సరిసంఖ్య ఆయినపుడు} \\ \dfrac{2n}{n+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ భేసిసంఖ్య ఆయినపుడు} \end{cases}$$

4. క్రింది నిర్వచించిన విధముగా వరుస యొక్క 13వ మరియు 16వ పదములను కనుగొనుము.

$$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ సరిసంఖ్య ఆయినపుడు} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ మరియు } n \text{ భేసిసంఖ్య ఆయినపుడు} \end{cases}$$

5. క్రిందివ్వబడిన వరుస యొక్క మొదటి ఐదు పదములను కనుగొనుము.

$$a_1 = 2, a_2 = 3 + a_1 \text{ మరియు } a_n = 2a_{n-1} + 5, n > 2.$$

6. క్రిందివ్వబడిన వరుస యొక్క మొదటి ఆరు పదములను కనుగొనుము.

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ మరియు } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n > 3.$$

2.3 అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression (A.P.)

ఈ విభాగములో వరుసల యొక్క కొన్ని ప్రత్యేక రకములను చూసెదము.

నిర్వచనము

ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను అంకగణిత వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ d అనునది ఒక స్థిర సంఖ్య. a_1 ను మొదటి పదము, స్థిరసంఖ్య d ను సామాన్య భేదము అని అందురు . ఈ అంకగణిత వరుసను అంకశ్రేఢి అందురు.

ఉదాహరణలు :

(i) 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ ఒక అంకశ్రేఢి ఎందుకనగా $a_1 = 2$ మరియు సామాన్యభేదము $d = 3$.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ ఒక అంకశ్రేఢి ఎందుకనగా $a_1 = -4$ మరియు $d = 0$.

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1.0, -1.5, ... ఒక అంకశ్రేఢి, ఎందుకనగా $a_1 = 2$ మరియు $d = -0.5$.

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము (The general form of an A.P.)

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపమును తెలుసుకొనెదము అంకగణిత వరుస $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్య భేదము d అయిన.

$$a_1 = a \text{ మరియు } a_{n+1} = a_n + d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$n = 1, 2, 3$ అయిన

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

పై నమూనాలననుసరించి n వ పదము a_n ను క్రింది విధముగా చూపవచ్చును.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

కనుక ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = a + (n-1)d$ అగును.

అంకశ్రేఢి సామాన్య రూపం

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$$

మరియు అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య పదమునకు సూత్రము

$t_n = a + (n-1)d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

గమనిక

(i) ఒక వరుస పరిమిత వరుసగా వుంటే అంకశ్రేఢిలో n పదములు మాత్రమే వుండును. దాని చివరి పదము l అనుకుంటే $l = a + (n-1)d$

(ii) $l = a + (n-1)d$ ను $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ గాను వ్రాయవచ్చును మొదటి పదము a, చివరి పదము l మరియు సామాన్య భేదము d లను ఇచ్చిన పదముల సంఖ్యను కనుగొనుటకు ఇది ఉపయోగపడును.

(iii) అంకశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదములను $m-d,\ m,\ m+d$ గా తీసుకొనవలయును.

(iv) అంకశ్రేఢిలో నాలుగు వరుస పదములను $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ గా తీసుకొనవలయును. ఇచ్చట సాధారణ భేదము $2d$.

(v) ఒక అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమునకు ఒక స్థిర విలువను కూడిన లేక తీసివేసిన వచ్చు ఫలితశ్రేఢి అంకశ్రేఢిగానే ఉండును.

(vi) అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైన శూన్యేతర స్థిరసంఖ్యతో గుణించిన లేక భాగించిన వచ్చు ఫలితశ్రేఢి అంకశ్రేఢిగానే యుండును.

ఉదాహరణ 2.3

క్రింది వరుసలు ఏవి అంకశ్రేఢిలో నున్నవి?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

సాధన

(i) ఇవ్వబడిన వరుస యొక్క n వ పదము t_n, $n \in \mathbb{N}$ అనుకొనుము.

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$, కనుక ఇవ్వబడిన వరుస అంకశ్రేఢి కాదు

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

$$t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots.$$

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$$

$$t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$$

ఇచ్చినటువంటి వరుస అంకశ్రేఢి అగును. ఇచ్చట మొదటి పదము $3m-1$, సామాన్య భేదము -2

ఉదాహరణ 2.4

అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము మరియు సామాన్య భేదమును కనుగొనుము.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

సాధన

(i) మొదటి పదము $a = 5$, సామాన్య భేదము $d = 2 - 5 = -3$.

(ii) $a = \frac{1}{2}$, సామాన్య భేదము $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

ఉదాహరణ 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ అను అంకశ్రేఢిలో సామాన్య పదం t_n ఒక ఋణసంఖ్యగా నుండుటకు, n యొక్క అత్యల్ప ధనపూర్ణాంకము ఎంత వుండవలెను?

సాధన

ఇందు $a = 20$, $d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ ఉండునట్లు మొదటి ధనపూర్ణాంకము nను కనుగొనవలెను.

అత్యల్ప విలువ $n \in \mathbb{N}$కు $a + (n-1)d < 0$ ను దీనిని సాధించుటకు తీసుకొనవలయును.

కనుక, $n \in \mathbb{N}$ కు $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$

$$(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$$

$\Longrightarrow (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$ (ఇరువైపుల (-1) తో గుణించగా ఈ అసమానత్వము వ్యతిక్రమమగును.)

$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$.

కనుక, $n > 26\frac{2}{3} + 1$. అనగా, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

ఈ అసమానత్వమును తృప్తిపరచు అత్యల్ప ధనపూర్ణాంకము $n = 28$.

కనుక, అంకశ్రేఢిలో మొదటి ఋణసంఖ్య 28 వ పదమగును (t_{28}).

ఉదాహరణ 2.6

ఒక పూలతోటయందు, మొదటి వరుసలో 23 రోజాచెట్లు, రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19 రోజా చెట్లు అమరి ఉన్నవి. చివరి వరుసలో 5 రోజా చెట్లున్నవి. అయిన ఆ తోటలో ఎన్ని వరుసలున్నవో తెల్పుము.

సాధన పూల తోటలోని వరుసల సంఖ్యను n అనుకొనుము.

1వ, 2వ, 3వ … … … nవ వరుసలలో రోజా చెట్ల సంఖ్య క్రమముగా 23, 21, 19……5 అగును.

$t_k - t_{k-1} = -2, k = 2, \ldots.. n$

$23, 21, 19, \cdots, 5$ అను వరుస అంకశ్రేఢిలోనున్నది.

$a = 23, \quad d = -2$, మరియు $l = 5$.

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

రోజాపూలతోటలో 10 వరుసలు కలవు.

ఉదాహరణ 2.7

ఒక వ్యక్తి 2010 లో సంవత్సరమునకు ₹30,000 జీతం చొప్పున పనిలో చేరెను. ప్రతి సంవత్సరం ₹600 అతని జీతంలో పెరిగిన ఏ సంవత్సరంలో అతని జీతం ₹39,000 ను చేరును?

సాధన n వ సంవత్సరంలో అతను జీతము ₹39,000 ను పొందగలడని అనుకొనిన.

2010, 2011, 2012, $\cdots$, $[2010+(n-1)]$ సం॥ లలో అతని జీతము క్రమముగా ₹ 30,000, ₹ 30,600, ₹ 31,200, $\cdots$, ₹ 39000 అగును. జీతములు అంకశ్రేఢిలోనున్నవని గమనింపుము. ప్రతి పదమును 100 తో భాగించగా 300, 306, 312, $\cdots$, 390 అను క్రొత్త అంకశ్రేఢిని పొందగలము.

$a = 300, \; d = 6, \; l = 390.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

16వ సంవత్సరము జీతము ₹39000 అగును.

$\therefore$ అతని జీతము ₹39,000 ను 2025 సం॥లో పొందగలడు.

అతను 2025 సంవత్సరంలో ₹39,000 జీతమును పొందగలడు.

ఉదాహరణ 2.8

మూడు సంఖ్యలు 2:5:7 నిష్పత్తిలో ఉన్నవి. రెండవ దాని నుండి 7ను తీసివేయగా ఏర్పడు వరుస అంకశ్రేఢిలో వున్నట్లయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన ఆ సంఖ్యలు $2x, \; 5x, \; 7x$ అనుకొనుము. $(x \neq 0)$

ఇవ్వబడిన సమాచారము నుండి, ఆ సంఖ్యలు $2x, 5x-7, 7x$ అనునవి అంకశ్రేఢిలో నున్నవి.

$\therefore \; (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7 \;, \; x = 14.$

కనుక కావలసిన సంఖ్యలు 28,70,98

అభ్యాసము 2.2

1. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము 6 మరియు సామాన్య భేదము 5 అయిన అంకశ్రేఢిని మరియు దాని సాధారణ పదమును కనుగొనుము.
2. 125, 120, 115, 110, ... అను అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య భేదము మరియు 15వ పదమును కనుగొనుము.
3. $24, \; 23\frac{1}{4}, \; 22\frac{1}{2}, \; 21\frac{3}{4}, \cdots$. అను అంకశ్రేఢిలో 3 అనునది ఎన్నవ పదము అగును.

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$.అంకశ్రేఢి యొక్క 12 వ పదమును కనుగొనుము.

5. 4, 9, 14, ... అంకశ్రేఢి యొక్క 17వ పదమును కనుగొనుము.

6. క్రింది అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదములున్నవో కనుగొనుము.

(i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$. (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. అంకశ్రేఢి యొక్క 9వ పదము సున్న అయిన 29వ పదము, 19వ పదమునకు రెట్టింపుగా ఉండునని నిరూపించుము.

8. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 10వ మరియు 18వ పదములు వరుసగా 41 మరియు 73 అయిన 27వ పదమును కనుగొనుము.

9. 1,7,13,19... ... ... మరియు 100, 95, 90. ... ... అను రెండు అంకశ్రేఢుల n వ పదములు సమానమైన n విలువను కనుగొనుము.

10. 13 చే భాగించబడిన రెండు అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ?

11. ఒక టి.వి. తయారీ దారుడు 7వ సంవత్సరంలో 1000 టి.విలను ఉత్పత్తి చేసెను. మరియు 10వ సంవత్సరంలో 1450 టి.వి లను ఉత్పత్తి చేసెను. ప్రతి సంవత్సరం ఒక స్థిరమైన సంఖ్యలో టి.వి.ల ఉత్పత్తి పెరుగుచుండిన మొదటి సంవత్సరం మరియు 15వ సంవత్సరంలో ఎన్ని టి.వి. లను ఉత్పత్తి చేసెనో కనుగొనుము.

12. ఒకడు మొదటి నెల ₹640 పొదుపు చేసెను. రెండవ నెల ₹720 మరియు మూడవ నెల ₹800 పొదుపు చేసెను. అతను ఇదే విధంగా పొదుపును కొనసాగించినచో , 25వ నెల అతని పొదుపు ఎంత?

13. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మూడు వరుస పదముల మొత్తము 6 మరియు వాటి లబ్ధము -120 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

14. అంకశ్రేఢిలో వున్న మూడు సంఖ్యల మొత్తము 18 మరియు వాటి వర్గముల మొత్తము 140 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

15. ఒక అంకశ్రేఢిలో m వ పదం m రెట్లు మరియు n వ పదం n రెట్లకు సమానమైన, $(m+n)$వ పదం సున్న అని చూపుము.

16. ఒక వ్యక్తి సంవత్సరానికి 14% సాధారణ వడ్డీతో ₹25000 లను పెట్టుబడిగా పెట్టెను. ఈ మొత్తములు (అసలు + వడ్డీ) అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచునా? అట్లేర్పరిచినచో 20 సం॥ల తరువాత అతని పెట్టుబడి ఎంత?

17. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ అని నిరూపించుము.

18. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

19. a^2, b^2, c^2 అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

20. $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ మరియు $b^2 = ac$, అయిన $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ అంకశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

2.4 గుణశ్రేఢి (Geometric Sequence or Geometric Progression (G.P.))

నిర్వచనము

ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను గుణాత్మక వరుస అనిన, $a_{n+1} = a_n r$, $n \in \mathbb{N}$, r ఒక శూన్యేతర స్థిరాంకం. a_1 మొదటి పదము, r ను సామాన్య నిష్పత్తి అని అందురు. ఈ గుణాత్మక వరుసను గుణశ్రేఢి(G.P.) అందురు.

గుణశ్రేఢికి కొన్ని ఉదాహరణలను చూచెదము.

(i) $3, 6, 12, 24, \cdots$.

ఒక వరుస $\{a_n\}_1^\infty$ గుణాత్మక వరుస అయిన, ఇందు $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$గా వుండును.

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0.$$

కావున ఇచ్చిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

(ii) $\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, -\dfrac{1}{243}, \cdots$.

$$\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

కనుక ఇవ్వబడిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపం (The general form of a G.P.)

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపమును ఉత్పాదించెదము. గుణాత్మక వరుస $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. లో మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పతి r అగును.

ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_1 = a$ మరియు $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ అగును.

ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_{n+1} = r\, a_n$ అగును.

$n = 1, 2, 3 ....$ గా తీసుకొనిన

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

ఈ విధంగా కొనసాగినచో,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

కనుక, ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = ar^{n-1}$ అనునది గుణశ్రేఢిలో n వ పదమును ఇచ్చును

గుణశ్రేఢి సామాన్య రూపం క్రింది విధంగా వుండును.

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots.$$

గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదమునకు సూత్రము

$$t_n = ar^{n-1}, \ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

ఒక వరుసలో మొదటి కొన్ని పదాలను ఇచ్చిన ఆ వరుస గుణశ్రేఢియా కాదా అని ఎలా నిర్ణయించెదము?

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall\, n \in \mathbb{N}$,మరియు ఇక్కడ r అనునది శ్యూన్యేతర స్థిరాంకం అపుడు $\{t_n\}_1^{\infty}$ అనునది G.P. లో వుండును.

గమనిక

(i) ఒక వరుసలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదములన్ని వాటి ముందు పదమునకు ఒక శూన్యేతర స్థిర నిష్పత్తిలో యున్నచో ఈ రకమైన శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అందురు

(ii) గుణశ్రేఢిని ఒక శూన్యేతర స్థిరసంఖ్యచే గుణించినను లేక భాగించినను ఏర్పడు శ్రేఢి గుణశ్రేఢియే అగును.

(iii) గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదములు $\frac{a}{r}, a, ar$ గా తీసుకొనవలయును. ఇందు r అనునది సామాన్య నిష్పత్తి.

(iv) గుణశ్రేఢిలో నాలుగు వరుస పదములు $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$.గా తీసుకొనవలయును.

(ఇక్కడ సామాన్య నిష్పత్తి r^2 అగును. కానీ పైవిధంగా r కాదు.)

ఉదాహరణ 2.9

క్రింది వరుసలలో ఏవి గుణశ్రేఢిలగునో తెల్పుము.

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$.

(iii) $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{21}, \cdots$.

సాధన

(i) రెండు వరుస పదముల సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.

సామాన్య నిష్పత్తి లేదు కనుక ఇది గుణశ్రేఢి కాదు.

(ii) $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.

సామాన్య నిష్పత్తి $= \frac{1}{10}$, కావున ఇది గుణశ్రేఢి అగును.

(iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$

సామాన్య నిష్పత్తి $= \sqrt{3}$. కనుక ఇవ్వబడిన వరుస గుణశ్రేఢి అగును.

ఉదాహరణ 2.10

క్రింది గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

సాధన

(i) సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$.

కనుక $r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

వరుస యొక్క మొదటి పదం $\frac{2}{5}$. కనుక వరుస సాధారణ పదము

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \qquad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) ఇవ్వబడిన గుణశ్రేఢి యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$ గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము 0.02

కనుక వరుస యొక్క సాధారణ పదము

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ఉదాహరణ 2.11

గుణశ్రేఢి యొక్క 4వ పదం $\frac{2}{3}$ మరియు 7వ పదం $\frac{16}{81}$ అయిన గుణశ్రేఢిని కనుగొనుము

సాధన $t_4 = \frac{2}{3}$ మరియు $t_7 = \frac{16}{81}$ అని ఇవ్వబడినది.

సాధారణ పదం సూత్రము $t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ నుపయోగించి

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \text{ మరియు } t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}$$

గుణశ్రేఢి కనుగొనుటకు ముందుగా మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r లను కనుగొనవలెను.

t_7 ను t_4 తో భాగించగా

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

$$r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ నుండి } r = \frac{2}{3}.$$

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \qquad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

కావున కావలసిన గుణశ్రేఢి $\quad ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots$

అనగా $\quad \frac{9}{4},\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \cdots.$

ఉదాహరణ 2.12

బాక్టీరియా పరిశోధనలలో బాక్టీరియా సంఖ్య ప్రతి గంటకు రెండింతలగును. ప్రారంభములో 30 బాక్టీరియాలు ఉండిన యెడల 14 వ గంట చివరిలో ఎన్ని బాక్టీరియాలు ఉండును?

సాధన బాక్టీరియా పరిశోధనలో బాక్టీరియాల సంఖ్య, తరువాత వచ్చు గంట చివరకు రెండింతలగునని గమనించుము.

ప్రారంభములో బాక్టీరియా సంఖ్య = 30

మొదటి గంట చివరన బాక్టీరియా సంఖ్య = 2(30)

రెండవ గంట చివరన బాక్టీరియా సంఖ్య $= 2(2(30)) = 30(2^2)$

పై విధముగా జరుగునపుడు ప్రతి గంట చివరలో ఉండు బాక్టీరియాల సంఖ్య (G.P) లో వుండును.

దాని సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$.

n గంటలు తరువాత బాక్టీరియా సంఖ్యను t_n గా సూచించినట్లయితే

గుణశ్రేఢి సాధారణ పదము $t_n = 30\,(2^n)$

14వ గంట చివర బాక్టీరియా సంఖ్య $t_{14} = 30\,(2^{14})$.

ఉదాహరణ 2.13

ఒక సంవత్సరమునకు 10% చక్రవడ్డీ రేటు చొప్పున బ్యాంకులో ₹ 500 జమ చేసిన యెడల 10 సం॥ల చివర ఆ పెట్టుబడి విలువ ఎంత ?

సాధన

ఒక సంవత్సమునకు అసలు ₹. 500 లకు అగువడ్డీ $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$

రెండవ సంవత్సరమునకు అసలు = మొదటి సంవత్సరం అసలు + వడ్డీ

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

రెండవ సంవత్సరం వడ్డీ $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

మూడవ సంవత్సరం అసలు $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

ఇదే విధంగా కొనసాగిన n వ సంవత్సరంలో అసలు $\Big\} = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$.

$(n-1)$ వ సంవత్సరం చివరిలో మొత్తము = n వ సంవత్సరపు అసలు

ఈ విధంగా, ‘n’ వ సంవత్సరము చివరన ఖాతాలో ఉన్న మొత్తము

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n.$$

10 సంవత్సరములు తరువాత ఖాతాలో మొత్తము

$$= ₹\ 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} = ₹\ 500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}.$$

గమనిక

పై పద్ధతినుపయోగించి చక్రవడ్డీ సమస్యలకు సంబందించిన మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ క్రింది సూత్రమును ఉత్పాదించవచ్చును.

మొత్తము , $A = P(1 + i)^n$. ఇక్కడ P అసలు, $i = \frac{r}{100}$, r సంవత్సర వడ్డీ రేటు మరియు n సంవత్సరముల సంఖ్య అగును.

ఉదాహరణ 2.14

ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి మూడు పదముల మొత్తము $\frac{13}{12}$ మరియు వాటి లబ్దము −1 అయిన సామాన్య నిష్పత్తి మరియు ఆ పదములను కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేఢి యందున్న మొదటి మూడు పదములు $\frac{a}{r}, a, ar$ గా తీసుకొనిన

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$$

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12} \qquad (1)$$

మరియు $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$

$\implies a^3 = -1 \qquad \therefore \quad a = -1$

$a = -1$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన

$$(-1)\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r+4)(4r+3) = 0$$

$r = -\frac{4}{3}$ or $-\frac{3}{4}$

$r = -\frac{4}{3}$ మరియు $a = -1$, అయినపుడు ఆ పదములు $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$ మరియు $a = -1$, అయినపుడు పదములు తిరోగమనంలోఉండును i.e. $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$,

ఉదాహరణ 2.15

a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో యుండిన

$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ అని నిరూపించుము

సాధన a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి. మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r అని అనుకొనుము.

కావున $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

ఇప్పుడు $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a - d)^2$$

అభ్యాసము 2.3

1. క్రింది వరుసలలో ఏవి గుణశ్రేఢిలో గుర్తించుము. ఆ గుణశ్రేఢిలకు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

   (i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48, \cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1, \cdots.$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots.$

   (iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12}, \cdots.$ (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots.$ (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots.$

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ గుణశ్రేఢి యందు 10వ పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

3. గుణశ్రేఢిలో 4వ మరియు 7వ పదములు వరుసగా 54 మరియు 1458 అయిన G.P. ని కనుగొనుము.

4. ఒక గుణశ్రేఢిలో మొదటి పదము $\frac{1}{3}$ మరియు 6వ పదము $\frac{1}{729}$ అయిన G.P. ని కనుగొనుము.

5. క్రింది గుణశ్రేఢిలో ...

   (i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$,లో $\frac{128}{15625}$ అనునది ఎన్నో పదము ?

   (ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8, \cdots,$ లో 1024 అనునది ఎన్నో పదము ?

6. $162,\ 54,\ 18, \cdots.$ మరియు $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ అను గుణశ్రేఢిలలో nవ పదములు సమానమైన n విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క 5వ పదము 1875 మరియు మొదటి పదము 3 అయిన సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

8. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి మూడు పదముల మొత్తము $\frac{39}{10}$ మరియు వాటి లబ్ధము 1 అయిన సామాన్య నిష్పత్తి మరియు అ పదములను కనుగొనుము.

9. G.P. లో మూడు వరుస పదముల లబ్ధము 216 మరియు వాటిని జతలుగా తీసుకొనిన వాటి లబ్ధముల మొత్తము 156 అయిన వాటిని కనుగొనుము.

10. గుణశ్రేఢిలో మొదటి మూడు వరుస పదముల మొత్తము 7 మరియు వాటి విలోమముల మొత్తము $\frac{7}{4}$ అయిన ఆ పదములను కనుగొనుము.

11. గుణశ్రేఢి యందు మొదటి మూడు పదముల మొత్తము 13 మరియు వాటి వర్గముల మొత్తము 91 అయిన G.P. కనుగొనుము.

12. ఒక బ్యాంకులో 5% చక్రవడ్డీ రేటుతో ₹1000 జమచేసిన 12 సంవత్సరముల చివర వచ్చు మొత్తమును కనుగొనుము.

13. ఒక కంపెని ₹50,000 లకు ఒక జెరాక్స్ యంత్రమును కొనెను ఆ యంత్రము విలువ సంవత్సరానికి 15% తగ్గినచో 15 సంవత్సరముల తరువాత యంత్రము విలువ ఎంత?

14. a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd.$ అని చూపుము.

15. a, b, c, d లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే, $a+b,\ b+c,\ c+d,$ లు కూడా గుణశ్రేఢిలో వున్నవని చూపుము.

2.5 శ్రేణులు (Series)

క్రింది సమస్యను గమనింపుము.

ఒకవ్యక్తి జనవరి 1, 1990 లో సంవత్సర జీతము ₹ 25,000 లకు ఉద్యోగములో చేరి, ప్రతి సంవత్సరము అదనపు జీతము ₹ 500 తీసుకొనిన, అతడు జనవరి 1, 2010 వరకు తీసిన మొత్తము జీతమును కనుగొనుము. మొదట అతని సంవత్సర జీతం అంకశ్రేఢిలో నున్నదని గమనింపుము.

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500)).$$

20 సంత్సరముల జీతమును కూడుట ద్వారా సమస్యను సాధించవచ్చును.

i.e. $25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500))$.

ఈ వరుస నుండి పదములను కూడవలెననే ఆలోచన అవసరమగుచున్నది.

నిర్వచనము

ఒక వరుసలోని పదములను కూడిక గుర్తు (+) చే తెలియజేయుటను శ్రేణులు అని అందురు. పరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును పరిమిత శ్రేణి **(finite series)** అందురు. అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును అపరిమిత శ్రేణి **(infinite series)** అందురు.

వాస్తవ సంఖ్యల వరుస $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ను పరిగణించుము. ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు పాక్షిక సంకలనమును $S_n = a_1 + a_2 +, \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$గా నిర్వచించవచ్చును. కనుక ఇవ్వబడిన వరుస $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ కు పాక్షికసంకలన వరుస $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ అగును.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ అను వరుస యొక్క క్రమయుగ్మములు $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ లను అపరిమిత శ్రేణి పదములు అందురు. అపరిమిత శ్రేణిని $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, గా సూచించెదరు. సూక్ష్మముగా దీనిని $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ గా సూచించెదరు. ఇక్కడ $\sum$ అను గుర్తు మొత్తమును సూచించును. మరియు దానిని సిగ్మా అని పలికెదము.

పరిమిత శ్రేణులను సులభముగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును (పరిమిత పదముల సంకలనము) అపరిమిత వరుసలో గల పదముల మొత్తమును సాధారణ సంకలనము ద్వారా చేయుట వీలుకాదు. వరుసలో అపరిమిత పదముల సంకలనము ఎట్లు అర్థంచేసుకోగలము? వరుసలో అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును కనుగొనుటను పై తరగతులలో నేర్చుకుంటారు. మనం ఇక్కడే పరిమిత శ్రేణుల గురించి తెలుసుకొనెదము.

ఈ విభాగంలో అంకశ్రేణి మరియు గుణశ్రేణిల గురించి అభ్యసించెదము.

2.5.1 అంకశ్రేణి (Arithmetic Series)

అంకశ్రేణి అనగా ఆ శ్రేణిలోని పదములు అంకశ్రేఢి రూపములో నుండును.

అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి *n* పదముల మొత్తము

మొదటి పదము a, సామాన్య భేదము d గా నుండు అంకశ్రేఢిని గమనించుము.

$$a,\ a + d,\ a + 2d, ...,\ a + (n-1)d, \cdots.$$

అంకశ్రేఢిలోని మొదటి n పదముల మొత్తమును S_n అనుకొనుము.

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots\ (a + (n-1)d)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

$1 + 2 + \cdots + (n-1)$ మొత్తమును కనుగొనిన, సూత్రమును సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

ఇది $1, 2, 3, \cdots, (n-1)$ అంకశ్రేఢి మొత్తమగును.

మొదట $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ల మొత్తమును కనుగొనవలెను

ఇపుడు మొదటి n ధన పూర్ణాంకముల మొత్తము కనుగొనెదము

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \qquad (1)$$

పై మొత్తమును కనుగొనుటకు ఒక ఉపాయమును ఉపయోగించెదము.

S_n ను క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చునని గమనింపుము

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) సంకలనము చేయగా,

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

సమీకరణం (3) లో కుడివైపు $(n+1)$ లు ఎన్ని గలవు? (1) మరియు (2) లో n పదములు గలవు. (1) మరియు (2) లలోని అనుగుణమైన పదములను కూడగా $(n+1)$ లాంటి n పదములు గలవు.

కనుక (3)ను సూక్ష్మముగా $2S_n = n(n+1)$.

మొదటి n ధన పూర్ణాంకముల మొత్తము

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ కనుక } 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (4)$$

మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ సూత్రము ఉపయోగపడును.

సూచన

పై పద్ధతిని మొట్టమొదటగా ఉపయోగించిన ప్రఖ్యాతి చెందిన జర్మనీ గణిత శాస్త్రవేత్త కార్ల్ ఫెడరిక్‌గాస్‌ను గణితశాస్త్ర యువరాజు అందురు. 100 ధన పూర్ణాంకముల మొత్తమును కనుగొనుటకు ఈ సూత్రమును ఉపయోగించెను. 5 సం॥ల వయస్సులో అతని ఉపాధ్యాయురాలు ఈ సమస్యను ఇచ్చెను. పై తరగతులలో పై సూత్రం వలన వచ్చు ఇతర పద్ధతులను నేర్చుకొనెదరు.

Carl Fredrick Gauss
(1777 – 1855)

ఇప్పుడు పైన చూచించిన సాధారణ అంకశ్రేణి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనెదము ఇది వరకే చూచిన విధముగా

$$s_n = na + [d + 2d + 3d + \dots\dots + (n-1)d]$$
$$= na + d[1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + (n-1)]$$
$$= na + d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(4)ను ఉపయోగించి}$$
$$\therefore \quad = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5)$$

కనుక $S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}$ (మొదటి పదం + చివరి పదం)

$= \frac{n}{2}(a + l)$.

మొదటి పదము a ఇచ్చినచో అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదముల మొత్తము S_n
(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (సామాన్య భేదము d ఇచ్చినట్లయిన)
(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ (చివరిపదము l ఇచ్చినట్లయిన)

ఉదాహరణ 2.16

$5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ అంకశ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము

సాధన ఇవ్వబడిన శ్రేణి $5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ఒక అంకశ్రేణి అగును.

$a = 5, \quad d = 11 - 5 = 6, \quad l = 95$.

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

కనుక మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}[l + a]$

$$S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$$

ఉదాహరణ 2.17

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$. అను శ్రేణి యొక్క మొదటి $2n$ పదముల మొత్తము కనుగొనుము.

సాధన $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots 2n$ పదములు

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots 2n$ పదములు

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots n$ పదములు

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots n$ పదములు

పై శ్రేణి అంకశ్రేఢిలో ఉన్నది, మొదటి పదము $a = -3$ మరియు సామాన్య భేదము $d = -4$

కనుక, కావలసిన మొత్తము $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$

$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$

$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1)$.

ఉదాహరణ 2.18

ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి 14 పదముల మొత్తము −203 మరియు ఆ తరువాతి 11 పదముల మొత్తము −572 అయిన ఆ అంకశ్రేణిని కనుగొనుము.

సాధన $S_{14} = -203$

$$\Longrightarrow \quad \frac{14}{2}[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 7[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+13d = -29. \qquad (1)$$

తరువాతి 11 పదముల మొత్తము $= -572$.

ఇప్పుడు, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

అనగా, $S_{25} = -203 - 572 = -775$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a+24d] = -775$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+24d = -31 \times 2$$

$$\Longrightarrow \quad a+12d = -31 \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) లను సాధించగా, $a = 5$ మరియు $d = -3$.

కావలసిన అంకశ్రేణి $5 + (5-3) + (5+2(-3)) + \cdots$.

i.e. $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$.

ఉదాహరణ 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$, అను అంకశ్రేణిలో పదములను అవిచ్ఛిన్నముగా తీసుకొనిన ఎన్ని పదముల మొత్తము −351 అగును?

సాధన ఇవ్వబడిన అంకశ్రేణిలో $a = 24$, $d = -3$.

$S_n = -351$. నుండి n ను కనుగొనవలెను

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = -351$$

$$\frac{n}{2}[2(24)+(n-1)(-3)] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48-3n+3] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad n(51-3n) = -702$$

$$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n-26)(n+9) = 0$$

$$\therefore \quad n = 26 \text{ లేక } n = -9$$

పదముల సంఖ్య n, ఋణసంఖ్యగా వుండరాదు.

కనుక, పదముల మొత్తము −351 అగుటకు 26 పదములు కూడవలయును.

ఉదాహరణ 2.20

8చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

8 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యలు 104, 112, 120, $\cdots$, 992.

వాటి మొత్తము $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + , \cdots + 992$.

104, 112, 120, 128, ... 992 అను వరుస అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును.

$$a = 104, \quad d = 8 \quad \text{మరియు} \quad l = 992.$$

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992-104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

$$S_{112} = \frac{n}{2}[a+l] = \frac{112}{2}[104+992] = 56(1096) = 61376.$$

కనుక 8 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తము 61376.

ఉదాహరణ 2.21

ఒక బహుభుజి యొక్క అంతరకోణముల కొలతలు వరుసగా తీసుకొనిన అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. వరుసలో అతి కనిష్ట కొలత 85° మరియు గరిష్ట కొలత 215° అయిన బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

n అనునది బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్యను తెలుపును.

అంతరకోణముల కొలతలు అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. బహుభుజి అంతర కోణముల మొత్తము

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l, \quad (\text{ఇందు } a = 85 \text{ మరియు } l = 215)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l+a] \qquad (1)$$

బహుభుజిలోని అంతర కోణముల మొత్తము $(n-2)\times 180^0$ అని మనకు తెలుసు

$$S_n = (n-2)\times 180$$

(1), నుండి $\frac{n}{2}[l+a] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[215+85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

బహుభుజిలోని భుజముల సంఖ్య 12 అగును.

అభ్యాసము 2.4

1. మొత్తమును కనుగొనుము (i) మొదటి 75 ధన పూర్ణాంకములు (ii) మొదటి 125 సహజ సంఖ్యలు
2. A.P. యొక్క n వ పదము $3 + 2n$ అయిన మొదటి 30 పదములు మొత్తము కనుగొనుము.

3. క్రింది ప్రతి అంకశ్రేణి మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 పదములు.

4. క్రింది అంకశ్రేణి వివరములకు S_n ను కనుగొనుము.

(i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$

(ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ శ్రేణి యొక్క మొదటి 40 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

6. ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి 11 పదముల మొత్తము 44 మరియు ఆ తరువాతి 11 పదముల మొత్తము 55 అయిన అంకశ్రేణిని కనుగొనుము.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots,$ అను అంకశ్రేఢి మొదటి పదం నుండి మొదలయిన, పదముల మొత్తము 368 అగుటకు ఎన్ని పదములు కావలయును ?

8. 9 చే భాగింపబడు 3 అంకెల సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

9. ఒక అంకశ్రేణిలో 3వ పదము 7 మరియు ఏడవ పదము మూడవ పదమునకు 3 రెట్లుతో పాటు 2 ఎక్కువగా వుండిన, మొదటి 20 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

10. 300 మరియు 500 మధ్య 11 చే భాగింపబడు అన్ని సహజ పంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

11. సాధించుము $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$.

12. 100 మరియు 200 మధ్య 5 చే భాగింపబడని అన్ని సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

13. ఒక నిర్మాణ సంస్థ వంతెన నిర్మించునపుడు ప్రతి రోజు ఆలస్యమైనందుకు గాను అపరాదమును చెల్లించెను. మొదటి రోజు అపరాదము ₹ 4000 మరియు ఆ తరువాత ప్రతిదినమునకు అపరాధము ₹ 1000 పెరిగెను. ఈ విధముగా ఆ సంస్థ అపరాధము ₹ 1,65,000 ను చెల్లించెను. అయిన ఆ పని ఎన్ని రోజులు ఆలస్యముతో ముగియును.

14. 8% సాధారణ వడ్డీతో ₹ 1000 లను ప్రతి సంవత్సరం పెట్టుబడిగా పెట్టెను. ప్రతి సంవత్సరం చివరన వడ్డీని లెక్కించుము. ఈ వడ్డీ అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుచునా? అట్లయిన 30 సం॥ చివరన మొత్తము వడ్డీని కనుగొనుము.

15. ఒక శ్రేణి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తము $3n^2 - 2n$. అయిన ఆశ్రేణి అంకశ్రేణి అని చూపుము.

16. ఒక గడియారము ఒక గంటకు ఒకసారి, రెండు గంటలకు రెండు సార్లు మ్రోగిన ఆ విధంగా ఒక రోజుకు ఎన్ని మార్లు మ్రోగును?

17. మొదటి పదము a, రెండవ పదము b మరియు చివరి పదము c గా నుండు అంక శ్రేణి మొత్తము $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$. అని చూపుము.

18. ఒక అంకశ్రేణిలో $(2n+1)$ పదములున్నట్లయిన భేసి పదముల మొత్తము మరియు సరి పదముల మొత్తమునకు గల నిష్పత్తి $(n+1):n$ గా ఉండునని నిరూపించుము.

19. ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి m మరియు n పదముల మొత్తముల నిష్పత్తి $m^2 : n^2$ గా వుండిన m వ మరియు n వ పదముల నిష్పత్తి $(2m-1):(2n-1)$ గా వుండునని నిరూపించుము.

20. ఒక తోటమాలి తన తోటలో ఒక ట్రెపీజియం ఆకారంను నిర్మించుటకు పథకం వేసెను. ట్రెపీజియం యొక్క పొడవైన భుజమును నిర్మించుటకు ఒక అడ్డువరుసకు 97 ఇటుకలు కావలయును. ఆ తరువాత ప్రతి అడ్డు వరుస చివరలలో 2 ఇటుకలు తగ్గినచో 25వ అడ్డువరసతో నిర్మాణమును నిలిపివేసిన, అతను ఎన్ని ఇటుకలను కొనవలెను?

2.5.2 గుణశ్రేణి (Geometric series)

ఒక శ్రేణిలోని పదములు గుణాత్మక వరుసను ఏర్పరిచినట్లయిన ఆ శ్రేణిని గుణశ్రేణి అందురు.

$a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ఒక గుణాత్మక వరుస అనుకొనుము. ఇక్కడ $r \neq 0$ అనునది సామాన్య నిష్పత్తి. ఈ వరుస యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనెదము.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

$r = 1$ అయిన, (1) వ సమీకరణం క్రింది విధంగా వుండును. $S_n = na$.

$r \neq 1$ అయిన, (1) ఉపయోగించి

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \qquad (2)$$

(1)నుండి (2)ని తీసివేయగా, $S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$

$$\Longrightarrow \qquad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

కనుక $\quad S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1.$

ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి n పదముల మొత్తము

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ అయినపుడు} \\ na, & r = 1 \text{ అయినపుడు} \end{cases}$$

ఇక్కడ a మొదటి పదము మరియు r సామాన్య నిష్పత్తి అగును.

సూచన

యదార్థముగా, $-1 < r < 1$, అయినపుడు ఈ క్రింది సూత్రం వర్తించును.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

అపరిమిత ధనాత్మక సంఖ్యల మొత్తము ఒక పరిమిత విలువను ఇచ్చునని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 2.22

గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి 25 పదముల మొత్తము కనుగొనుము

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$.

సాధన $a = 16,\; r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1.,\; S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r},\; r \neq 1$ నుపయోగించి

$$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

ఉదాహరణ 2.23

క్రింది గుణశ్రేణి వివరములకు S_n ను కనుగొనుము.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

సాధన

(i) $a = 2,\quad t_6 = 486,\quad n = 6$

$t_6 = 2(r)^5 = 486$

$\Longrightarrow\quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},\ r \neq 1 \text{ అయినపుడు}$$

$$S_6 = \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$$

(ii) $a = 2400,\quad r = -3,\quad n = 5$

$$S_n = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1},\ r \neq 1 \text{ అయినపుడు}$$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

కనుక $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

ఉదాహరణ 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$, అను గుణశ్రేణి మొదటి పదం నుండి ఏర్పడిన పదముల మొత్తము 1022 అగుటకు ఎన్ని పదములను కూడవలెనో తెల్పుము.

సాధన గుణశ్రేణి $2 + 4 + 8 + \cdots$.

మొత్తమును పొందుటకు కావలసిన పదముల సంఖ్యను n అనుకొనుము.

$a = 2, r = 2,\ S_n = 1022.$

n కనుగొనుటకు, $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},\ r \neq 1 \text{ అయినపుడు}$$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1)$$

కాని $S_n = 1022$ కనుక $2(2^n - 1) = 1022$

$\Longrightarrow\quad 2^n - 1 = 511$

$\Longrightarrow\quad 2^n = 512 = 2^9.$ కనుక, $n = 9.$

ఉదాహరణ 2.25

ఒక గుణశ్రేణిలో మొదటి పదం 375 మరియు 4వ పదము 192 అయిన శ్రేణి యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి మరియు మొదటి 14 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి పదము a సామాన్య నిష్పత్తి r అనుకొనుము.

$$a = 375, \quad t_4 = 192.$$

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad t_4 = 375\, r^3$$

$$\Longrightarrow \quad 375\, r^3 = 192$$

$$r^3 = \frac{192}{375} \quad \Longrightarrow \quad r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{4}{5},$$

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$ అయినపుడు

$$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1) \times 5 \times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

గమనిక

పై ఉదాహరణలో $S_n = a\left[\dfrac{r^n - 1}{r - 1}\right]$, $r \neq 1$ బదులు $S_n = a\left[\dfrac{1 - r^n}{1 - r}\right]$, $r \neq 1$ ను ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.26

ఒక గుణశ్రేఢి నాలుగు పదములు మరియు ధనాత్మక సామాన్య నిష్పత్తిని కలిగివున్నది. మొదటి రెండు పదముల మొత్తము 8 మరియు చివరి రెండు పదముల మొత్తము 72 అయిన శ్రేణిని కనుగొనుము.

సాధన గుణశ్రేణిలోని నాలుగు పదముల మొత్తము $a + ar + ar^2 + ar^3$, $r > 0$ అనుకొనుము.

$a + ar = 8$ మరియు $ar^2 + ar^3 = 72$

$$ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$$

$$\Longrightarrow \quad r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$$

$r > 0$, అగుటచే $r = 3$ అగును.

$$a + ar = 8 \quad \Longrightarrow \quad a = 2$$

కావున, గుణశ్రేణి $2 + 6 + 18 + 54$.

ఉదాహరణ 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ అను శ్రేణి యొక్క n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

ఇవ్వబడిన శ్రేణి గుణశ్రేణి కాదనుటను గమనింపుము.

సాధన $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n పదముల వరకు

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ n పదముల వరకు

$= \dfrac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n పదములు) (9 చే గుణించి, భాగించగా)

$= \dfrac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ n పదములు)

$= \dfrac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots\ldots n$ పదములు$) - n]$

కనుక $$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

ఉదాహరణ 2.28

ఒక నగరంలోని 25 వీధులలో మొక్కలను నాటుటకు ఒక సంస్థ పథకం వేసెను. మొదటి వీధిలో ఒక మొక్క, రెండవ వీధిలో రెండు, మూడవ వీధిలో నాలుగు, నాల్గవ వీధిలో ఎనిమిది అని నాటినచో ఆ పనిని ముగించుటకు ఎన్ని మొక్కలు కావలెను.

సాధన ఒక నగరంలో 25 వీధులలో నాటు మొక్కల సంఖ్య గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుచును. కావలసిన మొక్కల సంఖ్యల మొత్తమును S_n అనుకొనుము.

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \quad 25 \text{ పదములు)}$$

$$a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{25} = (1)\,\frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

కనుక కావలసిన మొక్కల సంఖ్య $2^{25} - 1$.

అభ్యాసము 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి 20 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ గుణశ్రేణి యొక్క మొదటి 27 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

3. క్రింది గుణశ్రేణి వివరముల నుండి S_n ను కనుగొనుము.

   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8$. (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12$

4. క్రింది పరిమిత శ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము.

   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) 1+ 11+ 111+........ 20 పదముల వరకు

5. క్రింది శ్రేణిలో మొదటి పదము నుండి ఎన్ని వరస పదములుంటే

   (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ మొత్తం 1092 అగును (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ మొత్తం 728 అగును

6. ఒక గుణశ్రేణి యొక్క రెండవ పదము 3 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{4}{5}$. అయిన మొదటి 23 వరసపదముల మొత్తంను కనుగొనుము.

7. ఒక గుణశ్రేణి నాలుగు పదములను మరియు ధనాత్మక సామాన్య నిష్పత్తిని కల్గియున్నది. మొదటి రెండు పదముల మొత్తము 9 మరియు చివరి రెండు పదముల మొత్తము 36 అయిన శ్రేణిని కనుగొనుము.

8. క్రింది శ్రేణుల మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots$. (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots$.

9. మొదటివారంలో 5 మంది అంటువ్యాధి వలన రోగమునకు గుర్రైరి. రెండవ వారం చివరికి ప్రతి ఒక్కరు మరొక నలుగురిని రోగమునకు గురిచేసినచో 15వ వారం చివరన ఎంత మంది ఈ అంటువ్యాధి వలన బాధింపబడుదురో కనుగొనుము.

10. ఒక తోటమాలి ఒక బాలుని సత్ప్రవర్తనకు మెచ్చి కొన్ని మామిడి పండ్లను ఇచ్చుటకు నిర్ణయించెను. అతనికి రెండు అవకాశములను కల్పించెను. అవి ఏమనగా 1000 మామిడి పండ్లను ఒకే సారి తీసుకొనుట లేక మొదటి రోజున ఒకటి , రెండవరోజున రెండు, మూడవరోజున నాలుగు నాల్గవ రోజున 8 మామిడి పండ్లు అని 10 రోజులకు తీసుకొనినచో , ఆ బాలుడు ఏ అవకాశంలో ఎక్కువ మామిడి పండ్లును పొందగలడు ?

11. ఒక గుణశ్రేణి సరిసంఖ్య పదములను కలిగియున్నది. బేసి పదముల మొత్తము అన్ని పదముల మొత్తమునకు మూడు రెట్లు అయిన సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

12. ఒక గుణశ్రేణిలో మొదటి $n, 2n, 3n$ పదముల మొత్తం వరుసగా S_1, S_2 మరియు S_3 అయిన $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ అని చూపుము

సూచన

$a = 1$ మరియు సామాన్య నిష్పత్తి $x \neq 1$ అయిన, గుణశ్రేణిలోని మొదటి n పదముల మొత్తము $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ గా ఇవ్వబడినది.

పైన ఎడమవైపు గల సమీకరణం x లో $n - 1$ అంతస్తు గల ఒక బహుపది అని గమనింపుము. కొన్ని శ్రేణుల మొత్తము కనుగొనుటకు ఈ సూత్రం ఉపయోగపడుతుంది.

2.5.3 ప్రత్యేక శ్రేణులు (Special series): $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ మరియు $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Σ అను సంకేతమును మొత్తము కనుగొనుటకు ఇదివరకే ఉపయోగించితిమి. సిగ్మా సంకేతంతో సూచించు పరిమిత శ్రేణులకు కొన్ని ఉదాహరణలు

వ.సంఖ్య	సంకేతములు	విస్తరణ
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ or $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n-1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d+5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	3[1 + 1+ ...... 10 పదములు] = 30

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ అని ఉత్పాదించాము. దీనిని $a=1$, $d=1$ మరియు $l=n$ గా తీసుకొని $S_n=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}(1+n)$ గా అంకశ్రేఢిని ఉపయోగించి ఏర్పరచవచ్చును.

సిగ్మా సంకేతం ఉపయోగించి దీనిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చును. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

క్రింది వాటికి సూత్రములను ఉత్పాదించెదము.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$.

నిరూపణ : (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$ విలువను కనుకొనెదము.

$a=1,\ d=2,\ l=(2n-1)$ గా గల n పదములు గల అంకశ్రేఢి.

$$\therefore\quad S_n=\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2 \qquad (S_n=\frac{n}{2}(a+l))$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \qquad (1)$$

సూచన

1. సూత్రం (1) ని క్రింది పద్ధతిలోను పొందవచ్చు.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-n=\frac{2(n)(n+1)}{2}-n=n^2.$$

2. (1) నుండి $1+3+5+\cdots+l=\left(\dfrac{l+1}{2}\right)^2$, ఎందుకనగా $l=2n-1\Longrightarrow n=\dfrac{l+1}{2}$.

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\quad k^3-(k-1)^3=k^2+k(k-1)+(k-1)^2 \quad (a=k \text{ మరియు } b=k-1 \text{గా తీసుకొనిన})$$

$$\Longrightarrow\quad k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1 \qquad (2)$$

$k=1$, అయిన $1^3-0^3=3(1)^2-3(1)+1$

$k=2$, అయిన $2^3-1^3=3(2)^2-3(2)+1$

$k=3$, అయిన $3^3-2^3=3(3)^2-3(3)+1$. ఈ విధంగా కొనసాగించినచో

$k=n$, అయిన $n^3-(n-1)^3=3(n)^2-3(n)+1$.

$k=1,2,\cdots,n$ ల ప్రకారం పై సమీకరణంను నిలువుగా సంకలనం చేయగా,

$$n^3=3[1^2+2^2+\cdots+n^2]-3[1+2+\cdots+n]+n$$

$$3[1^2+2^2+\cdots+n^2]=n^3+3[1+2+\cdots+n]-n$$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right]=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n$$

$$\text{కావున, }\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (3)$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

క్రింది నమూనాను పరిశీలించుము

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

ఈ నమూనాను n పదములకు విస్తరిస్తే,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (4)$$

(i) మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము (చివరిపదము l ఇవ్వబడిన)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(v) మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

ఉదాహరణ 2.29

క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots$ 25 పదములు (iii) $31 + 33 + \cdots + 53$.

సాధన

(i) $$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) ఇక్కడ $n = 25$

$\therefore$ $1 + 3 + 5 + \cdots 25$ పదముల వరకు $= 25^2$ $\quad \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \right)$

$= 625.$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$$

$$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 \right)$$

$$= 27^2 - 15^2 = 504.$$

ఉదాహరణ 2.30

క్రింది శ్రేణీల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

సాధన

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$$

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$$

$$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$$

$$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$$

$$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$$

$$= 14910 - 506 = 14404.$$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4\times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

ఉదాహరణ 2.31

క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

సాధన

(i) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \because \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

$$= \left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

ఉదాహరణ 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ అయిన k విలువను కనుగొనుము

సాధన k అనునది ధన పూర్ణాంకము అని గమనింపుము.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6\times 6\times 11\times 11$$

వర్గమూలము కనుగొనగా $\dfrac{k(k+1)}{2} = 66$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

$k = 11$, ఎందుకనగా k ధనాత్మకం.

ఉదాహరణ 2.33

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ అయిన $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$ విలువ కనుగొనుము

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$ అయిన $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.విలువ కనుగొనుము

సాధన

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ i.e. $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19 \times 19 \times 10 \times 10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 190.$$

ఉదాహరణ 2.34

11 సెం.మీ, 12 సెం.మీ, ... 24 సెం.మీ భుజములను కలిగిన 14 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యములను కనుగొనుము.

సాధన చతురస్ర వైశాల్యముల శ్రేణి $11^2 + 12^2 + \cdots + 24^2$

14 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యము $= 11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 24^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + 10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ చ.సెం.మీ

అభ్యాసము 2.6

1. క్రింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 45$ (ii) $16^2 + 17^2 + 18^2 + \cdots + 25^2$

(iii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ (iv) $7 + 14 + 21 \cdots + 490$

(v) $5^2 + 7^2 + 9^2 + \cdots + 39^2$ (vi) $16^3 + 17^3 + \cdots + 35^3$

2. k విలువ కనుగొనుము

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ అయిన $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$ విలువ కనుగొనుము

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ అయిన $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ విలువ కనుగొనుము

5. చతురస్ర భుజములు వరుసగా 12 సెం॥మీ, 13 సెం॥మీ .... 23 సెం॥మీ అయిన 12 చతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

6. ఘనము యొక్క భుజములు వరుసగా 16 సెం॥మీ, 17 సెం॥మీ, 18 సెం॥మీ .... 30 సెం॥మీ గా వుండిన 15 ఘనముల మొత్తము ఘణపరిమాణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 2.7

సరైన జవాబులను ఎన్నుకొనుము :

1. అసత్య ప్రవచనమును గుర్తించుము ?

(A) ఒక వరుస అనునది $\mathbb{N}$ పై నిర్వచించిన ఒక వాస్తవ ప్రమేయం.

(B) ప్రతి ప్రమేయం వరుసను సూచించును

(C) ఒక వరుస అపరిమిత సంఖ్యలో పదములను కలిగివుండవచ్చును.

(D) ఒక వరుసలో పరిమిత సంఖ్యలో పదములుండవచ్చును.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ అను వరుసలో 8వ పదము

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ అను వరుసలో తరువాతి పదం

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m లు అంకశ్రేఢిలో వుండిన $a - 4b + 6c - 4l + m$ విలువ

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో వుండిన $\frac{a-b}{b-c}$ కి సమానమైనది

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. ఒక వరుస యొక్క n వ పదము $100\,n + 10$ అయిన, ఆ వరుస

(A) అంకశ్రేఢి (B) గుణశ్రేఢి

(C) స్థిర వరుస (D) అంకశ్రేఢి గాను లేక గుణశ్రేఢి గాను వుండదు

7. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ అంకశ్రేఢిలో వుండిన $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$ అయిన, అంకశ్రేఢిలో 13వ పదము.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ అను వరుస అంకశ్రేఢి అయిన $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ అనువరుస

(A) గుణశ్రేఢి (B) అంకశ్రేఢి

(C) అంకశ్రేఢి లేక గుణశ్రేఢి కాదు (D) స్థిరవరుస

9. $k+2, 4k-6, 3k-2$ అనునవి అంకశ్రేఢిలోని మూడు వరుస పదములు అయిన k విలువ

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. $a, b, c, l, m. n$ అంకశ్రేఢిలో వుంటే $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$ అను వరుస

(A) గుణశ్రేఢి (B) అంకశ్రేఢి (C) స్థిర వరుస (D) అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢి కాదు

11. గుణశ్రేఢిలోని మూడవ పదము 2 అయిన మొదటి 5 పదముల లబ్ధము

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే $\frac{a-b}{b-c}$ కు సమానమైనది

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x, 2x+2, 3x+3$ గుణశ్రేఢిలో వుంటే, $5x, 10x+10, 15x+15$ అను వరుస

(A) A.P. (B) G.P. (C) స్థిర వరుస (D) A.P. మరియు G.P. కాదు

14. $-3, -3, -3, \cdots$ వరుస

(A) A.P. మాత్రం (B) G.P. మాత్రం

(C) A.P. మరియు G.P. కాదు (D) A.P. మరియు G.P.

15. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి నాలుగు వరుస పదముల లబ్ధం 256 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 4 మరియు మొదటి పదము ధనాత్మకము అయిన దాని 3వ పదము

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. గుణశ్రేఢిలో $t_2 = \frac{3}{5}, t_3 = \frac{1}{5}$ అయిన సామాన్య నిష్పత్తి

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ అయిన $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x =$

(A) $(1+\sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1-\sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1+\sec x)(1+\sec^3 x + \sec^4 x)$

18. అంకశ్రేఢిలోని n వ పదము $t_n = 3-5n$ అయిన, మొదటి n పదముల మొత్తము

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. a^{m-n}, a^m, a^{m+n} అను గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1+2+3+\ldots+n = k$ అయిన $1^3+2^3+\cdots+n^3$ కు సమానమైనది

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

ముఖ్యాంశములు

- ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో నున్న వాస్తవ సంఖ్యల జాబితా లేక అమరికను వాస్తవ సంఖ్యల వరుస అందురు.
- ఒక వరుస $F_1 = F_2 = 1$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ గా ఇచ్చిన దానిని ఫిభోనేసి వరుస అందురు. అవి 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ....
- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ అను వరుసను అంకగణిత వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ d ఒక స్థిరసంఖ్య a_1ను మొదటి పదము అని మరియు స్థిరసంఖ్య d ను సామాన్య బేధము అందురు A.P లోని సాధారణ పదము $t_n = a + (n-1)d \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.
- ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ను గుణాత్మక వరుస అందురు. ఇందులో $a_{n+1} = a_n r$, $r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ఇక్కడ r స్థిరాంకం. a_1ను మొదటి పదము, r ను సామాన్య నిష్పత్తి అందురు. G.P. సాధారణ పదం $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
- ఒక వరుసలోని పదములను కూడికగుర్తు (+) తో తెలియజేయుటను శ్రేణి అందురు. పరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును పరిమిత శ్రేణి అందురు. అపరిమిత సంఖ్యలో గల పదముల మొత్తమును అపరిమిత శ్రేణి అందురు.
- మొదటి పదము a మరియు సామాన్య భేదము d గా గల అంకశ్రేఢిలోని మొదటి n పదముల మొత్తము S_n గా తీసుకొనిన $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$, ఇక్కడ l చివరి పదము
- గుణశ్రేఢిలో మొదటి n పదముల మొత్తము

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ అయినపుడు} \\ na, & r = 1 \text{ అయినపుడు} \end{cases}$$

  ఇక్కడ మొదటి పదము a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$
- మొదటి n భేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము (చివరిపదము l ఇవ్వబడిన)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

మీకు తెలుసా?

మెరీన్ మెర్సెనే (*Marin Mersenne*) అనునతని పేరుతో పిలవబడు మెర్సెన్ సంఖ్య అనునది $M = 2^P - 1$ రూపంలో అమరిన ఒక ధనపూర్ణాంకమగును. ఇందులో P అనునది ఒక ధనపూర్ణాంకము. M ఒక ప్రధానసంఖ్య అయిన దానిని మెర్సెన్ ప్రధాన సంఖ్య అని పిలవబడుచున్నది. $2^P - 1$ ఒక ప్రధానసంఖ్య అయిన P కూడ ప్రధానసంఖ్య అగును. ఆసక్తికరంగా, ఇప్పటివరకు తెలిసిన సంఖ్యలలో అతి పెద్ద ప్రధానసంఖ్య $2^{43,112,609} - 1$ అనునది ఒక మెర్సెన్ ప్రధానసంఖ్య అగును.

3 బీజగణితము

"The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra" - Author unknown

- పరిచయం
- బహుపదసమాసములు
- సంయోజిత భాగహారము
- గ.సా.భా మరియు క.సా.గు
- అకరణీయ సమాసములు
- వర్గమూలము
- వర్గ సమీకరణములు

(అల్ - క్వారిజ్మీ)
(780-850)
అరబు

గణిత శాస్త్రము మరియు భూగోళ శాస్త్రము నందు అల్ క్వారిజ్మీ యొక్క రచనలు బీజగణితము మరియు త్రికోణమితిలోని నూతన మూల సిద్ధాంతములను నిరూపించుటకు సహాయపడెను. ఏకఘాత మరియు ద్విఘాత సమీకరణముల క్రమబద్ధమైన సాధనలను మొదటి సారిగా ప్రకటించెను.

ఇతనిని బీజగణిత స్థాపకుడని గుర్తించిరి. భారత గణిత శాస్త్రములో హిందూ-అరబిక్ సంఖ్యా వ్యవస్థ అభివృద్ధి ఆధారంగా అరబిక్ సంఖ్యలను పశ్చిమ దేశాలకు పరిచయము చేయుటకు అంకగణితమునందు కృషిచేసెను.

3.1 పరిచయం

గణితశాస్త్రము యొక్క ముఖ్యమైన మరియు ప్రాచీనమైనశాఖ బీజగణితము. ఇది బీజీయ సమీకరణములను సాధించుట గూర్చి తెలుపును. మూడవ శతాబ్దమున, గ్రీకు గణితశాస్త్రజ్ఞుడైన డైయోఫాంటస్ (Diophantus) రచించిన "అరిథ్మెటిక్" (Arithmetic) అను గ్రంథమునందు అనేక ప్రయోగాత్మక సమస్యలను పొందుపరచెను. ఆరవ మరియు ఏడవ శతాబ్దములో భారతదేశ గణితశాస్త్రజ్ఞులైన ఆర్యభట్ట మరియు బ్రహ్మగుప్తుడు ఏకఘాత సమీకరణములు మరియు వర్గ సమీకరణములను సాధించు సామాన్య పద్ధతుల అభివృద్ధికి కృషిచేసిరి.

తొమ్మిదవ శతాబ్దమునందు అరబ్బు గణితశాస్త్రజ్ఞులచే బీజగణితం ఎక్కువ అభివృద్ధిగాంచెను. అల్-క్వారిజ్మి (Al-Khwarizmi) చే రచింపబడిన " ముగింపు మరియు తుల్య గణన సంహిత" (Compendium on calculation by completion and balancing) అను గ్రంథము ఒక ముఖ్యమైన మైలురాయి వంటిది. అందులో అతనుపయోగించిన 'అల్‌జబ్ర' అను పదమును లాటిన్ భాషలో 'అల్‌జీబ్రా' గా చెప్పబడెను. ఈ పదమునకు "పోటీ లేక పూర్వస్థితికి తీసుకొనివచ్చుట" అని అనువాదమగును. 13 వ శతాబ్దమున లియోనార్డో ఫిబోనేస్సి (Leonardo Fibonacci) యొక్క బీజగణిత గ్రంథములు ముఖ్యమైనవి ఇవి అందరిని ప్రభావితము చేయగలవిగా నుండెను. ఇటలీ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు లూకాపేసియోలి (Luca Pacioli, 1445-1517) మరియు ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రాబర్ట్ రికార్డె (Robert Recorde, 1510-1558) బీజగణితంపై మరింత ఎక్కువగా కృషిచేసిరి. తర్వాతి శతాబ్దంలో బీజగణితము ఎక్కువ అభివృద్ధి చెందెను. 19 వ శతాబ్దంలో ఈ ప్రయత్నమునకు బ్రిటీష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నాయకత్వం వహించిరి. బ్రిటన్ దేశస్థుడైన పీకాక్ (Peacock, Britain, 1791-1858) అంకగణితము మరియు బీజగణితములో సత్యప్రవచనముల స్థాపకుడు. ఈ కారణముగా ఇతనిని యూక్లిడ్ ఆఫ్ అల్‌జీబ్రా (Euclid of Algebra) అని పిలువబడెను. డీమార్గన్ (DeMorgan, Britain, 1806-1871), పీకాక్ పరిక్రియలను గమనించి, భావగుర్తులను నిర్వచించి, విస్తరింపజేసెను.

ఈ అధ్యాయములో, రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ మరియు వర్గ సమీకరణములను సాధించుటయందు మెళుకువలు నేర్చుకొనెదము.

3.2 తెలియని రెండు రాశుల రేఖీయ (ఏకఘాత) సమీకరణముల వ్యవస్థ (System of linear equations in two unknowns)

IX తరగతిలో, ఒక తెలియని రాశి x ను కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణము $ax + b = 0, a \neq 0$ ను గూర్చి చదివియున్నాము.

x మరియు y అను తెలియని రెండురాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణము $ax + by = c$, ఇక్కడ a మరియు b లలో కనీసము ఒకటి శూన్యేతరము అగును. $x = x_0,\ y = y_0$ విలువలు రేఖీయ సమీకరణమును తృప్తిపరచినట్లయిన, (x_0, y_0) అను క్రమయుగ్మము ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన అందురు.

జ్యామితీయముగా, $ax + by = c$ అను రేఖీయ సమీకరణ రేఖాచిత్రము తలములో అమరియుండు ఒక సరళరేఖయగును. రేఖపై నుండు ప్రతి బిందువు (x, y) అనునది $ax + by = c$ సమీకరణము యొక్క సాధన అగును. విపర్యముగా, సమీకరణము యొక్క ప్రతిసాధన (x, y) రేఖపై అమరియుండు ఒక బిందువగును. కనుక, $ax + by = c$ అను సమీకరణము అనంతమైన సాధనలను కలిగియుండును.

ఒకటిగా చేర్చబడిన x మరియు y అను రెండు తెలియని రాశులు కలిగియున్న పరిమిత సంఖ్యారేఖీయ సమీకరణముల సమితిని x మరియు y లో గల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ అందురు. ఈ సమీకరణముల వ్యవస్థను సమఘాత సమీకరణములు అనియు అందురు.

నిర్వచనము

$x = x_0,\ y = y_0$ విలువలు వ్యవస్థలోని అన్ని సమీకరణములను తృప్తి పరచినట్లయిన, (x_0, y_0) అను క్రమయుగ్మమును రెండు చలరాశుల రేఖీయ సమీకరణముల సాధన అందురు.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$ అను రెండు చలరాశుల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలో

(i) x మరియు y విలువలలో కనీసం ఒక యుగ్మము పై రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరచినట్లయిన అవి అవిరోధమగును (Consistent). మరియు

(ii) పై రెండు సమీకరణములను తృప్తిపరచుటకు x మరియు y విలువలు లేనిచో అవి విరోధమగును (Inconsistent).

ఈ అధ్యాయములో రెండు చలరాశులతో ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను గూర్చి చర్చించెదము.

సూచన

(i) $ax + by = c$ అను సమీకరణ రూపమును రేఖీయ సమీకరణము అందురు. ఎందుకనగా, సమీకరణములోని చలరాశులన్ని రేఖీయముగాను మరియు సమీకరణములో చలరాశులు లబ్ధము లేనివి.

(ii) రెండు కంటే ఎక్కువ చలరాశులు కలిగిన సమఘాత సమీకరణములు ఉండుటకు వీలగును. వీటిని పై తరగతులలో నేర్చుకొనవచ్చును.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$ అనునవి

x మరియు y చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థగా యుండు ప్రతిసమీకరణములో కనీసం ఒక చలరాశి తప్పక ఉండునట్లు, a_1, b_1, a_2 మరియు b_2 స్థిరాంకములలో ఏవేని ఒకటి శూన్యముగా ఉండవచ్చు. లేక $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. గా ఉండవచ్చును.

జ్యామితీయముగా క్రింది పరిస్థితులు సంభవించును. (1) మరియు (2) లలో తెలుపు రెండు సరళరేఖలు అవి

(i) ఖచ్చితముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును

(ii) ఏ బిందువు వద్ద ఖండించుకొనదు

(iii) ఏకీభవించుకొనును.

(i) సరియైనచో, ఆ ఖండన బిందువు వ్యవస్థ యొక్క ఏకైక సాధన అగును. (ii) సరియైనచో, ఆ వ్యవస్థకు సాధనలుండవు. (iii) సరియైనచో, రేఖపై గల ప్రతి బిందువునకు అనురూప సాధనలు ఈ వ్యవస్థకు కలదు. కనుక ఈ సందర్భమున, ఈ వ్యవస్థ అనంత సాధనలు కలిగియుండును.

ప్రస్తుతము, క్రింది బీజీయ పద్ధతులను ఉపయోగించి తెలియని రెండు రాశుల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలను సాధించెదము. (i) తొలగించు పద్ధతి (ii) అడ్డ గుణకార పద్ధతి.

3.2.1 తొలగించు పద్ధతి (Elimination method)

ఈ పద్ధతిలో, వ్యవస్థ యొక్క సమీకరణములు కలుపుట ద్వారా ఒక పద్ధతి ప్రకారము తెలియని ఒక రాశిని తొలగించెదము. తెలియని ఒక రాశిని తొలగించుటకు క్రింది మార్గమున పొందవచ్చును.

(i) సమీకరణములోని పదములను సంఖ్యలచే గుణించడం లేక భాగించడం ద్వారా తెలియని వాటిని తొలగించుటకు వాటి గుణకములను సంఖ్యాత్మకంగా సమానము చేసుకొనవలయును.

(ii) తరువాత, ఫలిత గుణకములకు వ్యతిరేక గుర్తులున్నట్లయిన సంకలనము (కూడుట) ద్వారా మరియు ఒకే గుర్తులున్నట్లయిన వ్యవకలనము (తీసివేయుట) ద్వారా తొలగించుము.

ఉదాహరణ 3.1

సాధించుము $3x - 5y = -16$, $2x + 5y = 31$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణములు

$$3x - 5y = -16 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \qquad (2)$$

రెండు సమీకరణములలోని y యొక్క గుణకము సంఖ్యాత్మకముగా సమానముగా వ్యతిరేక గుర్తులున్నవి. కావున, y ను సులభంగా తొలగించవచ్చును.

(1) మరియు (2), లను సంకలనము చేయగా,

$$5x = 15 \qquad (3)$$

అనగా, $x = 3$.

y ను సాధించుటకు (1) లేక (2) లో $x = 3$ ను ప్రతిక్షేపించుము.

$x = 3$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $3(3) - 5y = -16$

$$\Longrightarrow \quad y = 5.$$

$x = 3$ మరియు $y = 5$ ను (1) మరియు (2) లలో ప్రతిక్షేపించిన $3(3)-5(5) = -16$ మరియు $2(3) + 5(5) = 31$ అగును. ఇది సత్యమైనందున, ఇచ్చిన వ్యవస్థకు (3, 5) అనునది ఒక సాధన అగును.

గమనిక

సాధనను కనుగొనుటలో ఒకే ఒక చలరాశిలోనున్న సమీకరణము (3) ను పొందుట ఒక ముఖ్యమైన ఘట్టము అగును. చలరాశి y ను తొలగించుట ద్వారా ఒకే చలరాశి x గల సమీకరణము (3) ఏర్పడెను. కావున ఒక వ్యవస్థలోని చలరాశులలో మొదట ఒకటిని తొలగించుట ద్వారా సాధించు పద్ధతిని "తొలగించు పద్ధతి" అందురు.

ఉదాహరణ 3.2

11 పెన్సిళ్ళు మరియు 3 రబ్బరుల (erasers) ధర ₹ 50 మరియు 8 పెన్సిళ్ళ మరియు 3 రబ్బరుల ధర ₹ 38 అయిన ఒక పెన్సిల్ ధర మరియు ఒక రబ్బరు ధరను కనుగొనుము.

సాధన ఒక పెన్సిల్ ధర x (రూపాయలలో) మరియు ఒక రబ్బరు ధర y (రూపాయలలో) అనుకొనిన. ఇచ్చిన సమాచారం ప్రకారం,

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా, $3x = 12$ ఇది $x = 4$ ఇచ్చును.

y విలువ కనుగొనుటకు $x = 4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$11(4) + 3y = 50 \text{ i.e., } y = 2.$$

కాబట్టి $x = 4$ మరియు $y = 2$ అనునవి ఇవ్వబడిన సమీకరణముల సాధనలు అగును.

కనుక, ఒక పెన్సిల్ ధర ₹ 4 మరియు ఒక రబ్బరు ధర ₹ 2.

గమనిక

పొందిన విలువలు రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరచుచున్నవా అని తనిఖీ చేసుకొనుట ఎప్పటికీ మంచిది.

ఉదాహరణ 3.3

$3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$ ను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినవి

$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

చలరాశి x ను తొలగించుటకు (1) ను 2 చే మరియు (2) ను –3 చే గుణించగా,

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$

$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

(3) మరియు (4) కూడగా, $17y = -68$ ఇది $y = -4$ ఇచ్చును.

తరువాత, $y = -4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $3x + 4(-4) = -25$ i.e., $x = -3$

కావున సాధనలు $(-3, -4)$

సూచన

ఉదాహరణ 3.1 లో చేసిన విధముగా, ఇచ్చిన సమీకరణమును కూడుట లేక తీసివేయుట ద్వారా ఒక చలరాశిని తొలగించుటకు ఇందులో (ఉదాహరణ 3.3) వీలుకాదు. కనుక, ఒక నిర్ణయించబడిన పద్ధతిలో x లేక y ల గుర్తులతో సంబంధము లేకుండా, వాటి గుణకములను సమపరచవలెను. తరువాత వాటిని తొలగించుము.

ఉదాహరణ 3.4

$101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$ లను తొలగించు పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ

$$101x + 99y = 499 \qquad (1)$$

$$99x + 101y = 501 \qquad (2)$$

ఒకానొక చలరాశిని తొలగించుటకు తగిన సంఖ్యలచే సమీకరణములను గుణించవలెను.

అయినప్పటికి, ఒక సమీకరణములోని x గుణకము మరొక సమీకరణములోని y గుణకమునకు సమానముగానున్నవి. ఈ సందర్భమున, రెండు సమీకరణములను కూడుట మరియు తీసివేయుట ద్వారా అదే సాధనలు కలిగిన ఒక కొత్త సమీకరణముల వ్యవస్థ ఏర్పడును.

(1) మరియు (2) లను కూడగా, $200x + 200y = 1000$.

200 చే భాగించగా, $x + y = 5 \qquad (3)$

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా, $2x - 2y = -2$

$x - y = -1 \qquad (4)$

(3) మరియు (4) లను సాధించగా $x = 2,\ y = 3$ ఏర్పడును.

కనుక, కావలసిన సాధన (2, 3).

ఉదాహరణ 3.5

$3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$ లను తొలగించు పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినవి,

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

xy పదము ఉన్నందున, ఇవ్వబడిన వ్యవస్థ రేఖీయ వ్యవస్థ కాదు మరియు $x = 0$ అయిన $y = 0$ అగును. దీని విపర్యము సరియే అగుచున్నది. కావున, $(0,0)$ అనునది వ్యవస్థ యొక్క సాధన అగును మరియు $x \neq 0$, $y \neq 0$ అయిన ఏవేని సాధనలు కలిగియుండును.

కనుక, $x \neq 0,\ y \neq 0$ సందర్భమున,

ప్రతీ సమీకరణమును xy చే ఇరువైపుల భాగించగా,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

మరియు $$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

$a = \frac{1}{x}$ మరియు $b = \frac{1}{y}$ అనుకొనిన,

(3) మరియు (4) సమీకరణముల నుండి, $3a + 6b = 7$ (5)

$9a + 3b = 11$ (6)

ఇవి a మరియు b లో గల ఒక రేఖీయ వ్యవస్థ అగును.

b ను తొలగించుటకు, (6) $\times 2 \Longrightarrow 18a + 6b = 22$ (7)

(5) నుండి (7) ను తీసివేయగా, $-15a = -15. \Longrightarrow a = 1$.

$a = 1$ ను (5) లో ప్రతిక్షేపించగా, $b = \frac{2}{3}$. కనుక , $a = 1$ మరియు $b = \frac{2}{3}$.

$a = 1$ అయిన, $\frac{1}{x} = 1$. కనుక, $x = 1$.

$b = \frac{2}{3}$ అయిన, $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. కనుక, $y = \frac{3}{2}$.

కనుక, ఈ వ్యవస్థకు $(1, \frac{3}{2})$ మరియు (0, 0) అను రెండు సాధనలు కలవు.

మరొక పద్ధతి

ఇచ్చిన సమీకరణముల వ్యవస్థను ఈ క్రింది విధముగా సాధించవచ్చును.

$3(2x + y) = 7xy$ (1)

$3(x + 3y) = 11xy$ (2)

(2) $\times$ 2 − (1) $\Longrightarrow$ $15y = 15xy$

$\Longrightarrow$ $15y(1-x) = 0$. కనుక, $x = 1$ మరియు $y = 0$

$x = 1$ అయినప్పుడు, $y = \frac{3}{2}$ మరియు $y = 0$ అయినప్పుడు, $x = 0$ అగును.

కావున, $(1, \frac{3}{2})$ మరియు (0, 0) అనునవి రెండు సాధనలు.

గమనిక: $15y = 15xy$ నందు y కొట్టి వేయరాదు. ఎందుకనగా, $y = 0$ అనునది వేరొక సాధనను ఇచ్చును

అభ్యాసము 3.1

క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము..

1. $x + 2y = 7, \quad x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8, \quad 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4, \quad \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy, \quad 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy}, \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy}, x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy, \quad 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70, \quad 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97, \quad 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5}, x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}, \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0, x \neq 0, y \neq 0$

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క సాధన సమితి పరిమాణము (Cardinality of the set of solutions of the system of linear equations)

క్రింది రెండు సమీకరణముల వ్యవస్థను తీసుకొనెదము.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ఇక్కడ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. అగునట్లు గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలు.

y గుణకములు సమపరచుటకు తొలగించు పద్ధతినుపయోగించెదము.

సమీకరణము (1) ని b_2 చే మరియు సమీకరణము (2) ని b_1 చే గుణించగా,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

సమీకరణము (3) నుండి (4) ను తీసివేయగా,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \implies x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అను షరతులతో

x విలువను సమీకరణము (1) లేక (2) లో ప్రతిక్షేపించి మరియు సాధించగా

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. అను షరతులతో

కనుక, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ మరియు $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (5)

ఇక్కడ రెండు సందర్భములు గమనించాలి

సందర్భము (i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. అనగా, $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

ఈ సందర్భమున, ఈ జత రేఖీయ సమీకరణములు ఏకైక సాధనను కలిగియుండును.

సందర్భము (ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. అనగా, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, $a_2 \neq 0$ మరియు $b_2 \neq 0$ అయితే

ఈ సందర్భములో, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. అయిన $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ అగును.

a_1 మరియు b_1 విలువలను సమీకరణము (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\lambda(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \quad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2 \implies \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ అయిన, రెండు సమీకరణములు (6) మరియు (2) తృప్తి చెందునని సులభముగా గమనించవచ్చును.

$c_1 = \lambda c_2$ అయిన, సమీకరణము (2) యొక్క ఏవేని సాధనలు సమీకరణము (1) ని తృప్తి పరచిన విపర్యము సరియే.

కనుక, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ అయిన, (1) మరియు (2) అను జత రేఖీయ సమీకరణములు అనంతమైన అనేక సాధనలను కలిగియుండును.

$c_1 \neq \lambda c_2$ అయిన, సమీకరణము (1) యొక్క ఏవేని సాధనలు, సమీకరణము (2) ను తృప్తి పరచదు మరియు విపర్యము సరియే.

కాబట్టి, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన, ఇవ్వబడిన జత రేఖీయ సమీకరణములు (1) మరియు (2) లకు సాధనలు కలిగియుండదు.

గమనిక

పై చర్చను సంక్షిప్తము చేసెదము.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$, ఇందు $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. అను సమీకరణముల వ్యవస్థలో

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ లేక $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, అయిన సమీకరణముల వ్యవస్థ ఏకాంక సాధనను కలిగియుండును.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, అయిన, సమీకరణముల వ్యవస్థకు అనంతమైన అనేక సాధనలు కలిగియుండును.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, అయిన, సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనలుండవు.

3.2.2 అడ్డు గుణకార పద్ధతి (Cross multiplication method)

తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి రెండు తెలియని రాశులు x మరియు y గల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనుటకు వాటి గుణకములను ఉపయోగించితిమి. మరొక పద్ధతిని అడ్డు గుణకార పద్ధతి అందురు. ఇది సులభమైన పద్ధతి. ప్రస్తుతము ఈ పద్ధతిని ఎట్లు ఉపయోగించుటయో వివరించెదము.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ ఇందు } a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \text{ అనుకొనెదము} \qquad (2)$$

ఈ వ్యవస్థ సాధనలను ఇంతకు ముందే నిరూపించియున్నాము.

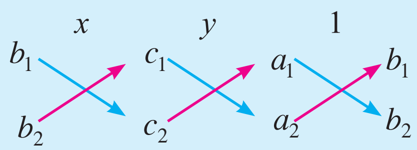
$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

కనుక, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ వ్రాయవచ్చును.

పై వాటిని క్రింది రూపములో వ్రాయగా,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

పై సంబధమును గుర్తుంచుకొనుటకు క్రింది బాణపు గుర్తుల పటము చాలా ఉపయోగపడును.



రెండు సంఖ్యల మధ్యనున్న బాణపు గుర్తులు వాటి గుణకారమును తెలుపును. మొదటి గుణకార లబ్ధము (క్రింద వైపునున్న బాణపు గుర్తు) నుండి రెండవ గుణకార లబ్ధము (పై వైపునున్న బాణపు గుర్తు) ని తీసివేయుము.

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను పై రూపముచే సాధించు పద్ధతిని అడ్డుగుణకార పద్ధతి అందురు.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$b_1c_2 - b_2c_1$ లేక $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ గా ఉండవచ్చు. కానీ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ గా ఉండవలెను.

కాబట్టి $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు

(i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ మరియు $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయితే, $x = 0$ అగును.

(ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ మరియు $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయితే, $y = 0$ అగును.

ఇకమీదట, అనేకంగా ఏకాంక సాధనలు కలిగిన సమీకరణముల వ్యవస్థను అడ్డుగుణకార పద్ధతిలో సాధించెదము.

ఉదాహరణ 3.6

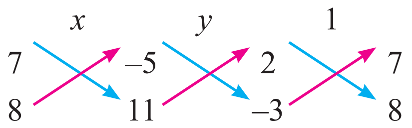
సాధించుము:

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y = -11$$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

అడ్డు గుణకారమునకు, గుణకములను ఈ విధముగా వ్రాయుము.



కనుక, $\dfrac{x}{(7)(11) - (8)(-5)} = \dfrac{y}{(-5)(-3) - (2)(11)} = \dfrac{1}{(2)(8) - (-3)(7)}$.

అనగా, $\dfrac{x}{117} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{1}{37}$. i.e., $x = \dfrac{117}{37}$, $y = -\dfrac{7}{37}$.

కావున, సాధన $\left(\dfrac{117}{37}, -\dfrac{7}{37}\right)$.

ఉదాహరణ 3.7

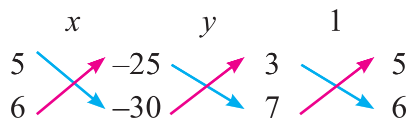
$$3x + 5y = 25$$

$7x + 6y = 30$ లను అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ $3x + 5y - 25 = 0$

$$7x + 6y - 30 = 0$$

ఇప్పుడు, అడ్డుగుణకారమునకు గుణకములను వ్రాయుము.



$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \text{ i.e., } \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$

కనుక $x = 0,\ y = 5$.   కావున $(0, 5)$ సాధనగును.

గమనిక

> ఇక్కడ $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$. దీని అర్థము $x = \frac{0}{-17} = 0$. కనుక $\frac{x}{0}$ అనునది ఒక గుర్తు మాత్రమే మరియు ఇది సున్నచే భాగించడం కాదు. సున్నచే భాగించుటను నిర్వచింపబడలేదు. ఇది సత్యమగును.

ఉదాహరణ 3.8

రెండంకెల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానములోనున్న అంకె, పదుల స్థానములోనున్న అంకెకు రెండింతలు. ఆ సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారు చేసిన ఏర్పడు క్రొత్త సంఖ్య అనునది ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు 27 ఎక్కువగును. ఆ సంఖ్య కనుగొనుము.

సాధన పదుల స్థానమును x గా మరియు ఒకట్ల స్థానమును y గా తీసుకొనుము. కావున, విస్తరణ రూపములో ఆ సంఖ్యను $10x + y$ గా వ్రాయవచ్చును. $(35 = 10(3)+5$ విధముగా)

అంకెలను తారుమారు చేసినప్పుడు, x ఒకట్ల స్థానము గాను మరియు y పదుల స్థానముగాను వచ్చును. విస్తరణ రూపములో మార్చబడిన సంఖ్య $10y + x$ గా వ్రాయవచ్చును.

మొదటి నిబంధన ప్రకారము, $y = 2x$ దీనిని క్రింది విధముగా వ్రాసిన,

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

రెండవ నిబంధన ప్రకారము,

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

అనగా, $$-9x + 9y = 27 \implies -x + y = 3 \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) సమీకరణములు కూడగా, $x = 3$ ఏర్పడును.

సమీకరణము (2) లో $x = 3$ ను ప్రతిక్షేపించగా , $y = 6$ అగును.

కనుక, ఇవ్వబడిన సంఖ్య $(3\times10) + 6 = 36$ అగును.

ఉదాహరణ 3.9

ఒక భిన్నము యొక్క లవమును 3 చే గుణించి, హారమును 3 చే తగ్గించిన $\frac{18}{11}$ ఏర్పడును మరియు లవమును 8 చే అధికము చేసి, హారమును రెండింతలు చేసిన $\frac{2}{5}$ ఏర్పడును. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

సాధన $\frac{x}{y}$ ఒక భిన్నము అనుకొనిన, ఇచ్చిన నిబంధనల ప్రకారము,

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad \text{మరియు} \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad 11x = 6y - 18 \quad \text{మరియు} \quad 5x + 40 = 4y$$

కావున, $11x - 6y + 18 = 0$ (1)

$5x - 4y + 40 = 0$ (2)

(1) మరియు (2) గుణకమును $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ సమీకరణముల గుణకములతో పోల్చగా,

$$a_1 = 11, \ b_1 = -6, \ c_1 = 18 ; \quad a_2 = 5, \ b_2 = -4, \ c_2 = 40.$$

కనుక, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

కావున, ఈ వ్యవస్థ ఏకాంక సాధనను కలిగియుండును.

అడ్డు గుణకార పద్ధతిన వాటి గుణకములను వ్రాయగా,

$$\begin{array}{cccccc} & x & & y & & 1 \\ -6 & & 18 & & 11 & & -6 \\ -4 & & 40 & & 5 & & -4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

కనుక, $x = \frac{168}{14} = 12, \ y = \frac{350}{14} = 25$ కావున భిన్నము $\frac{12}{25}$ అగును.

ఉదాహరణ 3.10

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది బాలురు కలసి ఒక పనిని 10 రోజులలో ముగించగలరు. అదే పనిని 6 మంది పురుషులు మరియు 8 మంది బాలురు కలసి 14 రోజులలో ముగించగలరు. ఒక పురుషుడు మాత్రమే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు మరియు ఒక బాలుడు మాత్రమే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన పనిని పూర్తి చేయుటకు ఒక పురుషుడికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్యను x గాను, ఒక బాలుడికి అవసరమైన రోజుల సంఖ్యను y గాను తీసుకొనుము. స్పష్టముగా, $x \neq 0, y \neq 0$.

కావున, ఒక పురుషుడు ఒక రోజులో పూర్తి చేయు పని భాగము $\frac{1}{x}$ మరియు ఒక బాలుడు ఒక రోజులో పూర్తి చేయు పని భాగము $\frac{1}{y}$.

ఒక రోజులో 8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది బాలురు చేయు పని $\frac{1}{10}$.

కనుక, $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}$ (1)

ఒక రోజులో 6 మంది పురుషులు మరియు 8 మంది బాలురు చేయు పని $\frac{1}{14}$.

కనుక, $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$ (2)

$a = \frac{1}{x}$ మరియు $b = \frac{1}{y}$ తీసుకొనిన (1) మరియు (2) లు క్రమముగా ఈ విధముగా ఇచ్చును.

$$8a + 12b = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0. \qquad (3)$$

$$6a + 8b = \frac{1}{14} \quad \Longrightarrow \quad 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0. \qquad (4)$$

అడ్డు గుణకార పద్ధతిన (3) మరియు (4) ల గుణకములను వ్రాయుము

$$\begin{array}{cccccc} & a & & b & & 1 \\ 6 & & -\frac{1}{20} & & 4 & & 6 \\ 4 & & -\frac{1}{28} & & 3 & & 4 \end{array}$$

కనుక, $\dfrac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \dfrac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{16-18}$. i.e., $\dfrac{a}{-\frac{1}{70}} = \dfrac{b}{-\frac{1}{140}} = \dfrac{1}{-2}$.

అనగా, $a = \dfrac{1}{140}, \; b = \dfrac{1}{280}$

కనుక, $x = \dfrac{1}{a} = 140\,, \; y = \dfrac{1}{b} = 280.$

ఒక పురుషుడు మాత్రము ఆ పనిని 140 రోజులలో పూర్తి చేయును మరియు ఒక బాలుడు మాత్రము ఆ పనిని 280 రోజులలో పూర్తి చేయును.

అభ్యాసము 3.2

1. అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించి క్రింది సమీకరణముల వ్యవస్థను సాధించుము.

   (i) $3x + 4y = 24,\ 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44,\ 0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5y}{3} = -2,\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{13}{6}$ (iv) $\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = -2,\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13$

2. క్రింది సమస్యలను ఒక జత సమీకరణములుగా వ్రాసి, వాటి సాధనను కనుగొనుము:

   (i) ఒక సంఖ్య మూడు రెట్లు గల సంఖ్య కన్నా 2 ఎక్కువగా నుండును. చిన్న సంఖ్య 4 రెట్లయిన ఆ సంఖ్య కన్నా 5 ఎక్కువగును. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

   (ii) ఇద్దరి ఆదాయముల నిష్పత్తి 9 : 7 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4 : 3. ప్రతి ఒక్కరు ప్రతీనెల ₹ 2000 పొదుపు చేసిన, వారి నెలసరి ఆదాయమును కనుగొనుము.

   (iii) ఒక రెండంకెల సంఖ్య వాటి అంకెల మొత్తమునకు ఏడు రెట్లుండును. ఆ అంకెలను తారుమారు చేసిన ఏర్పడు సంఖ్య ఇవ్వబడిన సంఖ్యకన్నా 18 తక్కువగా నుండును. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

   (iv) 3 కుర్చీలు, 2 మేజాల ధర ₹ 700 మరియు 5 కుర్చీలు, 3 మేజాల ధర ₹ 1100 అయిన 2 కుర్చీలు, 3 మేజాల మొత్తము ధర ఎంత?

   (v) ఒక దీర్ఘ చతురస్రము పొడవులో 2 సెం.మీ అధికరించి మరియు వెడల్పులో 2 సెం.మీ తగ్గించినట్లయిన వాటి వైశాల్యము 28 చ.సెం.మీ తగ్గును. పొడవు 1 సెం.మీ తగ్గించి మరియు వెడల్పు 2 సెం. మీ అధికరంచినట్లయిన వాటి వైశాల్యము 33 చ.సెం.మీ పెరుగును. దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యమును కనుగొనుము.

   (vi) ఒక రైలు కొంత దూరమును ఒక స్థిర వేగముతో ప్రయాణము చేసెను. గంటకు 6 కి.మీ ఎక్కువ వేగముతో రైలు ప్రయాణించిన, నిర్ణయించిన కాలము కంటే 4 గంటలు తక్కువ తీసుకొనును. గంటకు 6 కి.మీ తక్కువ వేగముతో రైలు ప్రయాణించిన, నిర్ణయించిన కాలము కంటే 6 గంటలు ఎక్కువ తీసుకొనును. రైలు ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము.

3.3 వర్గ బహుపద సమాసములు (Quadratic polynomials)

n అంతస్తు కలిగిన x చలరాశి గల బహుపద సమాసము $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.....+a^{n-1}x+a_n$, ఇక్కడ $a_0 \neq 0$ మరియు $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ వాస్తవ స్థిరాంకములు.

అంతస్తు రెండు కలిగిన ఒక బహుపద సమాసమును వర్గ (ద్విఘాత) బహుపద సమాసము అందురు. దీనిని $p(x) = ax^2 + bx + c$ గా వ్రాయుదురు, ఇక్కడ $a \neq 0$, b మరియు c లు వాస్తవ స్థిరాంకములు. వాస్తవ స్థిరాంకములు సున్న అంతస్తు కలిగిన బహుపద సమాసములుగా ఉండవచ్చును.

ఉదాహరణకు, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ అనునవి వర్గ బహుపద సమాసములు.

$x = k$ వద్ద, $p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ బహుపద సమాసముల విలువను $p(x)$ లో x కు బదులు k ను ప్రతిక్షేపించగా పొందవచ్చును. కనుక, $x = k$, వద్ద $p(x)$ విలువ $p(k) = ak^2 + bk + c$ అగును.

3.3.1 బహుపద సమాసముల శూన్యములు (సున్నలు) (Zeros of a polynomial)

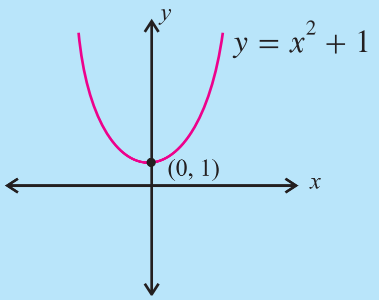
$p(x)$ ఒక బహుపద సమాసము అనుకొనుము. k అను వాస్తవ సంఖ్యకు $p(k) = 0$ అయిన, k ను $p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము (zero) అని అందురు.

ఉదాహరణకు,

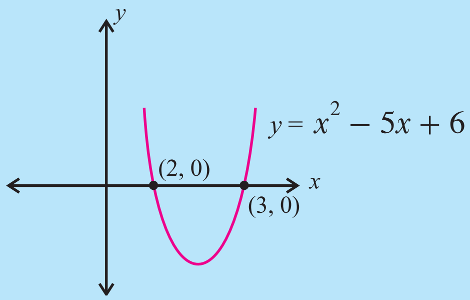
$q(x) = x^2 - 5x + 6$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యములు 2 మరియు 3 అగును. ఎందుకనగా $q(2) = 0$ మరియు $q(3) = 0$.

గమనిక

కొన్ని బహుపద సమాసములకు వాస్తవ సంఖ్యలలో శూన్యములు కలిగియుండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు, $p(x) = x^2 + 1$ నకు వాస్తవ సంఖ్యలలో శూన్యము లేదు. అనగా $p(k) = 0$ అగునట్లు k అను వాస్తవ సంఖ్యకు విలువ లేదు. జ్యామితీయంగా బహుపద సమాస శూన్యమనునది దాని రేఖాచిత్రము x-అక్షము ఖండించినట్లయిన ఆ ఖండన బిందువు x నిరూపమగును. (పటము 3.1 మరియు 3.2 చూడుము)



పటము 3.1



పటము 3.2

3.3.2 వర్గసమాసముల శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్యగల సంబంధము (Relationship between zeros and coefficients of a quadratic polynomial)

సామాన్యముగా, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ అను వర్గ బహుపదసమాసముల శూన్యములు α మరియు β అయిన, కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం, $x - \alpha$, $x - \beta$ అనునవి $p(x)$ యొక్క కారణాంకములు.

కావున, $ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta)$, ఇక్కడ k అనునది శూన్యేతర స్థిరాంకము.

$$= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$

ఇరువైపుల గల x^2, x ల గుణకములు మరియు స్థిరపదములను పోల్చగా, $a = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ మరియు $c = k\alpha\beta$ పొందగలము

$p(x) = ax^2 + bx + c$ యొక్క శూన్యములకు మరియు గుణకములకు మధ్య గల ఆధార సంబంధములు,

శూన్యముల మొత్తము : $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యముల లబ్ధము : $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఉదాహరణ 3.11

$x^2 + 9x + 20$ వర్గ సమాసమునకు శూన్యములు కనుగొనుము. శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్య ఆధార సంబంధమును సరిచూడుము.

సాధన $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$

$p(x) = 0 \implies (x+4)(x+5) = 0 \quad \therefore\ x = -4$ లేక $x = -5$

కనుక, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$ మరియు $p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

కాబట్టి, $p(x)$ కు శూన్యములు -4 మరియు -5.

కనుక, శూన్యముల మొత్తము $= -9$ మరియు శూన్యముల లబ్ధము $= 20$. (1)

ఆధార సంబంధముల నుండి,

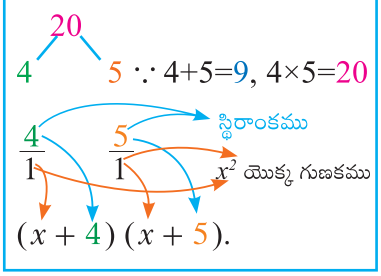
శూన్యముల మొత్తము $= -\dfrac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

శూన్యముల లబ్ధము $= \dfrac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

కనుక, ఆధార సంబంధములు సరిచూడబడినది.

సూచనలు:

$x^2 + 9x + 20$ ను కారణాంక పరచుటకు క్రింది విధానమును అనుసరించుము.



గమనిక

$p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ బహుపద సమాసమునకు గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యములు ఉండును. కనుక, α మరియు β శూన్యములతో $a \neq 0$ గా ఉండు, $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$ ఒక బహుపద సమాసమగును. ఎందుకనగా ఏదేని శూన్యేతరము a ని తీసుకొనిన, α మరియు β శూన్యములతో అనంతమైన వర్గ బహుపద సమాసములు ఉండును.

ఉదాహరణ 3.12

శూన్యముల మొత్తము మరియు లబ్ధములు క్రమముగా -4 మరియు 3 గా నుండు వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.

సాధన α మరియు β అనునవి వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు అనుకొనిన,

ఇవ్వబడినది, $\alpha + \beta = -4$ మరియు $\alpha\beta = 3$.

$p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ ఒక బహుపద సమాసము.

$$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

ఉదాహరణ 3.13

$x = \frac{1}{4}$ మరియు $x = -1$ శూన్యములతో వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.

సాధన

α మరియు β అనునవి $p(x)$ వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు అనుకొనిన, శూన్యముల మరియు గుణకముల సంబంధమునుపయోగించి,

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

ఇదియే $\frac{1}{4}$ మరియు -1 శూన్యములతో ఏర్పడిన బహుపదసమాసము.

మరొక పద్ధతి : క్రింది విధానమును అనుసరించి, కావలసిన బహుపద సమాసమును ప్రత్యక్షముగా పొందవచ్చును.

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

ఏవేని శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యచే $p(x)$ ను గుణించిన, నిర్ణయించిన ధర్మములతో ఏవేని బహుపద సమాసమును పొందవచ్చును.

గమనిక

$\frac{1}{4}$ మరియు -1 శూన్యములతో $4x^2 + 3x - 1$ అనునది కూడా ఒక బహుపదసమాసము.

అభ్యాసము 3.3

1. క్రింది వర్గ బహుపద సమాసముల శూన్యములు కనుగొనుము మరియు శూన్యములకు గుణకములకు మధ్యగల ఆధార సంబంధమును సరిచూడుము.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

   (v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడిన శూన్యముల మొత్తము మరియు లబ్ధముల ద్వారా వర్గ బహుపద సమాసములను కనుగొనుము.

   (i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

   (v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 సంయోజిత భాగాహారము (Synthetic division)

29 ను 7 చే భాగించిన భాగఫలము 4 మరియు శేషము 1 వచ్చునని మనకు తెలియును. కనుక, 29 = 4(7)+1. అదేవిధంగా $p(x)$ అను మరొక బహుపద సమాసమును $q(x)$ అను బహుపద సమాసముతో భాగించగా ఏర్పడు ఫలితములు భాగఫలము మరియు శేషము అనునవి

$$p(x) = (\text{భాగఫలము})q(x) + \text{శేషము}$$

అనగా, $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, ఇక్కడ ($r(x)$ అంతస్తు $<$ $q(x)$ అంతస్తు.

దీనిని భాగాహార విశేష విధి (Division Algoritham) అందురు.

$q(x) = x + a$ అయిన, అంతస్తు $r(x) = 0$ అగును. కనుక, $r(x)$ ఒక స్థిరాంకము.

కాబట్టి, $p(x) = s(x)(x + a) + r$, ఇక్కడ r ఒక స్థిరాంకము.

$x = -a$ పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా, $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \implies r = p(-a)$.

కనుక $q(x) = x + a$ అయిన, $x = -a$ వద్ద $p(x)$ ను మూల్యాంకనము చేసి శేషమును గణించవచ్చును.

భాగాహార విశేష విధి (Division algorithm) :

విభాజ్యము $p(x)$ మరియు భాజకము $q(x)$ అయిన, భాగాహార విశేష విధిని $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ గా వ్రాయవచ్చును.

క్రింది ఫలితములు ఏర్పడును.

(i) $q(x)$ రేఖీయ సమీకరణము అయిన, $r(x) = r$ ఒక స్థిరాంకము.

(ii) $q(x)$ అంతస్తు $= 1$ అయిన (*i.e.,* $q(x)$ అనునది రేఖీయము)
$p(x)$ అంతస్తు $= 1 +$ $s(x)$ అంతస్తు అగును.

(iii) $p(x)$ ను $x + a$ చే భాగించినట్లయిన $p(-a)$ శేషమగును.

(iv) $r = 0$ అయిన, $q(x)$ చే $p(x)$ ను నిశ్శేషముగా భాగించునని చెప్పవచ్చును. లేక $q(x)$ అనునది $p(x)$ కు ఒక కారణాంకమగును.

గమనిక

ఒక బహుపద సమాసమును ఒక రేఖీయ బహుపదులచే సులభముగా భాగించు పద్ధతిని 1809 లో పావలోరుఫిన్ (Paolo Ruffin) చే పరిచయము చేయబడినది. ఈ పద్ధతినే సంయోజిత భాగాహారము అందురు. బహుపద సమాసములోని గుణకముల సహాయముతో రేఖీయ బహుపద సమాసముచే భాగించుట సులభమైనది.

పావలోరుఫిన్

(1765 - 1822 ఇటలీ)

సంయోజిత భాగాహారమును ఒక ఉదాహరణతో వివరించెదము.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ విభాజ్యముగా మరియు $q(x) = x + 2$ భాజకముగా తీసుకొనుము. భాగఫలము $s(x)$ మరియు శేషము r ను క్రింది పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనెదము.

సోపానము 1 విభాజ్యము మరియు భాజకముల x యొక్క ఘాతములను అవరోహణ క్రమములో అమర్చి మరియు విభాజ్యముల గుణకముల ను మొదటి అడ్డువరుసలో వ్రాయుము. (పటమును చూడుము). విడువబడిన పదములకు '0' ను చేర్చుము.

$x^3 + 2x^2 - x - 4$

1   2 -1 -4

సోపానము 2 భాజకము యొక్క శూన్యములు కనుగొనుము.

సోపానము 3 2వ అడ్డువరుసలో మొదట '0' ను ఉంచుము. 2వ అడ్డువరుస మరియు 3వ అడ్డువరుసల విలువలను క్రింద చూపిన విధముగా పూర్తిచేయుము

-2	1	2	-1	-4
	0	$1\times(-2)$ → -2	$0\times(-2)$ → 0	$-1\times(-2)$ → 2
	$1+0$ $= 1$	$2+(-2)$ $= 0$	$-1+0$ $= -1$	$-4+2$ $= -2$ ⟵ శేషము

సోపానము 4 దీని ప్రకారముగా భాగఫలము మరియు శేషమును వ్రాయుము. మూడవ అడ్డువరుసలోని చివర విలువ తప్ప మిగిలిన విలువలను భాగఫలము యొక్క గుణకములుగా ఏర్పరుచుము.

కనుక, భాగఫలము $x^2 - 1$ మరియు శేషము -2 అగును.

ఉదాహరణ 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ ను $x - 3$ చే భాగించగా ఏర్పడు భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము.

సాధన $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$, భాజకము యొక్క శూన్యము 3 గా తీసుకొనిన,

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ శేషము.

$\therefore$ $p(x)$ ను $x - 3$ చే భాగించునపుడు, భాగఫలము $x^2 + 4x + 5$ మరియు శేషము 12.

ఉదాహరణ 3.15

$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ను $2x + 1$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $x^3 + ax^2 - bx - 6$ అయిన a మరియు b విలువలను, శేషమును కనుగొనుము.

సాధన $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ అనుకొనుము.

భాజకము $2x + 1$ ను $2x + 1 = 0$ గా వ్రాసిన $x = -\frac{1}{2}$ అగును.

$\therefore$ భాజకము యొక్క శూన్యము $-\frac{1}{2}$ అగును.

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ శేషము

కావున, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

కనుక, భాగఫలము $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ మరియు శేషము 12.

కానీ, ఇవ్వబడిన భాగఫలము $x^3 + ax^2 - bx - 6$. వచ్చిన భాగఫలముతో పోల్చిన, $a = 0$ మరియు $b = 7$ ఏర్పడును. కనుక, $a = 0$, $b = 7$ మరియు శేషము 12.

అభ్యాసము 3.4

1. సంయోజిత భాగాహారమును ఉపయోగించి భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ ను $x + 4$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $x^3 - ax^2 + bx + 6$ అయిన, a మరియు b విలువలను మరియు శేషమును కనుగొనుము.
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ ను $2x + 1$ చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము $4x^3 + px^2 - qx + 3$ అయిన, p మరియు q విలువలను మరియు శేషమును కనుగొనుము.

3.4.1 సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి కారణాంకపరచుట (Factorization using synthetic division)

వర్గ సమాసములను ఎట్లు కారణాంక పరచవచ్చునో IX తరగతిలో నేర్చుకొంటిమి. ఈ అధ్యాయములో, సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి ఘన సమాసమును ఎట్లు కారణాంక పరచవచ్చునో నేర్చుకొనెదము.

ఘన సమాసము $p(x)$ యొక్క ఒక ఏకఘాత కారణాంకమును గుర్తించినట్లయిన, సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి, $p(x)$ యొక్క వర్గకారణాంకమును పొందవచ్చును. వర్గ కారణాంకమును కారణాంకపరచుటకు వీలైనట్లయితే రెండు ఏకఘాత కారణాంకములుగా చేయవచ్చును. కాబట్టి ఘన సమాసములను ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంకపరచుటకు వీలైన సంయోజిత భాగహార పద్ధతి ఉపయోగకరముగానున్నది.

గమనిక

(i) ఏదేని బహుపద సమాసము $p(x)$ నకు $x = a$ ఒక శూన్యమైన $p(a) = 0$ దీని విపర్యము సరియే.

(ii) $p(x)$ కు $x - a$ ఒక కారణాంకమైన $p(a) = 0$ దీని విపర్యము సరియే. (కారణాంక సిద్ధాంతము)

(iii) $p(x)$ కు $x - 1$ ఒక కారణాంకమైన $p(x)$ యొక్క గుణకముల మొత్తము '0'. దీని విపర్యము సరియే

(iv) $p(x)$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకమైన x యొక్క సరి ఘాతముల గుణకముల మొత్తమునకు, (స్థిరాంకము చేర్చి) x యొక్క బేసి ఘాతముల గుణకముల మొత్తమునకు సమానము.

ఉదాహరణ 3.16

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ కు $x - 1$ ఒక కారణాంకమని నిరూపించుము.

(ii) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకమని నిరూపించుము.

సాధన (i) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0.$ (గుణకముల మొత్తము '0' అగుటను గమనింపుము)

కనుక, $p(x)$ కు $(x - 1)$ ఒక కారణాంకమగును.

(ii) $q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$

$q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0.$ కాబట్టి, $q(x)$ కు $x + 1$ ఒక కారణాంకము. $q(x)$

ఉదాహరణ 3.17

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంకపరచుము.

సాధన $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

$p(1) = -2 \neq 0$ (గుణకముల మొత్తము శూన్యము కానిది గమనింపుము)

$\therefore$ $(x - 1)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము కాదు.

అయినప్పటికీ, $p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0.$

కావున, $x + 1$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకమగును.

ఇతర కారణాంకములను సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి కనుగొనెదము.

−1	2	−3	−3	2
	0	−2	5	−2
	2	−5	2	0 ⟶ శేషము

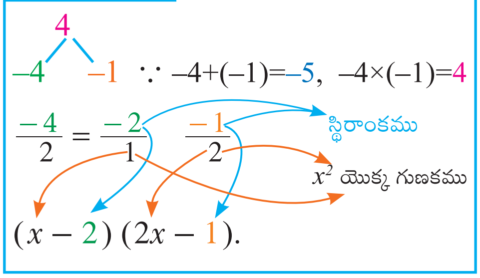
కావున, $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$

కనుక, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1).$

సూచనలు

$2x^2 - 5x + 2$ ను కారణాంకపరచుటకు క్రింది విధానమును అనుసరించ వచ్చును



ఉదాహరణ 3.18

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ను కారణాంకపరచుము.

సాధన $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

$p(1) \neq 0$ మరియు $p(-1) \neq 0$ అయినందున, $x + 1$ మరియు $x - 1$ అనునవి $p(x)$ యొక్క కారణాంకములు కాదు.

కావున యత్న దోష పద్ధతి (trial and error method) ద్వారా x యొక్క వేర్వేరు విలువలను అన్వేషించుము.

$x = 2$ అయిన $p(2) = 0$. కనుక, $p(x)$ కు $x - 2$ ఒక కారణాంకమగును.

సంయోజిత భాగాహారమునుపయోగించి ఇతర కారణాంకములు కనుగొనుట.

2	1	–3	–10	24
	0	2	–2	–24
	1	–1	–12	0 ⟶ శేషము

$\therefore$ $x^2 - x - 12$ మరొక కారణాంకమగును.

$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

కనుక, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

అభ్యాసము 3.5

1. క్రింది బహుపదులను కారణాంకపరచుము.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) మరియు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) (Greatest Common Divisor (GCD) and Least Common Multiple (LCM))

3.5.1 గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) (Greatest common divisor (GCD))

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసములను ఒక్కొక్కదానిని నిశ్శేషముగా భాగించెడి గరిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన సమాసమునే గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) లేక గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (HCF) అని అందురు.

క్రింది సరళ సమాసములను గమనించుము.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c

(i) లోని అన్ని సమాసములకు a, a^2, a^3 భాజకములగుటను గమనింపుము. అన్నింటిలోను a^3 అను భాజకమునకు గరిష్ఠ అంతస్తు కలదు. కావున a^4, a^3, a^5, a^6 అను సమాసముల యొక్క గ.సా.భా a^3.

(ii) అదే విధముగా a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c యొక్క గ.సా.భా ab^4 అని సులభముగా గుర్తించవచ్చును.

సంఖ్యాత్మక గుణకములు కలిగిన సమాసములైన, ఆ గుణకముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొని, ఆ బీజీయ సమాసముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమునకు గుణకముగా ముందుంచుము.

గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును అర్థము చేకొనుటకు మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.19

క్రింది వాటికి గ.సా.భా ను కనుగొనుము.

(i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5$, $12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$

సాధన

(i) 90, 150 మరియు 225 సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్రాయుము. $90 = 2\times3\times3\times5$, $150 = 2\times3\times5\times5$ మరియు $225 = 3\times3\times5\times5$. ఇవ్వబడిన అన్ని సంఖ్యల నుండి ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకములు 3 మరియు 5.

కావున గ.సా.భా $= 3\times5 = 15$.

(ii) బీజీయ సమాసముల గ.సా.భా ను కనుగొనుటకు అదే మెళుకువలను ఉపయోగించుము.

ఇవ్వబడిన $15x^4y^3z^5$ మరియు $12x^2y^7z^2$ సమాసములకు 3, x^2, y^3 మరియు z^2 ఉమ్మడి భాజకములగును.

కావున, గ.సా.భా $= 3\times x^2\times y^3\times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) ఇవ్వబడిన సమాసములు $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$ లలో,

6, 8, 12 యొక్క గ.సా.భా 2.

వర్గ సమాసముల కారణాంకములు కనుగొనెదము.

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$$

పై వర్గ సమాసములకు ఉమ్మడి భాజము $(2x + 1)$.

కావున, గ.సా.భా $= 2(2x + 1)$.

3.5.2 భాగాహార విశేష పద్ధతిని ఉపయోగించి బహుపద సమాసముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొనుట. (Greatest common divisor of polynomials using division algorithm)

మొదటగా, 924 మరియు 105 యొక్క గ.సా.భా ను కనుగొనుటకు సులభమైన పద్ధతిని గమనించుము.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21,$ (లేక)

$84 = 4 \times 21 + 0,$

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

924 మరియు 105 యొక్క గ.సా.భా 21.

ఇదే మెళుకువలను ఉపయోగించి బహుపద సమాసముల గ.సా.భా ను కనుగొనవచ్చును.

$f(x)$ అంతస్తు $\geq g(x)$ అంతస్తుతో $f(x)$, $g(x)$ అను రెండు స్థిరాంకము కాని బహుపద సమాసముల ను తీసుకొనుము. $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా ను కనుగొనెదము. పైన నేర్చుకొన్న పద్ధతి ద్వారా $f(x)$, $g(x)$ ను ఏకఘాతమునకు, తగ్గించుటకు వీలుకాని వర్గ సమాసములుగా కారణాంకపరచి, గ.సా.భా ను సుల భముగా కనుగొనవచ్చును. బహుపదసమీసములు $f(x)$ మరియు $g(x)$ లను సులభముగా కారణాంకపరచుటకు

వీలుకానిచో, వీటిని కఠిన సమస్యలుగా పరిగణించవలెను. అయినప్పటికీ, క్రింది పద్ధతిద్వారా గ.సా.భా.ను ఒక క్రమ పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చును.

సోపానము *1* : మొదట $f(x)$ ను $g(x)$ చే భాగించినపుడు, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ఏర్పడును. ఇక్కడ భాగఫలము $q(x)$ మరియు శేషము $r(x)$ అగును. $g(x)$ అంతస్తు $>$ $r(x)$ అంతస్తు అయినపుడు శేషము $r(x)$ అనునది 0 అయిన, $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా $g(x)$ అగును.

సోపానము *2* : శేషము $r(x)$ అనునది శూన్యేతరమయిన, $g(x)$ ను $r(x)$ చే భాగించినపుడు $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ఏర్పడును, $r(x)$ అంతస్తు $>$ $r_1(x)$ అంతస్తు అయినపుడు, ఇక్కడ $r_1(x)$ అనునది శేషమగును. శేషము $r_1(x)$ అనునది '0' అయిన కావలసిన గ.సా.భా $r(x)$ అగును.

సోపానము 3 : $r_1(x)$ శూన్యేతరమైన, శేషము '0' గా వచ్చునంతవరకు ఈ పద్ధతిని కొనసాగించుము.

చివరి సోపానమునకు ముందున్న శేషము $f(x)$ మరియు $g(x)$ యొక్క గ.సా.భా అగును. $f(x)$ మరియు $g(x)$ అను బహుపద సమాసముల గ.సా.భా ను $(f(x), g(x))$ గా వ్రాయవచ్చును.

సూచనలు

యూక్లిడ్ భాగాహార విశేష విధి అనునది రెండు సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసినట్లయిన ఆ రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా మారదు. కనుక గ.సా.భా (252, 105) = గ.సా.భా (147, 105) = గ.సా.భా = (42, 105) = గ.సా.భా = (63, 42) = గ.సా.భా = (21, 42) = 21.

ఉదాహరణ 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ మరియు $x^3 + x^2 - 5x + 3$ బహుపద సమాసముల గ.సా.భా కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$ మరియు $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ అనుకొనిన.

ఇక్కడ, $f(x)$ యొక్క అంతస్తు $>$ $g(x)$ యొక్క అంతస్తు $\therefore x^3 + x^2 - 5x + 3$ భాజకమగును.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\ & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\ \hline & \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\ & \quad 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\ \hline & \qquad 3x^2 + 6x - 9 \\ & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{శేషము} (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 1 \\ \hline x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ & x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ \hline & \quad 0 \longrightarrow \text{శేషము} \end{array}$$

కావున, GCD $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

సూచనలు

పై రెండు అసలైన సమాసములకు సరళ కారణాంకములు (స్థిరాంకములు) లేవు. కనుక వాటికి గ.సా.భా లేదు. కాబట్టి పై ఉదాహరణలో $3x^2 + 6x - 9$ నుండి సరళ కారణాంకము 3 ను తీసివేసి మరియు $x^2 + 2x - 3$ ను కొత్త భాజకముగా తీసుకొనుము.

ఉదాహరణ 3.21

క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనుము.

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$ మరియు $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$.

సాధన $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$.

$g(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x = 2x(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ మరియు $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనెదము.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ను భాజకముగా తీసుకొనిన.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\ & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\ \hline & 3x^2 + 12x + 12 \\ & (x^2 + 4x + 4) \end{array}$$

↳ శేషము $(\neq 0)$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ & x^3 + 4x^2 + 4x \\ \hline & -2x^2 - 8x - 8 \\ & -2x^2 - 8x - 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$0 \longrightarrow$ శేషము

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ మరియు $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ల ఉమ్మడి కారణాంకము $x^2 + 4x + 4$ అగును. అదే విధంగా

$3x$ మరియు $2x$ యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకము x.

కనుక, గ.సా.భా $(f(x), g(x)) = x(x^2 + 4x + 4)$.

అభ్యాసము 3.6

1. క్రింది వాటికి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొనుము.
   (i) $7x^2yz^4$, $21x^2y^5z^3$ (ii) x^2y, x^3y, x^2y^2
   (iii) $25bc^4d^3$, $35b^2c^5$, $45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4$, $49x^2yz^3$, $14xy^2z^2$
2. క్రింది వాటికి గ.సా.భా ను కనుగొనుము.
   (i) $c^2 - d^2$, $c(c - d)$ (ii) $x^4 - 27a^3x$, $(x - 3a)^2$
   (iii) $m^2 - 3m - 18$, $m^2 + 5m + 6$ (iv) $x^2 + 14x + 33$, $x^3 + 10x^2 - 11x$
   (v) $x^2 + 3xy + 2y^2$, $x^2 + 5xy + 6y^2$ (vi) $2x^2 - x - 1$, $4x^2 + 8x + 3$
   (vii) $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 6$, $3x^2 - 13x + 14$ (viii) $x^3 - x^2 + x - 1$, $x^4 - 1$
   (ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$, $20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$
   (x) $(a - 1)^5(a + 3)^2$, $(a - 2)^2(a - 1)^3(a + 3)^4$
3. భాగాహార విశేష విధినుపయోగించి క్రింది జంట బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా ను కనుగొనుము.
   (i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, $4x^2 - 16x + 12$
   (ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$, $3x^2 + 13x + 10$
   (iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$
   (iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) (Least common multiple (LCM))

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసముల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము అనునది ఆ సమాసముల నొక్కొక్కదానిచే నిశ్శేషముగా భాగింపబడు కనిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన సమాసమే యగును.

a^3, a^4 మరియు a^6 యొక్క ఉమ్మడి గుణిజములు $a^6,\ a^7,\ a^8, \cdots$ అన్ని ఉమ్మడి గుణిజములన్నింటిలోను అత్యంత చిన్న ఉమ్మడి గుణిజము a^6 అగును.

కనుక, a^4, a^3, a^6 యొక్క క.సా.గు a^6. అదేవిధముగా a^3b^4, ab^5, a^2b^7 యొక్క క.సా.గు a^3b^7.

క.సా.గు ను కనుగొనుటకు మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.22

క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనుము.

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3+y^3,\ x^3-y^3,\ x^4+x^2y^2+y^4$

సాధన

(i)
$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$
$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$
$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

$2^1\times3^2\times5^2$ లబ్ధము = 450 అనునది కావలసిన క.సా.గు అగును.

(ii) 35, 42 మరియు 30 క.సా.గు = 5×7×6 = 210.

కావున, కావలసిన క.సా.గు = $210\times a^3\times c^3\times b^3 = 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ ల క.సా.గు $(a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$

(iv) మొదటగా, ఇవ్వబడిన ప్రతి సమాసమునకు కారణాంకములు కనుగొనుము.

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

కావున, క.సా.గు $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6.$$

అభ్యాసము 3.7

క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనుము.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల మధ్య గల సంబంధము (Relation between LCM and GCD)

రెండు ధన పూర్ణాంకముల లబ్ధము వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము. ఉదాహరణకు, $21 \times 35 = 105 \times 7$. ఇక్కడ (21, 35) క.సా.గు = 105 మరియు (21, 35) గ.సా.భా = 7. ఇదే పద్ధతిలో క్రింది ఫలితములను గమనించుము:

ఏవేని రెండు బహుపద సమాసముల లబ్ధము, వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము.

అవి, $f(x) \times g(x) =$ క.సా.గు $(f(x), g(x)) \times$ గ.సా.భా $(f(x), g(x))$.

ఒక ఉదాహరణతో ఈ ఫలితమును న్యాయపరచెదము.

$f(x) = 12(x^4 - x^3)$ మరియు $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ అను రెండు బహుపద సమాసములు.

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \qquad (1)$$

$$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2) \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి,

క.సా.గు $(f(x), g(x)) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$

గ.సా.భా $(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$

కావున, క.సా.గు × గ.సా.భా $= 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (3)$$

అలాగే, $f(x) \times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (4)$$

(3) మరియు (4) ల నుండి క.సా.గు × గ.సా.భా = $f(x) \times g(x)$ పొందగలము.

కనుక, రెండు బహుపద సమాసముల క.సా.గు మరియు గ.సా.భాల లబ్ధమునకు, ఆ రెండు సమాసముల లబ్ధమునకు సమానమగును. ఇంకనూ, $f(x)$, $g(x)$ మరియు క.సా.గు మరియు గ.సా.భా లలో ఒకటి ఇచ్చినట్లయిన మరొకటి సందిగ్ధము లేక కనుగొనవచ్చును. ఎందుకనగా క.సా.గు మరియు గ.సా. భా ఏకాంకములగును. –1 అను కారణాంకము తప్ప

ఉదాహరణ 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ మరియు $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ యొక్క గ.సా.భా $x^2 + 5x + 7$. వాటి క.సా.గు కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ మరియు $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$

గ.సా.భా $x^2 + 5x + 7$ ఇవ్వబడినది. గ.సా.భా × క.సా.గు $= f(x) \times g(x)$.

$$\text{కనుక, క.సా.గు} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{గ.సా.భా}} \qquad (1)$$

ఇపుడు , $f(x)$ మరియు $g(x)$ రెండింటిని గ.సా.భా తో భాగించుము.

ఇపుడు , $f(x)$ ను గ.సా.భా తో భాగించుము.

	1	−2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		−2	−2	26	
		−2	−10	−14	
			8	40	56
			8	40	56
				0	

గ.సా.భా చే $f(x)$ ను భాగించునపుడు, భాగఫలము $x^2 - 2x + 8$ ఏర్పడును.

(1) $\Longrightarrow$ క.సా.గు = $(x^2 - 2x + 8) \times g(x)$

కనుక, క.సా.గు = $(x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$.

గమనిక

పై సమస్యలో, మనకు కావలసిన క.సా.గు పొందుటకు $g(x)$ ను గ.సా.భా చే భాగించి మరియు భాగఫలమును $f(x)$ చే గుణించుము.

ఉదాహరణ 3.24

రెండు బహుపదసమాసముల గ.సా.భా మరియు క.సా.గు క్రమముగా $x + 1$ మరియు $x^6 - 1$. $x^3 + 1$ ఒక బహుపద సమాసమైన, మరొకటి కనుగొనుము.

సాధన గ.సా.భా = $x + 1$ మరియు క.సా.గు = $x^6 - 1$ ఇవ్వబడినది.

$f(x) = x^3 + 1$ అనుకొనిన.

క.సా.గు × గ.సా.భా = $f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow g(x) = \frac{\text{క.సా.గు} \times \text{గ.సా.భా}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

కాబట్టి , $g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$.

అభ్యాసము 3.8

1. క్రింది బహుపద సమాసములకు క.సా.గు ను కనుగొనుము

   (i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$ వీటి గ.సా.భా $x - 2$.

   (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$ వీటి గ.సా.భా $x^2 + x + 1$.

(iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35$, $x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ వీటి గ.సా.భా $x + 7$.

(iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, $2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ వీటి గ.సా.భా $2x - 1$.

2. క.సా.గు, గ.సా.భా మరియు ఒక బహుపద సమాసము $p(x)$ క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడినవి. మరొక బహుపద సమాసము $q(x)$ ను కనుగొనుము.

(i) $(x+1)^2(x+2)^2$, $(x+1)(x+2)$, $(x+1)^2(x+2)$.

(ii) $(4x+5)^3(3x-7)^3$, $(4x+5)(3x-7)^2$, $(4x+5)^3(3x-7)^2$.

(iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$, $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$.

(iv) $(x^3 - 4x)(5x+1)$, $(5x^2 + x)$, $(5x^3 - 9x^2 - 2x)$.

(v) $(x-1)(x-2)(x^2 - 3x + 3)$, $(x-1)$, $(x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.

(vi) $2(x+1)(x^2 - 4)$, $(x+1)$, $(x+1)(x-2)$.

3.6 అకరణీయ సమాసములు (Rational expressions)

రెండు పూర్ణాంకములు m మరియు $n \neq 0$, అయినపుడు $\frac{m}{n}$ భిన్నరూపంను అకరణీయ సంఖ్య అని నిర్వచించబడెను. అదే విధముగా, రెండు బహుపద సమాసములు $p(x)$ మరియు $q(x)$ అనునవి $\frac{p(x)}{q(x)}$ అను భిన్నరూపమును అకరణీయ సమాసము అందురు. ఇక్కడ, $q(x)$ అనునది శూన్యేతర బహుపదసమాసమగును.

ప్రతి బహుపద సమాసము $p(x)$ ఒక అకరణీయ సమాసము. ఎందుకనగా, $p(x)$ ను $\frac{p(x)}{1}$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ '1' స్థిరాంక బహుపద సమాసము అయినప్పటికీ, ఒక అకరణీయ సమాసము ఒక బహుపద సమాసము కానవసరము లేదు.

ఉదాహరణకు, $\frac{x}{x^2+1}$ అనునది అకరణీయ సమాసము కానీ ఒక బహుపద సమాసము కాదు. అకరణీయ సమాసములకు కొన్ని ఉదాహరణలు $2x + 7$, $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3 + \sqrt{2}x + 5}{x^2 + x - \sqrt{3}}$.

3.6.1 అకరణీయ సంఖ్యల సూక్ష్మరూపము (అత్యల్ప రూపము) (Rational expressions in lowest form)

పూర్ణాంకముల గుణకములు కలిగిన రెండు బహుపద సమాసములు $p(x)$ మరియు $q(x)$, వాటి యొక్క గ.సా.భా 1 అయిన, $\frac{p(x)}{q(x)}$ ను సూక్ష్మరూపములో గల ఒక అకరణీయ సమాసమని చెప్పవచ్చును.

ఒక అకరణీయ సమాసము సూక్ష్మరూపములో లేనట్లయితే, లవము $p(x)$ మరియు హారము $q(x)$ ను, $p(x)$ మరియు $q(x)$ యొక్క గ.సా.భా చే భాగించుట ద్వారా సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

కొన్ని ఉదాహరణలు గమనించెదము.

ఉదాహరణ 3.25

అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

సాధన

(i) $\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$

(ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x) = 6x^2-5x+1 = (2x-1)(3x-1)$ మరియు

$q(x) = 9x^2+12x-5 = (3x+5)(3x-1)$

కావున. $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ మరియు

$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$

కావున. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$

అభ్యాసము 3.9

క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\frac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (సూచన: $x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\frac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\frac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\frac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 అకరణీయ సమాససముల గుణకారము మరియు భాగాహారము. (Multiplication and division of rational expressions)

$\frac{p(x)}{q(x)}$; $q(x) \neq 0$ మరియు $\frac{g(x)}{h(x)}$; $h(x) \neq 0$ అనునవి రెండు అకరణీయ సమాసములయిన,

(i) వాటి లబ్ధము $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$ ను $\frac{p(x) \times g(x)}{q(x) \times h(x)}$ గా తెలుపవచ్చును.

(ii) వాటి భాగాహారము $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)}$ ను $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{h(x)}{g(x)}$ గా తెలుపవచ్చును.

కనుక, $$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{p(x) \times h(x)}{q(x) \times g(x)}$$

ఉదాహరణ 3.26

(i) $\frac{x^3y^2}{9z^4}$ ను $\frac{27z^5}{x^4y^2}$ చే (ii) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ ను $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ చే (iii) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ ను $\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ చే గుణించుము.

సాధన

(i) $$\frac{x^3y^2}{9z^4} \times \frac{27z^5}{x^4y^2} = \frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)} = \frac{3z}{x}.$$

(ii) $$\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = a^2-ab+b^2.$$

(iii) $$\frac{x^3-8}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$$
$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4} = x+4.$$

ఉదాహరణ 3.27

(i) $\frac{4x-4}{x^2-1}$ ను $\frac{x-1}{x+1}$ చే (ii) $\frac{x^3-1}{x+3}$ ను $\frac{x^2+x+1}{3x+9}$ చే (iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$ ను $\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ చే భాగించుము.

సాధన

(i) $$\frac{4x-4}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x+1} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{4}{x-1}.$$

(ii) $$\frac{x^3-1}{x+3} \div \frac{x^2+x+1}{3x+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \frac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1).$$

(iii) $$\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$$
$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$$

అభ్యాసము 3.10

1. క్రింది వాటిని గుణించి సూక్ష్మరూపములో సమాధానము వ్రాయుము.

(i) $\frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2-81}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-20}\times\frac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\frac{x^2-16}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-4}{x^3+64}\times\frac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2}\times\frac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\frac{2x-1}{x^2+2x+4}\times\frac{x^4-8x}{2x^2+5x-3}\times\frac{x+3}{x^2-2x}$

2. క్రింది వాటిని భాగించి మరియు సూక్ష్మరూపములో సమాధానము వ్రాయుము.

(i) $\frac{x}{x+1}\div\frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x^2-36}{x^2-49}\div\frac{x+6}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-25}\div\frac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\frac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77}\div\frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10}\div\frac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16}\div\frac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9}\div\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 అకరణీయ సమాసముల కూడిక మరియు తీసివేత (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x)\neq 0$ మరియు $s(x)\neq 0$ గా ఉండు $\frac{p(x)}{q(x)}$ మరియు $\frac{r(x)}{s(x)}$ అనునవి ఏవేని రెండు అకరణీయ సమాసములయిన, వాటి మొత్తము మరియు వ్యత్యాసము (వ్యవకలనము) ను

$$\frac{p(x)}{q(x)}\pm\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x).s(x)\pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$$ గా తెలుపవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.28

సూక్ష్మీకరింపుము (i) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$ (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

సాధన

(i) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$

(ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$

$$=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+6}{x+3}=\frac{x+2+x+6}{x+3}=\frac{2x+8}{x+3}$$

ఉదాహరణ 3.29

$\frac{x^3-1}{x^2+2}$ నకు ఏ అకరణీయ సమాసమును కూడిన $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ను పొందవచ్చును?

సాధన కావలసిన అకరణీయ సమాసమును $p(x)$ అనుకొనిన,

$$\frac{x^3-1}{x^2+2} + p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$$

$$p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \frac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

ఉదాహరణ 3.30

$\left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{2x+1}\right) + \frac{x+2}{x+1}$ రెండు బహుపద సమాసముల ఒక భిన్నముగా సూక్ష్మరూపములో సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన

$$\left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{2x+1}\right) + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right] + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)} + \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

అభ్యాసము 3.11

1. క్రింది వాటిలో రెండు బహుపద సమాసముల ఒక భిన్నముగా సూక్ష్మరూపములో సూక్ష్మీకరించుము.

   (i) $\frac{x^3}{x-2} + \frac{8}{2-x}$ (ii) $\frac{x+2}{x^2+3x+2} + \frac{x-3}{x^2-2x-3}$

   (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\frac{x-2}{x^2-7x+10} + \frac{x+3}{x^2-2x-15}$

   (v) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2} - \frac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{x^2-4}{x^2+6x+8} - \frac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

   (vii) $\left[\frac{2x+5}{x+1} + \frac{x^2+1}{x^2-1}\right] - \left(\frac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} - \frac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ నకు ఏ అకరణీయ సమాసమును కూడిన $\frac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ పొందవచ్చును?

3. $\frac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ నుండి ఏ అకరణీయ సమాసమును తీసివేసిన $2x^2-5x+1$ ను పొందవచ్చును?

4. $P = \frac{x}{x+y}$, $Q = \frac{y}{x+y}$ అయిన $\frac{1}{P-Q} - \frac{2Q}{P^2-Q^2}$ ను కనుగొనుము.

3.7 వర్గమూలము (Square root)

$a \in \mathbb{R}$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కాని వాస్తవ సంఖ్య. a యొక్క వర్గమూలము b ఒక వాస్తవ సంఖ్య, దాని ప్రకారము $b^2 = a$ అగును. a ధనాత్మక వర్గమూలమును $\sqrt[2]{a}$ లేక $\sqrt{a}$ గా గుర్తించెదరు. $(-3)^2 = 9$ మరియు $(+3)^2 = 9$ రెండూ సత్యమైనప్పటికి, $\sqrt{\ }$ అను మూల చిహ్నము ఒక సంఖ్య యొక్క ధనాత్మకవర్గ మూలమును సూచించుటకు ఉపయోగింతురు. కావున $\sqrt{9} = 3$. అదేవిధంగా $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{10000} = 100$.

ఇదే పద్ధతిలో, ఏదేని సమాసము లేక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము ఒక సమాసమే, దాని వర్గము ఇచ్చిన సమాసమునకు సమానము. బహుపద సమాసముల రీత్యా

$$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|, \text{ ఇక్కడ } |p(x)| = \begin{cases} p(x), \ p(x) \geq 0 & \text{అయినప్పుడు} \\ -p(x), \ p(x) < 0 & \text{అయినప్పుడు} \end{cases}$$

ఉదాహరణకు $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$, $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|$.

సామాన్యముగా, ఇవ్వబడిన ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు పరిచయమున్న రెండు పద్ధతులు క్రింద ఇవ్వబడినది. (i) కారణాంక పద్ధతి (ii) భాగాహార పద్ధతి.

ఈ అధ్యాయములో సమాసములు మరియు బహుపద సమాసముల రెండింటిని కారణాంకపరచుటకు వీలైన కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా కారణాంక పద్ధతిని నేర్చుకొనెదము.

3.7.1 కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము (Square root by factorization method)

ఉదాహరణ 3.31

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2 - 24xy$

యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము

సాధన

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \dfrac{9}{8}\left|\dfrac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2 - 24xy} = \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$

$= |(2x-3y)|$

ఉదాహరణ 3.32

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము

సాధన

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) మొదట బహుపద సమాసములను కారణాంక పరిచెదము.

$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$ మరియు

$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

$\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$

$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2} = |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$

అభ్యాసము 3.12

1. క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము.

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$

(iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$

2. క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము.

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 భాగాహార పద్ధతి ద్వారా ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుట (Finding the square root of a polynomial by division method)

ఒక బహుపద సమాసమును కారణాంకముల లబ్ధముగా తగ్గించుటకు సులభము కానియెడల ఈ పద్ధతి నుపయోగించి వర్గమూలమును కనుగొనెదము. అధిక అంతస్తులలో నున్న బహుపద సమాసముల వర్గమూలమును కనుగొనుటకు తగిన పద్ధతి భాగాహార పద్ధతి అగును.

ఒక ధనపూర్ణాంకము యొక్క వర్గమూలమును కనుగొను అదే పద్ధతిని, ఒక బహుపద సమాసము యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుటకు అనుసరించవలెను.

క్రింది ఉదాహరణలతో ఈ పద్ధతిని వివరించెదము.

(i) $\sqrt{66564}$

```
         2   5   8
      ____________
  2  | 6  65  64
     | 4
     |____________
 45  |  2  65
     |  2  25
     |____________
508  |    40  64
     |    40  64
     |____________
     |      0
```

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$ కనుగొనుము.

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ అనుకొనిన,

```
                          3x² + 2x + 1
              ______________________________
        3x²  | 9x⁴ + 12x³ + 10x² + 4x + 1
             | 9x⁴
             |______________________________
   6x² + 2x  |       12x³ + 10x²
             |       12x³ + 4x²
             |______________________________
6x² + 4x + 1 |              6x² + 4x + 1
             |              6x² + 4x + 1
             |______________________________
             |                   0
```

కావున, $\sqrt{66564} = 258$ మరియు $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

సూచనలు

(i) బహుపద సమాసమునందు గల x యొక్క ఘాతములను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో వ్రాయునపుడు లేని పదములకు శూన్యమునుంచుము.

(ii) ఈ పద్ధతిని క్రిందివిధముగా పోల్చవచ్చును.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

కావున, a, b మరియు c లకు తగిన విధముగా కనుగొనవచ్చును.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c \\ &= (3x^2)^2 + (6x^2+2x)(2x) + (6x^2+4x+1)(1)\end{aligned}$$

కనుక, $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$, ఇక్కడ $a = 3x^2$, $b = 2x$ మరియు $c = 1$

మరొపద్ధతి: వర్గమూలము కనుగొనుట, మొదటగా $9x^2 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ వ్రాయుము

$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)xe + 2nlx + l^2$

ఇరువైపుల గుణకములను పోల్చి, సరియైన స్థిరాంకములు m, n, l లను కనుగొనుము

(iii) క్రింద ఇవ్వబడిన ఆసక్తికరమైన వాటిని గమనింపుము.

$25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4$

$= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2$

$= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2$

$$= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c$$
$$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$$
$$= (a - b + c)^2, \quad \text{where } a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2$$
$$\therefore \quad \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|.$$

ఉదాహరణ 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపది x యొక్క ఘాతముల మూలంగా అవరోహణ క్రమంలో వున్నది.

	$x^2 - 5x + 6$
x^2	$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$
	x^4
$2x^2 - 5x$	$-10x^3 + 37x^2$
	$-10x^3 + 25x^2$
$2x^2 - 10x + 6$	$12x^2 - 60x + 36$
	$12x^2 - 60x + 36$
	0

కావున, $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$

ఉదాహరణ 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపదిని x ఘాతముల మూలంగా ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసి, వర్గమూలమును కనుగొనవలెను.

	$5 - 3x + x^2$
5	$25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$
	25
$10-3x$	$-30x + 19x^2$
	$-30x + 9x^2$
$10 - 6x + x^2$	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	0

కావున, ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము వర్గమూలము $|x^2 - 3x + 5|$

ఉదాహరణ 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ఒక ఖచ్చిత వర్గమయిన, m మరియు n విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బహుపదిని x ఘాతములను అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయవలెను.

$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$.

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

కావున, ఇవ్వబడిన బహుపది ఖచ్చితమైన వర్గము, $n = -16$ మరియు $m = 16$.

అభ్యాసము 3.13

1. భాగాహార పద్ధతిలో క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$
2. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులు ఖచ్చిత వర్గములయిన a మరియు b విలువలు కనుగొనుము.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 వర్గ సమీకరణములు (Quadratic equations)

గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త యూక్లిడ్ (Euclid) క్షేత్రగణితము ననుసరించి మన ప్రస్తుత రోజులలో పరి భాషగా ఉన్నటువంటి పొడవులను కనుగొని అభివృద్ధి పరిచెను. అవి వర్గసమీకరణముల సాధనలు అగును. వర్గసమీకరణముల సాధారణ రూపమును సాధించిన ఘనత ప్రాచీన భారత గణిత శాస్త్రవేత్తలకే చెందును. $ax^2 + bx = c$ అను రూపములో గల వర్గ సమీకరణమును సాధించుటకు బ్రహ్మగుప్త (క్రీ.శ 598 – 665) ఒక స్పష్టమైన సూత్రమును ఇచ్చెను. తరువాత శ్రీధర్ ఆచార్య (క్రీ.శ 1025) వర్గములను పూరించు విధానంలో వర్గసమీకరణం సాధించుటకు సూత్రమును రూపొందించెను. ప్రస్తుతం దీనిని వర్గసమీకరణ సూత్రము అని అంటున్నారు. (భాస్కరా II పేర్కొన్న విధముగా)

ఈ భాగంలో వర్గసమీకరణముల సాధనను వేర్వేరు పద్ధతులలో సాధించుటను నేర్చుకుంటారు. వర్గసమీకరణం ఉపయోగములను కొన్నింటిని చూడబోతున్నాం.

నిర్వచనము

x చలరాశి గల వర్గసమీకరణ రూపము $ax^2 + bx + c = 0$. ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

వాస్తవానికి, ఏదైనా సమీకరణ రూపం $p(x) = 0$, ఇక్కడ $p(x)$ అంతస్తు 2 గా గల బాహుపది ఒక వర్గసమీకరణం అగును. దాని సాధారణ రూపము $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

ఉదాహరణకు $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ కొన్ని వర్గసమీకణములు.

3.8.1 కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గసమీకరణమును సాధించుట. (Solution of a quadratic equation by factorization method)

కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి వర్గసమీకరణమును ఏకఘాత కారణాంకములుగా కారణాంక పరచవచ్చును. ఇవ్వబడిన లబ్ధంలో ఏదేని ఒక కారణాంకము సున్న అయిన, మొత్తం లబ్ధము సున్న అగును. విపర్యంగా ఒక లబ్ధం సున్నకు సమానమైన, ఆ లబ్ధం యొక్క కొన్ని కారణాంకములు సున్నగా ఉండును. ఏదైనా తెలియని చలరాశిని కలిగియున్న కారణాంకము వుంటే అది సున్నకు సమానంగా ఉండవచ్చు. కనుక వర్గసమీకరణం సాధించుటలో x యొక్క విలువలను కనుగొనునపుడు ప్రతి కారణాంకము సున్న కావలయును. కనుక తెలియని చలరాశిని కనుగొనుటకు ప్రతి కారణాంకమును సున్నకు సమపరచవలయును.

ఉదాహరణ 3.36

$6x^2 - 5x - 25 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $6x^2 - 5x - 25 = 0$.

మొదటగా, α మరియు β కనుగొనుటకు $\alpha + \beta = -5$ మరియు $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ ఇక్కడ x యొక్క గుణకము -5, కనుక $\alpha = -15$ మరియు $\beta = 10$ ఏర్పడును. తరువాత

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x - 5) + 5(2x - 5)$$
$$= (2x - 5)(3x + 5).$$

కాబట్టి $2x - 5 = 0$ మరియు $3x + 5 = 0$ నుండి సాధన సమితి ఏర్పడును.

కనుక, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

కావున, సాధన సమితి $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

ఉదాహరణ 3.37

$\frac{6}{7x - 21} - \frac{1}{x^2 - 6x + 9} + \frac{1}{x^2 - 9} = 0$ ను సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము వర్గ సమీకరణము కాదు. కాని ఈ సమీకరణమును సూక్ష్మీకరించి వర్గసమీకరణమును పొందవచ్చును.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2 - 9) - 7(x + 3) + 7(x - 3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ ఒక వర్గ సమీకరణము. కావున దీనికి రెండు విలువలు కలవు. అవి $x = 4$ మరియు $x = -4$.

$\therefore$ సాధన సమితి $\{-4, 4\}$

ఉదాహరణ 3.38

$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$, $3 - 4x > 0$ సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$

ఇరువైపుల వర్గము చేయగా, $24 - 10x = (3 - 4x)^2$ ఏర్పడును.

$$\Longrightarrow 16x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$\Longrightarrow (8x + 5)(2x - 3) = 0$ కావున $x = \frac{3}{2}$ లేక $-\frac{5}{8}$ ఏర్పడును.

$x = \frac{3}{2}$ అయినపుడు, $3 - 4x = 3 - 4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ అగును. కాబట్టి, $x = \frac{3}{2}$ అనునది సమీకరణము సాధన కాదు.

$x = -\frac{5}{8}$ అయినపుడు, $3 - 4x > 0$ అగును. కాబట్టి సాధన సమితి $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

సూచనలు

పై ఉదాహరణ లాంటి మూల సమీకరణములను సాధించుటకు మనము వర్గ ధర్మమును అనుసరించవలయును

$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ కాని, వర్గ ధర్మముచే పొందు క్రొత్త సమీకరణము సాధనలన్ని దత్త సమీకరణ సాధనలుగా ఉండునని ఖచ్చితముగా చెప్పలేము. ఉదాహరణకు $x = 5$ ను వర్గపరచగా $x^2 = 25$ అగును. ఇక్కడ $x = 5$ మరియు $x = -5$ అనునవి సాధనలుగా గలవు. కాని $x = -5$ అనునది దత్త సమీకరణ సాధన కాదు. ఇటువంటి సాధనను అనన్య (extraneous) సాధన అందురు.

కనుక, పై మూల సమీకరణమును ఇరువైపుల వర్గపరుచుటచే పొందు చివరి సమీకరణ సాధనలు దత్త సమీకరణ సాధనలుగా వుండునాయని పరీక్షించి నిర్ధారించవలయును. ఇది చాలా ముఖ్యమైనది, ఎందుకనగా దత్త సమీకరణము ఏ సాధనను కోల్పోరాదు. కాని దత్త సమీకరణమునకు గా, క్రొత్త సమీకరణంఉనకు మాత్రము మూలములుగా వుండు కొన్ని విలువలను పరిచయం చేయవచ్చును.

అభ్యాసము 3.14

క్రింది వర్గ సమీకరణములను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

(i) $(2x + 3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2 - 6) = x(x + 7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2 + b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x + 1)^2 - 5(x + 1) = 12$ (x) $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

3.8.2 వర్గమును పూరించుట ద్వారా సాధించుట (Solution of a quadratic equation by completing square):

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ రూపములో చివరి పదము $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ అనునది x గుణకములో సగము యొక్క వర్గమగును. కాని $x+\frac{b}{2}$ వర్గములో $x^2 + bx$ అనునది $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ అను పదమును కోల్పోవుచున్నది. కనుక $x^2 + bx$ రూపమునకు x గుణకములో సగము యొక్క వర్గమును ఈ సమాసమునకు కలిపినట్లయిన దాని ఫలితము **ద్విపద సమాసము** యొక్క వర్గముగా ఉండును. సాధారణంగా ఇటువంటి సంకలనమును **వర్గమును పూరించుట** అందురు. ఈ భాగంలో వర్గసమీకరణము యొక్క సాధనలను **వర్గమును పూరించు** విధానములో కనుగొనుటకు క్రింది సోపానములు పాటించవలయును.

సోపానము 1 x^2 గుణకము 1 అయిన 2 వ సోపానమును పాటించవలయును. అలాకానపుడు x^2 యొక్క గుణకముతో సమీకరణమును ఇరువైపుల భాగించుము. చలరాశితో కూడిన అన్ని పదములను సమీకరణము యొక్క ఒక ప్రక్కకు తెచ్చుకొనుము.

సోపానము 2 x యొక్క గుణకములో సగమును వర్గము చేసి సమీకరణమునకు ఇరువైపుల కూడుము.

$x = \mathrm{t} \Rightarrow x = \sqrt{t}$ (లేక) $x = -\sqrt{t}$ ఇక్కడ t ఋణేతరసంఖ్య.

దీనిని సాధించుటకు వర్గమూల ధర్మమును ఉపయోగించుము.

ఉదాహరణ 3.39

$5x^2 - 6x - 2 = 0$ వర్గసమీకరణంను వర్గము పూరించు విధానములో సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన వర్గసమీకరణం $5x^2 - 6x - 2 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (ఇరువైపుల 5 తో భాగించుము)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5}$ (x గుణకములో సగము $\frac{3}{5}$)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5}$ ($\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ ను ఇరువైపుల కూడుము)

$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$ (ఇరువైపుల వర్గమాలము తీయుము)

కనుక, $x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

కావున, సాధన సమితి $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$.

ఉదాహరణ 3.40

$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$ సమీకరణమును వర్గము పూరించు విధానములో సాధించుము.

సాధన

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\implies x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \implies x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\implies x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\implies \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \implies \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\implies x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \implies x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

కాబట్టి, సాధన సమితి $\left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 సూత్ర పద్ధతిలో వర్గసమీకరణమును సాధించుట (Solution of quadratic equation by formula method)

ఈ భాగంలో వర్గ సూత్రమును మనము ఉత్పాదించెదము. ఇది వర్గసమీకరణం మూలములు కనుగొనుటకు ఉపయోగకరంగా ఉండును. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ అను వర్గ సమీకరణమును తీసుకొనెదము. ఈ సమీకరణమును

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ గా వ్రాయుము.}$$

$$\implies x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \implies x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

ఇరువైపుల $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ కూడగా, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

అవి, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\implies x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

కనుక, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

సాధన సమితి $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

సమీకరణం (1) లో ఇవ్వబడిన సూత్రమును వర్గ సూత్రము అందురు.

ఇపుడు, వర్గసూత్రమునుపయోగించి కొన్ని వర్గ సమీకరణములను సాధించెదము.

ఉదాహరణ 3.41

$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$, ఇక్కడ $x + 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ మరియు $x + 4 \neq 0$ వర్గ సూత్రమును ఉపయోగించి సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం వర్గసమీకరణం సామాన్యరూపంలో లేదని గమనించుము.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x$$

కనుక, $x^2 - 4x - 8 = 0$, ఇది వర్గసమీకరణము.

(క.సా.గు తీయుట ద్వారా పై సమీకరణము ఏర్పడును)

వర్గసూత్రమునుపయోగించి,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

కనుక, $x = 2 + 2\sqrt{3}$ లేక $2 - 2\sqrt{3}$

కాబట్టి, సాధన సమితి = $\{2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}\}$

అభ్యాసము 3.15

1 వర్గములను పూరించు పద్ధతిలో క్రింది వర్గసమీకరణములను సాధించుము.

(i) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (ii) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (iv) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

(v) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ (vi) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

2. వర్గసూత్రమునుపయోగించి క్రింది వర్గసమీకరణములను సాధించుము.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 వర్గసమీకరణములతో కూడిన సమస్యలను సాధించుట (Solution of problems involving quadratic equations)

ఈ భాగంలో పదజాలంతో తెలియజేయు కొన్ని సులభ సమస్యలను మరియు నిత్యజీవితంలో జరుగు కొన్ని సమస్యలను కలిగియున్న వర్గసమీకరణములు సాధించెదము. మొదట ఇచ్చిన వాక్యములను సమీకరణము రూపములోనికి మార్చుకుని ఆ తరువాత సాధించవలయును. చివరిగా ఇవ్వబడిన సమస్యకు సంబంధించిన సాధనను ఎన్నుకొనవలయును.

ఉదాహరణ 3.42

ఒక సంఖ్య మరియు వాటి విలోమముల మొత్తము $5\frac{1}{5}$ అయిన, ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన కావలసిన సంఖ్యను x అనుకొనుము. దాని విలోమము $\frac{1}{x}$.

నిబంధన ప్రకారము, $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

కావున $5x^2 - 26x + 5 = 0$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

అనగా, $(5x-1)(x-5) = 0 \implies x = 5$ లేక $\frac{1}{5}$

కాబట్టి కావలసిన సంఖ్యలు $5, \frac{1}{5}$.

ఉదాహరణ 3.43

ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, దాని ఉన్నతికంటె 4 సెం.మీ ఎక్కువ గలదు. త్రిభుజ వైశాల్యము 48 చ.సెం.మీ అయిన దాని భూమి మరియు ఉన్నతిని కనుగొనుము.

సాధన త్రిభుజ ఉన్నతి x సెం.మీ అనుకొనుము

కనుక, త్రిభుజ భూమి $(x+4)$ సెం.మీ అగును,

త్రిభుజ వైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ (భూమి)(ఎత్తు)

ఇవ్వబడిన నిబంధనరీత్యా $\frac{1}{2}(x+4)(x) = 48$

$$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x+12)(x-8) = 0$$

$$\implies x = -12 \text{ లేక } 8$$

కానీ $x = -12$ వర్తించదు (పొడవు ధన సంఖ్యగా వుండును)

$\therefore\ x = 8$ కావున, $x + 4 = 12$ అగును.

కనుక, త్రిభుజ ఉన్నతి 8 సెం.మీ మరియు త్రిభుజం భూమి 12 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3.44

ఒక కారు అనుకున్న సమయం కంటే 30 నిమిషాలు ఆలస్యంగా బయలుదేరెను. ఒక నిర్ణీతకాలములో అది గమ్యం చేరుటకు 150 కి.మీ దూరము వున్నది. సాధారణ వేగం కంటే 25 కి.మీ/గం వేగం పెంచిన దాని సాధారణ వేగమును కనుగొనుము.

సాధన కారు సాధారణ వేగము x కి.మీ/గంట.

పెరిగిన కారు వేగము $(x+25)$ కి.మీ/గంట.

మొత్తము దూరము = 150 కి.మీ; పట్టు కాలము = $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$.

కనుక T_1 మరియు T_2 లు అనునవి వరుసగా కారుకు నిర్ణయించిన కాలములో ఇచ్చిన దూరమును చేరుటకు తీసుకున్న కాలము మరియు తగ్గిన కాలమగును, (వేగము అధికమైనందున)

పై సమాచారము నుండి $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ గంట (30 నిమిషాలు $= \frac{1}{2}$ గంట)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow (x+100)(x-75) = 0$$

కనుక, $x = 75$ లేక -100, కాని $x = -100$ వర్తించదు.

కాబట్టి కారు సాధారణ వేగము = 75 కి.మీ/గంట.

అభ్యాసము 3.16

1. ఒక సంఖ్య మరియు దాని విలోమముల మొత్తము $\frac{65}{8}$ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. రెండు ధన సంఖ్యల వర్గముల భేదము 45. చిన్న సంఖ్య వర్గము, పెద్ద సంఖ్యకు నాలుగు రెట్లయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
3. ఒక రైతు 100 చ.మీ వైశాల్యము కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాకార కాయకూరల తోటను వేయవలెననుకొనెను. అతని దగ్గర 30 మీ కంచె తీగ మాత్రమే ఉన్నందున అతడు తన ఇంటిని దీర్ఘచతురస్రాకార తోట ఒక భుజమునకు తన ఇంటి ప్రహరీ గోడనుపయోగించి, మిగిలిన మూడు భుజములకు తీగను కంచెగా వేసెను. అయిన తోట యొక్క పరిమాణములను కనుగొనుము.
4. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము పొడవు 20 మీ మరియు వెడల్పు 14 మీ గా వున్నది. దీని చుట్టూ సమాన వెడల్పు గల బాట వైశాల్యము 111 చ.మీ కలిగియున్నది. వెలుపలి వైపు గల బాటవెడల్పును కనుగొనుము.
5. ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో 90 కి.మీ దూరము ప్రయాణం చేసెను. వేగమును 15 కి.మీ/గంటకు పెంచిన, ప్రయాణ కాలం 30 నిమిషాలు తగ్గను. అయిన రైలు నిజ వేగమును కనుగొనుము.
6. నిశ్చల నీటిలో ఒక పడవ వేగము 15 కి.మీ/గంట. ఆ పడవ ప్రవాహపు దిశలో 30 కి.మీ. వెళ్ళి వ్యతిరేక దిశలో తిరిగి గమ్యస్థానం చేరుటకు 4 గం॥ 30 ని॥ పట్టును. అయిన నీటి ప్రవాహ వేగమును కనుగొనుము.
7. ఒక సంవత్సరమునకు ముందు ఒక మనిషి వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకు 8 రెట్లుగా వుండెను. ఇపుడు అతని వయస్సు, కొడుకు వయస్సు వర్గమునకు సమానం అయిన ప్రస్తుతం వారి వయస్సుల ను కనుగొనుము.
8. ఒక చదరంగం బోర్డులో 64 సమాన చతురస్రములు కలవు. ప్రతి చతురస్రము వైశాల్యము 6.25 సెం.మీ^{2} మరియు ఆ బోర్డు చుట్టూ 2 సెం.మీ వెడల్పు గల హద్దు కలదు. చదరంగం బోర్డు భుజము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.
9. ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు B కంటె A, 6 రోజులు తక్కువగా తీసుకొనును. A మరియు B లు ఇద్దరు కలిసి 4 రోజులలో ఆ పనిని ముగించిన. B ఒక్కడే ఆ పనిని ఎంత కాలములో ముగించును?
10. ఒక రైల్వే స్టేషన్ నుండి ఒకే సమయములో రెండు రైళ్ళు బయలుదేరెను. మొదటి రైలు పడమరకు మరియు రెండవ రైలు ఉత్తరం వైపుకు ప్రయాణం చేసెను. రెండవ రైలు కంటే మొదటి రైలు 5 కి.మీ/గంట వేగముతో ప్రయాణం చేసెను. 2 గం॥ తరువాత వాటి మధ్య దూరము 50 కి.మీ ఉండిన, ఒక్కొక్క రైలు యొక్క సరాసరి వేగమును కనుగొనుము.

3.8.5 వర్గసమీకరణము యొక్క మూలముల స్వభావము (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ గా ఇవ్వబడినది.

(i) $b^2 - 4ac > 0$, అయితే రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలములను పొందగలము.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{మరియు} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ అయితే, సమీకరణమునకు రెండు సమాన మూలములు గలవు. అవి $x = \dfrac{-b}{2a}$ అగును.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయితే, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ వాస్తవ సంఖ్య కాదు. కావున ఇచ్చినటువంటి వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.

కావున, మూలముల స్వభావం $b^2 - 4ac$ విలువలపై ఆధారపడివుండును. $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలముల స్వభావంను $b^2 - 4ac$ సమాస విలువ తెలుపును. దీనిని వర్గ సమీకరణము విచక్షిణి (discrininat) అందురు. మరియు $\triangle$ అను గుర్తుతో సూచించుదురు.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$	మూలముల స్వభావము
$\triangle > 0$	వాస్తవములు మరియు అసమానములు.
$\triangle = 0$	వాస్తవములు మరియు సమానములు.
$\triangle < 0$	వాస్తవ మూలములు కాదు (కల్పిత మూలములు).

ఉదాహరణ 3.45

ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణములకు మూలముల స్వభావమును తెల్పుము.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

సాధన $ax^2 + bx + c = 0$, విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) $a = 1, b = -11$ మరియు $c = -10$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

$\triangle > 0$ కనుక, మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానములు.

(ii) $a = 4, b = -28$ మరియు $c = 49$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

$\triangle = 0$ అయినందున, మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు.

(iii) $a = 2, b = 5$ మరియు $c = 5$.

విచక్షిణి $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5)$

$= 25 - 40 = -15$

$\Delta < 0$ అయినందున, సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.

ఉదాహరణ 3.46

a మరియు b అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు మరియు c యొక్క అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలకు $(a-b+c)x^2 + 2(a-b)x + (a-b-c) = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలు అగునని నిరూపించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం యొక్క రూపము $Ax^2 + Bx + C = 0$ అయిన,

$A = a - b + c$, $B = 2(a-b)$ మరియు $C = a - b - c$.

$Ax^2 + Bx + c = 0$ యొక్క విచక్షిణి

$$B^2 - 4AC = [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c)$$

$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c]$$

$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2]$$

$\Delta = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ఖచ్చిత వర్గము..

$\therefore \Delta > 0$ మరియు ఇది ఖచ్చితమైన వర్గము.

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన సమీకరణం మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 3.47

$x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$ అను సమీకరణం వాస్తవములు మరియు సమాన మూలములు కలిగియుండిన k విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణం $x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$. (1)

(1) సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో కలదు.

ఇక్కడ, $a = 1$, $b = -2(3k+1)$, $c = 7(3+2k)$.

విచక్షిణి, $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k)$$

$$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3+2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$$

ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు సమానమైన మూలములు కలవు. $\Delta = 0$ కనుక

$\Longrightarrow$ $9k^2 - 8k - 20 = 0$

$\Longrightarrow$ $(k-2)(9k+10) = 0$

కావున, $k = 2, -\frac{10}{9}$.

అభ్యాసము 3.17

1. క్రింది సమీకరణముల మూలముల స్వభావమును తెల్పుము.

   (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

   (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

   (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. క్రింది సమీకరణముల మూలములు వాస్తవము మరియు సమానమైన k విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

   (iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు అవాస్తవములు అని చూపుము.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు వాస్తవములు కాదని చూపుము.

5. $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$ ఇక్కడ $ad - bc \neq 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు సమానమైన, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అని నిరూపించుము.

6. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ సమీకరణ మూలములు వాస్తవములు మరియు $a = b = c$ కానపుడు ఆ మూలములు సమానములు కావు అని చూపుము.

7. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ సమీకరణం సమాన మూలములు కలిగివుంటే, $c^2 = a^2(1 + m^2)$ అని నిరూపించుము.

3.8.6 వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలములు మరియు గుణకములకు మధ్యగల సంబంధము (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$, ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$. ఇచ్చిన సమీకరణ మూలములు α మరియు β.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{మరియు} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

మూలముల మొత్తము,
$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

మూలముల లబ్ధం,
$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

కావున, $ax^2 + bx + c = 0$ కు α, β లు మూలములు అయిన,

(i) మూలముల మొత్తము, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) మూలముల లబ్ధము, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ఇచ్చిన మూలముల ద్వారా సమీకరణమును రూపొందించుట (Formation of quadratic equation when roots are given)

α మరియు β లు వర్గసమీకరణము యొక్క మూలములు అనుకొనుము.

$(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$ లు కారణాంకములు.

$\therefore \quad (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

అనగా, $x^2 -$ (మూలముల ముత్తము)x + మూలముల లబ్ధము $= 0$

గమనిక

ఒకే మూలములతో అనంతమైన అనేక వర్గసమీకరణములు గలవు.

ఉదాహరణ 3.48

$3x^2 - 10x + k = 0$ సమీకరణమునకు ఒక మూలము $\frac{1}{3}$ అయిన, మరియొక మూలమును మరియు k విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $3x^2 - 10x + k = 0$.

α మరియు β రెండు మూలములు అనుకొనుము.

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3} \qquad (1)$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $\beta = 3$

మరియు, $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k = 3$

కనుక, మరియొక మూలము $\beta = 3$ మరియు $k = 3$.

ఉదాహరణ 3.49

$ax^2 - 5x + c = 0$ అను వర్గసమీకరణ మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధము రెండునూ 10 కి సమానమైన, a మరియు c విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $ax^2 - 5x + c = 0$.

మూలముల మొత్తము, $\frac{5}{a} = 10, \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

మూలముల లబ్ధము, $\frac{c}{a} = 10$

$\Longrightarrow$ $c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

కావున, $a = \frac{1}{2}$ మరియు $c = 5$

గమనిక

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన α మరియు β కలిగిన కొన్ని సమాసములు $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2 - \beta^2$ మొదలగు వాటిని $\alpha + \beta$ మరియు $\alpha\beta$ యొక్క విలువలను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

α మరియు β లతో కూడిన కొన్ని ఫలితములను వ్రాయుటను గమనించుము.

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}]$ ఇక్కడ $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

ఉదాహరణ 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ సమీకరణము మూలములు α మరియు β లు అయిన క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$ $\alpha > \beta$ అయిన. (iv) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణము $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1)

సమీకరణము (1) ను $ax^2 + bx + c = 0$ గా పోల్చగా,

$a = 2, b = -3, c = -1$. సమీకరణము మూలములు α మరియు β గా ఇవ్వబడినది.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ మరియు $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{13}{4}\times(-2)=-\frac{13}{2}$

(iii) $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$ ఇక్కడ $\alpha>\beta$, $=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{4}+2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)=\frac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}$.

(vii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\frac{161}{16}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)=-\frac{161}{8}$.

ఉదాహరణ 3.51

$7+\sqrt{3}$ మరియు $7-\sqrt{3}$ మూలములుగా గల వర్గ సమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

సాధన ఇవ్వబడిన మూలములు $7+\sqrt{3}$ మరియు $7-\sqrt{3}$.

మూలముల మొత్తము $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3} = 14$.

మూలముల లబ్ధము $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3}) = (7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46$.

కావలసిన సమీకరణము, x^2-(మూలముల మొత్తము)$x+$ మూలముల లబ్ధము $=0$

కనుక, కావలసిన సమీకరణము $x^2-14x+46=0$

ఉదాహరణ 3.52

$3x^2-4x+1=0$ సమీకరణ మూలము α మరియు β అయిన $\frac{\alpha^2}{\beta}$ మరియు $\frac{\beta^2}{\alpha}$ మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన $3x^2-4x+1=0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β. అయినందున

$\alpha+\beta=\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

కావలసిన సమీకరణము యొక్క మూలముల మొత్తము $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

మరియు, మూలముల లబ్ధము $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{3}=0$ (లేక) $9x^2-28x+3=0$

అభ్యాసము 3.18

1. క్రింది సమీకరణముల మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధమును కనుగొనుము.

   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2. క్రింది మూలముల ద్వారా వర్గసమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}$

3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన, క్రింది వాటి విలువను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన $\alpha^2 + \beta^2$ విలువను కనుగొనుము.

5. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ సమీకరణం మూలములు α, β లు అయిన α^2 మరియు β^2 మూలములుగా గల సమీకరణమును కనుగొనుము.

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ యొక్క మూలములు α, β అయిన $-\alpha$ మరియు $-\beta$ మూలములుగా గల వర్గ సమీకరణమును ఏర్పరుచుము.

7. $x^2 - 3x - 1 = 0$ సమీకరణం మూలములు α మరియు β అయిన, $\frac{1}{\alpha^2}$ మరియు $\frac{1}{\beta^2}$ మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ సమీకరణం మూలములు α మరియు β అయిన, క్రింది మూలములుగా గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta, 2\beta + \alpha$

9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ యొక్క మూలముల వ్యుత్క్రమములుగా గల మూలముల సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము ఇంకొక మూలమునకు వర్గము అయిన k విలువను కనుగొనుము.

11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము ఇంకొక మూలమునకు రెండు రెట్లుగా నుండిన a విలువను కనుగొనుము.

12. $5x^2 - px + 1 = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β, $\alpha - \beta = 1$ అయిన p విలువను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 3.19

సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

1. $6x - 2y = 3$, $kx - y = 2$ అను వ్యవస్థ ఏకాంక సాధన కలిగియున్నట్లయిన,

   (A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2. రెండు చలరాశులలో గల రెండు ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థ విరుద్ధమైనది. అయిన వాటి రేఖా చిత్రములు

   (A) ఏకీభవించును (B) ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును

   (C) ఏ బిందువు వద్ద ఖండించుకొనదు (D) x-అక్షమును ఖండించును

3. $x - 4y = 8$, $3x - 12y = 24$ సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది,

   (A) అనంత సాధనలు కలిగియుండును (B) సాధనలు ఉండవు

   (C) ఏకైక సాధనలుండును (D) సాధనలు ఉండచ్చు (లేక) ఉండకపోవచ్చు

4. $p(x) = (k + 4)x^2 + 13x + 3k$ బహుపద సమాసము యొక్క ఒక శూన్యము మరొక శూన్యమునకు వ్యుత్క్రమము (reciprocal) అయిన k కు సమానము

   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p + 3)x + 5$ బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యముల మొత్తము శూన్యము అయిన, p విలువ

   (A) 3 (B) 4 (C) –3 (D) –4

6. $x^2 - 2x + 7$ ను $x+4$ చే భాగించునపుడు ఏర్పడు శేషము

   (A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ ను $x-1$ చే భాగించునపుడు ఏర్పడు భాగఫలము

   (A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ మరియు $x^4 - 1$ ల గ.సా.భా

   (A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ మరియు $x^4 - y^4$ ల గ.సా.భా

   (A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ మరియు $(x - a)^2$ ల క.సా.గు

    (A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

    (C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. $k \epsilon \mathbb{N}$ లో ఉండు a^k, a^{k+3}, a^{k+5} ల క.సా.గు

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6}$ అను అకరణీయ సమాసము యొక్క సూక్ష్మరూపము.

(A) $\frac{x-3}{x+3}$ (B) $\frac{x+3}{x-3}$ (C) $\frac{x+2}{x-3}$ (D) $\frac{x-3}{x+2}$

13. $\frac{a+b}{a-b}$ మరియు $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయిన వాటి లబ్ధము

(A) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ (B) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ (C) $\frac{a^2-ab-b^2}{a^2+ab+b^2}$ (D) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab-b^2}$

14. $\frac{x^2-25}{x+3}$ ను $\frac{x+5}{x^2-9}$ చే భాగించిన, భాగఫలము =

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\frac{a^3}{a-b}$ ను $\frac{b^3}{b-a}$ తో కూడినట్లయిన, ఏర్పడు కొత్త సమాసము

(A) a^2+ab+b^2 (B) a^2-ab+b^2 (C) a^3+b^3 (D) a^3-b^3

16. $49\,(x^2-2xy+y^2)^2$ యొక్క వర్గమూలము

(A) $7|x-y|$ (B) $7(x+y)(x-y)$ (C) $7(x+y)^2$ (D) $7(x-y)^2$

17. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ యొక్క వర్గ మూలము

(A) $|x+y-z|$ (B) $|x-y+z|$ (C) $|x+y+z|$ (D) $|x-y-z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$ యొక్క వర్గ మూలము

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2 4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ నకు సమాన మూలములున్నట్లయిన, c కు సమానమైనది

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $\frac{-b^2}{2a}$ (D) $\frac{-b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ నకు వాస్తవ మూలములు లేనట్లయిన

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>\frac{-8}{5}$ (C) $\frac{-8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21. 3 మూలమును కలిగిన వర్గసమీకరణము

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2 - ax + b = 0$ మరియు $x^2 + bx - a = 0$ సమీకరణముల ఉమ్మడి మూలము

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, యొక్క మూలములు α, β అయిన, అసత్యమైన వాక్యము

(A) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(C) $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{b}{c}$

24. $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన, $\frac{1}{\alpha}$ మరియు $\frac{1}{\beta}$ మూలములు కలిగిన సమీకరణము

(A) $ax^2 + bx + c = 0$ (B) $bx^2 + ax + c = 0$

(C) $cx^2 + bx + a = 0$ (D) $cx^2 + ax + b = 0$

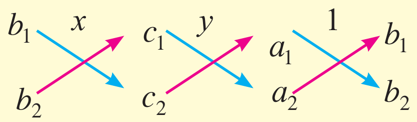
25. $b = a + c$ అయిన, $ax^2 + bx + c = 0$ అను సమీకరణమునకు

(A) వాస్తవ మూలములు కలవు (B) మూలములు లేవు

(C) సమాన మూలములు కలవు (D) వాస్తవ మూలములు లేవు

ముఖ్యాంశములు

- x మరియు y రెండు చలరాశులు కలిగియున్న ఏకఘాత సమీకరణముల పరిమిత సంఖ్య సమితిని, x మరియు y రెండు చలరాశులు గల ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థ అందురు. దీనినే సమఘాత సమీకరణములు అనియు అందురు.
- మొదటగా చలరాశులలో ఒక దానిని తొలగించి, సాధించు పద్ధతిని తొలగించు పద్ధతి అందురు.
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ను సాధించుటలో అడ్డుగుణకార పద్ధతినుపయోగించుటకు క్రింది బాణపు గుర్తుల పటము సహాయపడును.



- $p(k) = 0$ అయితే, k వాస్తవ సంఖ్య అనునది $p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము అనబడును.
- $p(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ సమాసముల శూన్యములు మరియు గుణకముల మధ్యగల ఆధారసంబంధములు

శూన్యముల మొత్తము $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$

శూన్యముల లబ్ధము $= \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$

- (i) $p(x)$ ఏవేని బహుపద సమాసమునకు, $p(a)=0$ అయిన $x=a$ ఒకశూన్యమగును, విపర్యము సరియే
  (ii) $p(a)=0$ అయిన, $p(x)$ కు $x-a$ ఒక కారణాంకమగును, విపర్యము సరియే
- రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాసములను నిశ్శేషంగా భాగించు ఉమ్మడి భాజకము యొక్క అతి పెద్ద ఘాతమును కలిగిన భాజకమునే గ.సా.భా అగును.
- రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాసములను నిశ్శేషంగా భాగించు ఉమ్మడి గుణిజము యొక్క అత్యంత చిన్న ఘాతము కలిగిన గుణిజమునే క.సా.గు అగును.
- ఏవేని రెండు బహుపద సమాసముల లబ్ధము, వాటి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధమునకు సమానము.
- $a \in \mathbb{R}$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కాని వాస్తవ సంఖ్య. a యొక్క వర్గమూలము b ఒక వాస్తవ సంఖ్య, అది $b^2=a$ అగును. a యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt[2]{a}$ లేక $\sqrt{a}$ గుర్తించెదరు.
- $ax^2+bx+c=0$ అను రూపములో నున్న x చలరాశి గల వర్గ సమీకరణము ఇక్కడ a,b,c వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$ గా ఉండవలయును.
- (i) కారణాంక పద్ధతి (ii) వర్గములను పూరించు పద్ధతి (iii) వర్గసూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా వర్గ సమీకరణములను సాధించవచ్చును.
- $ax^2+bx+c=0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలములు $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $b^2-4ac \geq 0$.
- $ax^2+bx+c=0$ వర్గ సమీకరణములో
  (i) $b^2-4ac>0$ అయిన, రెండు మూలములు విభిన్న వాస్తవములు
  (ii) $b^2-4ac=0$ అయిన, రెండు మూలములు సమానము.
  (iii) $b^2-4ac<0$ అయిన, మూలములు అవాస్తవములు.

నీకు తెలుసా?

ఫెర్మాట్ కడపటి సిద్ధాంతము (Fermat's Last Theorem):

$x^n+y^n=z^n$ అను సమూకరణమునకు , $n>2$ అయినపుడు పూర్ణాంకములలో సాధన లేదు. "నిజంగా ప్రసిద్ధిగాంచిన నిరూపణను నేను కనుగొంటిని. అయితే నిరూపణను పొందుపరచుటకు కావల సినంత అవధి లేదు" అని ఫెర్మాట్ వ్రాసెను. 1994 లో బ్రిటీష్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ఆండ్రుువైల్స్ (Andrew Wiles) దీనిని సాధించునంత వరకు 300 సంవత్సరములుగా ఎవరూ సాధించలేదు. ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థిగానున్నప్పుడు నగర గ్రంథాలయంనందు ఆండ్రూవైల్స్ ఈ సమస్యను తెలుసుకొనెను అనునది ఆసక్తికరమైన వార్త అగును.

4

మాత్రికలు

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred - *Sylvester*

- పరిచయం
- మాత్రికల అమరిక
- మాత్రికల రకములు
- మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము మరియు గుణకారము
- మాత్రికల సమీకరణములు

జేమ్స్ జోసఫ్ సిల్‌వెస్టర్
(1814-1897)
ఇంగ్లాండు

ఇతను గణిత శాస్త్రము నందు మాత్రిక సిద్ధాంతము, స్థిర సిద్ధాంతము సంఖ్యా సిద్ధాంతము మరియు సంయోగాలకు మూలమైన రచనలను చేసెను. ఇవ్వబడిన మాత్రికతో అన్ని మాత్రికలు ఇచ్చుపుచ్చుకొనునని తెలిపెను. ఇతను 'విచక్షణి' లాంటి గణిత పదముల ను పరిచయము చేసెను. విజ్ఞానశాస్త్ర సాధనలకు ఉన్నత బహుమానము అయినటువంటి కోప్లే పతకమును 1880లో రాయల్ సొసైటి ఆఫ్ లండన్ వారిచే సిల్వస్టర్‌కు బహూకరించిరి, 1901లో రాయల్ సొసైటి ఆఫ్ లండన్ వారు గణిత శాస్త్ర పరిశోధనలను ప్రోత్సహించుటకు ఇతని జ్ఞాపకార్థమున సిల్వస్టర్ పతకమును ఏర్పాటుచేసిరి.

4.1 పరిచయం

మాత్రికలు అను ముఖ్యమైన గణితశాస్త్ర ఉద్దేశ్యము గూర్చి ఈ అధ్యాయములో చర్చించబోవుచున్నాము. ఇందులో మాత్రికలు మరియు మాత్రికా బీజగణిత ఆధారములు గూర్చి పరిచయము చేయబడినది.

18వ మరియు 19వ శతాబ్దములలో మాత్రికలు అనుభావనను సూత్రీకరించి అభివృద్ధి చేయబడెను. ప్రారంభమున, గుణ (జ్యామితి) రూపము మరియు రేఖీయ సమీకరణముల సాధనలు రూపాంతరము చెందుట ద్వారా అభివృద్ధి చెందినది. ప్రస్తుతము గణిత శాస్త్రమునందు మాత్రికలు చాలా శక్తివంతమైన ఉపకరణములగానున్నది. అనేక సంఖ్యలు ఒక వరుసక్రమములో ఒకే దాని క్రింద తీసుకొని, యిమడ్చి గణించుట యందు మాత్రికలు ఉపయోగపడుచున్నది. అనేక ప్రయోగాత్మక సమస్యలు సులభముగా సాధించుట యందు ఈ గణిత సూక్ష్మము ఉపయోగకరముగానున్నది.

క్రీ॥శ 1850వ సంవత్సరములో జేమ్స్‌జోసఫ్ సిల్‌వెస్టర్ చే 'మాట్రిక్స్' (మాత్రిక) అను పదము పరిచయము చేయబడినది. మాట్రిక్స్ అను లాటిన్ పదమును ఆంగ్లములో అలాగే ఉంచిరి. సాధారణముగా ఇది ఏదో ఒక చోట కొంత రూపం దాల్చినది లేక ఏర్పడినది.

క్రింద ఇవ్వబడిన x మరియు y అను చలరాశుల ఏకఘాత సమీకరణముల వ్యవస్థను తీసుకొనెదము.

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \quad (2)$$

తొలగించు పద్ధతి (గాస్‌పద్ధతి)ద్వారా ఈ వ్యవస్థ యొక్క సాధన (2,1) అని ముందే తెలుసుకొనియున్నాము. ఇచ్చట చలరాశులను ఉపయోగించక వాటి గుణకములు మాత్రమే ఉపయోగించవలెను. మాత్రికా బీజగణితము ఉపయోగించుట ద్వారా సాధనలు సాధించవచ్చును.

4.2 మాత్రికల అమరిక (Formation of Matrices)

మాత్రికల అమరిక యందు కొన్ని ఉదాహరణలు చూచెదము.

కుమారు వద్ద 10 కలములు కలవు. దీనిని (10) గా తెలుపవచ్చును. ( ) లో గల సంఖ్య కుమార్ వద్ద గల కలముల సంఖ్య అని అర్థము.

కుమార్ వద్ద 10 కలములు మరియు 7 పెన్సిల్‌లు కలవని అనుకొనిన, దీనిని (7, 10) గా తెలపవచ్చును. (10, 7) లో గల మొదటి సంఖ్య కలముల సంఖ్యను, రెండవది పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలియజేయును అని అర్థము.

క్రింది విషయములను గమనింపుము

కుమార్ మరియు అతని స్నేహితులు రాజు, గోపి వద్ద గల కలములు మరియు పెన్సిళ్ళ వివరములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

కుమారు వద్ద	10	కలములు,	7 పెన్సిళ్లు
రాజు వద్ద	8	కలములు,	4 పెన్సిళ్లు
గోపి వద్ద	6	కలములు,	5 పెన్సిళ్లు

పట్టిక రూపములో క్రింది విధముగా అమర్చవచ్చును

	కలములు	పెన్సిళ్ళు
కుమారు	10	7
రాజు	8	4
గోపి	6	5

వీటిని దీర్ఘచతురస్ర అమరికలో తెలుపవచ్చును. ఇందులోని విలువలు తగిన అంశములను సూచించును.

(i) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ← మొదటి అడ్డువరుస, ← రెండవ అడ్డువరుస, ← మూడవ అడ్డువరుస

↑ మొదటి నిలువ వరుస ↑ రెండవ నిలువ వరుస

ఇదే సమాచారమును ఈ పట్టిక రూపములో కూడా అమర్చవచ్చును.

	కుమారు	రాజు	గోపి
కలములు	10	8	6
పెన్సిళ్ళు	7	4	5

దీనిని దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో తెలుపవచ్చును.

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{మొదటి అడ్డువరుస} \\ \leftarrow \text{రెండవ అడ్డువరుస} \end{matrix}$$

↑ మొదటి నిలువ వరుస ↑ రెండవ నిలువ వరుస ↑ మూడవ నిలువ వరుస

అమరిక (i) లో మొదటి నిలువ వరుసలోగల విలువలు క్రమముగా కుమార్, రాజు మరియు గోపి వద్దగల కలముల సంఖ్యను తెలుపును. రెండవ నిలువ వరుసలోగల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్ద గల పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలుపును.

అదే విధముగా అమరిక (ii) లో, మొదటి అడ్డువరుసలో గల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్దగల కలముల సంఖ్యను తెలుపును. రెండవ అడ్డువరుసలో గల విలువలు క్రమముగా కుమారు, రాజు మరియు గోపి వద్ద గల పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలుపును.

సంఖ్యలను ఈ విధముగా అమర్చుటను లేక తెలుపు విధానమును మాత్రిక (matrix) అందురు.

నిర్వచనం

సంఖ్యలను దీర్ఘ చతురస్రాకార అమరికలో అడ్డువరుసలు మరియు నిలువ వరుసలుగా కుండలీకరణములు లేక చతురస్ర బ్రాకెట్ల మధ్య వ్రాసిన అమరికను మాత్రిక (matrix) అందురు.

సాధారణముగా ఒక మాత్రికను $A, B, X, Y, \cdots$ అను ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరములతో సూచించుదురు. మాత్రికలలోని సంఖ్యలను విలువలు లేక మూలకములు అందురు. ఒక మాత్రికలోని క్షితిజ సమాంతరముగా నున్న అమరికను ఆ మాత్రిక అడ్డు వరుస అందురు. అదే విధముగా ఒక మాత్రికలోని క్షితిజ లంబముగా నున్న అమరికను ఆ మాత్రిక నిలువ వరుస అందురు.

మాత్రికలకు కొన్ని ఉదాహరణలు,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ మరియు } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.1 మాత్రిక సామాన్య రూపము (General Form of a Matrix))

m అడ్డు వరుసలు మరియు n నిలువ వరుసలు కలిగిన మాత్రిక A రూపము,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$. అనునవి మాత్రిక మూలకములు పై మాత్రికను $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ లేక $A = (a_{ij})_{m \times n}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇందు $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. మరియు $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. a_{ij} అను మూలకము A మాత్రిక యొక్క i వ అడ్డు వరుస మరియు j వ నిలువ వరుసల అంతరఖండము నందు కలదు.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ అయిన, $a_{23} = 1$, అను మూలకము రెండవ అడ్డువరుస మరియు మూడవ నిలువ వరుస యందు కలదు

అదే విధంగా , $a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 7$, $a_{32} = 8$ మరియు $a_{33} = 9$.

4.2.2 మాత్రిక తరగతి లేక పరిమాణం

m అడ్డువరుసలు n నిలువ వరుసలు కలిగియున్న మాత్రిక A యొక్క తరగతి లేక పరిమాణం $m \times n$ అని చెప్పవచ్చును. (m బై n అని చదువుము)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అను మాత్రిక యందు 2 అడ్డు వరుసలు మరియు 3 నిలువ వరుసలు కలవు. కావున, A యొక్క తరగతి 2×3.

గమనిక

$m \times n$ మాత్రికలో మొదటది m అడ్డు వరుసల సంఖ్యను మరియు రెండవది n నిలువ వరుసల సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

4.3 మాత్రికల రకములు (Types of matrices)

కొన్ని మాత్రికల రకములను గూర్చి నేర్చుకొనెదము.

(i) అడ్డు వరుస మాత్రిక (Row Matrix)

ఒకే ఒక అడ్డు వరుసను మాత్రము కలిగిన మాత్రికను అడ్డు వరుస మాత్రిక అందురు. అడ్డు వరుస మాత్రికను అడ్డు వరుస సదిశ అని కూడా అందురు. ఉదాహరణకు: $A = (5 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 1)$ మరియు $B = (-3 \ \ 0 \ \ 5)$ అనునవి క్రమముగా 1×4 మరియు 1×3 తరగతి గల అడ్డు వరుస మాత్రికలు. సాధారణముగా $A = (a_{ij})_{1 \times n}$ అను అడ్డు వరుస తరగతి $1 \times n$.

(ii) నిలువ వరుస మాత్రిక (Column Matrix)

ఒకే ఒక నిలువ వరుసను మాత్రము కలిగిన మాత్రికను నిలువ వరుస మాత్రిక అందురు. దీనిని నిలువ వరుస సదిశ అని కూడా అందురు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2×1 మరియు 3×1 తరగతి గల నిలువ వరుస మాత్రికలు. సాధారణముగా, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ అను నిలువ వరుస మాత్రిక తరగతి $m \times 1$.

(iii) చతురస్ర మాత్రిక (Square Matrix)

ఒక మాత్రికలో అడ్డు వరుసలు మరియు నిలువ వరుసలు సంఖ్య సమానమైన, ఆ మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అందురు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ అను చతురస్ర మాత్రిక తరగతి క్రమముగా 2 మరియు 3. సాధారణముగా $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ అనునది m తరగతి గల చతురస్రమాత్రిక. చతురస్రమాత్రిక A లోని మూలకములు $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ లను ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకములు అందురు.

(iv) వికర్ణ మాత్రిక (Diagonal Matrix)

ప్రధాన వికర్ణమునకు పైన మరియు క్రింద గల మూలకములు శూన్యమునకు సమానముగా ఉండు చతురస్రమాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అందురు. ఉదాహరణకు $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ మరియు $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతులుగా నుండు వికర్ణమాత్రికలు. సాధారణముగా $a_{ij}=0, i\neq j$ అయిన $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ ఒక వికర్ణమాత్రిక అని చెప్పవచ్చును.

గమనిక

వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో కొన్ని మూలకములు సున్నలుగా ఉండవచ్చును.

(v) అదిశా మాత్రిక (Scalar Matrix)

వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో అన్ని మూలకములు శూన్యేతరమైన స్థిరాంకములుగా సమానమైన, దానిని అదిశా మాత్రిక అందురు. ఉదాహరణకు,

$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ మరియు $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతిగా గల అదిశామాత్రికలు

సాధారణముగా, $a_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\ k, i=j\end{cases}$ అయిన $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ అనునది ఒక అదిశామాత్రిక అగును. k అనునది ఒక అదిశ రాశి

(vi) యూనిట్ మాత్రిక (Unit Matrix)

వికర్ణ మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములో గల అన్ని మూలకములు 1 గానున్న ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక అందురు. 'n' తరగతి కలిగిన యూనిట్ మాత్రికను I_n గా సూచించెదరు. ఉదాహరణకు,

$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ మరియు $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ అనునది క్రమముగా 2 మరియు 3 తరగతులుగా గల యూనిట్ మాత్రికలు. సాధారణముగా $a_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$ అయిన $A=(a_{ij})_{n\times n}$ అను చతురస్రమాత్రిక ఒక యూనిట్ మాత్రిక అగును.

గమనిక

గుణకారమునననుసరించి యూనిట్ మాత్రికను తత్సమ మాత్రిక అని అందురు. ప్రతి యూనిట్ మాత్రిక అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అని స్పష్టముగా చెప్పవచ్చును. కాని ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది యూనిట్ మాత్రికగా ఉండవలసిన అవసరములేదు. సంఖ్యలలో 1 అను సంఖ్య పాత్రను యూనిట్ మాత్రిక కలిగియుండును.

(vii) శూన్య మాత్రిక లేక సున్న మాత్రిక (Null Matrix or Zero Matrix)

ఒక మాత్రికలోని అన్ని మూలకములు శూన్యములయిన ఆ మాత్రికను శూన్యమాత్రిక లేక సున్న మాత్రిక అందురు. దీనిని 'O' తో సూచించెదరు. ఉదాహరణకు $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనునవి, క్రమముగా 2×3 మరియు 2×2 తరగతిగా గల శూన్య మాత్రికలు.

గమనిక

(i) ఒక శూన్యమాత్రిక, చతురస్రమాత్రికగా ఉండవలసిన అవసరము లేదు. **(ii)** సంఖ్యలలో సున్న అను సంఖ్య పాత్రను శూన్య మాత్రిక వహించును. **(iii)** ఒక మాత్రికకు అదే తరగతి గల శూన్య మాత్రికను కూడిన లేక తీసివేసిన ఆ మాత్రిక మారదు.

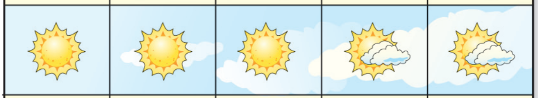
(viii) వ్యత్యయ మాత్రిక (Transpose Matrix)

నిర్వచనము: A మాత్రికలోని అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువవరుసలను పరస్పరమార్పిడి చేసిన ఏర్పడు మాత్రికను A కి వ్యత్యయ మాత్రిక అందురు. దీనిని A^T అని వ్రాయుదురు (A ట్రాన్స్‌పోస్ అని చదువుము).

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, అయిన $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ అగును సాధారణముగా $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ అయిన $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ అగును. ఇందు $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, ..., n$ మరియు $j = 1, 2, ..., m$ అగును.

ఉదాహరణ 4.1

ఐదురోజుల వాతావరణములో గరిష్ట (H) మరియు కనిష్ట (L) ఉష్ణోగ్రతలు ఫారెన్‌హీట్‌లలో పట్టికలో చూపబడినది. మొదటి మరియు రెండవ అడ్డువరుసలు క్రమముగా గరిష్ట మరియు కనిష్ట ఉష్ణోగ్రతలను తెలుపు మాత్రికను వ్రాయుము మరియు అత్యధికోష్ణముగల రోజు ఏదో తెలుపుము



సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర
H 88	H 90	H 86	H 84	H 85
L 54	L 56	L 53	L 52	L 52

సాధన పై సమాచారమును మాత్రిక రూపములో ఈ విధముగా తెలుపవచ్చును.

$$A = \begin{matrix} & \text{సోమ} & \text{మంగళ} & \text{బుధ} & \text{గురు} & \text{శుక్ర} \\ H & 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ L & 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{matrix}. \text{ అనగా, } A = \begin{bmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{bmatrix}$$

మొదటి అడ్డ వరుస నుండి అత్యధికోష్ణము గల రోజు మంగళ వారము.

ఉదాహరణ 4.2

ప్రతీ ఆహార వస్తువులోగల కొవ్వులు పిండి పదార్థములు మరియు మాంసకృత్తుల మొత్తము గ్రాములలో క్రమముగా క్రింద ఇవ్వబడినది.

	వస్తువు I	వస్తువు II	వస్తువు III	వస్తువు IV
క్రొవ్వులు	5	0	1	10
పిండి పదార్థములు	0	15	6	9
మాంసకృత్తులు	7	1	2	8

ఈ సమాచారమును ఉపయోగించి 3×4 మరియు 4×3 మాత్రికలు వ్రాయుము.

సాధన పై సమాచారమును 3×4 మాత్రిక రూపములో ఈ విధముగా తెలుపవచ్చును.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$ ఇక్కడ నిలువ వరుసలు ఆహారపు వస్తువులను తెలుపును.

4×3 మాత్రికను $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ గా వ్రాయవచ్చును

ఇక్కడ అడ్డు వరుసలు ఆహారపు వస్తువులను తెలుపును.

ఉదాహరణ 4.3

$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. అనుకొనిన

(i) మాత్రిక యొక్క తరగతి (ii) a_{13} మరియు a_{42} మూలకములను

(iii) మూలకము 2 యొక్క స్థానమును కనుగొనుము

సాధన (1) A లో 4 అడ్డు వరుసలు మరియు 3 నిలువ వరుసలు ఉండుటచే A యొక్క తరగతి 4×3.

(2) a_{13} మూలకము అనునది మొదటి అడ్డువరుస మరియు మూడవ నిలువ వరుసలో కలదు

$\therefore\ a_{13} = 8$.అదే విధముగా $a_{42} = -2$ ఈ మూలకము 4వ అడ్డువరుస మరియు 2వ నిలువ వరుసలోకలదు.

3) మూలకము 2 అనునది 2వ అడ్డువరుస మరియు 2వ నిలువ వరుసలో కలదు. $\therefore\ a_{22} = 2$.

ఉదాహరణ 4.4

$a_{ij} = |2i - 3j|$ గా మూలకములు ఉండునట్లు 2×3 మాత్రిక $A = [a_{ij}]$ ను నిర్మించుము.

సాధన సాధారణముగా 2×3 మాత్రిక క్రింది విధముగా ఉండును.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = |2i - 3j|$ ఇందు $i = 1, 2$ మరియు $j = 1, 2, 3$

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = 1$, $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$, $a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = |2(2) - 3(1)| = 1$, $a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2$, $a_{23} = |2(2) - 3(3)| = 5$

కావున కావలసిన మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

ఉదాహరణ 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ అయిన, A^T మరియు $(A^T)^T$ ను కనుగొనుము

సాధన $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ మాత్రిక యొక్క అడ్డువరుసలు మరియు నిలువవరుసలును పరస్పర మార్పిడి ద్వారా A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక A^T ను పొందగలము. కావున $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

అదే విధముగా, మాత్రిక A^T యొక్క అడ్డ వరుసలు మరియు నిలువ వరుసలు పర్వర మార్పిడి ద్వారా $(A^T)^T$ ను పొందగలము. కాబట్టి $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

గమనిక

పై ఉదాహరణ నుండి, $(A^T)^T = A$ అని చూచితిమి. ఏదైన మాత్రిక B కు $(B^T)^T = B$ అనునది సత్యమగును. $(kA)^T = kA^T$ మరియు k అనునది ఏదేని ఒక అదిశ రాశి

అభ్యాసము 4.1

1. వాటర్ థీమ్ పార్కులో ప్రవేశ టిక్కెట్ల ధరలు క్రింద ఇవ్వబడినది.

	సాధారణ రోజులకు (₹)	వారాంత రోజులకు (₹)
పెద్దలు	400	500
పిల్లులు	200	250
వృద్ధులు	300	400

పెద్దలు, పిల్లలు మరియు వయస్సు మళ్లిన పౌరుల ప్రవేశ టిక్కెట్ల ధరల మాత్రికలను వ్రాయుము మరియు ఆ మాత్రికల తరగతి కనుగొనుము.

2. ఒక నగరములో 6 మహోన్నత పాఠశాలలు, 8 ఉన్నత పాఠశాలలు మరియు 13 ప్రాథమిక పాఠశాలలు కలవు. ఈ వివరములను 3×1 మరియు 1×3 మాత్రికల రూపములో తెలుపుము

3. క్రిందివ్వబడిన మాత్రికల తరగతిని కనుగొనుము

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. ఒక మాత్రికలో 8 మూలకములు కలిగియున్న, ఎన్ని సాధ్యమైన తరగతులు అది కలిగియుండును?

5. ఒక మాత్రికలో 30 మూలకములున్న, సాధ్యమైన మాత్రికల తరగతులు కనుగొనుము.

6. $A = [a_{ij}]$ అను మాత్రికను క్రిందివ్వబడిన మూలకముల ద్వారా 2×2 మాత్రికను నిర్మింపుము.

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$

7. $A = [a_{ij}]$ అను మాత్రికకు క్రిందివ్వబడిన మూలకముల ద్వారా 3×2 మాత్రికను నిర్మింపుము.

(i) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \frac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ అయిన,

(i) ఈ మాత్రిక పరిమాణమును కనుగొనుము. (ii) a_{24} మరియు a_{32} లమూలకములను వ్రాయుము. (iii) 7 అను మూలకము ఏ అడ్డు మరియు నిలువ వరుసలలో కలదు.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, అయిన A యొక్క వ్యత్యయమును కనుగొనుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, అయిన $(A^T)^T = A$. అని సరిచూడుము.

4.4 మాత్రికల పరిక్రియలు (Operation on Matrices)

ఈ విభాగములో మాత్రికల సమానత్వము, అదిశచే మాత్రికను గుణించుట, మాత్రికల సంకలనము, వ్యవకలనము మరియు మాత్రికల గుణకారములను గూర్చి చర్చించెదము.

(i) మాత్రికల సమానత్వము (Equality of Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ అను రెండు మాత్రికలు సమానమనిన,

(i) అవి ఒకే పరిమాణమును కలిగియుండవలెను (ii) A లోని ప్రతిమూలకము B లోని అనురూప మూలకమునకు సమానముగా యుండవలెను, అనగా $a_{ij} = b_{ij}$ ప్రతి i మరియు j లకు.

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ మరియు $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ అను మాత్రికల తరగతులు వేర్వేరుగా ఉండుటచే ఈ మాత్రికలు సమానము కాదు. మరియు $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, ఇందు అనురూప మూలకములు సమానము కాదు.

ఉదాహరణ 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ అయిన x, y, z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన మాత్రికలు సమానమైనందున, వాటి అనురూప మూలకములు సమానమై యుండవలెను. అనురూపమూలకములను పోల్చిన. $x = 3$, $y = 9$, $z = 4$.అని పొందగలము.

ఉదాహరణ 4.7

సాధించుము : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2x \\ 31 + 4y \end{pmatrix}$

సాధన మాత్రికలు సమానమైనందున వాటి అనురూపమూలకములు సమానము. వీటి అనురూప మూలకముల ను పోల్చిన $y = 6 - 2x$ మరియు $3x = 31 + 4y$ అని పొందగలము.

$y = 6 - 2x$ ను మరొక సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన, $3x = 31 + 4(6 - 2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

$\therefore\quad x = 5$ కావున $\quad y = 6 - 2(5) = -4$.

$x = 5$ మరియు $y = -4$

(ii) అదిశచే మాత్రికను గుణించుట (Multiplication of a Matrix by a Scalar)

నిర్వచనం

ఇవ్వబడిన మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ మరియు అదిశరాశి (వాస్తవ సంఖ్య) k చే ఏర్పడు నూతన మాత్రిక $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ గా నిర్వచింపవచ్చు. ఇందు $b_{ij} = ka_{ij}$ ప్రతి i మరియు j లకు.

కావున అదిశ k చే A లోని ప్రతి మూలకమును గుణించిన B మాత్రికను పొంద వచ్చును దీనిని $B = kA$. అని వ్రాయవచ్చును. ఈ గుణకారమునే అదిశా గుణకారము అందురు.

ఉదాహరణకు : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ అయిన $kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ అయిన $3A$ ను కనుగొనుము

సాధన : A లోని ప్రతీ మూలకమును 3 చే గుణించగా $3A$ మాత్రిక వచ్చును.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) మాత్రికల సంకలనము (Addition of Matrices)

3 బాలురు మరియు 3 బాలికలు గణితము మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రము నందు పొందిన మార్కులు క్రమముగా A మరియు B మాత్రికల ద్వారా క్రింద ఇవ్వబడినది.

గణితము: $A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ బాలురు / బాలికలు

విజ్ఞాన శాస్త్రము: $B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ బాలురు / బాలికలు

ప్రతి విద్యార్థి పొందిన మార్కులు మొత్తము కనుగొనుటకు A మరియు B యొక్క అనురూప మూలకములను కూడెదము.

$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

ఈ చివరి మాత్రిక, గణితము మరియు విజ్ఞాన శాస్త్రము నందు మొదటి బాలుడు పొందిన మొత్తం మార్కులు 96 అని చూపుచున్నది. అదే విధముగా గణితము మరియు విజ్ఞానశాస్త్రము నందు చివరి బాలిక పొందిన మొత్తం మార్కులు 135 అని తెలుసుకొనవచ్చును.

కావున, ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికల మొత్తము అనునది ఆ రెండు మాత్రికల అనురూప మూలకములను కూడగా ఏర్పడునని గమనించితిమి.

నిర్వచనం

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ లు ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలు అయిన A మరియు B ల సంకలనము $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ మాత్రిక అగును. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall$ i మరియు j . మాత్రికలలో గల సంఖ్యలననుసరించి సంకల ప్రక్రియను నిర్వచింపబడునని గమనింపుము. A మరియు B అను రెండు మాత్రికల కూడికను $A+B$ చే గుర్తింతురు. వేర్వేరు తరగతులు గల మాత్రికల కూడికను నిర్వచింపలేము.

ఉదాహరణ 4.9

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ మరియు } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \ A+B \text{ లభించిన, దానిని కనుగొనుము.}$$

సాధన A తరగతి 2×3 మరియు B తరగతి 2×2 అయినందున A మరియు B మాత్రికల సంకలనము సాధ్యముకాదు.

ఉదాహరణ 4.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ మరియు } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ అయిన, } A+B \text{ కనుగొనుము}$$

సాధన A మరియు B లు ఒకే తరగతి 2×4 కలిగిన మాత్రికలు అయినందున A మరియు B ల సంకల నము నిర్వచించవచ్చును.

కావున $$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

కనుక $$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(iv) ఋణాత్మక మాత్రిక (Negative of a Matrix)

మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{mxn}$ యొక్క ఋణాత్మక మాత్రికను $-A$ గా సూచించెదరు. మరియు దీనిని $-A = (-1)A$. గా నిర్వచింపవచ్చు అనగా $-A = [b_{ij}]_{mxn}$. ఇందు $b_{ij} = -a_{ij}$ $\forall$ i మరియు j .

(v) మాత్రికల వ్యవకలనము (Subtraction of Matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలయిన $A - B$ ను $A - B = A + (-1)B$. గా నిర్వచింపవచ్చు, అనగా $A - B = [c_{ij}]$ ఇందు $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ $\forall$ i మరియు j

ఉదాహరణ 4.11

బరువులు తగ్గించు నిమిత్తమై ఆహార నియమావళి (diet) కార్యక్రమములో పాల్గొనడానికి ముందు నల ుగురు బాలురు మరియు నలుగురు బాలికల బరువులు కి॥గ్రా॥లలో మాత్రిక A నందు చూపబడినది. ఆహార నియమావళి కార్యక్రమము తరువాత వాటి అనురూప బరువుల మాత్రిక B నందు చూపబడినది.

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{బాలురు} \\ \text{బాలికలు} \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{బాలురు} \\ \text{బాలికలు} \end{matrix}$$

బాలురు మరియు బాలికల తగ్గిన బరువులను కనుగొనుము

సాధన తగ్గిన బరువుల మాత్రిక $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 మాత్రిక సంకలన ధర్మములు (Properties of matrix addition)

(i) మాత్రికల సంకలనం వినిమయము

ఒకే తరగతి కలిగిన ఏదేని రెండు మాత్రికలు A మరియు B అయిన, $A+B = B+A$ అగును.

(ii) మాత్రికల సంకలనం సాహచర్యం

ఒకే తరగతి కలిగిన ఏదేని మూడు మాత్రికలు A, B మారియు C అయిన

$A + (B + C) = (A + B) + C$ అగును.

(iii) మాత్రికల సంకలన తత్సమము

మాత్రికల సంకలనంలో శూన్య లేక సున్న మాత్రిక తత్సమమగును. మాత్రిక A యొక్క తరగతి $m \times n$ అయిన $A + O = O + A = A$ అగును, ఇందు 'O' అనునది $m \times n$ తరగతి గల శూన్య మాత్రిక అగును.

(iv) మాత్రికల సంకలన విలోమం

మాత్రిక A కు B అనునది సంకలన విలోమమైన, $B + A = A + B = O$ అగును.

$A + (-A) = (-A) + A = O$, అగుటచే $-A$ ని A యొక్క సంకలన విలోమం అందురు.

గమనిక

ఒక మాత్రిక యొక్క సంకలన విలోమం అనునది దాని ఋణాత్మక మాత్రిక అగును మరియు ఇది ఏకైకమగును.

అభ్యాసము 4.2

1. క్రింది మాత్రికా సమీకరణము నుండి x, y మరియు z విలువలు కనుగొనుము.

$$\begin{pmatrix} 5x + 2 & y - 4 \\ 0 & 4z + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ అయిన x మరియు y లను సాధించుము.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, అయిన A యొక్క సంకలన విలోమం కనుగొనుము.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ అనుకొనిన $C = 2A + B$ అయిన మాత్రిక C ను కనుగొనుము.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ అయిన, $6A - 3B$ కనుగొనుము.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ అయిన, a మరియు b లను కనుగొనుము.

7. $2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన, X మరియు Y కనుగొనుము.

8. $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ అయిన, x మరియు y లనుసాధించుము

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అయిన,

(i) $A+B=B+A$ (ii) $A+(-A)=O=(-A)+A$ యని సరిచూడుము.

10. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ మరియు $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన,

$A+(B+C)=(A+B)+C$ ని సరిచూడుము.

11. ఒక ఎలక్ట్రానిక్ కంపెనీవారు తమ మూడు దుకాణశాఖల యందు అమ్మిన ఒకొక్క ఎంటర్‌టైన్‌మెంట్ (వినోద) ఎలక్ట్రానిక్ వస్తువులను రికార్డు చేయుటద్వారా వారు సరఫరా చేసిన వాటిని సర్దుబాటు చేసుకోగలరు. రెండు వారములలో అమ్మిన వివరములు క్రింది పట్టిక ద్వారా చూపబడినది.

		టి.వి.	డి.వి.డి.	విడియోగేమ్స్	సి.డి. ప్లేయర్స్
వారము I	దుకాణము I	30	15	12	10
	దుకాణము II	40	20	15	15
	దుకాణము III	25	18	10	12
వారము II	దుకాణము I	25	12	8	6
	దుకాణము II	32	10	10	12
	దుకాణము III	22	15	8	10

మాత్రిక సంకలనము ఉపయోగించి రెండు వారములలో అమ్మిన వస్తువుల మొత్తమును కనుగొనుము

12. ఒక ఈత కొలనుకు ఒక రోజు ప్రవేశ రుసుము క్రింది విధముగా ఉన్నది.

దినసరి ప్రవేశ రుసుము ₹ లో		
సభ్యత్వమున్నవారు	పిల్లలు	పెద్దలు
2.00 p.m. ముందు	20	30
2.00 p.m. తరువాత	30	40
సభ్యత్వములేనివారు		
2.00 p.m. ముందు	25	35
2.00 p.m. తరువాత	40	50

సభ్యత్వము లేనివారు చెల్లించు అధికరుసుమును తెలుపు మాత్రికను వ్రాయుము

4.6. మాత్రికల గుణకారం (Multiplication of matrices)

సెల్వి 3 కలములు మరియు 2 పెన్సిళ్లు, మీనా 4 కలములు మరియు 5 పెన్సిళ్ళు కొనుటకు నిశ్చయించిరి. కలము మరియు పెన్సిల్ ధరలు క్రమముగా ₹ 10 మరియు ₹ 5 అయిన, ఒక్కొక్కరికి ఎంత ఖర్చగును?

$3 \times 10 + 2 \times 5 = 40$, కనుక సెల్వి కి ₹ 40 కావలెను.

$4 \times 10 + 5 \times 5 = 65$, కనుక మీనాకి ₹ 65 కావలెను.

మాత్రికల గుణకారం ఉపయోగించి దీనిని చేయగలము.

పై సమీకరణమును క్రింది విధముగా వ్రాయుము

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix}$

మరొక దుకాణములో కలము మరియు పెన్సిల్ ధరలు క్రమముగా ₹ 8 మరియు ₹ 4 అనుకొనిన, సెల్వి, మీనాలకు కావసిన డబ్బు క్రమముగా $3 \times 8 + 2 \times 4$ = ₹ 32 మరియు $4 \times 8 + 5 \times 4$= ₹ 52. పై సమాచారమును ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చును.

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \times 8 + 2 \times 4 \\ 4 \times 8 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}$

పై రెండు సంఘటనలలోగల సమాచారమును కలిసి మాత్రిక రూపములో క్రింది విధముగా చూపవచ్చును.

	కావలసినవి	ధర (₹ లలో)	కావలసిన పైకము (₹ లలో)
సెల్వి మీనా	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 & 3 \times 8 + 2 \times 4 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 & 4 \times 8 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix}$

పై ఉదాహరణము నుండి, మొదటి మాత్రికలోని నిలువ వరుసల సంఖ్య, రెండవ మాత్రికలోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము అయిన రెండు మాత్రికల గుణకారము సాధ్యమగునని గమనింపుము. మొదటి మాత్రిక అడ్డువరుస మరియు రెండవ మాత్రిక నిలువ వరుసలను తీసుకొని మూలకముల వారిగా గుణించి మరియు వాటి మొత్తముల ద్వారా లబ్ధమాత్రికను పొందవచ్చును.

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ అయిన, AB ల లబ్ధము క్రింది విధముగా వివరించబడినది.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

సోపానము 1: A యొక్క మొదటి అడ్డ వరుసలోని సంఖ్యలను B యొక్క మొదటి నిలువ వరుసలోని సంఖ్యలచే గుణించి వచ్చు లబ్ధముల కూడిక ఫలితమును AB యొక్క మొదటి అడ్డువరుస మరియు మొదటి నిలువ వరుస యందు ఉంచుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

సోపానము 2: సోపానము 1 లోని అదే పద్ధతిననుసరించి, A యొక్క మొదటి అడ్డు వరుసను మరియు B యొక్క రెండవ నిలువ వరుసనుపయోగించి ఫలితమును AB యొక్క మొదటి అడ్డువరుస మరియు రెండవ నిలువ వరుస యందు వ్రాయుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

సోపానము 3: A యొక్క రెండవ అడ్డు వరుస మరియు B యొక్క మొదటి నిలువ వరుసతో అదే పద్ధతిననుసరించుము. ఫలితమును AB యొక్క రెండవ అడ్డువరుస మరియు మొదటి నిలువవరుస యందు వ్రాయుము.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

సోపానము 4: A యొక్క రెండవ అడ్డు వరుస మరియు B యొక్క రెండవ నిలువ వరుసలోని సంఖ్యలను అదే విధముగా చేయుము.

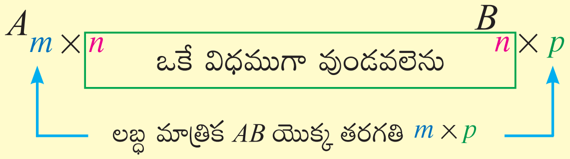
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

సోపానము 5: AB లబ్ద మాత్రిక పొందుటకు సూక్ష్మీకరింపుము.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

నిర్వచనం

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ అయిన లబ్ధమాత్రిక AB ను నిర్వచింపబడి మరియు దీని యొక్క తరగతి $m \times p$ అగును. దీనిని క్రింది పటము ద్వారా వివరించవచ్చును.



ఉదాహరణ 4.12

క్రింది మాత్రిక లబ్ధమును నిర్వచించగలమా, లేదా తెలుపుము. నిర్వచించినట్లయిన లబ్ధమాత్రిక పరిమాణమును కనుగొనుము. (i) $A_{2\times5}$ మరియు $B_{5\times4}$ (ii) $A_{1\times3}$ మరియు $B_{4\times3}$

సాధన

(i) A లోని నిలువవరుసలసంఖ్య మరియు B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము. కావున AB లబ్ధమును కనుగొనవచ్చును. లబ్ధమాత్రిక AB తరగతి 2×4 అగును.

(ii) A యొక్క తరగతి 1×3 మరియు B యొక్క తరగతి 4×3 ఇవ్వబడినది. ఇప్పుడు A లోని నిలువ వరుసల సంఖ్య మరియు B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము కాదు. కావున లబ్ధమాత్రిక AB ను కనుగొనలేము.

ఉదాహరణ 4.13

సాధించుము: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

సాధన $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ అని ఇవ్వబడినది.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

అనురూప మూలకములను సమానపరచిన,

$3x + 2y = 8$ మరియు $4x + 5y = 13$

$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$ మరియు $4x + 5y - 13 = 0$.

అడ్డుగుణకార పద్ధతిలో సమీకరణములు సాధించగా,

	x		y		1	
2		−8		3		2
5		−13		4		5

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}.$$

కావున, $x = 2, \quad y = 1$

ఉదాహరణ 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ మరియు $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ అని చూపుము.

సాధన $A^2 = A \times A$ గా తీసుకొనిన,

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

కావున, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$.

4.7 మాత్రికల గుణకార ధర్మాలు (Properties of matrix multiplication)

సంఖ్యల గుణకారము నందు గల కొన్ని ముఖ్యమైన ధర్మములు మాత్రికల గుణకారం నందు లేవు. అటువంటి ధర్మములు (i) $AB \neq BA$ (సాధారణముగా) (ii) $AB = 0$, A లేక B ఒక శూన్యమాత్రిక అని సూచించుట లేదు. (iii) $AB = AC$, A అనునది శూన్యేతర మాత్రిక అయిన $B = C$ అని సూచించుట లేదు.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ మరియు $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనుకొనిన,

(i) $AB \neq BA$ (ii) $AD = 0$ అయినను, A మరియు D లు శూన్య మాత్రికలు కావు మరియు

(iii) $AB = AC$, కాని $B \neq C$. కొన్ని ఉదాహరణముల ద్వారా మాత్రికల గుణకార ధర్మములను చూచెదము.

i) మాత్రికల గుణకారం వినిమయంకాదు (Matrix multiplication is not commutative)

A మరియు B రెండు మాత్రికలయిన AB మరియు BA పొందినప్పటికి, $AB = BA$ గా ఉండవలసిన అవసరం లేదు.

ఉదాహరణ 4.15

$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లు లభించునట్లైన వాటిని కనుగొనుము.

సాధన మాత్రిక A తరగతి 3×2 మరియు B తరగతి 2×3 కనుక AB మరియు BA రెండు లబ్ధములను నిర్వచింపవచ్చును.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 72-42 & -24+7 & 16+35 \\ -18+24 & 6-4 & -4-20 \\ 0+18 & 0-3 & 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -17 & 51 \\ 6 & 2 & -24 \\ 18 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

అదేవిధముగా,

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & -69 \\ 50 & -61 \end{pmatrix}.$$ ($AB \neq BA$ అని గమనింపుము)

సూచన

ఒకే తరగతి గల రెండు వికర్ణ మాత్రికల లబ్ధము వినిమయమగును. మరియు గుణకారములో ఒకే తరగతి గల ఏదేని చతురస్ర మాత్రికతో యునిట్ మాత్రిక వినిమయమగును.

(ii) మాత్రిక గుణకార సహచర్యం (Matrix multiplication is always associative)

A, B మరియు C, ఏదేని మూడు మాత్రికలలో $(AB)C = A(BC)$ అగును. (సమానమునకు ఇరువైపులవి లభించినపుడు)

(iii) సంకలనముపై మాత్రిక గుణకార విభాగ న్యాయం (Matrix multiplication is distributive over addition)

A, B మరియు C, ఏవేని మూడు మాత్రికలలో (i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$ అగును. (సమానమునకు ఇరువైపులవి లభించినపుడు)

ఉదాహరణ 4.16

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన, $A(B+C) = AB + AC$ అని సరిచూడుము.

సాధన

$$B + C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6+12 & 15+14 \\ 2+24 & -5+28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-10 & 3+6 \\ -1-20 & -1+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి, $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) గుణకార తత్సమాంశం (Existence of multiplicative identity)

సాధారణ బీజగణితము నందు సంఖ్య 1చే ఏదేని సంఖ్యను గుణించిన అదే సంఖ్య వచ్చునను ధర్మము కలదు. ఇప్పుడు ఈ సామాన్య భావనను మాత్రికల బీజగణితమునందు పరిచయము చేసెదము.

n తరగతి గల ఏదేని చతురస్రమాత్రిక A కు $AI = IA = A$ అయిన, I అనునది n తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక. కాబట్టి, గుణకారము నందు I ను తత్సమమమాత్రిక అని అందురు.

ఉదాహరణ 4.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, అయిన $AI = IA = A$ యని సరిచూడుము. ఇక్కడ I అనునది 2 తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక.

సాధన

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 9+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

మరియు $$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+9 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

కాబట్టి $AI = IA = A$.

(v) గుణకార విలోమము (Existence of multiplicative inverse)

n తరగతి గల చతురస్రమాత్రిక A అయిన, అదే n తరగతి కలిగిన చతురస్రమాత్రిక B ఉండి $AB = BA = I$ అయిన, B అనునది A యొక్క గుణకార విలోమం అగును. దానిని A^{-1} చే సూచింతురు. ఇచట I అనునది n తరగతి గల తత్సమమాత్రిక

సూచన

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ లాంటి కొన్ని చతురస్ర మాత్రికలకు గుణకార విలోమం కలిగియుండదు.

2) B అనునది A యొక్క గుణకార విలోమం అయిన, A అనునది B యొక్క గుణకార విలోమం అగును.

3) ఒక చతురస్రమాత్రికకు గుణకార విలోమం లభించిన, అది ఏకైకమగును.

ఉదాహరణ 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ మరియు $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ అనునది ఒక దానికొకటి గుణకార విలోమం అగునని నిరూపించుము.

సాధన

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

మరియు $$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ఇచ్చిన మాత్రికలు ఒకదానికొకటి గుణకార విలోమం అగును

(vi) వ్యత్యయమాత్రికల ప్రతిలోమం (Reversal law for transpose of matrices)

A మరియు B అను రెండు మాత్రికలు మరియు AB ని కనుగొనుటకు వీలైన, $(AB)^T = B^T A^T$ అగును.

ఉదాహరణ 4.19

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ మరియు $B = (1 \;\; 3 \;\; -6)$ అయిన, $(AB)^T = B^T A^T$ యని సరిచూడుము

సాధన

$$AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; 3 \;\; -6) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

కనుక, $$(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ఇప్పుడు, $$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \;\; 4 \;\; 5)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) మరియు (2) నుండి $(AB)^T = B^T A^T$ అగును.

అభ్యాసము 4.3

1. క్రింది మాత్రికల లబ్ధమును కనుగొనుటకు వీలైన, వాటి లబ్ధముల తరగతిని తెలుపుము.

 (i) AB, ఇందు $A=[a_{ij}]_{4x3}, B=[b_{ij}]_{3x2}$ (ii) PQ, ఇందు $P=[p_{ij}]_{4x3}, Q=[q_{ij}]_{4x3}$

 (iii) MN, ఇందు $M=[m_{ij}]_{3x1}, N=[n_{ij}]_{1x5}$ (iv) RS, ఇందు $R=[r_{ij}]_{2x2}, S=[s_{ij}]_{2x2}$

2. క్రింది మాత్రికల లబ్ధము లభించినట్లైన కనుగొనుము.

 (i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

 (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. పండ్లు అమ్మువాడు తన దుకాణముయందు పండ్లను అమ్మెను. ఆపిల్, మామిడి మరియు నారింజ పండ్ల ధరలు క్రమముగా ₹ 20, ₹ 10 మరియు ₹ 5 గా ఉన్నవి . మూడు రోజుల అమ్మకాలు క్రింది ఇవ్వబడినది.

రోజులు	ఆపిల్	మామిడి	నారింజ
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

 ప్రతిరోజు లభించు మొత్తము నగదు మరియు మూడు పండ్లను కలిపి అమ్మిన వచ్చు మొత్తము నగదును తెలుపు మాత్రికల రూపమును వ్రాయుము.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ మరియు $AX = C$ అయిన, x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన, $A^2 - 4A + 5I_2 = O$. అని చూపుము.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుగొనుము. అవి సమానమా?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన, $(AB)C = A(BC)$ యని సరిచూడుము.

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $(AB)^T = B^T A^T$ యని సరిచూడుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ అనునది మాత్రికా గుణకారములో ఒక దానికొకటి విలోమం అగునని నిరూపింపుము.

11. సాధించుము $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (0)$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ అయిన, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ అని నిరూపింపుము.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ అయిన, (A+B)C మరియు AC+BC లను కనుగొనుము. $(A+B)C = AC + BC$ అగునా?

అభ్యాసము 4.4

సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

1. క్రింది ప్రవచనములలో ఏది సత్యము కాదు?

   (A) ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును

   (B) ఒక విలోమ మాత్రిక అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును

   (C) ఒక అదిశా మాత్రిక అనునది ఒక వికర్ణమాత్రిక అగును

   (D) ఒక వికర్ణ మాత్రిక అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అగును

2. మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగుటకు

   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (సి) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ అయిన x మరియు y విలువలు క్రమముగా

   (A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

4. $A = (1 \quad -2 \quad 3)$ మరియు $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ అయిన $A + B$

   (A) $(0 \quad 0 \quad 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (C) (-14) (D) నిర్వచింపలేము

5. ఒక మాత్రిక యొక్క తరగతి 2×3 అయిన ఆ మాత్రికలోని మూలకముల సంఖ్య

(A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన x విలువ

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A తరగతి 3×4 మరియు B తరగతి 4×3 అయిన, BA తరగతి

(A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) చెప్పలేము

8. $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన A తరగతి

(A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. A మరియు B అను చతురస్రమాత్రికలలో $AB = I$ మరియు $BA = I$ అయిన B అనునది

(A) తత్సమమాత్రిక (B) శూన్యమాత్రిక

(C) A యొక్క మాత్రికా గుణకార విలోమం (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ అయిన, x మరియు y విలువలు క్రమముగా

(A) 2 , 0 (B) 0 , 2 (C) 0 , −2 (D) 1 , 1

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ మరియు $A + B = O$, అయిన B అనునది

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, అయిన A^2 అనునది

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. A తరగతి $m \times n$ మరియు B తరగతి $p \times q$ అయిన A మరియు B ల సంకలనము సాధ్యమగుటకు

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ అయిన, a విలువ

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 = I$ అగుటకు

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ మరియు $a_{ij} = i + j$, అయిన $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ అయిన, a, b, c మరియు d విలువలు క్రమముగా

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) $1, 0, 0, 1$ (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) $1, 0, 0, 0$

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ అయిన మాత్రిక $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ అయిన x విలువ

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. ఒకే తరగతి కలిగిన A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు చతురస్రమాత్రికలు అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సత్యమగును?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

ముఖ్యాంశములు

- సంఖ్యలను దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో అమర్చుటను మాత్రిక అందురు.
- m అడ్డ వరుసలు మరియు n నిలువ వరుసలు కలిగిన మాత్రిక యొక్క తరగతి $m \times n$ అగును.
- $m = 1$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక అడ్డువరుస మాత్రిక అగును.
- $n = 1$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక నిలువవరుస మాత్రిక అగును.
- $m = n$ అయిన $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ అనునది ఒక చతురస్రమాత్రిక అగును.
- $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది ఒక వికర్ణమాత్రిక అగును.
- $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన మరియు $i = j$ గా ఉండి $a_{ij} = k$, అయిన $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది ఒక అదిశా మాత్రిక అగును. (k అనునది శూన్యేతర స్థిరాంకము).

- $i = j$ గా ఉండి $a_{ij} = 1$ అయిన మరియు $i \neq j$ గా ఉండి $a_{ij}=0$ అయిన $A = [a_{ij}]$ అనునది ఒక తత్సమ మాత్రికగును.
- అన్నీ మూలకములు శూన్యములుగా గల మాత్రికను శూన్యమాత్రిక అందురు.
- ఒకే తరగతి గల A మరియు B మాత్రికల అనురూపమూలకములు సమానమైన A మరియు B మాత్రికలు సమాన మాత్రికలగును.
- ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికల సంకలనము లేక వ్యవకలనము చేయటకు వీలగును.
- మాత్రికల సంకలన వినిమయం

  ఒకే తరగతి గల A మరియు B మాత్రికల లో $A + B = B + A$ అగును.
- మాత్రికల సంకలనం సాహచర్యం

  ఒకే తనగతిగల A, B మరియు C మాత్రికలలో $(A + B) + C = A + (B + C)$, అగును
- A మాత్రిక తరగతి $m \times n$ మరియు B మాత్రిక తరగతి $n \times p$ అయిన AB మాత్రిక లబ్దమును నిర్వచింపబడును మరియు దీని తరగతి $m \times p$ అగును.
- సామాన్యముగా, మాత్రికల గుణకారం వినిమయం కాదు i.e., $AB \neq BA$.
- మాత్రికల గుణకారం సాహచర్యం అగును i.e., $(AB)C = A(BC)$, రెండువైపుల లభించినట్లైన.
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ మరియు $(AB)^T = B^T A^T$
- $AB = BA = I$ అయిన, A మరియు B లు ఒక దానికొకటి గుణకార విలోమం అగును.
- $AB = 0$ అయిన, $A = 0$ లేక $B = 0$ గా ఉండనవసరము లేదు.

మీకు తెలుసా?

ఒక మిలియన్ అమెరికా డాలర్ల విలువచేయు ఏబెల్ బహుమానము మొట్టమొదట 2003 సంవత్సరములో బహుకరించబడినది. ఇది ఒక అంతర్జాతీయ బహుమానము. నార్వే వైజ్ఞానిక సంస్థ ప్రతి సంవత్సరము నార్వే దేశపు రాజు మూలముగా ఒకరు లేక అంతకన్నా ప్రఖ్యాతిగాంచిన గణిత మేధావులకు ఇవ్వబడుచున్నది.

చెన్నై నగరములో జన్మించిన ఇండో-అమెరికా గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన S.R. శ్రీనివాస వరదన్‌కు 2007 సంవత్సరములో ఈ ఏబెల్ బహుమానము నొసిగిరి. ఇతనికి సంభావ్యత ప్రాథమిక సిద్ధాంతములోని గరిష్ఠ విచలనములను ఏకీకృతము చేసినందుకు ఈ బహుమానము ఇవ్వబడినది.

5

నిరూపక జ్యామితి

"No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically" - Leonardo de Vinci

- పరిచయం
- విభజన సూత్రం
- త్రిభుజము మరియు చతుర్భుజ వైశాల్యం
- సరళరేఖలు

పియరే డి ఫెర్మాట్
(1601-1665)
ఫ్రాన్స్

17వ శతాబ్దము ప్రథమార్థములో రేణిడే కార్ట్స్ మరియు ఫెర్మాట్ అను ఇద్దరు ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్తలలో ఒకరైన వారు ఫెర్మాట్, ఈయన వైశ్లేషిక రేఖాగణితం యొక్క మూల సిద్ధాంతములను కనుగొనెను ఇతను వక్రరేఖ నిరూపకముల గరిష్టము మరియు కనిష్టములను కనుగొను అసలైన పద్ధతుల ను కనుగొనెను. ఇతను నిరూపక జ్యామితికి గుర్తింపైన కృషిని చేసెను. డెస్కార్ట్స్ యొక్క ప్రఖ్యాత ప్రచురణ అయినటువంటి "లా జ్యామెట్రీ" కి ముందే ఫెర్మాట్ వైశ్లేషిక రేఖాగణితములోని కొత్త పరిశోధనా విషయముల వ్రాతప్రతిని 1636 లోనే పంపిణీ (ప్రచురణ) చేసెను.

5.1 పరిచయం

నిరూపక పద్ధతి మరియు బీజగణితముల విశ్లేషణ సిద్ధాంతముల ను ఉపయోగించి అధ్యయనంచేయు రేఖాగణితమునే నిరూపక జ్యామితి లేక వైశ్లేషిక రేఖాగణితం అందురు. ఇది బీజీయ ఫలితములను జ్యామితీయముగా సమన్వయపరచుటకు దోహదపడుచూ బీజగణితం మరియు రేఖాగణితం మధ్య ఒక వంతెన వలె సహాయపడును. ఫ్రెంచి తత్వవేత్త మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన రెనీ డెకార్టె బీజగణితమును ఉపయోగించి రేఖాగణితంను ఒక ప్రణాళిక బద్ధంగా తీసుకొనివచ్చెను. గణిత శాస్త్రములో నిరూపకముల ఉపయోగము డెకార్టె యొక్క కృషియే. ఇది రేఖాగణిత అధ్యయనమునకు విప్లవాత్మకమయ్యెను. 1637లో తన గ్రంథమయిన లా జ్యామెట్రీని ప్రచురించెను. ఆ గ్రంథంలో అతను జ్యామితీయ సమస్యను బీజీయ సమీకరణంగా మార్చి దానిని సూక్ష్మీకరించి ఆ తర్వాత ఆ సమీకరణంను జ్యామితీయంగా సాధించెను. ఆదే కాలములో మరొక ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త పియరీ డీ ఫెర్మాట్ ఈ నిరూపక జ్యామితిని సూత్రీకరించి గణితశాస్త్రంలో ఒక నూతన అధ్యయనమును ఆవిష్కరించారు. 1692 లో జర్మనీ గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన గాటెఫ్రైడ్ విల్‌హెల్మ్‌వాన్ లెబినిజ్, x నిరూపకము (abscissa) మరియు y నిరూపకము (ordinate) వంటి నూతన పదములను నిరూపకజ్యామితికి పరిచయం చేసెను.

నికోలస్ ముర్రే బట్లర్ ప్రకారం, "డెకార్ట్ వైశ్లేషిక రేఖాగణితం, న్యూటన్ మరియు లెబినిజ్‌ల కలనగణితము, గణిత శాస్త్ర పద్ధతులను ఆశ్చర్యాన్ని కలిగించే విధంగా వ్యాపింపచేసెను".

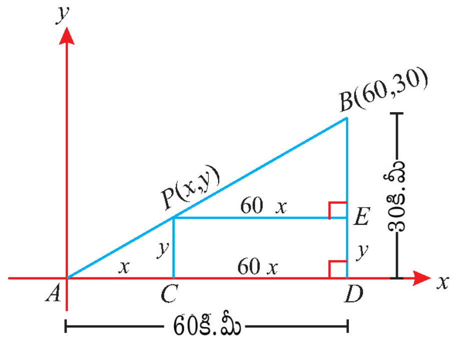
మనము 9వ తరగతిలో నిరూపకజ్యామితి యొక్క ప్రధాన అంశములైన నిరూపకాక్షాలు, సమతలం, సమతలంపై బిందువులను గుర్తించుట మరియు రెండు బిందువుల మధ్య దూరం వంటి విషయాలను అభ్యసించితిమి. ఈ పాఠ్యాంశములో విభజన సూత్రం, త్రిభుజవైశాల్యం, సరళరేఖ వాలు మరియు సమీకరణం గూర్చి అధ్యయనం చేయుదుము.

5.2 విభజన సూత్రం

ఈ క్రింది సమస్యను గమనించెదము.

A మరియు B అనునవి రెండు నగరములు. ఒకడు A నుండి 60కి.మీ. తూర్పు దిశగా ప్రయాణం చేసి ఆ తర్వాత 30 కి.మీ. ఉత్తర దిశగా ప్రయాణం చేసి B నగరంను చేరెను. ఒక టెలిఫోన్ సంస్థ A మరియు B కలుపు సరళరేఖను అంతరముగా 1:2 నిష్పత్తిలో విభజించు P వద్ద ప్రసార గోపురమును నిర్మించుటకు నిర్ణయించెను. ఇప్పుడు ప్రసార గోపురము నిర్మించు P స్థలమును తెలుసుకొనవలెను.

బిందువు A ను ఆదిబిందువుగా తీసుకొనుము $P(x,y)$ అనునది ఏదేని ఒక బిందువనుకొనుము P మరియు B నుండి x అక్షమును క్రమముగా C మరియు D ల వద్ద సంధించునట్లు లంబములను గీయుము. మరియు P నుండి BD కి లంబముగా E వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.



పటము 5.1

ΔPAC మరియు ΔBPE సరూపమగుటచే

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

ఇప్పుడు $\dfrac{AC}{PE} = \dfrac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 60 - x$$

$$x = 20.$$

మరియు $\dfrac{PC}{BE} = \dfrac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$$

$$2y = 30 - y \Longrightarrow y = 10.$$

$\therefore$ ప్రసార గోపురము యొక్క స్థానము $P(20,10)$. అగును

పై సమస్యను మాదిరిగా తీసుకొని, సామాన్య విభజనసూత్రంను ఉత్పాదించెదము.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ అనునవి రెండు వేర్వేరు బిందువులనుకొనుము. బిందువు $P(x, y)$ అనునది AB ని అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించిన

$$\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$ అగును.

పటము 5.2 నుండి $AF = CD = OD - OC = x - x_1$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

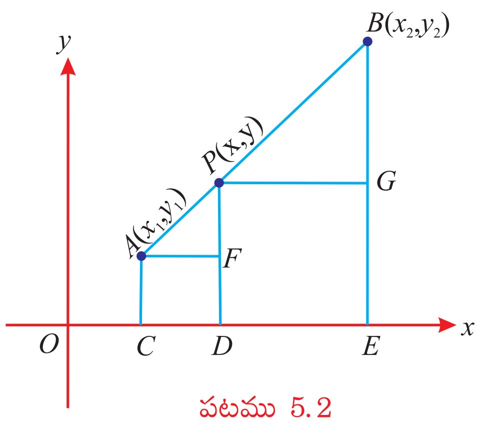
మరియు $PF = PD - FD = y - y_1$

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

ఇప్పుడు $\Delta\, AFP$ మరియు ΔPGB సరూపములు

(వివరణకు 6వ అధ్యాయములో 6.3 ను చూడుము)

$$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$



పటము 5.2

$\therefore \quad \frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ మరియు $\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$	$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$
$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$	$\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$
$lx + mx = lx_2 + mx_1$	$ly + my = ly_2 + my_1$
$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$	$\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$

> కనుక : $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును
> P అను బిందువు అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించిన
> $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ అగును.
> దీనినే విభజన సూత్రం అని అందురు.

ఇందుమూలముగా సంభందిత మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైనప్పుడే ఈ విభజన సూత్రనుపయోగించుటయని స్పష్టమగుచున్నది.

ఫలితములు

(i) $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును బాహ్యంగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు P నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$. ఈ సందర్భమున $\frac{l}{m}$ అనునది ఋణాత్మకము.

(ii) **AB మధ్యబిందువు**

AB మధ్య బిందువు M అయిన, AB ని M అనునది అంతరముగా 1:1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

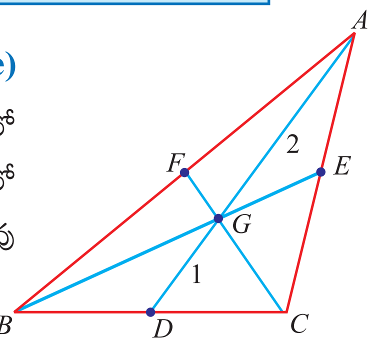
$l = 1$ మరియు $m = 1$ లను విభజన సూత్రములో ప్రతిక్షేపించిన

AB మధ్య బిందువు $M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$.

> $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క
> మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ అగును.

(iii) **త్రిభుజము యొక్క గురుత్వ కేంద్రము (Centroid of a triangle)**

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. శీర్షములుగా గల ΔABC లో AD, BE మరియు CF అనునవి మధ్యగతరేఖలు ఒక త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తము అగును. మరియు అనుషక్త బిందువు గురుత్వకేంద్రమగును.



పటము 5.3

ΔABC యొక్క గురుత్వ కేంద్రము $G(x, y)$ అనుకొనుము.

BC మధ్యబిందువు $= D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

త్రిభుజధర్మము నుండి గురుత్వకేంద్రము G అనునది మధ్యగత రేఖ AD ని అంతరముగా $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును.

విభజన సూత్రం ప్రకారము గురుత్వకేంద్రము

$$G(x\,,\,y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2 + x_3)}{2} + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2 + y_3)}{2} + 1(y_1)}{2+1}\right)$$

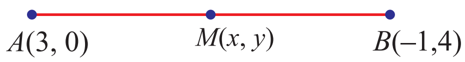
$$= G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

> (x_1, y_1), (x_2, y_2) మరియు (x_3, y_3) లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. అగును.

ఉదాహరణ 5.1

$(3, 0)$ మరియు $(-1, 4)$. బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనుము.

సాధన (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు $M(x\,,\,y) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$



పటము 5.4

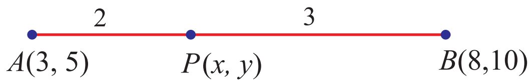
$\therefore$ $(3, 0)$ మరియు $(-1, 4)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు

$$M(x\,,\,y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2).$$

ఉదాహరణ 5.2

$(3,5)$ మరియు $(8,10)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా $2:3$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(3, 5)$, $B(8, 10)$ అనుకొనెదము, సరళరేఖ AB ని బిందువు P, $2:3$ నిష్పత్తిలో విభజించుచున్నదనుకొనెదము.



పటము 5.5

విభజనసూత్రం ప్రకారము $P(x\,,\,y) = P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$

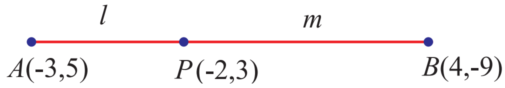
ఇక్కడ $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8, y_2 = 10$ మరియు $l = 2, m = 3$

$$\therefore \quad P(x\,,\,y) = P\left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3}, \frac{2(10)+3(5)}{2+3}\right) = P(5\,,\,7)$$

ఉదాహరణ 5.3

$A(-3, 5)$ మరియు $B(4, -9)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును $P(-2, 3)$ బిందువు అంతరముగా ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును.

సాధన $A(-3, 5)$, $B(4, -9)$ అనునవి ఇవ్వబడిన బిందువులు. $P(-2, 3)$, AB ని అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తి లో విభజించుచున్నదనుకొనెదము.



పటము 5.6

విభజన సూత్రము నుండి $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right) = P(-2, 3)$ (1)

ఇక్కడ $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9$.

$$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4) + m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9) + m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$$

$x-$ నిరూపకములను సమానపరచగా

$$\frac{4l - 3m}{l+m} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

i.e., $l : m = 1 : 6$

కావున P, AB ని అంతరముగా $1 : 6$ నిష్పత్తిలో విభజించును

గమనిక

(i) పై ఉదాహరణలో $y-$ నిరూపకములను సమానము చేసుకొని కూడ నిష్పత్తిని పొందవచ్చు.

(ii) మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయములైనప్పుడు $x-$ నిరూపకములనో y నిరూపకములనో సమానపరచగా పొందు నిష్పత్తి ఒకే విధముగా నుండును.

(iii) ఒక బిందువు రేఖాఖండమును అంతరముగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించిన $\frac{l}{m}$ ధనాత్మకమగును

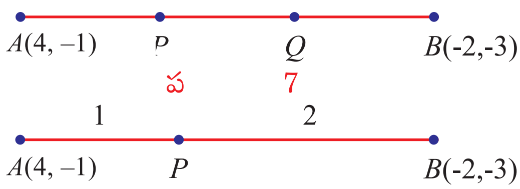
(iv) ఒక బిందువు రేఖాఖండమును బాహ్యంగా $l : m$, నిష్పత్తిలో విభజించిన $\frac{l}{m}$ ఋణాత్మకమగును.

ఉదాహరణ 5.4

$(4, -1)$, $(-2, -3)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును త్రిధాకరించు బిందువులను కనుగొనుము.

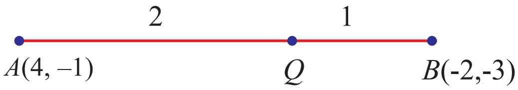
సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(4, -1)$ మరియు $B(-2, -3)$ అనుకొనెదము. $P(x, y)$ మరియు $Q(a, b)$ లు AB యొక్క త్రిధాకరణ బిందువులనుకొనుము.

దాని ప్రకారము $AP = PQ = QB$ అగును. కావున AB ని P బిందువు $1 : 2$ నిష్పత్తిలో మరియు Q బిందువు $2 : 1$ నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించుచున్నది.



పటము .8

$\therefore$ విభజన సూత్రమునుండి కావలసిన బిందువులు



పటము 5.9

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right), \quad Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right) \text{ మరియు } Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right) \qquad\qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right).$$

Q అనునది PB యొక్క మధ్య బిందువు మరియు P అనునది AQ యొక్క మధ్యబిందువని గమనింపుము.

ఉదాహరణ 5.5

$A(4, -6), B(3, -2)$, $C(5, 2)$ లను శీర్షములుగాగల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రంను కనుగొనుము.

సాధన (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము

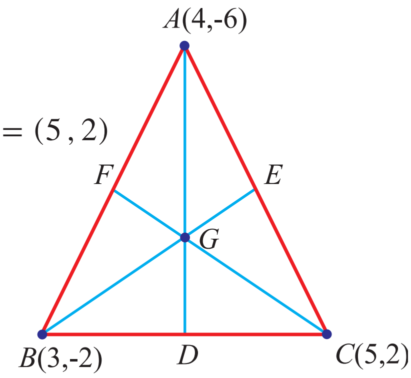
$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

ఇక్కడ $(x_1, y_1) = (4, -6)$, $(x_2, y_2) = (3, -2)$, $(x_3, y_3) = (5, 2)$

$\therefore$ $(4, -6), (3, -2)$ మరియు $(5, 2)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము

$$G(x, y) = G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4, -2).$$



పటము 5.10

ఉదాహరణ 5.6

సమాంతరచతుర్భుజ శీర్షములు (7, 3), (6, 1), (8, 2) మరియు (p, 4) లను ఒక క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన p విలువను కనుగొనుము.

సాధన సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షములను A (7, 3), B (6, 1), C (8, 2) మరియు D (p, 4) అనుకొనెదము.

సమాతరచతుర్భజ కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును.

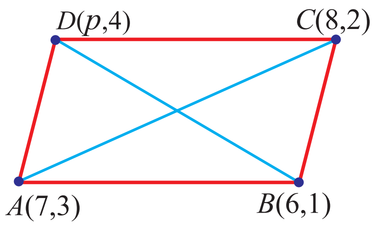
$\therefore$ కర్ణము AC, కర్ణము BD ల మధ్య బిందువులు ఏకీభవించును.

కావున $\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

x నిరూపకములను సమానపరచగా, $\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$

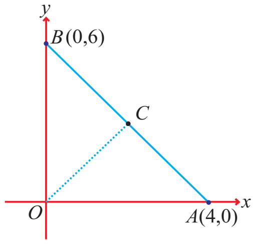
$$\therefore \; p = 9$$



పటము 5.11

ఉదాహరణ 5.7

$A(4\ ,\ 0)$ మరియు $B(0\ ,\ 6)$ లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు C మరియు O అనునది ఆదిబిందువు అయిన, C అనునది $\triangle OAB$ శీర్షములకు సమానదూరములో నుండునని చూపుము.



పటము 5.12

సాధన AB మధ్య బిందువు $C\left(\frac{4+0}{2},\frac{0+6}{2}\right) = C(2,3)$

$P(x_1,y_1)$ మరియు $Q(x_2,y_2)$ ల మధ్య దూరము $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ అని తెలియును.

$O(0,0)$ మరియు $C\ (2,3)$ ల మధ్య దూరము

$$OC = \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}.$$

$A(4,0)$ మరియు $C(2,3)$ ల మధ్య దూరము

$$AC = \sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B\ (0,6)$ మరియు $C(2,3)$ ల మధ్య దూరము

$$BC = \sqrt{(2-0)^2+(3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\therefore \quad OC = AC = BC$

$\therefore \quad$ బిందువు C అనునది $\triangle OAB$. శీర్షములకు సమానదూరములో ఉన్నది.

గమనిక కర్ణము మధ్య బిందువు C అనునది, లంబకోణ $\triangle OAB$ యొక్క పరివృత్తకేంద్రమగును.

అభ్యాసము 5.1

1. క్రింది బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువులను కనుగొనుము
   (i) $(1,-1)$ మరియు $(-5,3)$ (ii) $(0,0)$ మరియు $(0,4)$
2. క్రింది వాటిని శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రమును కనుగొనుము.
   (i) $(1, 3), (2, 7), (12, -16)$ (ii) $(3, -5), (-7, 4), (10, -2)$
3. ఒక వృత్త కేంద్రము $(-6, 4)$. వృత్త వ్యాసము యొక్క ఒక అంత్యబిందువు ఆదిబిందువు అయిన మరొక అంత్య బిందువును కనుగొనుము.
4. ఒక త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రము $(1, 3)$ మరియు రెండు శీర్షములు$(-7, 6)$, $(8, 5)$ అయిన మూడవ శీర్షమును కనుగొనుము.
5. విభజన సూత్రమునుపయోగించి, క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనిన $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$, $D(-2, 4)$ బిందువులు సమాంతరచతుర్భుజము యొక్క శీర్షములని చూపుము.
6. (3,4), (−6, 2) లను కలుపు రేఖాఖండమును బాహ్యముగా 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందు నిరూపకములను కనుగొనుము.
7. (−3, 5), (4, −9) లను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా 1:6 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందు నిరూపకములను కనుగొనుము.

8. $A(-6,-5)$, $B(-6, 4)$ అనునవి రెండు బిందువులు. AB పై బిందువు P అనునది $AP = \frac{2}{9} AB$ ని సంతృప్తి పరిచినట్లైన, బిందువు P ని కనుగొనుము.

9. $A(2,-2)$, $B(-7, 4)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును త్రిధాకరణచేయు బిందువులను కనుగొనుము.

10. $A(-4, 0)$, $B(0, 6)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును నాలుగు సమభాగములుగా విభజించు బిందువులను కనుగొనుము.

11. $(6,4), (1,-7)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును $x-$ అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించునో కనుగొనుము.

12. $(-5, 1)$, $(2, 3)$ బిందువులను కలుపు రేఖను $y-$ అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును? మరియు ఖండన బిందువును కనుగొనుము.

13. $(1, -1)$, $(0, 4)$, $(-5, 3)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క మధ్యగత రేఖల పొడవులను కనుగొనుము.

5.3 త్రిభుజ వైశాల్యం

క్రింది తరగతులలో త్రిభుజము యొక్క కొన్ని కొలతలు ఇచ్చినచో త్రిభుజ వైశాల్యం లెక్కించుటను నేర్చుకొంటిమి . ఇప్పుడు త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములు ఇచ్చినచో దాని వైశాల్యం కనుగొనగలమా?

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ లను ΔABC శీర్షములనుకొనెదము

AD, BE, CF అనురేఖలు x అక్షమునకు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.

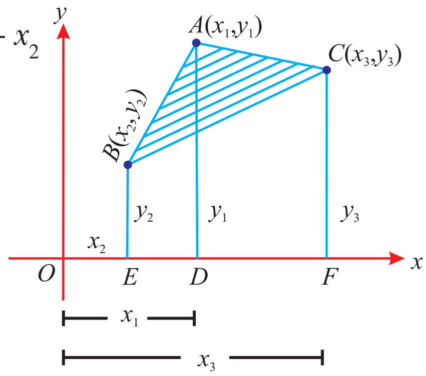
పటము నుండి $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$, $EF = x_3 - x_2$

త్రిభుజం ABC వైశాల్యం

= సమలంబచతుర్భుజం $ABED$ వైశాల్యం

+ సమలంబచతుర్భుజం $ADFC$ వైశాల్యం

− సమలంబచతుర్భుజం $BEFC$ వైశాల్యం



పటము 5.13

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ చ.ప్రమాణములు

> $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ అనునవి ΔABC శీర్షములైన,
>
> ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ చ.ప్రమాణములు.

గమనిక

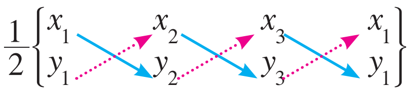
త్రిభుజవైశాల్యంను ఈ క్రింది విధముగాను వ్రాయవచ్చును

$$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\}$$ చ.ప్రమాణములు

(లేక) $$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$ చ.ప్రమాణములు

పై సూత్రమును చాలా సులభంగా వ్రాయుటకు ఈ క్రింది చిత్రరూపము మనకు సహాయపడును.

ΔABC శీర్షములు $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ లను అపసవ్య దిశలో తీసుకొని వాటిని నిలువ వరుస రీత్యా ఈ క్రింద చూపిన విధంగా వ్రాయవలెను.



చిక్కని బాణపు గుర్తులతో చూపబడిన కర్ణముల లబ్ధము x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1 లను కూడుము. మరియు చుక్కలతో చూపబడిన బాణపు గుర్తుల లబ్ధములు x_2y_1, x_3y_2, x_1y_3 లను కూడము. ఆ తర్వాత $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ సమాసమును పొందుటకు రెండవ దానిని మొదటిదాని నుంచి తీసివేయుము.

గమనిక

త్రిభుజవైశాల్యము కనుగొనుటకు ఈ క్రింది సోపానములు ఉపయోగపడును.

(i) బిందువులను చిత్తుపటముద్వారా గుర్తించుము.

(ii) శీర్షములను అపసవ్యదిశలో (counter clock-wise direction) తీసుకొనవలెను. లేనిచో సూత్రం ఋణాత్మక విలువను ఇచ్చును.

(iii) ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ సూత్రమును ఉపయోగించుము.

5.4 మూడు బిందువుల ఏకరేఖీయత (Collinearity of three points)

సమతలంలో మూడు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ బిందువులు ఏకరేఖీయమని చెప్పుటకు అవి ఒకే సరళరేఖపై నుండవలెను. మరొక విధంగా $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ అను మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైన వాటిలో ఏదేని ఒక బిందవు మిగిలిన రెండు బిందువులను కలుపు సరళరేఖపై నుండవలెను.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ మరియు $C(x_3,y_3)$ మూడు బిందువులు ఏక రేఖీయమైన అవి త్రిభుజమును ఏర్పరచదు. కావున ΔABC వైశాల్యం సున్న అగును.

$$i.e., \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

దీని విపర్యమును సరియేయని మనము నిరూపించవచ్చును.

కావున ΔABC వైశాల్యం సున్న అయినచో A, B, C బిందువులు ఏకరేఖీయమగును.

5.5 చతుర్భుజ వైశాల్యం (Area of the Quadrilateral)

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ మరియు $D(x_4,y_4)$ అనునవి చతుర్భుజం $ABCD$ శీర్షములు అనుకొనెదము.

చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం = ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం

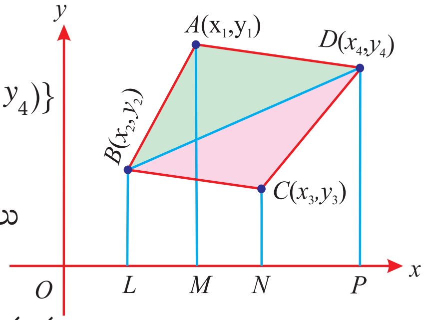
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$
$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

$\therefore$ చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

లేక

$$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$$ చ.ప్రమాణములు



పటము 5.14

పై సూత్రమును ఈ క్రింది చిత్ర రూపము ద్వారా చాలా సులభంగా వ్రాయవచ్చును.

శీర్షములు $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ మరియు $D(x_4,y_4)$ లను అపసవ్యదిశలో తీసుకొని క్రింద చూపిన విధంగా నిలువ వరుస రీత్యా వ్రాసి త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటలో పాటించిన నైపుణ్యమునే అనుసరించవలెను.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Bmatrix}.$$

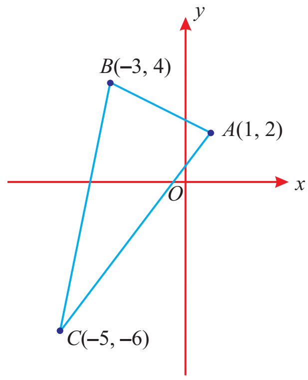
ఇది మనకు కావలసిన సమాసము

ఈ విధంగా, $ABCD$ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$ పొందుటకు సహాయపడును.

ఉదాహరణ 5.8

$(1,\ 2), (-3,\ 4), (-5, -6)$. బిందువులను శీర్షములుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటము 5.15

సాధన బిందువులను చిత్తు పటములో గుర్తించి వాటిని ఒక క్రమములో తీసుకొనుము.

శీర్షములను $A(1\ ,2)$, $B(-3\ ,4)$ మరియు $C(-5, -6)$ అనుకొనెదము.

ΔABC వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22.$$ చ. ప్రమాణములు.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$$ ను ఉపయోగించి

ఉదాహరణ 5.9

$A(6,7)$, $B(-4,1)$ మరియు $C(a,-9)$ శీర్షములుగా గల ΔABC వైశాల్యము 68 చ.ప్రమాణములు అయినచో 'a' విలువను కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\{(6+36+7a)-(-28+a-54)\}=68,$$

$$\Longrightarrow (42+7a)-(a-82)=136$$

$$\Longrightarrow 6a=12 \qquad \therefore \quad a=2$$

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$$ ను ఉపయోగించి

ఉదాహరణ 5.10

$A(2,3)$, $B(4,0)$, $C(6,-3)$ బిందువులు ఏకరేఖీయమని చూపుము.

సాధన $\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$=\frac{1}{2}\{(0-12+18)-(12+0-6)\},$$

$$=\frac{1}{2}\{6-6\}=0.$$

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$$ ను ఉపయోగించి

$\therefore$ ఇవ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయమగును.

ఉదాహరణ 5.11

బిందువులు $(a,0)$ మరియు $(0,b)$ లను కలుపు రేఖాఖండంపై $P(x,y)$ ఏదేని ఒక బిందువైన $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, అని నిరూపించుము. (ఇచ్చట $a, b \neq 0$).

సాధన బిందువులు (x,y), $(a,0)$ మరియు $(0,b)$,లు ఏకరేఖీయమగును.

$\therefore$ వీటిచే ఏర్పడిన త్రిభుజవైశాల్యం సున్న అగును.

$$\Longrightarrow \quad ab-bx-ay=0$$

$$\therefore \quad bx+ay=ab$$

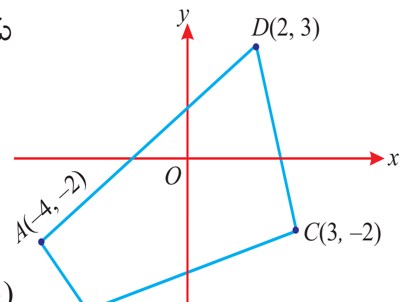
$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$$ ను ఉపయోగించి

ఇరువైపుల ab చే భాగించగా

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, ని పొందగలము. ఇచ్చట $a, b \neq 0$

ఉదాహరణ 5.12

$(-4,-2)$, $(-3,-5)$, $(3,-2)$, $(2,3)$ బిందువులచే ఏర్పడు చతుర్భుజవైశాల్యం కనుగొనుము.



పటము 5.16

సాధన బిందువులను చిత్తుపటములో గుర్తించి శీర్షములను అపసవ్యదిశలో తీసుకొనుము.

శీర్షములను $A(-4,-2)$, $B(-3,-5)$, $C(3,-2)$, $D(2,3)$ అనుకొనెదము.

చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(20 + 6 + 9 - 4) - (6 - 15 - 4 - 12)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{31 + 25\} = 28 \text{ చ.ప్రమాణములు} \qquad \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$$

అభ్యాసము 5.2

1. క్రింది బిందువులను శీర్షములుగా గల త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుము.

   (i) (0, 0), (3, 0), (0, 2) (ii) (5, 2), (3, −5), (−5, −1)

   (iii) (−4, −5), (4, 5), (−1, −6)

2. ఒక క్రమములో తీసుకొనబడిన త్రిభుజ శీర్షములు మరియు వాటి వైశాల్యములు క్రింద ఇవ్వబడినవి. ప్రతిదానిలో a విలువను కనుగొనుము.

శీర్షములు	వైశాల్యం (చ.ప్రమాణములలో)
(i) (0 , 0), (4, a), (6, 4)	17
(ii) (a, a), (4, 5), (6,−1)	9
(iii) (a, −3), (3, a), (−1,5)	12

3. క్రింది బిందువులు ఏకరేఖీయము అగునా, కాదాయని నిర్ణయించుము.

   (i) (4, 3), (1, 2), (−2, 1) (ii) (−2, −2), (−6, −2), (−2, 2)

   (iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$,(6, −2), (−3, 4)

4. క్రిందివ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయములగుటచే k విలువను కనుగొనుము.

   (i) (k, −1), (2, 1), (4, 5) (ii) (2, −5), (3, −4) మరియు (9, k)

   (iii) (k, k), (2, 3) మరియు (4, −1)

5. క్రింది వాటిని శీర్షములుగా గల చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.

   (i) (6, 9), (7, 4), (4, 2), (3, 7) (ii) (−3, 4), (−5, −6), (4, −1), (1, 2)

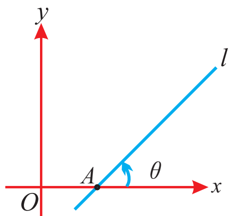
   (iii) (−4, 5), (0, 7), (5, −5), (−4, 2)

6. మూడు బిందువులు (h, 0), (a, −b) మరియు (0, k) ఒకే రేఖపై అమరియున్నచో త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రమునుపయోగించి $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1, (h, k \neq 0)$ అని చూపుము.

7. (0, −1), (2, 1), (0, 3) శీర్షములుగా గల త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుము. ఈ త్రిభుజవైశాల్యమునకు ఇవ్వబడిన త్రిభుజ వైశాల్యమునకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

5.6 సరళరేఖలు

5.6.1 క్షితిజముతో చేయు కోణము (Angle of Inclination)



పటము 5.17

సరళరేఖ l, x అక్షమును A వద్ద ఖండించుచున్నదనుకొనెదము. ధనాత్మక x అక్షమునకు మరియు సరళరేఖ l మధ్యకోణము అనునది x అక్షమునుండి అపసవ్యదిశలో కొలవబడినది. దీనినే సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయుకోణము అందురు.

గమనిక

సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన,

(i) $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

(ii) క్షితిజరేఖలకు $\theta = 0^0$ లేక 180^0 మరియు క్షితిజ లంబరేఖలకు, $\theta = 90^0$.

(iii) ఒకసరళరేఖ ప్రారంభమున x అక్షముపైనుండి, ఆతర్వాత x అక్షముపైగల ఒక స్థిరబిందువు A ని ఆధారముగా చేసుకొని అపసవ్యదిశలో భ్రమణము చెంది చివరగా x అక్షముతో ఏకీభవించిన ఆ సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయుకోణము ప్రారంభస్థితిలో 0^0 మరియు తుది స్థానములో 180^0 అగును.

(iv) అక్షమునకు లంబంగా ఉన్న రేఖలను నిలువు రేఖలు అందురు. అక్షమునకు లంబంగా లేని రేఖలను నిలువుగాలేని రేఖలు అందురు.

5.6.2 సరళరేఖ వాలు (Slope of a straight line)

నిర్వచనం

క్షితిజ లంబముకాని ఒక సరళరేఖ l, క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన, $\tan\theta$ ను సరళరేఖ యొక్క వాలు అని అందురు. దీనిని m తో సూచింతురు.

$$\therefore \text{ సరళరేఖ వాలు }, m = \tan\theta \qquad (0^\circ \le \theta \le 180^\circ,\ \theta \ne 90^\circ)$$

సూచన

(i) $x-$ అక్షము లేక $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖ వాలు సున్న.

(ii) $y-$ అక్షము లేక $y-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖ వాలు ను నిర్వచింపలేము. ఎందుకనగా $\tan 90^0$ అనిర్వచితము. సరళరేఖ యొక్క వాలు అనగా అది ఒక క్షితిజ లంబముకాని సరళరేఖయని అర్థము.

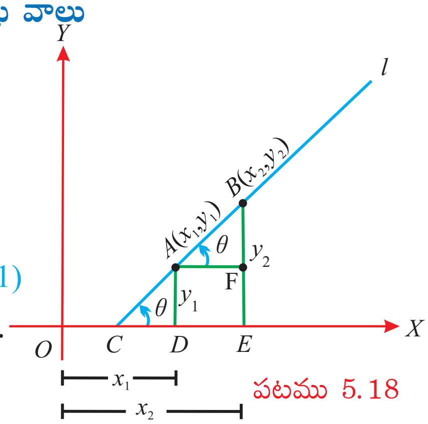
(iii) θ లఘుకోణమైన వాలు ధనాత్మకముగాను, θ గురుకోణమైన వాలు ఋణాత్మకముగాను ఉండును.

5.6.3 సరళరేఖపై గల ఏదేని రెండు బిందువులు ఇవ్వబడిన ఆ రేఖ వాలు

క్షితిజముతో θ కోణము చేయు సరళరేఖ l పై $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనునవి ఏవేని రెండు బిందువులనుకొనెదము. ఇచ్చట $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$. సరళరేఖ AB, $x-$అక్షమును C వద్ద ఖండించుననుకొనుము.

సరళరేఖ l యొక్క వాలు $m = \tan\ \theta$ (1)

$x-$అక్షమునకు లంబముగా AD మరియు BE లు గీయుము. A నుండి BE కి లంబముగా AF రేఖను గీయుము.



పటము 5.18

పటమునుండి $AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$

$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$

అదే విధంగా $\angle DCA = \angle FAB = \theta$

లంబకోణం ΔABF నుండి

$$\tan\theta = \frac{BF}{AF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2 \text{ అగునపుడు} \qquad (2)$$

(1) మరియు (2), లనుండి వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

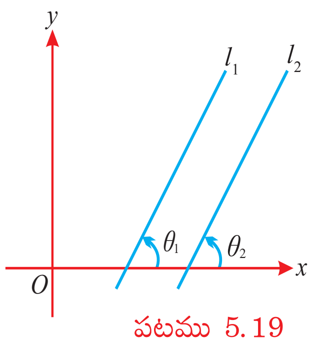
> (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు సరళరేఖ వాలు
>
> $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ఇక్కడ $x_1 \neq x_2$ ఎందుకనగా $\theta \neq 90°$.

గమనిక

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు సరళరేఖ వాలును ఈ క్రింది విధంగాను తెలపవచ్చును.

వాలు $m = \dfrac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \dfrac{y \text{ నిరూపకములలోని మార్పు}}{x \text{ నిరూపకములలోని మార్పు}}$

5.6.4 వాలుల రీత్యా సమాంతర రేఖలుగా నుండుటకు గల నిబంధన



పటము 5.19

సమాంతర రేఖలు l_1 మరియు l_2 లు క్షితిజముతో చేయుకోణములు క్రమముగా θ_1 మరియు θ_2, వాలులు క్రమముగా m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము.

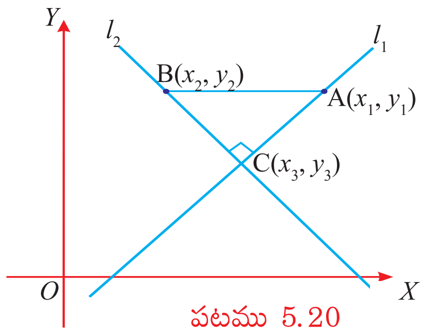
l_1, మరియు l_2 లు సమాంతరముగా నుండుటచే క్షితిజముతో చేయు కోణములు θ_1 మరియు θ_2 లు సమానము.

$$\therefore\ \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$$

$\therefore$ క్షితిజ లంబముకాని రెండు రేఖలు సమాంతరమైన వాటి వాలులు సమానము. దీని విపర్యము సరియే అగును. అనగా రెండు రేఖల వాలులు సమానమైన, ఆ రేఖలు సమాంతరముగా నుండును.

5.6.5 వాలుల రీత్యా లంబరేఖలుగా నుండుటకు గల నిబంధన

l_1 మరియు l_2 అను రెండు లంబ సరళరేఖలు క్రమముగా $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువుల ద్వారా పోవుచున్నదనుకొనుము.



పటము 5.20

వాటి వాలులు m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము

వాటి ఖండన బిందువు $C(x_3, y_3)$ అనుకొనుము

సరళరేఖ l_1 యొక్క వాలు $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

సరళరేఖ l_2 యొక్క వాలు $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

లంబకోణ $\triangle ABC$ నుండి $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(x_3 - x_1\right)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1.$$

$$\Longrightarrow m_1 m_2 = -1 \text{ or } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

m_1 మరియు m_2 వాలులుగా గల రెండు క్షితిజ లంబము కాని సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండిన $m_1m_2 = -1$.

మరొక్క విధముగా $m_1m_2 = -1$ అయిన, ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండును.

గమనిక

సరళరేఖలైన x–అక్షము మరియు y–అక్షము ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండును. కాని, $m_1 m_2 = -1$ అను నిబంధన వర్తించదు. ఎందుకనగా x–అక్షము వాలు సున్న మరియు y–అక్షము వాలు అనిర్వచితము.

ఉదాహరణ 5.13

వాలు $\frac{1}{\sqrt{3}}$ గా నుండు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణమును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన రేఖ యొక్క వాలు

$$m = \tan\theta \qquad 0^0 \le \theta \le 180^0, \theta \ne 90^0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = 30^0$$

ఉదాహరణ 5.14

క్షితిజముతో చేయు కోణము 45^0 గా కలిగిన సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయిన

రేఖ యొక్క వాలు $m = \tan\theta$.

$m = \tan 45^0$ అని ఇవ్వబడినది. $\Longrightarrow m = 1$.

ఉదాహరణ 5.15

(3, −2) మరియు (−1, 4) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(3 , −2) మరియు (−1 , 4) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలు

$$m = \frac{4+2}{-1-3} = -\frac{3}{2}.$$

ఉదాహరణ 5.16

వాలు భావమునుపయోగించి బిందువులు $A(5, -2)$, $B(4, -1)$ మరియు $C(1, 2)$ ఏకరేఖీయ బిందువులని చూపుము.

సాధన (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులను కలుపు రేఖ వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$A(5, -2)$ మరియు $B(4, -1)$ బిందువులను కలుపు రేఖ AB వాలు $m_1 = \dfrac{-1+2}{4-5} = -1$

$B(4, -1)$ మరియు $C(1, 2)$ బిందువులను కలుపు రేఖ BC వాలు $m_2 = \dfrac{2+1}{1-4} = -1$

కనుక AB వాలు $= BC$ వాలు మరియు B ఉమ్మడి బిందువు

కావున బిందువు A, B మరియు C ఏకరేఖీయ బిందువులగును.

ఉదాహరణ 5.17

వాలు భావమునుపయోగించి, క్రమముగా తీసుకొనబడిన (−2,−1), (4, 0) (3, 3) మరియు (−3, 2) అను బిందువులు ఒక సమాంతరచతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

సాధన క్రమముగా తీసుకొనబడిన బిందువులు $A(-2, -1)$, $B(4, 0)$, $C(3, 3)$ మరియు $D(-3, 2)$ అనుకొనుము.

AB వాలు $= \dfrac{0+1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$

CD వాలు $= \dfrac{2-3}{-3-3} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AB వాలు $=$ CD వాలు

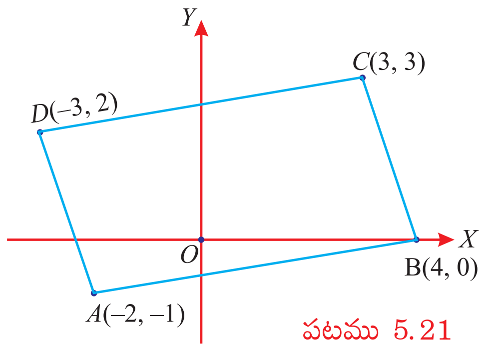
కావున AB కి CD సమాంతరముగానున్నది. (1)

BC వాలు $= \dfrac{3-0}{3-4} = -3$

AD వాలు $= \dfrac{2+1}{-3+2} = -3$

$\therefore$ BC వాలు $=$ AD వాలు

కావున BC కి AD సమాంతరముగానున్నది. (2)



పటము 5.21

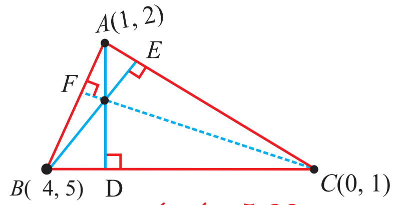
(1) మరియు (2) ల నుండి $ABCD$ యొక్క ఎదురెదురు భుజములు సమాంతరముగా నున్నది

$\therefore$ $ABCD$ ఒక సమాంతరచతుర్భుజమగును.

ఉదాహరణ 5.18

$\triangle ABC$ శీర్షములు $A(1\ ,\ 2)$, $B(-4\ ,\ 5)$ మరియు $C(0\ ,\ 1)$ అయిన, ఆ త్రిభుజ ఉన్నతుల వాలులను కనుగొనుము.

సాధన $\triangle ABC$ ఉన్నతులను AD, BE మరియు CF అనుకొనుము



పటము 5.22

$$BC \text{ వాలు } = \frac{1-5}{0+4} = -1$$

ఉన్నతి AD కి, BC లంబముగా నుండుటచే

$$AD \text{ వాలు } = 1 \qquad \because\ m_1 m_2 = -1$$

$$AC \text{ వాలు } = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

$$BE \text{ వాలు } = -1 \qquad \because\ BE \perp AC$$

అటులనే, AB వాలు $= \dfrac{5-2}{-4-1} = -\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\quad CF \text{ వాలు } = \frac{5}{3} \qquad \because\ CF \perp AB$$

అభ్యాసము 5.3

1. క్రింది వాలు గల సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయుకోణమును కనుగొనుము.

   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. క్రింది క్షితిజ కోణము గల సరళరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

   (i) 30^0 (ii) 60^0 (iii) 90^0

3. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

   (i) $(3\ ,\ -2)$ మరియు $(7\ ,\ 2)$ (ii) $(2\ ,\ -4)$ మరియు ఆదిబిందువు

   (iii) $(1+\sqrt{3}\ ,\ 2)$ మరియు $(3+\sqrt{3}\ ,\ 4)$

4. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణమును కనుగొనుము.

   (i) $(1\ ,2)$ మరియు $(2\ ,3)$ (ii) $(3\ ,\sqrt{3})$ మరియు $(0\ ,0)$

   (iii) $(a\ ,\ b)$ మరియు $(-a\ ,\ -b)$

5. (0, −4) మరియు (8,0) బిందువులను కలుపు రేఖాఖండ మధ్య బిందువు మరియు ఆది బిందువు ద్వారా పోవు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

6. చతురస్రము $ABCD$ యొక్క భుజము AB, $x-$అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది. అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

   (i) AB వాలు (ii) BC వాలు (iii) కర్ణము AC వాలు

7. సమబాహు $\triangle ABC$ యొక్క భుజము BC, $x-$అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది. అయిన AB వాలు మరియు BC వాలును కనుగొనుము.

8. వాలు భావమునుపయోగించి, క్రింది ఒక్కొక్క బిందువుల సమూహము ఏకరేఖీయమని చూపుము.

(i) $(2, 3), (3, -1), (4, -5)$ (ii) $(4, 1), (-2, -3), (-5, -5)$

(iii) $(4, 4), (-2, 6), (1, 5)$

9. బిందువులు $(a, 1), (1, 2)$ మరియు $(0, b+1)$ ఏకరేఖీయములైన, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ అనిచూపుము.

10. $A(-2, 3)$ మరియు $B(a, 5)$ బిందువులను కలుపు సరళరేఖ, $C(0, 5)$ మరియు $D(-2, 1)$. బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు సమాంతరముగా నుండిన a విలువను కనుగొనుము.

11. $A(0, 5)$ మరియు $B(4, 2)$ బిందువులనుకలుపు సరళరేఖ, $C(-1, -2)$ మరియు $D(5, b)$. బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు లంబంగానుండిన b విలువను కనుగొనుము.

12. $A(1, 8), B(-2, 4), C(8, -5)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు. AB మరియు AC ల మధ్య బిందువులు క్రమముగా M మరియు N అయిన, MN యొక్క వాలును కనుగొనుము. దానిద్వారా MN, BC కి సమాంతరముగా యున్నదియని చూపుము.

13. ఒక త్రిభుజము $(6, 7), (2, -9)$ మరియు$(-4, 1)$ లను శీర్షములుగా కలిగియున్నది. అయిన దాని మధ్యగతరేఖల వాలులను కనుగొనుము.

14. $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు $A(-5, 7), B(-4, -5)$ మరియు $C(4, 5)$ అయిన, దాని ఉన్నతుల వాలులను కనుగొనుము.

15. వాలు భావమును ఉపయోగించి క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన $(1, 2), (-2, 2), (-4, -3)$ మరియు $(-1, -3)$ శీర్షములు సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

16. క్రమపద్ధతిలో తీసుకొనబడిన $A(-2, -4)$, $B(5, -1)$, $C(6, 4)$ మరియు $D(-1, 1)$ లను శీర్షములుగా గల చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా యున్నదని చూపుము.

5.6.6 సరళ రేఖ సమీకరణము (Equation of a straight line)

సమతలంపై L అనునది ఒక సరళరేఖ అనుకొనుము. x, y చలరాశులతో గల ఏక ఘాత సమీకరణము $px+qy+r=0$, రేఖ L పై గల ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకము, y నిరూపకముచే తృప్తిపరచబడును. మరియు ఏదేని x మరియు y విలువలు ఈ సమీకరణమును తృప్తిపరచినచో అవి రేఖ L పై గల బిందు నిరూపకములగును. కావున ఈ సమీకరణమును సరళరేఖ L యొక్క సమీకరణము అందురు. మనమిప్పుడు ఈ రేఖ L ను బీజీయగణితములో వివరించెదము. అనగా L ను బీజీయ సమీకరణము ద్వారా వివరించెదము. ఇప్పుడు L అనునది క్రింది ఏదేని ఒక రూపములో నుండును.

1) క్షితిజ సమాంతర రేఖ 2) క్షితిజ లంబరేఖ 3) క్షితిజ సమాంతరముగానో, లంబముగానో లేని రేఖ

(i) క్షితిజ సమాంతర రేఖ :

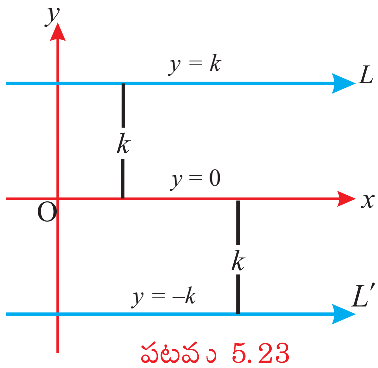
L అనునగి ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖ అనుకొనుము

L అనునది $x-$ అక్షము, లేక $x-$ అక్షము గాని క్షితిజ సమాంతర రేఖగానో ఉండవలెను.

సందర్భము (a) L అనునది $x-$ అక్షము అయిన, $y = 0$ మరియు x అనునది ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే, బిందువు (x, y) రేఖ L పై ఉండును.

కావున $y = 0$ అనునది x –అక్షమును తెలియజేయును.

$\therefore$ $x-$ అక్షము యొక్క సమీకరణము $y = 0$



పటవం 5.23

సందర్భము (b) L అనునది x–అక్షముగాని క్షితిజ సమాంతర రేఖ అయిన అనగా L అనునది $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండును.

బిందువు (x, y) అనునది L పై ఉండిన, y–నిరూపకము ఎల్లప్పుడు స్థిరముగా నుండి x–నిరూపకము ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్యగా నుండును.

$\therefore$ $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము $y = k$, (k అనునది ఒక స్థిరాంకము)

$k > 0$ అయిన L అనునది x–అక్షమునకు పైన, $k < 0$ అయిన L అనునది x–అక్షమునకు క్రింద ఉండును మరియు $k = 0$ అయిన L అనునది x–అక్షము అగును.

(ii) క్షితిజ లంబరేఖ (Vertical line)

L అనునది ఒక క్షితిజ లంబరేఖ అనుకొనుము.

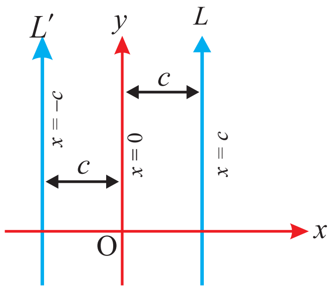
L అనునది y–అక్షము లేక y–అక్షము గాని క్షితిజ లంబంగా ఉండును.

సందర్భము (a) L అనునది y–అక్షము అయిన, $x = 0$ మరియు y అనునది ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యగా వున్నప్పుడు మాత్రమే, బిందువు (x, y), L పై వుండును.

కావున $x=0$ అనునది y అక్షమును తెలియజేయును.

$\therefore$ y – అక్షము యొక్క సమీకరణము $x = 0$.

సందర్భము (b) L అనునది y–అక్షము గాని క్షితిజ లంబంగా ఉండిన, అనగా L అనునది y–అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉండును. బిందువు (x, y), L రేఖపై వుండుటకు x–నిరూపకము ఎల్లప్పుడు సిర్థంగా వుండి y–నిరూపకం ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్యగా వుండును.



పటవం 5.24

$\therefore$ y – అక్షముకు సమాంతరంగా నుండే సరళరేఖ సమీకరణం $x = c$ (c అనునది ఒక స్దిరాంకం.)

$c > 0$ అయిన L అనునది y–అక్షమునకు కుడి వైపున వుండును, $c < 0$ అయిన L అనునది y–అక్షమునకు ఎడమవైపున వుండును, $c = 0$ అయిన L అనునది $y-$ అక్షము అగును.

(iii) క్షితిజ సమాంతరంగానో లంబంగానో లేకండుట (Neither vertical nor horizontal)

L అనునది క్షితిజ సమాంతరంగానో, లంబంగానో లేనిది అనుకొనుము. ఈ సందర్భంలో L యొక్క సమీకరణం ఏ విధంగా వివరించవచ్చు? θ అనునది క్షితిజముతో చేయు కోణమును సూచించుననుకొనుము. θ మరియు L పై బిందువు తెలిసినచో మనము L ను సులభంగా వివరించవచ్చును.

> క్షితిజలంబం కాని రేఖ L యొక్క వాలు mను క్రింది వాటిని ఉపయోగించి గణన చేయవచ్చును.
>
> (i) క్షితిజముతో చేయు కోణం θ తెలిసిన $m = \tan\theta$
>
> (ii) L పై $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. అను రెండు వేర్వేరు బిందువులు తెలిసిన $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
>
> (iii) L క్షితిజ సమాంతరం అయిన $m = 0$ అగును.

L అనునది లంబము కానిదిగా పరిగణించిన క్రింది రూపములో సరళరేఖ సమీకరణమును ఉత్పాదించుము.

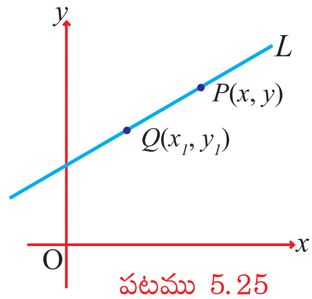
(ఎ) వాలు– బిందు రూపము (బి) రెండు బిందువులరూపము

(సి) వాలు–అంతరఖండ రూపము (డి) అంతరఖండ రూపము.

(a) వాలు– బిందు రూపము (Slope–Point form)

L యొక్క వాలు m మరియు $Q(x_1, y_1)$ అనునది L పై బిందువు అనుకొనుము.

L పై Q కాని మరొక స్వేచ్ఛా బిందువు $P(x, y)$అనుకొనుము.



పటము 5.25

ఇప్పుడు $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$

కావున వాలు m గా కలిగి (x_1, y_1) బిందువుద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$, ఇది L పైగల అన్ని (x_1, y_1) బిందువులకు వర్తించును. (1)

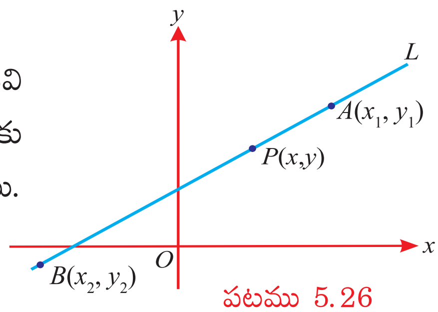
సూచన

(i) x, y చలరాశులతో గల ఏకఘాత సమీకరణం (1), రేఖ L పై గల ఏదేని బిందువు యొక్క x మరియు y నిరూపకములచే తృప్తిపరచబడును. ఏదేని x మరియు y విలువలు ఈ సమీకరణంను తృప్తి పరచినచో అవి రేఖ పైగల బిందు నిరూపకములగును. కావున సమీకరణం (1) ని సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం అందురు.

(ii) సమీకరణం (1) తెలియజేయడం ఏమనగా L పై గల బిందువుల, y నిరూపకములలోని మార్పు x నిరూపకము లలోని మార్పునకు అనులోమాను పాతంలో వుండును. ఈ అనుపాత స్థిరాకం m అనునది వాలు అగును.

(b) రెండు బిందువుల రూపము (Two–Points form)

క్షితిజ లంబముకాని రేఖ L పై (x_1, y_1), (x_2, y_2) అనునవి రెండు వేర్వేరు బిందువులు అయిన L యొక్క సమీకరణం కనుగొనుటకు మొదట L యొక్క వాలును కనుగొని ఆ తర్వాత (1) ని ఉపయోగించెదము.



పటము 5.26

L యొక్క వాలు

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ఇక్కడ L అనునది క్షితిజ లంబము కానిరేఖ అగుటచే $x_2 \neq x_1$.

(1) వ సమీకరణం నుండి

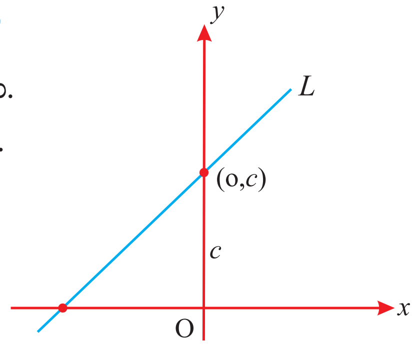
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$\Longrightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Longrightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, L పై గల అన్ని (x, y) బిందువులకు (2)

> **గమనిక**
>
> L, యొక్క సమీకరణం పొందుటకు (x_1, y_1) బదులు (x_2, y_2) ను ఉపయోగించవచ్చు.

(c) వాలు– అంతరఖండ రూపము (Slope–Intercept form)

రేఖ L యొక్క వాలు m మరియు అంతరఖండము c అనుకొనుము. y–అంతరఖండము c అయినందున, బిందువు $(0, c)$, L పై ఉండును.



పటము 5.27

$(x_1, y_1) = (0, c)$ ని (1) లో ఉపయోగించగా

$y \quad c = m(x \quad 0)$ని పొందవచ్చును

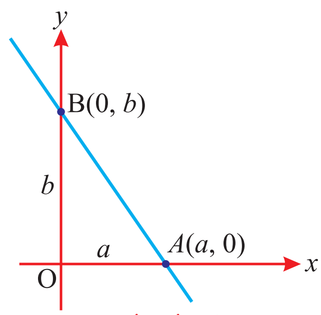
$\Longrightarrow y = mx + c$, L పై అన్ని (x, y) బిందువులకు (3)

కనుక వాలు అంతరఖండరూపములో $y = mx + c$ అనునది సరళరేఖ సమీకరణమగును.

(d) అంతరఖండ రూపము (Intercepts form)

సరళరేఖ L, x–అక్షము మరియు y– అక్షములతో చేయు శూన్యేతర అంతరఖండములు క్రమముగా a మరియు b అనుకొనుము.

$\therefore$ సరళరేఖ x-అక్షమును $A(a, 0)$ వద్ద, y-అక్షమును $B(0, b)$ వద్ద ఖండించును.



పటము 5.28

AB వాలు $m = -\dfrac{b}{a}$.

(1) నుండి $\quad y - 0 = -\dfrac{b}{a}(x - a)$

$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$

$bx + ay = ab$

ab చే భాగించగా $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\therefore$ $x-$ అంతరఖండము a, $y-$అంతరఖండము b గా గల సరళరేఖ సమీకరణము

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, L పై గల అన్ని $(x\,,y)$ బిందువులకు (4)

గమనిక

(i) వాలు m, $x-$అంతరఖండము d గా గల రేఖ L యొక్క సమీకరణము $y=m(x-d)$.

(ii) $y=mx$ అను సరళరేఖ ఆది బిందువు ద్వారా పోవును. ($m\neq 0$ కి, x మరియు y అంతరఖండములు రెండునూ సున్న అగును)

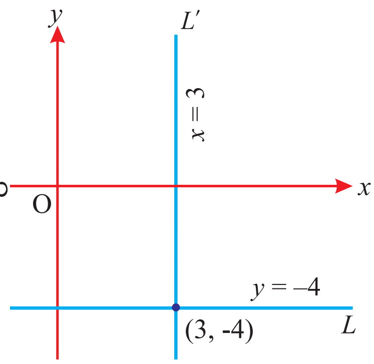
(iii) (3) వ సమీకరణంలో ఉన్నట్లు సమీకరణము (1), (2), (4) లను వాలు-అంతరఖండ రూపంలోకి సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

(iv) (1), (2), (3), (4) లలోని ప్రతి సమీకరణమును L పై గల అన్ని $(x\,,\,y)$ బిందువులకు $px+qy+r=0$ రూపంలో వ్రాయవచ్చును. దీనినే సరళరేఖ యొక్క సామాన్య సమీకరణ రూపము అందురు.

ఉదాహరణ 5.19

నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా, $(3,-4)$. బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన $(3,-4)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $x-$అక్షము మరియు $y-$అక్షములకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖలను క్రమముగా L మరియు L' అనుకొనుము.



పటము 5.29

రేఖ L పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క y- నిరూపకము -4 అగును.

కావున రేఖ L యొక్క సమీకరణము $y=-4$

అదేవిధంగా, రేఖ L^1 పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క $x-$ నిరూపకము 3 అగును.

కావున రేఖ L^1 యొక్క సమీకరణము $x=3$

ఉదాహరణ 5.20

క్షితిజముతో చేయు కోణము 45^0 మరియు $y-$అంతరఖండము $\frac{2}{5}$, గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ యొక్క వాలు $m=\tan\theta=\tan 45^0=1$

$y-$ అంతరఖండము $c=\frac{2}{5}$

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $y=mx+c$

$$y=x+\frac{2}{5} \implies y=\frac{5x+2}{5}$$

$\therefore$ సరళరేఖ సమీకరణం $5x-5y+2=0$

ఉదాహరణ 5.21

వాలు $\frac{1}{3}$. మరియు (-2 , 3) బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది వాలు $m = \frac{1}{3}$ మరియు బిందువు $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

వాలు-బిందు రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\implies \quad y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $x - 3y + 11 = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 5.22

(-1 , 1) మరియు (2 , -4) బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులను $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము.

ఇక్కడ $x_1 = -1, \; y_1 = 1$ మరియు $x_2 = 2, \; y_2 = -4$.

రెండు బిందువుల సూత్రంనుపయోగించి, సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$

$$\implies \quad 3y - 3 = -5x - 5$$

$5x + 3y + 2 = 0$ అనునది కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణము.

ఉదాహరణ 5.23

$\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు $A(2, 1), B(-2, 3), C(4, 5)$. శీర్షము A ద్వారా గీయబడు మధ్యగత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షమునుండి దానికెదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువునకు గీయబడు సరళరేఖను మధ్యగత రేఖ అని అందురు. BC యొక్క మధ్య బిందవును D అనుకొనుము.

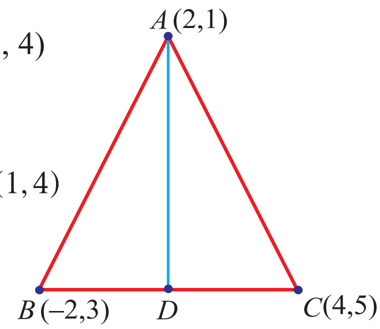
$\therefore$ BC యొక్క మధ్య బిందువు $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D\,(1, 4)$

మధ్య గత రేఖ AD యొక్క సమీకరణము

$$\frac{y - 1}{4 - 1} = \frac{x - 2}{1 - 2} \qquad \because (x_1, y_1) = (2, 1) \text{ మరియు } (x_2, y_2) = (1, 4)$$

$$\frac{y - 1}{3} = \frac{x - 2}{-1}$$

$\therefore$ $3x + y - 7 = 0$ అనునది కావలసిన సమీకరణము.



పటము 5.30

ఉదాహరణ 5.24

ఒక సరళరేఖ యొక్క x-అంతరఖండము మరియు y-అంతరఖండములు క్రమముగా $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ అయిన ఆ సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది, సరళరేఖ $x-$ అంతరఖండము $a = \frac{2}{3}$, $y-$ అంతరఖండము $b = \frac{3}{4}$.

అంతరఖండ రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

కావున, $9x + 8y - 6 = 0$ అనునది కావలసిన సమీకరణము.

ఉదాహరణ 5.25

$(6, -2)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల మొత్తము 5 గా గల సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన కావలసిన సరళరేఖల $x-$అంతరఖండము మరియు $y-$అంతరఖండములు క్రమముగా a మరియు b అనుకొనుము.

అంతరఖండముల మొత్తము $a + b = 5 \implies b = 5 - a$

అంతరఖండ రూపములో సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

కావున $\quad (5-a)x + ay = a(5-a) \qquad (1)$

(1) వ సమీకరణము $(6, -2)$ ద్వారా పోవుటచే

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\implies a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$(a-3)(a-10) = 0$$

$$\therefore \quad a = 3 \text{ or } a = 10$$

$a = 3$, అయిన (1) $\implies (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$\implies 2x + 3y = 6 \qquad (2)$

$a = 10$,అయిన (1) $\implies (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$\implies -5x + 10y = -50$

అవి $\quad x - 2y - 10 = 0. \qquad (3)$

కాబట్టి $2x + 3y = 6$ మరియు $x - 2y - 10 = 0$ అనునవి కావలసిన సరళరేఖల సమీకరణములు

అభ్యాసము 5.4

1. x–అక్షమునకు సమాంతరముగా, x–అక్షము నుండి 5 ప్రమాణముల దూరములో గల సరళరేఖ సమీకరణములను వ్రాయుము.

2. నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా, $(-5, -2)$ బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

3. క్రింది సమాచారము గల సరళరేఖల సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) వాలు -3, y–అంతరఖండము 4.

   (ii) క్షితిజముతో చేయు కోణము 60^0, y–అంతరఖండము 3

4. ఆది బిందవుకు పైన 3 ప్రమాణముల దూరములో y-అక్షమును ఖండించుచూ మరియు $\tan\theta = \frac{1}{2}$ గా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము. (θ అనునది క్షితిజముతో చేయు కోణము).

5. క్రింది వాటిని సమీకరణములుగా గల సరళరేఖల వాలు మరియు y–అంతరఖండమును కనుగొనుము.

   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. క్రింది సమాచారము గల సరళరేఖల సమీకరణము కనుగొనుము.

   (i) వాలు -4 మరియు $(1\ ,\ 2)$ బిందువు ద్వారా పోవును.

   (ii) వాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $(5, -4)$ బిందువు ద్వారా పోవును.

7. $(4,\ 2)$, $(3,\ 1)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు ద్వారా పోవుచూ మరియు క్షితిజముతో చేయు కోణము 30^0 గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

8. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) (-2, 5), (3, 6) (ii) (0, -6), (-8, 2)

9. $P(1, -3)$, $Q(-2, 5)$, $R(-3, 4)$ లను శీర్షములుగా గల $\triangle PQR$ లో శీర్షము R నుండి గీయబడు మధ్య గత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. సరళరేఖ సమీకరణ భావననుపయోగించి, క్రింది బిందువులు ఏకరేఖీయమని చూపుము.

    (i) (4, 2), (7, 5), (9, 7) (ii) $(1, 4), (3, -2), (-3, 16)$

11. క్రింది x మరియు y అంతరఖండములు చేయు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

    (i) 2, 3 (ii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$

12. క్రింది సరళరేఖల x మరియు y అంతరఖండములను కనుగొనుము.

    (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. $(3,\ 4)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల నిష్పత్తి 3:2 గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

14. $(2,\ 2)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అంతరఖండముల మొత్తము 9 గా నుండు సరళరేఖల సమీకరణమును కనుగొనుము.

15. (5, −3) బిందువు ద్వారా పోవుచూ, అక్షములపై సమాన పరిమాణము కలిగి వ్యతిరేఖ గుర్తులతో నుండు అంతరఖండములు కలిగియున్న సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

16. (9, −1) బిందువు ద్వారా పోవుచూ x−అంతరఖండము y−అంతరఖండమునకు మూడు రెట్లుగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

17. ఒక సరళరేఖ నిరూపకాక్షములను A మరియు B వద్ద ఖండించును. AB మధ్య బిందువు $(3, 2)$ అయిన AB యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

18. $(22, -6)$ బిందువు ద్వారా పోవుచూ, x−అంతరఖండము y−అంతరఖండముకన్నా 5 ఎక్కువగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

19. సమలంబ చతుర్భుజము (రాంబస్) $ABCD$ యొక్క రెండు శీర్షములు $A(3, 6)$ మరియు $C(-1, 2)$ అయిన కర్ణము BD వైపు గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

20. $A(-2, 6)$, $B(3, -4)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును **P** అంతరముగా $2 : 3$ నిష్పత్తితో విభజించును. వాలు $\frac{3}{2}$ మరియు **P** ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

5.7 సరళరేఖ యొక్క సామాన్య సమీకరణ రూపము (General Form of Eqn. of a straight line)

సరళరేఖ సమీకరణమును వివిధ రూపములలో తెలిజయేసినను, దానిని $ax + by + c = 0$ అను ప్రామాణిక రూపంలో మార్చుదుము. ఇక్కడ a, b, c అనునవి వాస్తవ స్థిరాంకములు మరియు $a \neq 0$ లేక $b \neq 0$.

ఇప్పుడు క్రింది వాటిని కనుగొనెదము.

(i) $ax + by + c = 0$ యొక్క వాలు,

(ii) $ax + by + c = 0$ కి సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము

(iii) $ax + by + c = 0$ కి లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము

(iv) రెండు ఖండన రేఖల ఖండన బిందువు.

(i) సరళరేఖ సామాన్య సమీకరణము $ax + by + c = 0$ రూపములో నుండును.

పై సమీకరణము $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ గా వ్రాయవచ్చును. (1)

(1) ని వాలు అంతరఖండ రూపమైన $y = mx + k$ తో పోల్చగా

వాలు $m = -\frac{a}{b}$ మరియు y− అంతరఖండము $= -\frac{c}{b}$

$\therefore$ $ax + by + c = 0$, అను సమీకరణమునకు

వాలు $m = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$, y− అంతరఖండము $= -\frac{\text{స్థిరపదము}}{y \text{ గుణకము}}$.

(ii) $ax + by + c = 0$ రేఖకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము.

రెండు సరళరేఖలు సమాంతరమైనచో వాటి వాలులు సమానమని మనకు తెలుసు, కావున $ax + by + c = 0$ రేఖకు సమాంతరముగా నుండు అన్ని సరళరేఖల సమీకరణములు $ax + by + k = 0$, రూపములోనుండును. k కి విభిన్న విలువలు ఉండును.

(iii) $ax + by + c = 0$ రేఖకు లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము.

రెండు క్షితిజ లంబముగాని రేఖలు లంబముగా ఉన్నట్లయితే వాటి లబ్ధము −1 అగునని మనకు తెలుసు.

కావున $ax + by + c = 0$ కి లంబముగా నుండు అన్ని సరళరేఖల సమీకరణము $bx - ay + k = 0$, అగును. (k. యొక్క వివిధ విలువలకు)

గమనిక

శూన్యేతర గుణకములు గల $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అను రెండు సరళరేఖలు,

(i) సమాంతరమైనచో $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) లంబమైనచో $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ అగును.

(iv) రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు

రెండు సరళరేఖలు సమాంతరముగా లేనియెడల అవి ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఈ బిందువు రెండు రేఖలపై ఉండును. కావున రెండు సరళరేఖల సమీకరణములను సాధించిన ఖండన బిందువును పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 5.26

సరళరేఖలు $3x + 2y - 12 = 0$ మరియు $6x + 4y + 8 = 0$ లు సమాంతరముగా ఉన్నవని చూపుము.

సాధన సరళరేఖ $3x + 2y - 12 = 0$ యొక్క వాలు $m_1 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{3}{2}$

అదేవిధంగా, $6x + 4y + 8 = 0$ యొక్క వాలు $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ $m_1 = m_2$. కావున రెండు సరళరేఖలు సమాంతరముగా నుండును.

ఉదాహరణ 5.27

సరళరేఖలు $x + 2y + 1 = 0$ మరియు $2x - y + 5 = 0$ ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉన్నవని నిరూపించుము.

సాధన సరళరేఖ $x + 2y + 1 = 0$ వాలు $m_1 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{1}{2}$

సరళరేఖ $2x - y + 5 = 0$ వాలు $m_2 = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = \frac{-2}{-1} = 2$

వాలుల లబ్ధము $m_1m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

$\therefore$ రెండు రేఖలు లంబముగా ఉన్నవి.

ఉదాహరణ 5.28

(2 , 5) బిందువు ద్వారా పోవుచూ $x - 8y + 13 = 0$ అనురేఖకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన $x - 8y + 13 = 0$ కి సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణము $x - 8y + k = 0$

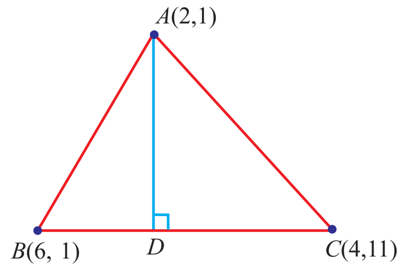
ఇది (2, 5) బిందువు ద్వారా పోవుటచే

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణము $x - 8y + 38 = 0$

ఉదాహరణ 5.29

$A(2, 1), B(6, -1), C(4, 11)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు శీర్షము A ద్వారా పోవు ఉన్నతి యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.



పటము 5.31

సాధన BC యొక్క వాలు $= \dfrac{11+1}{4-6} = -6$

AD రేఖ BC కి లంబముగా నుండుటచే, AD వాలు $= \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD యొక్క సమీకరణము $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x-2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ కావలసిన రేఖ సమీకరణము $x - 6y + 4 = 0$

అభ్యాసము 5.5

1. క్రింది సరళరేఖల వాలులు కనుగొనుము.

   (i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$.

2. సరళరేఖలు $x + 2y + 1 = 0$ మరియు $3x + 6y + 2 = 0$ సమాంతరముగా ఉన్నవని చూపుము.

3. సరళరేఖలు $3x - 5y + 7 = 0$ మరియు $15x + 9y + 4 = 0$ లంబముగా ఉన్నవని చూపుము.

4. $\dfrac{y}{2} = x - p$ మరియు $ax + 5 = 3y$ అనునవి సమాంతరమైన a విలువను కనుగొనుము.

5. సరళరేఖలు $5x - 2y - 9 = 0$ మరియు $ay + 2x - 11 = 0$ ఒక దానికొకటి లంబముగా నుండిన a విలువలను కనుగొనుము.

6. సరళరేఖలు $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$ మరియు $px + 8y - 7 = 0$ ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉండిన P విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక సరళరేఖ $(h, 3)$, $(4, 1)$ బిందువుల ద్వారా పోవుచూ $7x - 9y - 19 = 0$ రేఖను లంబముగా ఖండించిన h విలువను కనుగొనుము.

8. $(1, -2)$. బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $3x - y + 7 = 0$ కి సమాంతరముగా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

9. $(1, -2)$. బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $x - 2y + 3 = 0$ కి లంబముగా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. $(3, 4)$, $(-1, 2)$ లను కలుపు సరళరేఖను లంబ సమద్విఖండన చేయు రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

11. $2x + y - 3 = 0$, $5x + y - 6 = 0$ అను రేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవుచూ, $(1, 2)$ $(2, 1)$ లను కలుపు రేఖకు సమాంతరముగానుండు సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనుము.

12. $5x - 6y = 1$, $3x + 2y + 5 = 0$ అను రేఖల ఖండనబిందువు ద్వారా పోవుచూ, $3x - 5y + 11 = 0$ రేఖకి లంబముగా నుండు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

13. $3x - y + 9 = 0$, $x + 2y = 4$ రేఖల ఖండన బిందువును, $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ రేఖల ఖండన బిందువును కలుపు సరళరేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

14. $A(2, -4), B(3, 3), C(-1, 5)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములు. శీర్షము B గుండా పోవు ఉన్నతి యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

15. $A(-4,4), B(8,4), C(8,10)$ అనునవి $\triangle ABC$ యొక్క శీర్షములైన, శీర్షము A ద్వారా గీయబడు మధ్యగత రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

16. ఆదిబిందువు నుండి $3x + 2y = 13$ రేఖకు గీయబడు లంబపాదము యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము.

17. $x + 2y = 7$ మరియు $2x + y = 8$ అనునవి ఒక వృత్తము యొక్క రెండు వ్యాసముల సమీకరణములు $(0, -2)$ అనునది వృత్తముపై ఒక బిందువైన ఆ వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

18. $2x - 3y + 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు మరియు $(3, -2)$, $(-5, 8)$ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్య బిందువును అంత్య బిందవులుగా గలిగిన సరళరేఖా ఖండము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

19. ఒక సమద్విబాహు $\triangle PQR$ లో, $PQ = PR$. ఆధారము QR, x–అక్షముపై ఉన్నది, శీర్షము y–అక్షముపై యున్నది. మరియు $2x - 3y + 9 = 0$ అనునది PQ యొక్క సమీకరణము అయిన PR వైపుగల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 5.6

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. $(a, -b), (3a, 5b)$ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్య బిందువు.

   (A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(-a, -3b)$

2. $A(1, -3)$, $B(-3, 9)$ లను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా 1:3 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P

   (A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$

3. $A(3, 4)$, $B(14, -3)$ లను కలుపు రేఖాఖండము x–అక్షమును P వద్ద సంధించును. అయిన రేఖాఖండము AB ని P విభజించు నిష్పత్తి ?

   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. $(-2, -5), (-2, 12), (10, -1)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము.

   (A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$

5. $(1, 2), (4, 6), (x, 6), (3, 2)$ అనునవి ఒక క్రమముగా తీసుకొనబడిన సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క శీర్షములైన, x విలువ.

   (A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. $(0,0), (2,0), (0,2)$ బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం

(A) 1 చ.ప్ర. (B) 2 చ.ప్ర. (C) 4 చ.ప్ర. (D) 8 చ.ప్ర.

7. $(1,1), (0,1), (0,0), (1,0)$ బిందువులతో ఏర్పడు చతుర్భుజ వైశాల్యం

(A) 3 చ.ప్ర. (B) 2 చ.ప్ర. (C) 4 చ.ప్ర. (D) 1 చ.ప్ర.

8. $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము.

(A) 0^0 (B) 60^0 (C) 45^0 (D) 90^0

9. $(3,-2)$, $(-1,a)$ లను కలుపు రేఖ వాలు $-\frac{3}{2}$, అయిన a విలుకు సమానమైనది.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2,6), (4,8)$ బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు లంబముగా నుండు సరళరేఖ వాలు.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x - y - 2 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ అను సరళరేఖల ఖండన బిందువు.

(A) $(-1,7)$ (B) $(7,1)$ (C) $(1,7)$ (D) $(-1,-7)$

12. $4x + 3y - 12 = 0$ అను సరళరేఖ $y-$అక్షమును ఖండించు బిందువు.

(A) $(3,0)$ (B) $(0,4)$ (C) $(3,4)$ (D) $(0,-4)$

13. $7y - 2x = 11$ అను సరళరేఖ యొక్క వాలుకు సమానమైనది.

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. x-అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు $(2, -7)$ బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖా సమీకరణము.

(A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. $2x - 3y + 6 = 0$, అను రేఖ యొక్క x, y అంతరఖండములు క్రమముగా

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3, 2$ (D) $3, -2$

16. $(-6, 4)$ అనునది వృత్త కేంద్రము. ఆ వృత్త వ్యాసము యొక్క ఒక అంత్యబిందువు $(-12, 8)$ అయిన మరొక్క అంత్య బిందువు

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. $2x + 3y - 7 = 0$అనురేఖకు లంబముగా, ఆది బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. బిందువు $(-2, 5)$ ద్వారా పోవుచూ $y-$అక్షమునకు సమాంతరముగా నుండు రేఖ సమీకరణము

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. $(2, 5), (4, 6), (a, a)$ బిందువులు ఏకరేఖీయములైన a విలువకు సమానమైనది

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ అను సరళరేఖ $(1, 2)$ బిందువు ద్వారా పోయిన k విలువకు సమానమైనది

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. వాలు 3 గాను మరియు y-అంతరఖండము -4 గాను కలిగిన సరళరేఖసమీకరణము.

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ మరియు $x = -4$ అను సరళరేఖల ఖండన బిందువు.

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ మరియు $2x + ky = 5$ అను సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా నుండిన k విలువ

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ముఖ్యాంశములు

- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును అంతరముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును బాహ్యముగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు Q యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ అను మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయమైనచో

  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (ii) AB వాలు = BC వాలు (లేక) AC వాలు
- ఒక రేఖ x అక్షముతో ధనాత్మక దిశలో θ కోణము చేసిన, వాలు $m = \tan\theta$
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) బిందువుల ద్వారా పోవు క్షితిజ లంబముగాని రేఖ యొక్క

$$\text{వాలు} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

- $ax + by + c = 0$ అను రేఖ యొక్క వాలు $m = -\frac{x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- క్షితిజ సమాంతర రేఖ వాలు 0, క్షితిజ లంబరేఖ వాలు అనిర్వచితము.
- రెండు రేఖల సమాంతరమైనచో వాటి వాలులు సమానము
- క్షితిజ లంబముగాని రెండు రేఖలు లంబముగా నుండినచో వాటి వాలులు లబ్ధము -1

  అనగా $m_1 m_2 = -1$.

సరళరేఖ సమీకరణములు

వ.సం	సరళరేఖ	సమీకరణము
1.	x-అక్షము	$y = 0$
2.	y-అక్షము	$x = 0$
3.	x-అక్షము నకు సమాంతరముగా నుండు	$y = k$
4.	y-అక్షము నకు సమాంతరముగా నుండు	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ నకు సమాంతరముగా నుండు	$ax+by+k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ నకు లంబముగా నుండు	$bx-ay+k = 0$
	ఇవ్వబడినది	సమీకరణము
1.	ఆదిబిందువు ద్వారా పోవునది	$y = mx$
2.	వాలు m, y-అంతరఖండము c	$y = mx + c$
3.	వాలు m, బిందువు (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) అను రెండు బిందువుల ద్వారా పోవు	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x-అంతరఖండము a, y-అంతరఖండము b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$