$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ અને $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ છે.

નોંધ : જુઓ કે $x \neq 0$ અથવા 2

ઉદાહરણ 15 : એક મોટરબોટની શાંત પાણીમાં ઝડપ 18 કિમી/કલાકની છે. જો 24 કિમી અંતર પ્રવાહની સામી દિશામાં કાપવા લાગતો સમય, પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા લાગતા સમય કરતાં 1 કલાક વધુ હોય, તો પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પ્રવાહની ઝડપ x કિમી/કલાક છે.

આથી, પ્રવાહની સામી બાજુ જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 - x)$ કિમી/કલાક અને

પ્રવાહની દિશામાં જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 + x)$ કિમી/કલાક હશે.

પ્રવાહની સામી બાજુ જવા લાગતો સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}} = \frac{24}{18-x}$ કલાક

આ જ પ્રમાણે પ્રવાહની દિશામાં જવા લાગતો સમય = $\frac{24}{18+x}$ કલાક

પ્રશ્નની માહિતી પરથી,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$\therefore 24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$$

$$\therefore x^2 + 48x - 324 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ અથવા } -54$$

પરંતુ, x એ પ્રવાહની ઝડપ હોવાથી ઋણ હોઈ શકે નહિ. આથી, બીજ $x = -54$ ને અવગણતાં, $x = 6$ મળે. આથી, પ્રવાહની ઝડપ 6 કિમી/કલાક છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ, શક્ય હોય તો પૂર્ણવર્ગની રીતથી મેળવો :

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. પ્રશ્ન 1માં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

3. નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. રહેમાનની આજથી ત્રણ વર્ષ પહેલાંની ઉંમરના (વર્ષમાં) વ્યસ્ત અને હવેથી 5 વર્ષ પછીની ઉંમરના વ્યસ્તનો સરવાળો $\frac{1}{3}$ છે. તેની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. એક વર્ગ કસોટીમાં શેફાલીના ગણિત અને અંગ્રેજીના ગુણનો સરવાળો 30 છે. જો તેને ગણિતમાં 2 ગુણ વધુ અને અંગ્રેજીમાં 3 ગુણ ઓછા મળ્યા હોત, તો તેમનો ગુણાકાર 210 થયો હોત. તેણે આ બંને વિષયમાં મેળવેલ ગુણ શોધો.

6. એક લંબચોરસ ખેતરના વિકર્ણનું માપ તેની નાની બાજુના માપથી 60 મીટર વધુ છે. જો મોટી બાજુ, નાની બાજુ કરતાં 30 મીટર વધુ હોય તો, ખેતરની બાજુઓનાં માપ શોધો.

7. બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો તફાવત 180 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ મોટી સંખ્યા કરતાં 8 ગણો છે. બંને સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક ટ્રેન એકધારી ઝડપે 360 કિમી અંતર કાપે છે. જો તેની ઝડપ 5 કિમી/કલાક વધુ હોય તો, આટલું જ અંતર કાપતાં તેને 1 કલાક ઓછો સમય લાગે છે. તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

9. પાણીના બે નળ એક સાથે $9\frac{3}{8}$ કલાકમાં એક ટાંકી ભરી શકે છે. મોટા વ્યાસવાળો નળ ટાંકી ભરવા માટે નાના વ્યાસવાળા નળ કરતાં 10 કલાકનો ઓછો સમય લે છે. બંને નળ દ્વારા ટાંકી ભરવાનો અલગ-અલગ સમય શોધો.

10. એક ઝડપી ટ્રેન મૈસૂર અને બેંગ્લોર વચ્ચેનું 132 કિમી અંતર કાપવા ધીમી ટ્રેન કરતાં 1 કલાક ઓછો સમય લે છે. (વચ્ચેનાં સ્ટેશનો પર ઊભા રહેવાનો સમય ધ્યાનમાં ના લો.) જો ઝડપી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ, ધીમી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ કરતાં 11 કિમી/કલાક વધુ હોય તો બંને ગાડીની સરેરાશ ઝડપ શોધો.

11. બે ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 મી^{2} છે. જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મી હોય તો, બંને ચોરસની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

4.5 બીજનાં સ્વરૂપ

આગળના વિભાગમાં તમે જોયું કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ છે.}$$

જો, $b^2 - 4ac > 0$ તો, આપણને બે ભિન્ન બીજ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ મળે.

જો, $b^2 - 4ac = 0$ તો, $x = \frac{-b}{2a} \pm 0$,

અર્થાત્, $x = \frac{-b}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b}{2a}$

આમ, સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને બીજ $\frac{-b}{2a}$ થાય.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે આ વિકલ્પમાં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને વાસ્તવિક બીજ સમાન છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો એવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા ના મળે, જેનો વર્ગ $b^2 - 4ac$ થાય. આથી, આ વિકલ્પમાં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

$b^2 - 4ac$ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે નક્કી કરતો હોવાથી, $b^2 - 4ac$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનો **વિવેચક** કહેવાય છે.

આથી દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માટે

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 16 : દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ નો વિવેચક શોધો અને તેના પરથી બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $a = 2, b = -4, c = 3$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું છે, આથી, વિવેચક

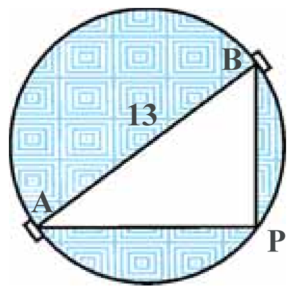
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 17 : 13 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાની સીમા પરના એક બિંદુએ એક થાંભલો એવી રીતે લગાવેલ છે કે જેથી આ બગીચાના એક વ્યાસનાં બંને અંત્યબિંદુઓ A અને B આગળ બનેલ ફાટકથી થાંભલાના અંતરનો તફાવત 7 મીટર હોય. શું આ શક્ય છે ? જો હા, તો બંને ફાટકથી કેટલે દૂર થાંભલો લગાવવો જોઈએ ?

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ રેખાકૃતિ બનાવીએ. (જુઓ આકૃતિ 4.4.)

ધારો કે P થાંભલાનું જરૂરી સ્થાન છે. ધારો કે થાંભલાથી ફાટક B નું અંતર x મી, અર્થાત્ BP = x મી. હવે, થાંભલાથી બંને ફાટકના અંતરનો તફાવત = AP – BP (અથવા BP – AP) = 7 મી



આકૃતિ 4.4

આથી, AP = $(x + 7)$ મી

હવે, AB વ્યાસ હોવાથી, AB = 13 મી

$\angle APB = 90°$ (કેમ?)

હવે, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી)

$\therefore (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\therefore x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$

આથી, થાંભલાનું ફાટક B થી અંતર 'x' એ સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, થાંભલાનું સ્થાન નક્કી કરવું શક્ય બને. આ શક્ય છે કે કેમ, તે જોવા ચાલો વિવેચક નો વિચાર કરીએ.

વિવેચક $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બે બીજ વાસ્તવિક બીજ છે અને આથી બગીચાની સીમા પર થાંભલો લગાવવાનું શક્ય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ને દ્વિઘાત સૂત્રથી ઉકેલતાં,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

આમ, $x = 5$ અથવા -12 મળે.

પરંતુ, x થાંભલા અને ફાટક B વચ્ચેનું અંતર હોવાથી, તે ધન જ હોવું જોઈએ. આથી, $x = -12$ ને અવગણવું જોઈએ. આથી, $x = 5$

આથી, સીમા પર થાંભલો એ રીતે લગાવવો જોઈએ કે જેથી તેનું ફાટક B થી અંતર 5 મી અને ફાટક A થી અંતર 12 મી હોય.

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ નો વિવેચક શોધો. તે પરથી સમીકરણનાં બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો. જો તે વાસ્તવિક હોય તો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$

આથી, વિવેચક $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બંને બીજ વાસ્તવિક અને સમાન છે.

બીજ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ અર્થાત્ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ અર્થાત્ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. નીચે આપેલાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનાં સ્વરૂપ શોધો. જો તેમને વાસ્તવિક બીજ હોય તો તે શોધો :

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ સમાન હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. જેની લંબાઈ, પહોળાઈ કરતાં બમણી હોય અને ક્ષેત્રફળ 800 મી^{2} હોય એવી લંબચોરસ આંબાવાડી બનાવવી શક્ય છે ? જો તમારો ઉત્તર ‘હા’ માં હોય તો, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ મેળવો.

4. બે મિત્રોની ઉંમરનો સરવાળો 20 વર્ષ છે. 4 વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 48 હતો. શું આ પરિસ્થિતિ શક્ય છે ? જો હોય તો, તેમની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. જેની પરિમિતિ 80 મી અને ક્ષેત્રફળ 400 મી^{2} હોય, તેવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવાનું શક્ય છે ? જો તે શક્ય હોય, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાનો અભ્યાસ કર્યો :

1. a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય.

2. જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ કહેવાય. દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન હોય.

3. જો આપણે $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ને સુરેખ અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈ મેળવી શકીએ.

4. પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.

5. વર્ગાત્મક : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ તરીકે મળે, જ્યાં $b^2 - 4ac \geq 0$

6. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં;

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

વાચકને નોંધ

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલોની ચકાસણી મેળવેલ સમીકરણને આધારે કરવાને બદલે મૂળ પ્રશ્નની શરતોને આધારે કરવી જોઈએ. (પ્રકરણ 3 નાં ઉદાહરણો 11, 13, 19 અને પ્રકરણ 4 નાં ઉદાહરણો 10, 11, 12 જુઓ.)

સમાંતર શ્રેણી 5

5.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે એ ચોક્કસ નોંધ્યું હશે કે, પ્રકૃતિમાં અનેક વસ્તુઓ, સૂરજમુખીના ફૂલની પાંદડીઓ, મધપૂડાનાં છિદ્રો, મકાઈના ડોડા પરના દાણા, અનાનસ અને પાઈ કોન (pine cone) પરના કુંતલ વગેરે એક નિશ્ચિત તરાહને અનુસરે છે.

હવે આપણે રોજિંદા જીવનમાં અનુભવવામાં આવતી કેટલીક તરાહ જોઈએ. અત્રે આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે.

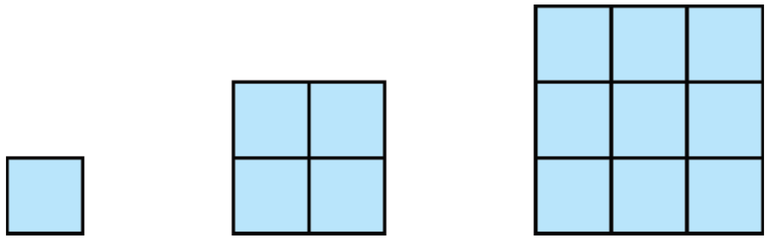
(i) રીનાએ નોકરી માટે અરજી કરી અને નોકરી માટે તેની પસંદગી થઈ. તેનો શરૂઆતનો માસિક પગાર ₹ 8000 છે અને પછી પ્રતિ વર્ષ માસિક પગાર વધારો ₹ 500 નક્કી થાય છે. તેનો ₹ માં માસિક પગાર પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... વર્ષે અનુક્રમે 8000, 8500, 9000, ... હશે.

(ii) એક નિસરણીના પગથિયાંની લંબાઈ નીચેથી ઉપર તરફ એકસરખી 2 સેમી ઘટતી જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે. તળિયાથી ટોચ તરફના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ... 8માં પગથિયાની (સેમીમાં) લંબાઈ અનુક્રમે, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 થાય.

આકૃતિ 5.1

(iii) કોઈ બચત યોજનામાં મૂકેલ રકમ દર 3 વર્ષે $\frac{5}{4}$ ગણી થાય છે. ₹ 8000ના રોકાણની (₹ માં) પાકતી રકમ 3, 6, 9 અને 12 વર્ષને અંતે અનુક્રમે 10,000, 12,500, 15,625 અને 19,531.25 થાય.

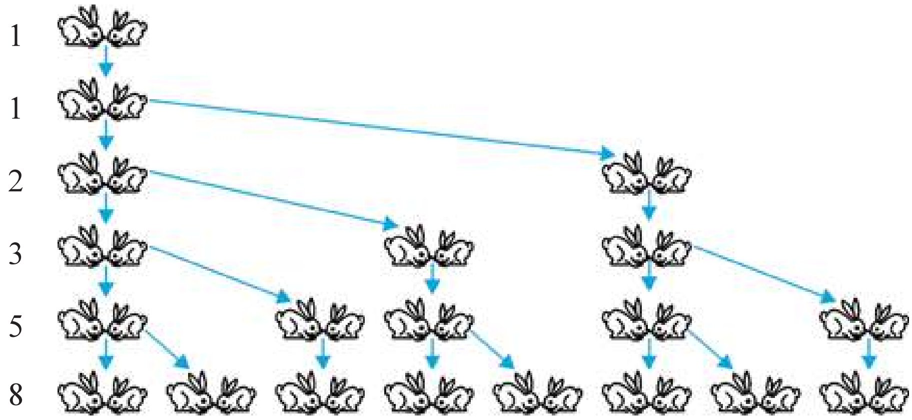
(iv) 1, 2, 3, ... એકમ લંબાઈના ચોરસમાં એકમ લંબાઈના ચોરસની સંખ્યા અનુક્રમે 1^2, 2^2, 3^3, ... છે. (જુઓ આકૃતિ 5.2.)



આકૃતિ 5.2

(v) શકીલા જ્યારે તેની પુત્રી 1 વર્ષની હતી ત્યારે તેના ગલ્લામાં ₹ 100 મૂકે છે અને પછી તે દરેક વર્ષે તેમાં ₹ 50નો ઉમેરો કરે છે. તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા... જન્મદિવસે તેના ગલ્લાની (₹ માં) રકમ અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હતી.

(vi) સસલાંનું એક જોડું પ્રથમ મહિને પ્રજનન કરવા માટે પરીપક્વ નથી. સસલાંની પ્રત્યેક નવી જોડ બીજા અને આવનારા દરેક મહિને એક જોડ સસલાંને જન્મ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 5.3). માની લો કે, કોઇ સસલું મૃત્યુ પામતું નથી, તો પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ..., છઠ્ઠા મહિનાના પ્રારંભે સસલાંની જોડની સંખ્યા અનુક્રમે, 1, 1, 2, 3, 5, 8 હશે.



આકૃતિ 5.3

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે કેટલીક તરાહ જોઈ શકીએ છીએ. કેટલાકમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે પુરોગામી પદમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય છે. કેટલાકમાં અચળ સંખ્યા વડે ગુણવાથી, જ્યારે બીજા કેટલાકમાં તે ક્રમિક સંખ્યાના વર્ગ સ્વરૂપે વગેરે રીતે જણાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જેમાં પુરોગામી પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરવાથી અનુગામી પદ મળે છે, એવી એક તરાહની ચર્ચા કરીશું. આપણે એ પણ જોઈશું કે તેનું n મું પદ અને n ક્રમિક પદોનો સરવાળો કેવી રીતે શોધી શકાય અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કેટલાક રોજિંદા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા કરીશું.

5.2 સમાંતર શ્રેણી :

નીચે આપેલ સંખ્યાઓની યાદી પર વિચાર કરો :

(i) 1, 2, 3, 4, ...

(ii) 100, 70, 40, 10, ...

(iii) – 3, –2, –1, 0, ...

(iv) 3, 3, 3, 3, ...

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, ...

યાદીમાં આપેલ દરેક સંખ્યાને **પદ** કહેવાય.

ઉપરની યાદીમાં એક પદ આપેલ હોય તો પછીનું પદ તમે લખી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ? કદાચ કોઈ તરાહ કે નિયમનો ઉપયોગ કરી તમે તે કરી શકો.

ચાલો, આપણે અવલોકન કરીએ અને નિયમ લખીએ:

(i) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 1 વધુ છે.

(ii) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 30 ઓછું છે.

(iii) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 1 ઉમેરો.

(iv) માં પ્રત્યેક પદ 3 છે અર્થાત્ દરેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 0 ઉમેરો (કે, તેમાંથી 0 બાદ કરો).

(v) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં -0.5 ઉમેરો (અર્થાત્, તેમાંથી 0.5 બાદ કરો.)

ઉપરની યાદીમાં આપે જોયું કે પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે છે. સંખ્યાઓની આવી યાદી માટે કહી શકાય કે આ પદો **સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression અથવા A.P.)** બનાવે છે.

*આમ, **જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયના પ્રત્યેક પદ, આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય તેવી સંખ્યાઓની યાદી એ સમાંતર શ્રેણી છે.***

*આ નિશ્ચિત સંખ્યાને **સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. યાદ રાખો કે, તે **ધન, ઋણ અથવા શૂન્ય** હોઈ શકે છે.*

ચાલો, આપણે સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદને a_1, બીજા પદને a_2, ... n માં પદને a_n વડે દર્શાવીએ અને સામાન્ય તફાવતને d વડે દર્શાવીએ. આથી, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, a_3 ..., a_n$ માટે

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$$

સમાંતર શ્રેણીનાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે છે :

(a) એક શાળામાં સવારની સભામાં એક હારમાં ઊભેલા કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) 147, 148, 149, ..., 157 છે.

(b) કોઈ શહેરના જાન્યુઆરી મહિનાના એક સપ્તાહના ન્યૂનતમ તાપમાનની વધતા ક્રમમાં નોંધણી (ડિગ્રી સેલ્સિયસમાં) –3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5 છે.

(c) ₹ 1000 પર અચળ 5 ટકાના દરે લોનના પૈસા ચૂકવ્યા બાદ (₹ માં) બાકી રહેતી રકમ 950, 900, 850, 800, ..., 50 છે.

(d) કોઈ શાળામાં 1 થી 12 ધોરણના પ્રથમ ક્રમે આવેલ વિદ્યાર્થીઓને (₹ માં) અપાતી રોકડ ઇનામની રકમ 200, 250, 300, 350, ..., 750 છે.

(e) જો પ્રત્યેક મહિને ₹ 50ની બચત કરાય તો 10 મહિનામાં થયેલ બચતની રકમ (₹ માં) દર માસના અંતે 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 હશે.

ઉપરની યાદી શા માટે સમાંતર શ્રેણી છે. એ સમજાવવાનું તમારા ઉપર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડવામાં આવે છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લેતાં, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ સમાંતર શ્રેણી દર્શાવે છે. આને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે ઉપરનાં ઉદાહરણો (a) થી (e) માં પદની સંખ્યા ***નિશ્ચિત (finite)*** છે. આવી સમાંતર શ્રેણીને ***સાન્ત (finite)*** સમાંતર શ્રેણી કહેવાય. વળી આપણે નોંધીએ કે આ પ્રત્યેક સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ છે. આ વિભાગમાં આપેલ ઉદાહરણ (i) થી (v) માંની એક પણ સમાંતર શ્રેણી સાન્ત શ્રેણી નથી. આથી, તેને ***અનંત સમાંતર શ્રેણી (Infinite Arithmetic Progression)*** *કહેવાય.* આવી સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ ના મળે.

હવે, એક સમાંતર શ્રેણી જાણવા કેટલી ન્યૂનતમ માહિતીની જરૂર પડે? શું પ્રથમ પદ જાણવું પૂરતું છે? કે માત્ર સામાન્ય તફાવતની જાણકારી પૂરતી છે? તમે જોઈ શકશો કે આ બંને માહિતી, પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d બંને જ્ઞાત હોય તે જરૂરી છે.

ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

$$6, 9, 12, 15, \ldots, \text{ બને.}$$

અને $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = -3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

$$6, 3, 0, -3, \ldots, \text{ બને.}$$

આ જ રીતે, જ્યારે,

$a = -7$, $d = -2$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $2, 2, 2, 2, \ldots$

આમ, જો a અને d આપેલ હોય તો સમાંતર શ્રેણી લખી શકાય. તેનાથી વિપરીત પ્રક્રિયા માટે શું કહી શકો? અર્થાત્, જો તમને સંખ્યાઓની યાદી આપેલ હોય તો તમે કહી શકો કે તે એક સમાંતર શ્રેણી છે અને તે શ્રેણીના a અને d શોધી શકો? પ્રથમ પદ a હોવાથી, તે સહેલાઈથી લખી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય. તે ઉમેર્યા બાદ કોઈ પણ પદમાંથી આગળના પદની બાદબાકી કરતાં d મળી શકે, અર્થાત્, આ રીતે મળેલ પદ સમાંતર શ્રેણી માટે સમાન હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે સંખ્યાઓની યાદી

$$6, 9, 12, 15, \ldots, \text{ માટે}$$

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત પ્રત્યેક વિકલ્પમાં 3 છે. આથી, આપેલ પદ સમાંતર શ્રેણીનાં પદ છે. તેનું પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ છે.

સંખ્યાઓની યાદી

$$6, 3, 0, -3, \ldots, \text{ માટે}$$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3,$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

આ જ પ્રમાણે, આ પણ એક સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત –3 છે.

વ્યાપક રીતે, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, ... a_n$ માટે, a_{k+1} અને a_k એ અનુક્રમે $k + 1$ માં અને k માં પદ હોય, તો

$$d = a_{k+1} - a_k$$

આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા પ્રત્યેક $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ ... જાણવાની જરૂર નથી. આમાંથી કોઈ પણ એકની કિંમત શોધવી પર્યાપ્ત છે.

1, 1, 2, 3, 5, ... આ યાદીના આંકડા તપાસો. અહીં, કોઈ પણ બે ક્રમિક પદ વચ્ચેનો તફાવત સરખો નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેણી નથી.

આપણે નોંધીએ કે, 6, 3, 0, -3, ... સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા આપણે 3 માંથી 6 ની બાદબાકી કરી, નહીં કે 6 માંથી 3 ની બાદબાકી. અર્થાત્ d શોધવા $(k + 1)$ માં પદમાંથી k માં પદની બાદબાકી કરવી જોઈએ. પછી ભલે $(k + 1)$ મું પદ નાનું કેમ ના હોય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ સંકલ્પના વધુ સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, ...$ માટે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લખો.

ઉકેલ : અહીં, $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

આપણે નોંધીએ કે, **જો આપણે જાણતા હોઈએ કે, આપેલ પદો સમાંતર શ્રેણીમાં છે, તો કોઈ પણ બે ક્રમિક પદના તફાવત દ્વારા d શોધી શકીએ.**

ઉદાહરણ 2 : નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી હોય તો તેના પછીનાં બે પદ લખો :

(i) 4, 10, 16, 22, ... (ii) 1, – 1, – 3, – 5, ...

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, ... (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

ઉકેલ : (i) અહીં,

$$a_3 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે અને સામાન્ય તફાવત $d = 6$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : 22 + 6 = 28 અને 28 + 6 = 34

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે તથા સામાન્ય તફાવત $d = -2$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $-5 + (-2) = -7$ અને $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 \ \ -2 = -4$

આમ, $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$. આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

અહીં, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરંતુ $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ સ્થિતિમાંથી કઈ સ્થિતિમાં સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બને અને કેમ?

(i) ટૅક્સીનું ભાડું; પ્રથમ કિલોમીટર માટે ₹ 15 અને પછીના વધારાના પ્રત્યેક કિલોમીટર માટે ₹ 8 છે.

(ii) નળાકારમાં રહેલ હવાનું પ્રમાણ; હવા કાઢવાના પંપ દ્વારા દર વખતે નળાકારની બાકી રહેલ હવાનો $\frac{1}{4}$ ભાગ બહાર કાઢે છે.

(iii) પ્રત્યેક મીટરના ખોદકામ બાદ એક કૂવો ખોદવા માટે લાગતો ખર્ચ; પ્રથમ મીટરના ₹ 150 અને પછીના પ્રત્યેક મીટર દીઠ ₹ 50 પ્રમાણે વધતો જાય છે.

(iv) 8 % ના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ દરથી શરૂઆતની રકમ ₹ 10000 મૂકેલ હોય, તો દર વર્ષે ખાતામાં જમા થતી રકમ

2. જ્યારે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d નાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે હોય ત્યારે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો :

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે, પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો :

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. નીચેનામાંથી કઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી બનાવે તો સામાન્ય તફાવત d અને પછીનાં ત્રણ પદ લખો :

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, ...$

(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

(vii) 0, – 4, – 8, –12, ...

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, ...$

(ix) 1, 3, 9, 27, ...

(x) $a, 2a, 3a, 4a, ...$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, ...$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, ...$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, ...$

5.3 સમાંતર શ્રેણીનું *n* મું પદ

ચાલો આપણે વિભાગ 5.1માં આપેલ ઉદાહરણમાં આપેલ માહિતી પ્રમાણે જ્યાં રીના એક નોકરી માટે અરજી કરે છે અને નિયુક્તિ પામે છે તે ઉદાહરણનો ફરી વિચાર કરીએ. તેને શરૂઆતમાં માસિક ₹ 8000 અને પછીના વર્ષે ₹ 500 નો ઈજાફો (વેતન વધારો) આપવાનું નક્કી થાય છે. પાંચમા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે?

આનો જવાબ શોધવા, બીજા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે તે જોઈએ.

બીજા વર્ષનો પગાર ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 હશે. આ જ રીતે, આપણે ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા વર્ષે પગારની માહિતી મેળવવા માટે આગળના વર્ષના માસિક પગારની રકમમાં ₹ 500 ઉમેરી શકાય.

આમ, ત્રીજા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + (**3 – 1**) × 500] (ત્રીજા વર્ષ માટે)

= ₹ 9000

ચોથા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + (**4 – 1**) × 500] (ચોથા વર્ષ માટે)

= ₹ 9500

પાંચમા વર્ષે મળતો પગાર = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + (**5 – 1**) × 500] (પાંચમા વર્ષ માટે)

= ₹ 10000

જુઓ કે આપણને મળતી સંખ્યાઓની યાદી,

8000, 8500, 9000, 9500, 10,000, ... છે.

આ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ?)

હવે, ઉપરની સંખ્યાઓની યાદી જોઈ તમે કહી શકશો કે છઠ્ઠા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? પંદરમા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? અને માની લઈએ કે તે હજુ નોકરી કરે છે, તો 25માં વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? આનો જવાબ મેળવવા તમે દરેક વખતે આગળના વર્ષના વેતનમાં ₹ 500 ઉમેરશો. શું આ પ્રક્રિયાને આપણે વધુ ટૂંકી બનાવી શકીએ? ચાલો જોઈએ. જે રીતે વેતનના આંકડા ઉપર મેળવ્યા તે પરથી તમને થોડો ખ્યાલ તો આવ્યો જ હશે.

15માં વર્ષે મળતું વેતન = 14માં વર્ષે મળતું વેતન + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ વખત}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹\ 15{,}000$$

અર્થાત્, પ્રથમ વેતન + (15 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ જ રીતે, તેને 25માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન

$$= ₹\ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹\ 20{,}000$$

= પ્રથમ વેતન + (25 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ ઉદાહરણ પરથી તમને સમાંતર શ્રેણીનું 15મું પદ અથવા 25મું પદ અને વ્યાપક રીતે n મું પદ કઈ રીતે લખવું તેનો ખ્યાલ આવ્યો હશે.

ધારો કે, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ a_1 એ a અને સામાન્ય તફાવત d છે.

તો, બીજું પદ, $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\,d$

ત્રીજું પદ, $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$

ચોથું પદ, $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\,d$

. . . .

. . . .

આમ, આપણે કહી શકીએ કે n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\,d$.

આથી, ***પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\,d$ દ્વારા મળે.***

a_n ને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ પણ કહેવાય છે. જો સમાંતર શ્રેણીમાં m પદો હોય તો a_m તેનું અંતિમ પદ દર્શાવે છે. તેને ઘણી વખતે l દ્વારા પણ દર્શાવાય છે.

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સમાંતર શ્રેણી 2, 7, 12, ... નું 10 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ અને $n = 10$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\,d$

$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ 47 છે.

ઉદાહરણ 4 : સમાંતર શ્રેણી 21, 18, 15... નું કયું પદ -81 હશે? વળી કોઈ પદ 0 હશે? સકારણ જવાબ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ અને ધારો કે $a_n = -81$

આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

$a_n = a + (n-1)\, d$ હોવાથી,

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$\therefore \ -81 = 24 - 3n$$

$$\therefore \ -105 = -3n$$

$$\therefore \ n = 35$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 35મું પદ −81 થાય.

હવે, આપણે એ જાણવું છે કે $a_n = 0$ થાય તેવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય છે? જો આવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય હોય તો,

$$21 + (n-1)(-3) = 0$$

$$\therefore \ 3(n-1) = 21$$

$$\therefore \ n = 8$$

આથી, આઠમું પદ 0 બને.

ઉદાહરણ 5 : જેનું ત્રીજું પદ 5 અને 7 મું પદ 9 હોય એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_3 = a + (3-1)\, d = a + 2d = 5$ (1)

અને $a_7 = a + (7-1)\, d = a + 6d = 9$ (2)

સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$a = 3$ અને $d = 1$ મળે.

આથી, માંગેલ સમાંતર શ્રેણી 3, 4, 5, 6, 7, ... છે.

ઉદાહરણ 6 : ચકાસો કે 301 એ 5, 11, 17, 23, ... સંખ્યાની યાદીનું કોઈ પદ છે કે નહીં?

ઉકેલ : અહીં,

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

$a_{k+1} - a_k$ નું મૂલ્ય $k = 1, 2, 3$ વગેરે માટે સમાન હોવાથી આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે.

હવે, $a = 5$ અને $d = 6$.

ધારો કે, સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ 301 છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$a_n = a + (n-1)\, d$$

આથી, $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$\therefore \ 301 = 6n - 1$$

$$\therefore \ n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

પરંતુ, n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા જ હોવો જોઈએ. (કેમ?)

આથી, આપેલ યાદીનું કોઈ પણ પદ 301 ના હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : બે અંકની કેટલી સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય હશે ?

ઉકેલ : 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકની સંખ્યાઓ :

12, 15, 18,..., 99 છે.

શું આ સમાંતર શ્રેણી છે ? હા. અહીં, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n - 1)\,d$ હોવાથી,

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad 87 = (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$\therefore \quad n = 29 + 1 = 30$$

આમ, 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા 30 છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4,..., –62 માં છેલ્લેથી (પ્રથમ પદ તરફ) 11મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$.

$$l = a + (n - 1)\,d$$

છેલ્લેથી 11મું પદ શોધવા, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલાં પદ છે તે શોધીશું.

$$-62 = 10 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \quad -72 = (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \quad n - 1 = 24$$

$$\therefore \quad n = 25$$

આમ, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં 25 પદ છે.

છેલ્લેથી 11મું પદ એ 15મું પદ બને. (આપણે નોંધીએ કે તે 14મું પદ નહિ હોય. કેમ ?)

આથી, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

આથી, છેલ્લેથી 11મું પદ – 32 છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ :

જો આપેલ સમાંતર શ્રેણીના પદ ઊલટા ક્રમમાં લખીએ, તો $a = -62$ અને $d = 3$ (કેમ ?)

આથી, આ પ્રશ્ન a અને d નાં મૂલ્યો પરથી 11મું પદ શોધવાનો બને.

આથી, $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

આથી, છેલ્લેથી માંગેલ 11 માં પદનું મૂલ્ય – 32 થાય.

ઉદાહરણ 9 : ₹ 1000ની રકમ 8 % વાર્ષિક સાદા વ્યાજ પર મૂકવામાં આવે છે. દરેક વર્ષને અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો. શું આ વ્યાજ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે ? જો હા, તો 30 વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સાદા વ્યાજની ગણતરી માટે

$$\text{સાદું વ્યાજ} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.}$$

આથી, પ્રથમ વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100}$

$= ₹\ 80$

બીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100}$

$= ₹\ 160$

ત્રીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ $= ₹\ \dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100}$

$= ₹\ 240$

આ જ રીતે, ચોથા, પાંચમા વગેરે વર્ષ માટે વ્યાજ મેળવી શકાય.

આથી, પહેલા, બીજા, ત્રીજા ... વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજ અનુક્રમે 80, 160, 240, ... છે.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે કારણ કે બે ક્રમિક પદનો તફાવત 80 છે. અર્થાત્ $d = 80$. વળી, $a = 80$.

આથી, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધવા આપણે a_{30} શોધીશું.

$$a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

આમ, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ ₹ 2400 હશે.

ઉદાહરણ 10 : ફૂલોની એક ક્યારીમાં પ્રથમ હારમાં 23 ગુલાબના છોડ, બીજી હારમાં 21 ગુલાબના છોડ, ત્રીજી હારમાં 19 ગુલાબના છોડ, વગેરે છે. તેની છેલ્લી હારમાં 5 ગુલાબના છોડ છે. આ ક્યારામાં કુલ કેટલી હાર હશે ?

ઉકેલ : પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... હારમાં ગુલાબના છોડની સંખ્યા

23, 21, 19, ..., 5 છે.

આ સંખ્યાઓ એક સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ ?)

ધારો કે હારની સંખ્યા n છે.

અહીં, $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\, d$

આથી, $5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\therefore\ -18 = (n - 1)(-2)$

$\therefore\ n = 10$

આથી, ફૂલની ક્યારીમાં 10 હાર છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય તફાવત d અને n મું પદ a_n છે. ખાલી જગા પૂરો :

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	–18	...	10	0
(iii)	...	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. નીચેનામાંથી સાચો જવાબ શોધો અને ચકાસો :

(i) સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4, ... નું 30 મું પદ .... છે.

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) સમાંતર શ્રેણી $-3, -\frac{1}{2}, 2, ...$ નું 11 મું પદ .... છે.

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં ખાલી ખાનાનાં પદ શોધો :

(i) 2, ☐, 26

(ii) ☐, 13, ☐, 3

(iii) 5, ☐, ☐, $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, –22

4. સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18, ... નું કેટલામું પદ 78 થાય ?

5. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા શોધો :

(i) 7, 13, 19, ..., 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$

6. સમાંતર શ્રેણી 11, 8, 5, 2 ... નું કોઈ પદ –150 હોઈ શકે ?

7. સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ 38 અને 16 મું પદ 73 હોય તો તેનું 31મું પદ શોધો.

8. એક સમાંતર શ્રેણીમાં 50 પદ છે. જો ત્રીજું પદ 12 અને છેલ્લું પદ 106 હોય, તો તેનું 29 મું પદ શોધો.

9. જો સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું અને નવમું પદ અનુક્રમે 4 અને –8 હોય, તો તે શ્રેણીનું કયું પદ 0 થાય ?

10. કોઈ સમાંતર શ્રેણીમાં 17 મું પદ 10 માં પદ કરતાં 7 વધુ છે. તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણી 3, 15, 27, 39, ... નું કયું પદ 54 માં પદ કરતાં 132 વધુ હશે ?

12. બે સમાંતર શ્રેણીના સામાન્ય તફાવત સમાન છે. તેમના 100 માં પદનો તફાવત 100 હોય તો 1000 મા પદનો તફાવત કેટલો હશે ?

13. ત્રણ અંકની કેટલી સંખ્યા 7 વડે વિભાજ્ય હશે ?

14. 10 અને 250 વચ્ચે 4 ના કેટલા ગુણિત હશે ?

15. n ના કયા મૂલ્ય માટે બે સમાંતર શ્રેણીઓ 63, 65, 67,... અને 3, 10, 17, ...ના n માં પદ સમાન થાય ?

16. એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો કે જેનું ત્રીજું પદ 16 અને 7 મું પદ 5 માં પદથી 12 વધુ હોય.

17. 3, 8, 13, ..., 253 સમાંતર શ્રેણી હોય, તો તેનું છેલ્લેથી 20 મું પદ શોધો.

18. એક સમાંતર શ્રેણીના ચોથા અને આઠ માં પદનો સરવાળો 24 છે. અને છઠ્ઠા અને દસ માં પદનો સરવાળો 44 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદ શોધો.

19. સુબ્બા રાવે 1995 માં ₹ 5000 ના વાર્ષિક વેતનથી કામ શરૂ કર્યું અને તેમને દર વર્ષે માસિક ₹ 200 ની વેતન વૃદ્ધિ મળે છે. કયા વર્ષે તેમનું વેતન ₹ 7000 થશે ?

20. રામકલી વર્ષના પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 5 ની બચત કરે છે. અને પછી તેની અઠવાડિક બચતમાં ₹ 1.75 નો વધારો કરે છે. જો n માં અઠવાડિયે તેની બચત ₹ 20.75 હોય તો n નું મૂલ્ય શોધો.

5.4 સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો

આવો આપણે વિભાગ 5.1 માં આપેલ પરિસ્થિતિનો ફરી વિચાર કરીએ, તેમાં શકીલા તેની પુત્રીના ગલ્લામાં, તે જ્યારે 1 વર્ષની હતી ત્યારે ₹ 100 મૂકે છે અને બીજા જન્મદિવસે ₹ 150 મૂકે છે, ત્રીજા જન્મ દિવસે ₹ 200 મૂકે છે, અને આ રીતે આગળ વધે છે. તે જ્યારે 21 વર્ષની હશે ત્યારે ગલ્લામાં કેટલા રૂપિયા જમા થયા હશે ?

અહીં, ગલ્લામાં મૂકાતી રકમ (₹ માં) પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા,... જન્મદિવસે અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હશે. અને આ જ ક્રમ 21માં જન્મદિવસ સુધી ચાલશે. 21માં જન્મદિવસે ગલ્લાની કુલ રકમ શોધવા આપણે ઉપરની યાદી પ્રમાણે 21 સંખ્યાઓ લખી તેનો સરવાળો કરવો જોઈએ. તમને નથી લાગતું કે આ કંટાળાજનક અને સમય દુર્વ્યય કરનાર ક્રિયા છે ? શું આપણે આ પ્રક્રિયાને ટૂંકી બનાવી શકીએ ? જો આપણે સરવાળો શોધવાની કોઈ રીત શોધી શકીએ તો જ આ શક્ય છે. ચાલો જોઈએ.

ગોસ (જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 1માં વાંચી ગયાં છીએ) જ્યારે 10 વર્ષના હતા ત્યારે તેમણે આપેલ પ્રશ્નના ઉકેલ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. તેમને 1 થી 100 સુધીના ધન પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવાનું કહેવામાં આવેલું. તેમણે તરત જ જવાબ આપ્યો કે સરવાળો 5050 છે. શું તમે વિચારી શકો કે તેમણે આ કેવી રીતે વિચાર્યું હશે ? તેમણે

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$ લખ્યું.

અને પૂર્ણાંકોનો ક્રમ બદલી,

$$S = 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1$$ એમ લખ્યું.

બંનેનો સરવાળો કરતાં,

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + ... + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + ... + 101 + 101$$ (100 વખત)

$$S = \frac{100\times101}{2} = 5050$$ અર્થાત્ સરવાળો = 5050

આપણે આ જ સંકલ્પનાનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, ...$ નાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો શોધીશું :

આ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a + (n - 1) d$ છે.

ધારો કે S આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + . . . + [a + (n - 1) d] \qquad (1)$$

પદનો ક્રમ બદલી પુનઃ લખતાં,

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + . . . + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+....+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{(n \text{ વખત})}$$

અથવા $2S = n [2a + (n - 1) d]$ (કારણ કે પદોની સંખ્યા n છે અને બધા સમાન છે.)

અથવા $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

આથી, ***સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો નીચેના સૂત્રથી મળે છે.***

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

આપણે તેને $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

અર્થાત્ $$S = \frac{n}{2} (a + a_n) \qquad (3)$$

હવે, જો સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની કુલ સંખ્યા n હોય, તો અંતિમ પદ $a_n = l$

(3) પરથી, આપણે કહી શકીએ કે

$$S = \frac{n}{2} (a + l) \qquad (4)$$

જ્યારે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ અને અંતિમ પદ આપેલ હોય અને સામાન્ય તફાવત આપેલ ના હોય ત્યારે આ પરિણામ ઉપયોગી બને છે.

હવે, આપણે શરૂઆતમાં ઉપર ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્ન પર પાછા ફરીએ. શકીલાની પુત્રીના ગલ્લાની રકમ તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા, ... જન્મદિવસે અનુક્રમે (₹ માં) 100, 150, 200, 250, ... હતી.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે. આપણે તેની 21મી વર્ષગાંઠે કુલ કેટલા રૂપિયા ભેગા થયા હશે તે જાણવું છે. અર્થાત્, સમાંતર શ્રેણીનાં 21 પદનો સરવાળો કરવાનો છે.

અહીં, $a = 100$, $d = 50$ અને $n = 21$ માટે સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આપણને $$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50]$$ મળે.

$$\therefore S = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

આમ, 21 માં જન્મ દિવસે ગલ્લામાં ભેગી થયેલી રકમ કુલ ₹ 12600 હશે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવાથી ગણતરી સરળ નથી બની?

હવેથી આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદના સરવાળાને S ને બદલે S_n થી દર્શાવીશું. આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં 20 પદોનો સરવાળો દર્શાવવા માટે S_{20} લખીશું. પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રમાં કુલ ચાર રાશિ S, a, d અને n નો ઉપયોગ થાય છે. જો આપણે તે પૈકી ત્રણ જાણતા હોઈએ તો ચોથી રાશિ શોધી શકાય.

નોંધ : સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ, તેનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળા તથા પ્રથમ $(n-1)$ પદોના સરવાળાના તફાવત જેટલું હોય છે. અર્થાત્ $\mathbf{a_n = S_n - S_{n-1}}$

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 11 : સમાંતર શ્રેણી 8, 3, –2,... નાં પ્રથમ 22 પદનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આથી, $$S_{22} = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 22 પદોનો સરવાળો –979 છે.

ઉદાહરણ 12 : સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 14 પદોનો સરવાળો 1050 હોય અને તેનું પ્રથમ પદ 10 હોય, તો તે શ્રેણીનું 20 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

હવે, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આથી, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d]$$

$$= 140 + 91d$$

$$\therefore 910 = 91d$$

$$\therefore d = 10$$

આથી, $a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$. અર્થાત્ 20 મું પદ 200 છે.

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 24, 21, 18,.... નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 78 થાય.

ઉકેલ : અહીં, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

અહીં, $78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)]$

$= \frac{n}{2}(51 - 3n)$

$\therefore 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$\therefore n^2 - 17n + 52 = 0$

$\therefore (n-4)(n-13) = 0$

$\therefore n = 4$ અથવા 13

n નાં બંને મૂલ્યો શક્ય છે આથી, માંગેલ પદની સંખ્યા 4 અથવા 13 થાય.

નોંધ :

1. આ ઉદાહરણમાં પ્રથમ ચાર પદનો સરવાળો = પ્રથમ 13 પદનો સરવાળો = 78
2. આ બંને જવાબ શક્ય છે કેમ કે 5 માં પદથી 13 માં પદનાં મૂલ્યોનો સરવાળો 0 બને છે. આ શક્ય છે કેમ કે a નું મૂલ્ય ધન અને d નું મૂલ્ય ઋણ છે. આથી, કેટલાંક પદ ધન અને બાકીનાં પદ ઋણ બનશે અને આથી કુલ સરવાળો 0 બનાવશે.

ઉદાહરણ 14 : સરવાળો શોધો :

(i) પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (ii) પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

ઉકેલ :

(i) ધારો કે, $S_{1000} = 1 + 2 + 3 + ... + 1000$

સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્ર,

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$

આથી, પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 500500 થાય.

(i) ધારો કે, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

અહીં, $a = 1$ અને અંતિમ પદ $l = n$ છે.

આથી, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ અથવા $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

આથી, **પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો**

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ **મળશે.**

ઉદાહરણ 15 : જો n મું પદ $a_n = 3 + 2n$ હોય, તો સંખ્યાઓની આ યાદીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : $a_n = 3 + 2n$, હોવાથી,

$a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

.

.

.

આથી, સંખ્યાઓની યાદી 5, 7, 9, 11,... બને.

અહીં, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ વગેરે.

આથી, તે સમાંતર શ્રેણી બને છે. સામાન્ય તફાવત $d = 2$.

S_{24} શોધવા, $n = 24, a = 5, d = 2$

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12 [10 + 46]$$

$$= 672$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો 672 થશે.

નોંધ : $a_n - a_{n-1}$

$= (3 + 2n) - [3 + 2(n - 1)]$

$= 2n - 2n + 2 = 2$

$\therefore$ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે તથા સામાન્ય તફાવત = 2

ઉદાહરણ 16 : ટીવી સેટના ઉત્પાદકે ત્રીજા વર્ષે 600 ટી.વી. અને 7 માં વર્ષે 700 ટી.વી. બનાવ્યાં છે. તે માને છે કે દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાન વધતી હોવી જોઈએ. તો

(i) પ્રથમ વર્ષનું ઉત્પાદન (ii) 10 માં વર્ષનું ઉત્પાદન

(iii) પ્રથમ 7 વર્ષમાં કુલ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા સમાન રીતે વધતી હોવાથી,

પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય... વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાંતર શ્રેણી બનાવશે.

ધારો કે n મા વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા a_n છે.

આથી, $a_3 = 600$ અને $a_7 = 700$

અથવા $a + 2d = 600$ અને $a + 6d = 700$

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને $d = 25$ અને $a = 550$ મળે છે.

આથી, પ્રથમ વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 550 હશે.

(ii) હવે, $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

આથી, 10 માં વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 775 છે.

(iii) વળી, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

આથી, પ્રથમ 7 વર્ષમાં ઉત્પાદિત ટીવીની કુલ સંખ્યા 4375 છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે માંગ્યા પ્રમાણે સરવાળો શોધો :

(i) 2, 7, 12, ... 10 પદ સુધી (ii) –37, –33, –29,... 12 પદ સુધી

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ..., 100 પદ સુધી (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$ 11 પદ સુધી

2. નીચેના સરવાળા શોધો : (સમાંતર શ્રેણી આપેલ છે.)

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) 34 + 32 + 30 + ... + 10

(iii) –5 + (–8) + (–11) + ... + (–230)

3. સમાંતર શ્રેણીમાં

(i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ આપેલ હોય, તો n અને S_n શોધો.

(ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$ આપેલ હોય, તો d અને S_{13} શોધો.

(iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ આપેલ હોય, તો a અને S_{12} શોધો.

(iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ આપેલ હોય, તો d અને a_{10} શોધો.

(v) $d = 5$, $S_9 = 75$ આપેલ હોય, તો a અને a_9 શોધો.

(vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ આપેલ હોય, તો n અને a_n શોધો.

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ આપેલ હોય, તો n અને d શોધો.

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ આપેલ હોય, તો n અને a શોધો.

(ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ આપેલ હોય, તો d શોધો.

(x) $l = 28$, $S = 144$ હોય અને પદોની સંખ્યા 9 હોય, તો a શોધો.

4. સમાંતર શ્રેણી 9, 17, 25, ... નાં કેટલાં પદનો સરવાળો 636 થાય ?

5. સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 5, અંતિમ પદ 45 અને સરવાળો 400 છે. શ્રેણીનાં પદોની સંખ્યા અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

6. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ અનુક્રમે 17 અને 350 છે. જો સામાન્ય તફાવત 9 હોય તો તેમાં કેટલાં પદ હશે અને તેમનો સરવાળો કેટલો થશે ?

7. જે સમાંતર શ્રેણીમાં $d = 7$ અને 22 મું પદ 149 હોય, તેનાં 22 પદોનો સરવાળો શોધો.

8. સમાંતર શ્રેણીનું બીજું અને ત્રીજું પદ અનુક્રમે 14 અને 18 હોય તો તેનાં પ્રથમ 51 પદોનો સરવાળો શોધો.

9. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 7 પદોનો સરવાળો 49 અને 17 મું પદ 289 હોય તો, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

10. a_n નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

સાબિત કરો કે, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. વળી, દરેકમાં પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $4n - n^2$ હોય, તો તેનું પ્રથમ પદ કયું હશે (અર્થાત્ S_1) ? પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો કેટલો હશે ? બીજું પદ કયું હશે ? આ જ રીતે ત્રીજું, 10 મું અને n મું પદ શોધો.

12. 6 વડે વિભાજ્ય પ્રથમ 40 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

13. 8 ના પ્રથમ 15 ગુણિતોનો સરવાળો શોધો.

14. 0 અને 50 વચ્ચેના અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

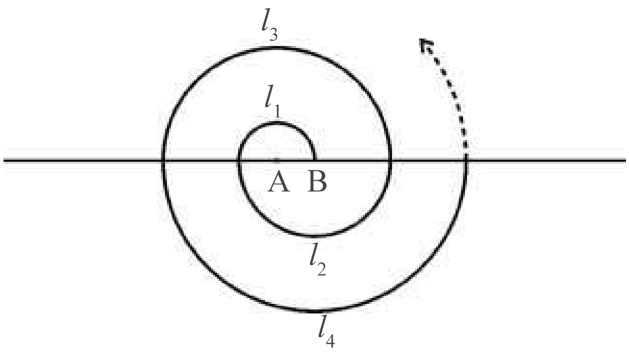
15. નિર્માણ કામ માટે થયેલ કરારમાં નિશ્ચિત તારીખ કરતાં વિલંબથી પૂરા થતા કામ માટે નીચે પ્રમાણેના દંડની જોગવાઈ છે :

પ્રથમ દિવસ માટે ₹ 200, બીજા દિવસ માટે ₹ 250, ત્રીજા દિવસ માટે ₹ 300 વગેરે. પ્રત્યેક દિવસ માટે દંડની રકમ આગળના દિવસ કરતાં ₹ 50 વધુ છે. જો કોન્ટ્રાક્ટર 30 દિવસનો વિલંબ કરે તો તેણે ભરવી પડતી દંડની રકમ શોધો.

16. કોઈ એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓના સમગ્ર શૈક્ષણિક પ્રદર્શન માટે અપાતા 7 ઈનામો માટે કુલ ₹ 700 ની જોગવાઈ કરવાની છે. જો પ્રત્યેક ઈનામ આગળના ઈનામ કરતાં ₹ 20 ઓછું હોય, તો પ્રત્યેક ઈનામની રકમ શોધો.

17. એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓ વાયુ પ્રદૂષણ ઓછું કરવા માટે શાળાની અંદર અને બહાર વૃક્ષ વાવવાનું વિચારે છે. એવું નક્કી કરાયું કે પ્રત્યેક ધોરણનો પ્રત્યેક વિભાગ તે જે ધોરણમાં ભણતા હોય તેટલાં વૃક્ષ વાવશે. દાખલા તરીકે ધોરણ I નો વિભાગ 1 વૃક્ષ, ધોરણ II નો વિભાગ 2 વૃક્ષ અને આવું ધોરણ XII સુધી ચાલશે. દરેક ધોરણમાં ત્રણ વિભાગ છે. આ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કેટલાં વૃક્ષનું વાવેતર થશે ?

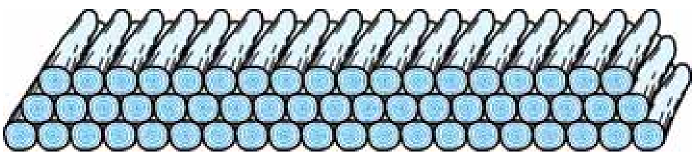
18. વારાફરતી A અને B ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક કુંતલ (Spiral) બનાવેલ છે. તેની શરૂઆત A થી થાય છે. આકૃતિ 5.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રિજ્યાઓ 0.5 સેમી, 1.0 સેમી, 1.5 સેમી, 2.0 સેમી ... હોય તો આવા 13 ક્રમિક અર્ધવર્તુળોથી બનતા કુંતલની લંબાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 5.4

[**સૂચન :** ક્રમિક અર્ધવર્તુળની લંબાઈ l_1, l_2, l_3, l_4, ... અને કેન્દ્રો અનુક્રમે A, B, A, B ... છે.]

19. લાકડાની 200 ભારીઓ નીચે પ્રમાણે ગોઠવવામાં આવે છે : તળિયાની હારમાં 20 ભારી, તેની ઉપરની હારમાં 19 ભારી, તેની ઉપરની હારમાં 18 ભારીઓ વગેરે. (જુઓ આકૃતિ 5.5.) આવી 200 ભારીઓ ગોઠવવા માટે કેટલી હાર થશે અને સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલી ભારીઓ થશે ?



આકૃતિ 5.5

20. એક બટાકા ઉપાડવાની હરીફાઈમાં આરંભ બિંદુ પર એક ડોલ રાખેલ છે અને ત્યાર બાદ તેનાથી 5મી દૂર પ્રથમ બટાકું મૂકેલ છે ત્યાર પછી દર ત્રણ મીટરે એક બટાકું સીધી રેખામાં ગોઠવેલ છે. આવાં 10 બટાકા રેખા પર મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 5.6.)

આકૃતિ 5.6

દરેક હરીફે બાલદી પાસેથી દોડી પોતાની નજીકનું બટાકું ઉપાડી, પાછા આવી બાલદીમાં નાંખવાનું છે. ત્યારબાદ આ જ પ્રમાણે બીજું, ત્રીજું એમ છેલ્લું બટાકું બાલદીમાં મૂકાય ત્યાં સુધી દોડવાનું છે. હરીફે કેટલું અંતર દોડવું પડે ?

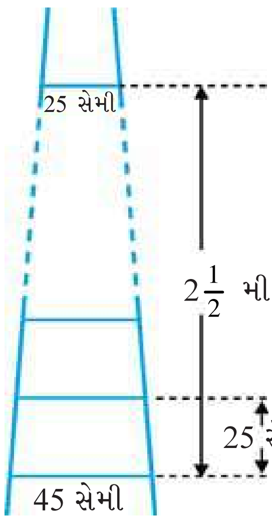
[**સૂચન :** પ્રથમ અને દ્વિતીય બટાકું ઉપાડવા હરીફ દ્વારા કપાતું અંતર (મીટરમાં) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. સમાંતર શ્રેણી 121, 117, 113, ... નું પ્રથમ ઋણ પદ કયું હશે ? (**સૂચન :** $a_n < 0$ થાય તેવો સૌથી નાનો n શોધો.)

2. કોઈ સમાંતર શ્રેણીના ત્રીજા અને સાતમાં પદનો સરવાળો 6 છે અને તેનો ગુણાકાર 8 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 16 પદનો સરવાળો શોધો.

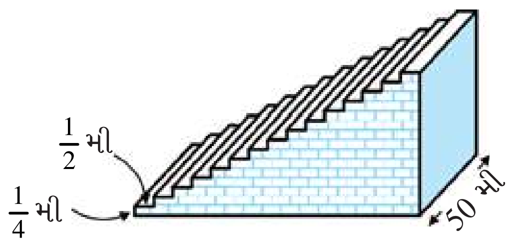
3. એક સીડીના બે ક્રમિક પગથિયાં વચ્ચેનું અંતર 25 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7). સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે અને એકધારા ઘટાડા સાથે સૌથી ઉપરના પગથિયાની લંબાઈ 25 સેમી છે. સૌથી ઉપરના અને સૌથી નીચેના પગથિયા વચ્ચેનું અંતર $2\frac{1}{2}$ મીટર હોય, તો પગથિયામાં વપરાયેલ કુલ લાકડાની લંબાઈ શોધો. [**સૂચન :** પગથિયાંની સંખ્યા $= \frac{250}{25} + 1$]



આકૃતિ 5.7

4. એક હારમાં આવેલા મકાનોને ક્રમશઃ 1 થી 49 ક્રમાંક આપેલ છે. સાબિત કરો કે એવી સંખ્યા x મળે કે જેથી તેની આગળના મકાનના ક્રમાંકોનો સરવાળો તે પછીના મકાનોનાં ક્રમાંકોના સરવાળા જેટલો થાય. x નું મૂલ્ય શોધો. [**સૂચન :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ફૂટબોલના એક મેદાનમાં 15 પગથિયાંવાળી નાની અગાસી છે. તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 50 મી છે અને તે નક્કર કોંક્રિટનાં બનાવેલ છે. દરેક પગથિયાંની ઊંચાઈ



આકૃતિ 5.8

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

$\frac{1}{4}$ મી તથા પહોળાઈ $\frac{1}{2}$ મી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.8) આ અગાસી બનાવવા માટે કુલ કેટલા ઘનફળ કોંક્રિટની જરૂર પડશે?

[**સૂચન :** પ્રથમ પગથિયું બનાવવા જરૂરી કોંક્રિટનું ઘનફળ $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ મી^{3}]

5.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું પ્રત્યેક પદ તેની આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય એવી સંખ્યાઓની યાદી **સમાંતર શ્રેણી** છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને **સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ છે.

2. આપેલ સંખ્યાઓની યાદી $a_1, a_2, a_3, \ldots$ માટે જો $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, સમાન સંખ્યા આવે અર્થાત્ જો તમામ ભિન્ન k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન હોય, તો તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી કહેવાય.

3. સમાંતર શ્રેણી માટે જો પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તેનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1)\, d$ દ્વારા મળે.

4. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d\,]$ દ્વારા મળે.

5. સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ (ધારો કે n મું પદ) l હોય તો બધાં જ પદોનો સરવાળો

$S_n = \frac{n}{2}\,(a + l)$ દ્વારા મળે.

વાચકને નોંધ

જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $b = \frac{a+c}{2}$ અને b ને a તથા c નો સમાંતર મધ્યક કહેવાય.

ત્રિકોણ 6

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને તેના ઘણા ગુણધર્મોથી પરિચિત થયાં છો. ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતા વિશે વિગતવાર અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જ્યારે, બે આકૃતિઓના આકાર અને કદ સમાન હોય ત્યારે, તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ છે તેવું કહેવાય. આ પ્રકરણમાં આપણે જેના આકાર સમાન હોય, પરંતુ તેમનાં કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તેવી આકૃતિઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ***જે બે આકૃતિઓના આકાર સમાન હોય (કદ સમાન હોય તે જરૂરી નથી) તેમને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.*** ખાસ કરીને, આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની ચર્ચા કરીશું અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ અગાઉ શીખેલ પાયથાગોરસ પ્રમેયની સરળ સાબિતી આપવા માટે કરીશું.

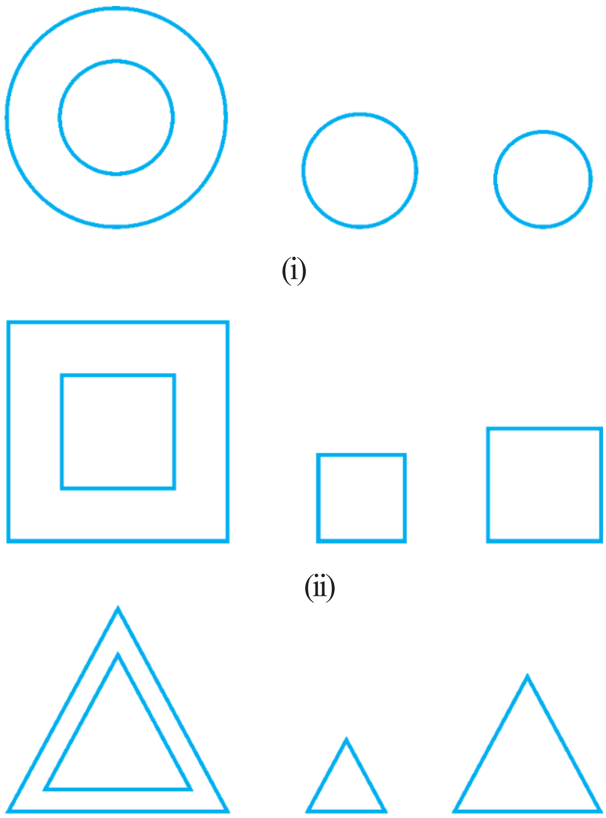
તમે અનુમાન કરી શકો કે પર્વતો (જેમકે, માઉન્ટ એવરેસ્ટ)ની ઊંચાઈઓ અને દૂરની વસ્તુઓ (જેમકે, ચંદ્ર) નાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય ? શું તમને એવું લાગે છે કે આ માપો માપપટ્ટીથી સીધાં જ માપવામાં આવ્યા છે? ખરેખર

તો આ બધી ઊંચાઈઓ અને અંતરો આકૃતિઓની સમરૂપતાના સિદ્ધાંત પર આધારિત પરોક્ષ માપનની સંકલ્પનાથી શોધવામાં આવ્યાં છે. (જુઓ ઉદાહરણ 7, સ્વાધ્યાય 6.3 નો પ્રશ્ન 15 અને આ પુસ્તકનું પ્રકરણ 8 અને 9)

6.2 સમરૂપ આકૃતિઓ

તમે ધોરણ IX માં જોયું છે કે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં તમામ વર્તુળો એકરૂપ હોય છે. સમાન બાજુવાળા બધા ચોરસો એકરૂપ હોય છે અને સમાન બાજુવાળા બધા સમબાજુ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

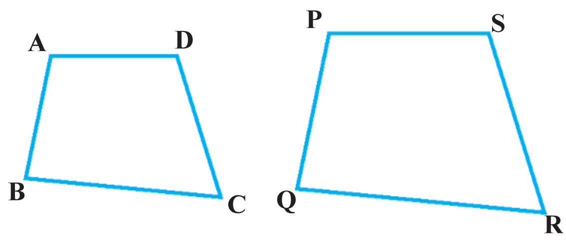
હવે આપણે કોઈ બે (અથવા વધારે) વર્તુળો વિશે વિચાર કરીએ. (જુઓ, આકૃતિ 6.1 (i)). તેઓ એકરૂપ છે ? તે બધાની ત્રિજ્યા સમાન ન હોવાથી તેઓ એકબીજાને એકરૂપ નથી. તે પૈકી કેટલાંક એકરૂપ છે અને કેટલાંક નથી. પરંતુ, તે બધાના આકાર સમાન છે. તેથી તે બધી આકૃતિઓને આપણે સમરૂપ આકૃતિઓ કહીશું. બે સમરૂપ આકૃતિઓના આકાર સરખા હોય છે, પરંતુ કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તે શક્ય છે. તેથી બધાં વર્તુળો સમરૂપ છે. બે (અથવા વધારે) ચોરસ કે બે (અથવા વધારે) સમબાજુ ત્રિકોણ વિશે તમને શું લાગે છે ? જુઓ આકૃતિ 6.1 (ii) અને (iii) ? જેમ વર્તુળોમાં જોયું, તેમ અહીં બધા ચોરસ અને બધા સમબાજુ ત્રિકોણ પણ સમરૂપ છે.



આકૃતિ 6.1

ઉપરની ચર્ચા પરથી કહી શકાય ***બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ આકૃતિઓ છે, પરંતુ બધી સમરૂપ આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી.***

એક વર્તુળ અને એક ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? એક ત્રિકોણ અને ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ તમે તેમની અનુરૂપ આકૃતિઓ (જુઓ આકૃતિ 6.1.) જોઈને જ આપી શકશો.

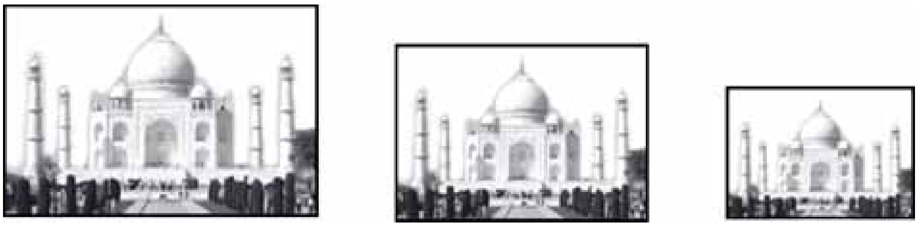


આકૃતિ 6.2

સ્પષ્ટ રીતે, આ આકૃતિઓ સમરૂપ નથી. (શા માટે ?)

બે ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS વિશે શું કહી શકાય ? (આકૃતિ 6.2) તે સમરૂપ છે ? આ આકૃતિઓ સમરૂપ લાગે છે, પરંતુ તેમના વિશે ચોક્કસ ન કહી શકાય. તેથી એ જરૂરી બને છે કે, આકૃતિઓની સમરૂપતાની કોઈ વ્યાખ્યા હોય અને વ્યાખ્યા આધારિત કેટલાક માપદંડ નક્કી કરી શકાય કે આપેલી બે આકૃતિઓ સમરૂપ છે કે નહિ.

આના માટે આકૃતિ 6.3 માં આપેલ ચિત્રો જુઓ.



આકૃતિ 6.3

તમે તરત જ કહેશો કે તે ચિત્રો એક જ સ્મારક (તાજમહેલ)નાં છે પરંતુ, તેમનાં કદ ભિન્ન છે. તમે કહેશો કે આ ત્રણ ચિત્રો સમરૂપ છે ? હા, તે સમરૂપ છે.

કોઈ એક જ વ્યક્તિનાં 10 વર્ષની ઉંમરનાં તેમજ 40 વર્ષની ઉંમરના એક જ કદનાં બે ચિત્રો માટે શું કહી શકાય ? આ ચિત્રો સમરૂપ છે ? આ ચિત્રોનાં કદ સમાન છે, પરંતુ સ્પષ્ટપણે તેમના આકાર સમાન નથી. તેથી તે સમરૂપ નથી.

જ્યારે કોઈ તસવીરકાર કોઈ એક નેગેટિવમાંથી જુદા-જુદા કદના ફોટાની નકલ કાઢે છે, ત્યારે તે શું કરે છે ? તમે ટિકિટ પ્રમાણેનું કદ, પાસપોર્ટ પ્રમાણેનું કદ અને પોસ્ટકાર્ડ પ્રમાણેના કદની નકલો વિશે સાંભળ્યું હશે. તે સામાન્ય રીતે 35 મિમિ પર નાના કદની ફિલ્મ જેમ ચિત્રો લે છે અને પછી તેની 45 મિમિ (કે 55 મિમિ)ના કદમાં મોટવણી કરે છે. આમ, જો આપણે નાની નકલના કોઈ રેખાખંડને અનુરૂપ મોટી નકલના સંગત રેખાખંડ લઈએ તો તે મોટી નકલના અનુરૂપ રેખાખંડના $\frac{45}{35}$ (કે $\frac{55}{35}$) ગણા થશે.

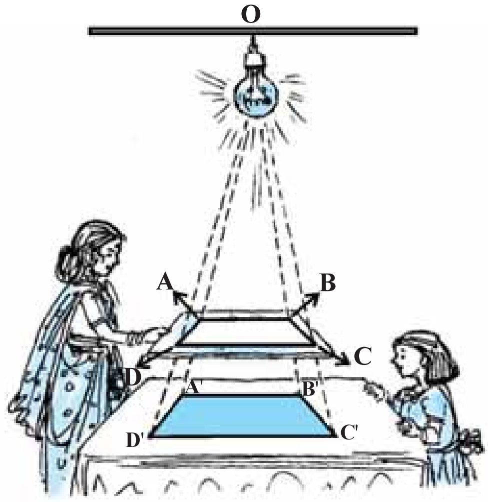
આનો અર્થ ખરેખર એવો છે કે નાની નકલના દરેક રેખાખંડને 35 : 45 (કે 35 : 55) ગુણોત્તરમાં મોટો કરી શકાય છે. એવું પણ કહી શકાય કે મોટી નકલના દરેક રેખાખંડને 45 : 35 (કે 55 : 35) ગુણોત્તરમાં નાનો બનાવી શકાય. વધુમાં, જો તમે જુદા-જુદા કદની બે નકલોના અનુરૂપ રેખાખંડોના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) વિશે વિચારો તો તેમના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) હંમેશાં સમાન છે. બે આકૃતિઓ અને વિશેષ કરીને બે બહુકોણોની સમરૂપતાનો આ સાર છે. આપણે કહી શકીએ :

જો (i) સમાન બાજુવાળા બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો તે બહુકોણો સમરૂપ છે.

આપણે ધ્યાન આપીએ કે બહુકોણ માટે સંગત બાજુઓના ગુણોત્તર ને ***સ્કેલમાપન (નિર્દેશક અપૂર્ણાંક)*** કહેવામાં આવે છે. તમે દુનિયાનો નકશો (જેમ કે, વૈશ્વિક નકશો) અને મકાનોના બાંધકામ માટે બનાવેલી રૂપરેખા વિશે સાંભળ્યું હશે. તે યોગ્ય સ્કેલમાપન અને ચોક્કસ રૂઢિને ધ્યાનમાં રાખી બનાવવામાં આવે છે.

આકૃતિઓની સમરૂપતા વધારે સ્પષ્ટ રીતે સમજવા, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક પ્રકાશિત બલ્બને છત પરના બિંદુ O પર લગાડો અને તેની બરાબર નીચે વર્ગનું ટેબલ ગોઠવો. ચાલો આપણે એક સીધા પૂંઠામાંથી એક બહુકોણ, જેમકે, ચતુષ્કોણ ABCD કાપીએ અને આ પૂંઠાને પ્રકાશિત બલ્બ અને ટેબલ વચ્ચે ટેબલની સપાટીને સમાંતર ગોઠવીએ. તેથી ABCDનો પડછાયો ટેબલ પડશે. આ પડછાયાની બહારની રેખા A′B′C′D′ આંકી લો. (જુઓ આકૃતિ 6.4.)



આકૃતિ 6.4

આપણે નોંધ કરીએ કે ચતુષ્કોણ A'B'C'D' એ ચતુષ્કોણ ABCD નું વિસ્તૃત (કે વિપુલ) સ્વરૂપ છે અને તે પ્રકાશ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે એ પ્રકાશના ગુણધર્મને કારણે છે. તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે A' કિરણ OA પર છે. B' કિરણ OB પર છે, C' કિરણ OC પર છે અને D' કિરણ OD પર છે. આથી ચતુષ્કોણો A'B'C'D' અને ABCD ના આકાર સરખા છે, પરંતુ કદ જુદાં છે.

તેથી ચતુષ્કોણો, A'B'C'D' અને ચતુષ્કોણ ABCD સમરૂપ છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે ચતુષ્કોણ ABCD એ ચતુષ્કોણ A'B'C'D' ને સમરૂપ છે.

આપણે એ પણ નોંધીશું કે, શિરોબિંદુ A' એ શિરોબિંદુ A ને સંગત છે, શિરોબિંદુ B' એ શિરોબિંદુ B ને સંગત છે, શિરોબિંદુ C' એ શિરોબિંદુ C ને સંગત છે અને શિરોબિંદુ D' એ શિરોબિંદુ D ને સંગત છે.

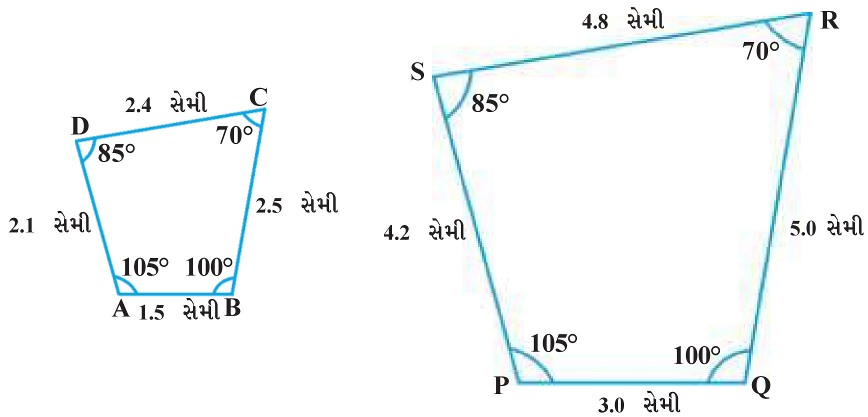
સંકેતમાં આ સંગતતાઓને $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$, $D' \leftrightarrow D$ થી દર્શાવી શકાય. હકીકતમાં, બે ચતુષ્કોણોના ખૂણાઓ તથા બાજુઓ માપીને, તમે ચકાસી શકો કે,

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ અને

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$

આ પરથી ફરીથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ***જો (i) બે બહુકોણના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની બધી અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ થાય.***

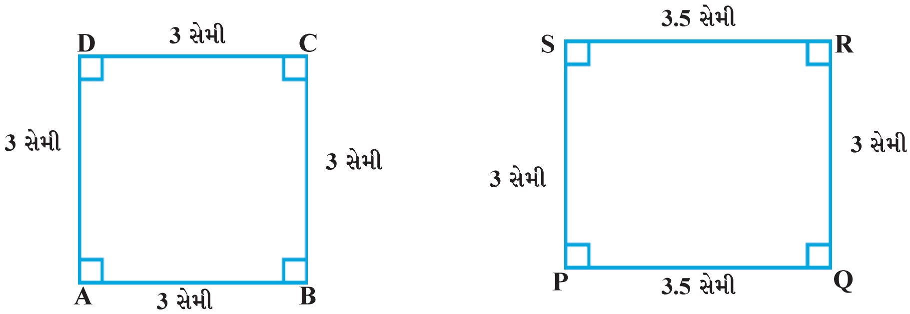
ઉપર પ્રમાણે, તમે સહેલાઈથી કહી શકશો કે આકૃતિ 6.5 માંના ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS સમરૂપ છે.



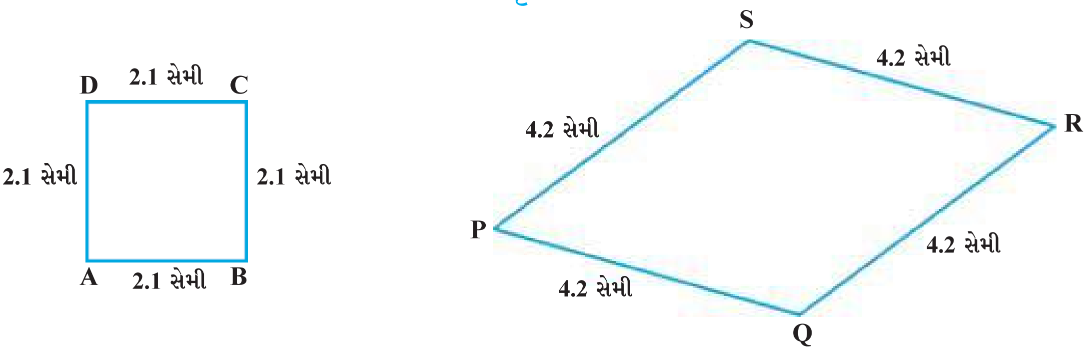
આકૃતિ 6.5

નોંધ : તમે જોઈ શકશો કે, જો એક બહુકોણ બીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય અને બીજો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય, તો પહેલો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ છે.

તમે નોંધ્યું હશે કે આકૃતિ 6.6 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને લંબચોરસ)માં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે, પરંતુ, તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન નથી.



આકૃતિ 6.6



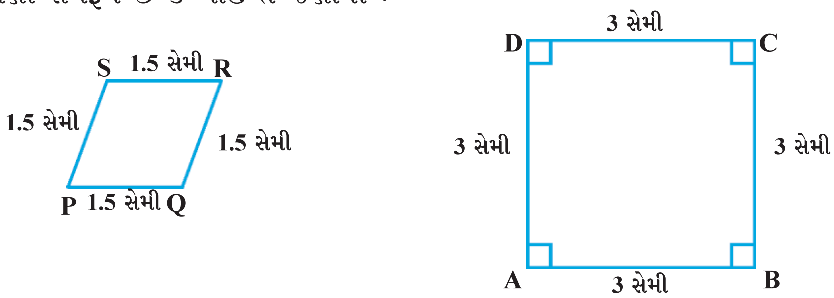
આકૃતિ 6.7

એ જ રીતે તમે નોંધ્યું હશે કે, આકૃતિ 6.7 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ)ની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન છે. પરંતુ, તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન નથી. ફરીથી બે બહુકોણો (ચતુષ્કોણો) સમરૂપ નથી.

આમ, બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની ઉપર દર્શાવેલી બે શરતો (i) અને (ii) પૈકી કોઈ એકના પાલન થવાથી બહુકોણો સમરૂપ છે તેમ કહી શકાય નહીં.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. કૌંસમાં આપેલ શબ્દો પૈકી સાચા શબ્દનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગા પૂરો :
   (i) બધાં વર્તુળો .... છે. (એકરૂપ, સમરૂપ)
   (ii) બધા ચોરસો .... છે. (સમરૂપ, એકરૂપ)
   (iii) બધા .... ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ)
   (iv) જો (અ) બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ .... હોય. (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ .... હોય. (સમાન, સમપ્રમાણમાં) તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.
2. નીચેની જોડીઓનાં બે જુદાં-જુદાં ઉદાહરણો આપો :
   (i) સમરૂપ આકૃતિઓ (ii) સમરૂપ ન હોય તેવી આકૃતિઓ
3. નીચેના ચતુષ્કોણો સમરૂપ છે કે નહિ તે જણાવો :



આકૃતિ 6.8

6.3 ત્રિકોણોની સમરૂપતા

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા વિશે શું કહી શકો ?

તમને યાદ હશે કે ત્રિકોણ પણ બહુકોણ છે. તેથી સમરૂપતા માટેની શરતો બે ત્રિકોણની સમરૂપતા માટે પણ દર્શાવી શકાય. તે આ પ્રમાણે છે.

જો (i) બે ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (એટલે કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) તો, તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

Thales
(B.C.E.640-B.C.E.546)

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમને સમકોણિક ત્રિકોણો કહેવાય છે. પ્રખ્યાત ગ્રીક ગણિતજ્ઞ **થેલ્સે** બે સમકોણિક ત્રિકોણો વિશે અગત્યનું પરિણામ આપ્યું હતું. તે નીચે પ્રમાણે છે :

બે સમકોણિક ત્રિકોણોમાં પ્રત્યેક બે અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય છે.

એવું માનવામાં આવે છે કે તેના માટે તેણે ***સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયના*** પરિણામનો ઉપયોગ કર્યો હતો. (તે હવે ***થેલ્સના પ્રમેય*** તરીકે જાણીતું છે.)

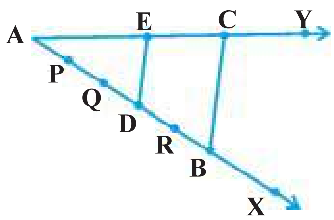
સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયને સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 2 : કોઈ પણ ખૂણો (XAY) દોરો અને તેના ભુજ AX પર બિંદુઓ (કહો કે, પાંચ બિંદુઓ) P, Q, D, R અને B એવી રીતે દર્શાવો કે,

AP = PQ = QD = DR = RB.

હવે, B માંથી ભુજ AYને C માં છેદતી કોઈ રેખા દોરો (જુઓ આકૃતિ 6.9.)

તદુપરાંત, બિંદુ D માંથી AC ને E માં છેદતી તથા BC ને સમાંતર હોય તેવી રેખા દોરો.



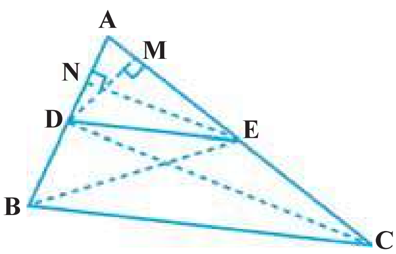
આકૃતિ 6.9

તમારી રચના પરથી તમે અવલોકન કર્યું $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? AE અને EC માપો. $\frac{AE}{EC}$ માટે શું કહી શકાય ?

અવલોકન કરો કે, $\frac{AE}{EC}$ પણ $\frac{3}{2}$ થશે.

આમ, તમે જોઈ શકશો કે, Δ ABCમાં, DE || BC અને $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. શું આ યોગાનુયોગ માત્ર છે ? ના, તે નીચેના પ્રમેયના કારણે છે. (***આ પ્રમેય સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતું છે.***)

પ્રમેય 6.1 : જો ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તે બાજુઓ પર કપાતા રેખાખંડો તે બાજુઓનું સમપ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 6.10

સાબિતી : અહીં આપેલું છે કે, ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા બાકીની બે બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.10.)

આપણે સાબિત કરવાનું છે કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

BE અને CD જોડો અને DM ⊥ AC અને EN ⊥ AB દોરો.

હવે, Δ ADE નું ક્ષેત્રફળ $(= \frac{1}{2}$ પાયો × વેધ$) = \frac{1}{2}$ AD × EN

ધોરણ IXમાં શીખ્યાં હતાં તે પ્રમાણે Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ ADE વડે દર્શાવાય છે, તે યાદ કરો.

તેથી, $ADE = \frac{1}{2}\ AD \times EN$

એ જ રીતે $BDE = \frac{1}{2}\ DB \times EN$

$ADE = \frac{1}{2}\ AE \times DM$ અને $DEC = \frac{1}{2}\ EC \times DM$

તેથી, $\frac{ADE}{BDE} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN}$

$= \frac{AD}{DB}$ (1)

અને $\frac{ADE}{DEC} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM}$

$= \frac{AE}{EC}$ (2)

હવે નોંધો કે, Δ BDE અને Δ DEC એક જ પાયા DE પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડ BC અને DE વચ્ચે આવેલાં છે.

તેથી, BDE = DEC (3)

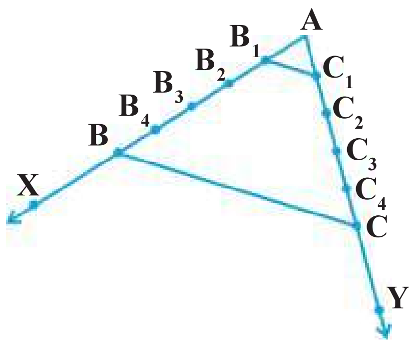
તેથી, (1), (2) અને (3) પરથી

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ■

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? (પ્રતીપના અર્થ માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ.)

આ ચકાસવા માટે, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : તમારી નોંધપોથીમાં ∠XAY દોરો અને કિરણ AX પર, બિંદુઓ B_1, B_2, B_3, B_4 અને B એવી રીતે લો કે, જેથી $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.



આકૃતિ 6.11

એ જ રીતે કિરણ AY પર બિંદુઓ C_1, C_2, C_3, C_4 અને C એવી રીતે લો કે, જેથી $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. હવે, B_1C_1 અને BC જોડો (જુઓ આકૃતિ 6.11.)

જુઓ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (દરેક $\frac{1}{4}$ બરાબર છે.)

તમે એ પણ જોઈ શકશો કે રેખાઓ B_1C_1 અને BC એકબીજાને સમાંતર છે.

એટલે કે $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

એ જ રીતે, B_2C_2, B_3C_3 અને B_4C_4 જોડીને જોઈ શકો કે,

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(=\frac{2}{3}\right)$ અને $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

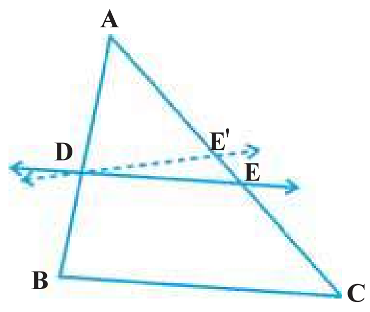
$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(=\frac{3}{2}\right)$ અને $B_3C_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(=\frac{4}{1}\right)$ અને $B_4C_4 \parallel BC$ (4)

(1), (2), (3) અને (4) પરથી જોઈ શકાય છે કે જો એક રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.

તમે આ પ્રવૃત્તિનું કોઈ અલગ માપનો ખૂણો XAY દોરી અને તેના ભુજ AX અને AY પર ગમે તેટલા સમાન ભાગ પાડીને પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે સમાન પરિણામ મળશે. આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળે. તે પ્રમેય 6.1નું પ્રતીપ છે.

પ્રમેય 6.2 : ***જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.***



આકૃતિ 6.12

આ પ્રમેય સાબિત કરવા કોઈ રેખા DE એવી લો જેથી $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ થાય. અને ધારો કે, DE એ BC ને સમાંતર નથી. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)

જો DE, BC ને સમાંતર ન હોય તો, D માંથી BC ને સમાંતર રેખા DE' દોરો.

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

તેથી, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

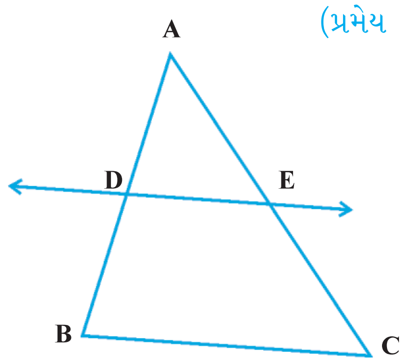
ઉપરના પરિણામમાં બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં, જોઈ શકાય કે, E અને E' એક જ હોવા જોઈએ. (શા માટે ?)

હવે, જેમાં ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 1 : જો કોઈ એક રેખા Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે તથા BC ને સમાંતર છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (જુઓ, આકૃતિ 6.13.)

ઉકેલ : DE $\parallel$ BC (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (પ્રમેય 6.1)



આકૃતિ 6.13

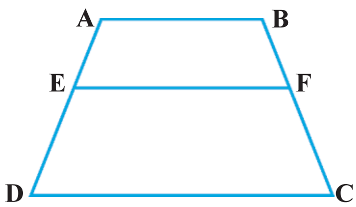
અથવા $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

અથવા $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

અથવા $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ઉદાહરણ 2 : સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB $\parallel$ DC છે. બિંદુઓ E અને F અનુક્રમે તેની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ AD અને BC પર એવાં છે કે, જેથી EF, AB ને સમાંતર હોય. (જુઓ આકૃતિ 6.14.) સાબિત કરો $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

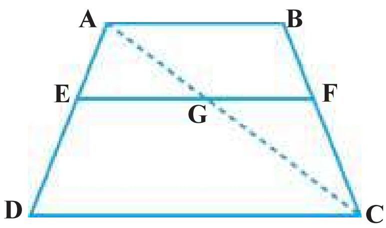


આકૃતિ 6.14

ઉકેલ : EF ને G માં છેદતી રેખા AC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.15)

AB $\parallel$ DC અને EF $\parallel$ AB (આપેલ છે.)

તેથી, EF $\parallel$ DC (કોઈ એક રેખાને સમાંતર રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.)



આકૃતિ 6.15

હવે, Δ ADC માં,

EG $\parallel$ DC (કારણ કે, EF $\parallel$ DC)

તેથી, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (પ્રમેય 6.1) (1)

એ જ રીતે, Δ CAB પરથી,

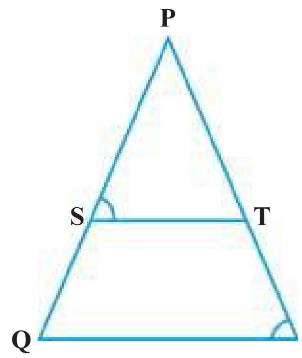
$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

એટલે કે, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.16 માં, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ અને $\angle PST = \angle PRQ$ તો, સાબિત કરો કે Δ PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 6.16

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

તેથી, ST || QR (પ્રમેય 6.2)

તેથી, $\angle PST = \angle PQR$ (અનુકોણો) (1)

એવું પણ આપેલ છે કે

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

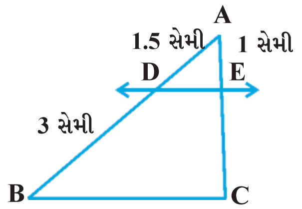
તેથી, $\angle PRQ = \angle PQR$ ((1) અને (2) પરથી)

તેથી, PQ = PR (સમાન ખૂણાની સામેની બાજુ)

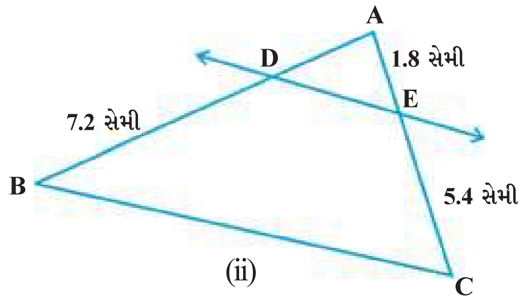
એટલે કે, PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.17 (i) અને (ii) માં, DE || BC. (i) માં EC શોધો. (ii) માં AD શોધો.



(i)



(ii)

આકૃતિ 6.17

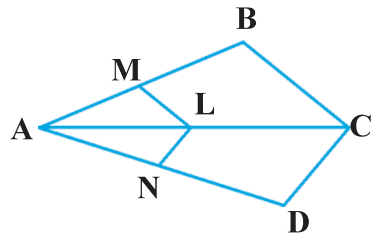
2. બિંદુઓ E અને F એ Δ PQRની બાજુઓ અનુક્રમે PQ અને PR પર આવેલાં છે. નીચેના દરેક વિકલ્પમાં EF || QR છે કે કેમ તે જણાવો :

   (i) PE = 3.9 સેમી, EQ = 3 સેમી, PF = 3.6 સેમી અને FR = 2.4 સેમી

   (ii) PE = 4 સેમી, QE = 4.5 સેમી, PF = 8 સેમી અને RF = 9 સેમી

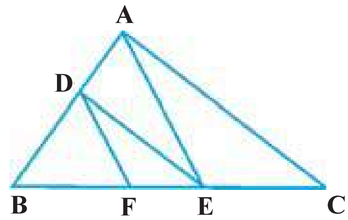
   (iii) PQ = 1.28 સેમી, PR = 2.56 સેમી, PE = 0.18 સેમી
   અને PF = 0.36 સેમી

3. આકૃતિ 6.18 માં, જો LM || CB અને LN || CD હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.



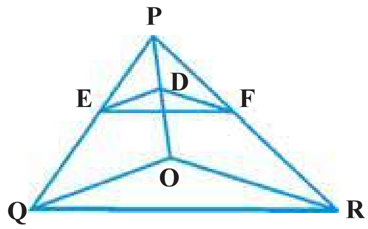
આકૃતિ 6.18

4. આકૃતિ 6.19 માં, જો DE || AC અને DF || AE હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.



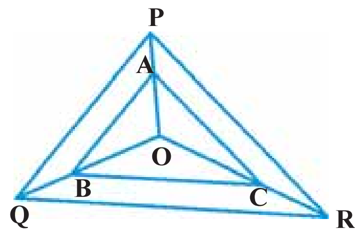
આકૃતિ 6.19

5. આકૃતિ 6.20 માં, DE || OQ અને DF || OR. સાબિત કરો EF || QR.



આકૃતિ 6.20

6. આકૃતિ 6.21 માં AB || PQ અને AC || PR બને તે રીતે બિંદુઓ A, B અને C અનુક્રમે OP, OQ અને OR પર આવેલાં છે. તો સાબિત કરો કે, BC || QR.



આકૃતિ 6.21

7. પ્રમેય 6.1 નો ઉપયોગ કરીને, સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની એકબાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા, ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે. (યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

8. પ્રમેય 6.2 નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે. (યાદ કરો તમે ધોરણ IXમાં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

9. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે અને તેથી $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ થાય છે, તો સાબિત કરો કે, ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

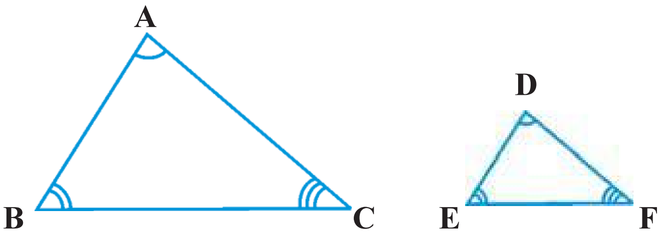
6.4 ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત

અગાઉના વિભાગમાં, આપણે જોયું છે કે જો (i) બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

એટલે કે, Δ ABC અને Δ DEF માં

જો (i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, તો Δ ABC અને Δ DEF ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (જુઓ આકૃતિ 6.22.)



આકૃતિ 6.22

અહીં, તમે જોશો કે A ને સંગત D, B ને સંગત E અને C ને સંગત F છે. સંકેતમાં આ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' એમ લખીશું અને તેને 'ત્રિકોણ ABC સમરૂપ ત્રિકોણ DEF' એમ વાંચીશું. સંકેત ~ નો અર્થ છે 'ને સમરૂપ છે.' યાદ કરો ધોરણ IX માં સંકેત ≅ નો ઉપયોગ 'ને એકરૂપ છે.' તેવું દર્શાવવા કરેલો.

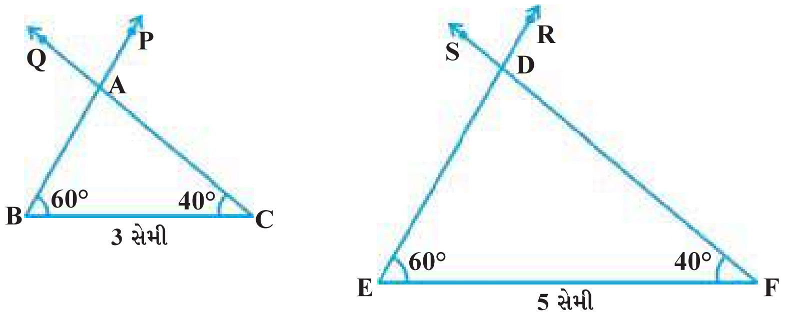
> એ નોંધવું પડશે કે જેમ બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા દર્શાવી છે એમ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને તેના શિરોબિંદુઓની સાચી સંગતતાના સંકેતમાં દર્શાવીને અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, આકૃતિ 6.22 ના ત્રિકોણો ABC અને DEF માટે આપણે $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ કે $\Delta ABC \sim \Delta FED$ લખી શકતા નથી. તેમ છતાં આપણે $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ લખી શકીએ.

હવે સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન થાય.

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા ચકાસવા, કહો કે, ABC અને DEF માટે તેમના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓની સમાનતાનો સંબંધ ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$) અને બધી જ અનુરૂપ બાજુઓના સમાન ગુણોત્તરોની સમાનતાનો સંબંધ $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ હંમેશાં ચકાસવો જરૂરી છે ?

ચાલો વિચાર કરીએ. તમને યાદ હશે કે ધોરણ IX માં તમે બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત પૈકી બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત જેમાં બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગો (કે ઘટકો)ની ફક્ત ત્રણ જોડ સમાયેલી હતી. અહીં આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે સમાયેલા સિદ્ધાંત માટે ઘટકોની છ જોડના બદલે ઓછી સંખ્યામાં અનુરૂપ ઘટકોની જોડના સબંધમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંત મેળવીએ. હવે, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 4 : બે જુદી-જુદી લંબાઈના રેખાખંડો BC અને EF અનુક્રમે 3 સેમી અને 5 સેમી લંબાઈના દોરો. ત્યારબાદ અનુક્રમે બિંદુ B અને C પર 60° અને 40° માપના ખૂણાઓ PBC અને QCB રચો. ઉપરાંત, બિંદુઓ E અને F પર અનુક્રમે 60° અને 40° ના ખૂણાઓ REF અને SFE રચો. (જુઓ આકૃતિ 6.23.)



આકૃતિ 6.23

ધારો કે કિરણો BP અને CQ એકબીજાને A માં છેદે છે. અને કિરણો ER અને FS એકબીજાને D માં છેદે છે.

ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, તમે જોશો કે, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F અને ∠A = ∠D. એટલે કે, આ બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેમની અનુરૂપ બાજુઓ માટે શું કહી શકાય ?

તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ માટે શું કહી શકો ? AB, DE, CA અને FD માપીને તમે જોઈ શકશો કે, $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ પણ 0.6 થાય છે. (અથવા જો માપવામાં કોઈ ક્ષતિ હોય તો 0.6ની નજીક છે.)

આમ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

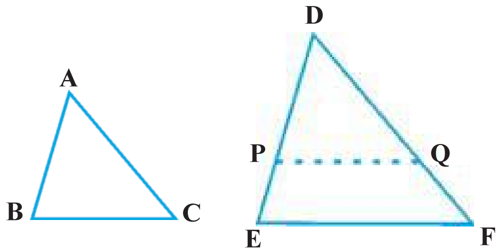
તમે, અનુરૂપ ખૂણાઓની જોડીઓ સમાન હોય તેવા બીજા ત્રિકોણો રચીને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો. દરેક સમયે તમે જોશો કે તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે. (અથવા સમપ્રમાણમાં છે.)

આ પ્રવૃત્તિથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.3 : *જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય (અથવા બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) અને તેથી તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.*

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની ખૂખૂખૂ (ખૂણો-ખૂણો-ખૂણો) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેયને ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, ∠A = ∠D, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F લઈ સાબિત કરી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.24.)



આકૃતિ 6.24

DP = AB અને DQ= AC દોરો અને PQ જોડો.

તેથી, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (કેમ ?)

આના પરથી, ∠B = ∠P = ∠E અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (કેમ ?)

એટલે કે, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (કેમ ?)

એ જ રીતે, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ અને તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

નોંધ : જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાના ગુણધર્મ પ્રમાણે તેમનો ત્રીજો ખૂણો પણ સમાન થાય. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતાની શરતને આમ લખી શકાય.

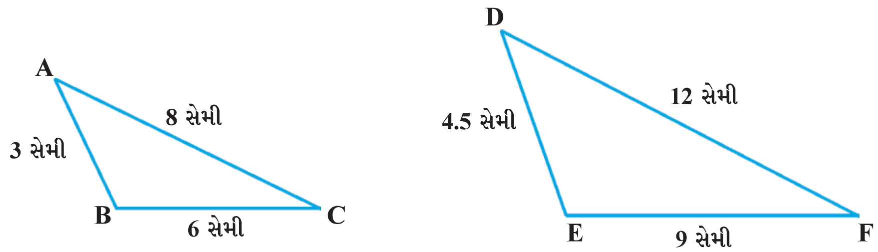
જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આ શરતને બે ત્રિકોણો માટેની સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

તમે જોયું હશે કે, જો કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના ત્રણે ય ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય (ગુણોત્તરો સમાન હોય છે.) આના પ્રતીપ વિધાન માટે શું કહી શકાય ? શું પ્રતીપ સાચું છે ?

બીજા શબ્દોમાં, જો કોઈ એક ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બાજુઓને સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેના અનુરૂપ ખૂણાઓ પણ એકરૂપ હોય છે તે સાચું છે ?

તે એક પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોઈએ.

પ્રવૃત્તિ 5 : બે ત્રિકોણો ABC અને DEF એવાં દોરો કે જેમાં, AB = 3 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 8 સેમી, DE = 4.5 સેમી, EF = 9 સેમી અને FD = 12 સેમી (જુઓ આકૃતિ 6.25.)



આકૃતિ 6.25

તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ થશે. (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.)

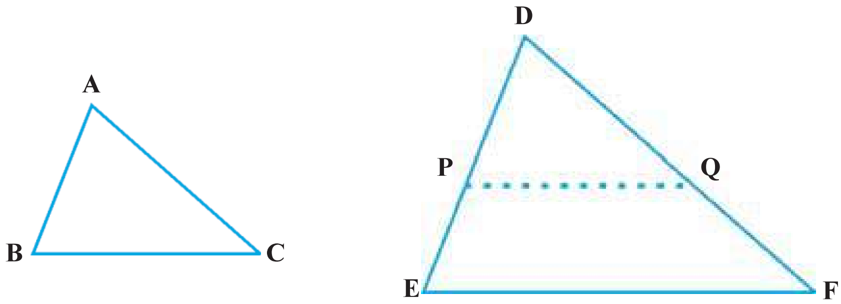
હવે, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ અને $\angle F$ માપો અને તમે જોઈ શકશો કે,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ એટલે કે, બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે.

બીજા આવા કેટલાક ત્રિકોણો (જેની બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય) લઈને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી જુઓ. દરેક વખતે જોઈ શકાશે તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેના પરથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.4 : જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણની બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના સમપ્રમાણમાં હોય (એટલે કે, ગુણોત્તરો સમાન હોય), તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય. આ શરત બે ત્રિકોણો માટે બાબાબા (બાજુ-બાજુ-બાજુ) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (જુઓ આકૃતિ 6.26) લઈને સિદ્ધ કરી શકાય.



આકૃતિ 6.26

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\angle P = \angle E$ અને $\angle Q = \angle F$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (કેમ ?)

તેથી, BC = PQ (કેમ ?)

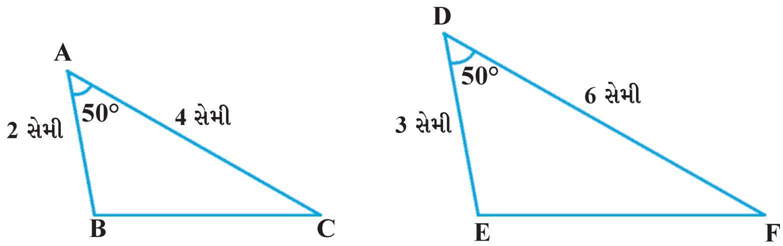
આમ, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ (કેવી રીતે ?)

નોંધ : તમને યાદ હશે કે બે બહુકોણો સમરૂપ છે તે માટે બે શરતો પૈકી કોઈ એક (i) અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. (ii) અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે તે પર્યાપ્ત નથી. તેમ છતાં પ્રમેય 6.3 અને 6.4ના આધારે તમે હવે કહી શકશો કે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા દર્શાવવા માટે બંને શરતો ચકાસવી જરૂરી નથી. તેમાં એક શરત પરથી બીજી શરત સિદ્ધ થાય.

હવે આપણે ધોરણ IX માં જેનો અભ્યાસ કર્યો હતો, બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા વિશેની જુદી-જુદી શરતો યાદ કરીએ. તમે કદાચ બાબાબા સમરૂપતાની બાબાબા એકરૂપતા સાથે સરખામણી કરી હશે. આ પરિણામ આપણને ત્રિકોણોની સમરૂપતાને ત્રિકોણોની એકરૂપતા સાથે સરખાવવા સૂચવે છે. આના માટે એક પ્રવૃત્તિ કરીએ.

પ્રવૃત્તિ 6 : જેમાં, AB = 2 સેમી, $\angle A = 50°$, AC = 4 સેમી, DE = 3 સેમી, $\angle D = 50°$ અને DF = 6 સેમી હોય તેવા બે ત્રિકોણો ABC અને DEF દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.27.)



આકૃતિ 6.27

અહીં, તમે જોયું હશે કે $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.) અને $\angle A$ (બાજુઓ AB અને ACનો અંતર્ગત ખૂણો છે) = $\angle D$ (બાજુઓ DE અને DFનો અંતર્ગત ખૂણો છે.) એટલે કે, કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો

બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન છે અને જે બાજુઓને અંતર્ગત આ ખૂણાઓ છે તેમનો ગુણોત્તર સમાન છે. (એટલે કે તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય.)

હવે, આપણે ∠B, ∠C, ∠E અને ∠F માપીએ, તમે જોશો કે, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F. એટલે કે, ∠A = ∠D, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતા પરથી, Δ ABC ~ Δ DEF.

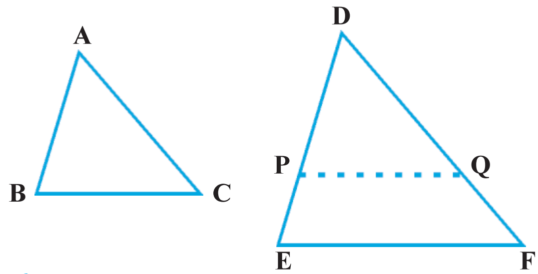
તમે જેમાં કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને જે ત્રિકોણની બાજુઓને આપેલા ખૂણા અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય એવા બીજા ત્રિકોણો દોરીને પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો.

દરેક સમયે, તમે જોશો કે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. તેથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત આ પ્રમાણે મળે છે.

પ્રમેય 6.5 : ***જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.***

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેના બાખૂબા (બાજુ-ખૂણો-બાજુ) નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

અગાઉની જેમ, આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) અને ∠A = ∠D લઈને સાબિત કરી શકાય. (જુઓ આકૃતિ 6.28.)



આકૃતિ 6.28

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

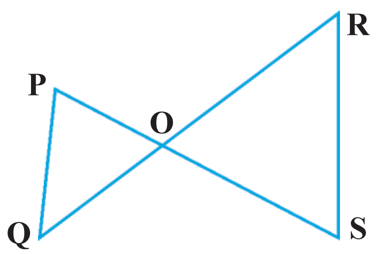
હવે, PQ || EF અને Δ ABC ≅ Δ DPQ (કેવી રીતે ?)

તેથી, ∠A = ∠D, ∠B = ∠P અને ∠C = ∠Q

તેથી, Δ ABC ~ Δ DEF (કેમ ?)

હવે, આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.29 માં, જો PQ || RS તો સાબિત કરો કે ΔPOQ ~ ΔSOR



આકૃતિ 6.29

ઉકેલ : PQ || RS (આપેલ છે.)

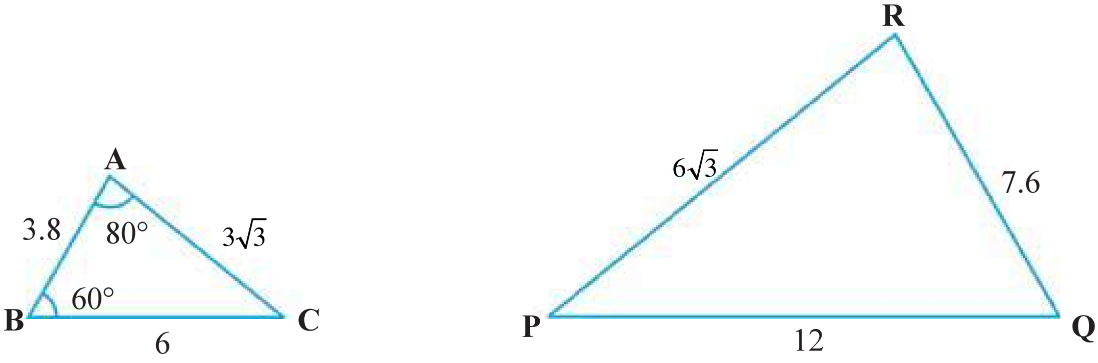
તેથી, ∠P = ∠S (યુગ્મકોણો)

અને ∠Q = ∠R

તેમજ, $\angle POQ = \angle SOR$ (અભિકોણો)

તેથી, $\Delta\ POQ \sim \Delta\ SOR$ (ખૂખૂખૂ સમરૂપતા)

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 6.30 નું નિરીક્ષણ કરો અને $\angle P$ શોધો.



આકૃતિ 6.30

ઉકેલ : $\Delta\ ABC$ અને $\Delta\ PQR$માં,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},\ \text{અને}\ \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

એટલે કે, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

તેથી, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ RQP$ (બાબાબા સમરૂપતા)

$\therefore\ \angle C = \angle P$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

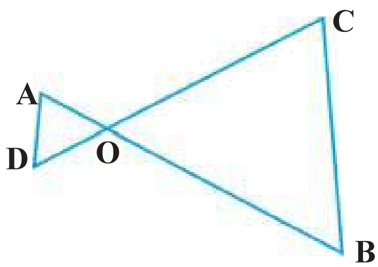
પરંતુ, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$

$= 180° - 80° - 60°$

$= 40°$

તેથી, $\angle P = 40°$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.31 માં, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, તો સાબિત કરો કે, $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$



આકૃતિ 6.31

ઉકેલ : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (આપેલ છે.)

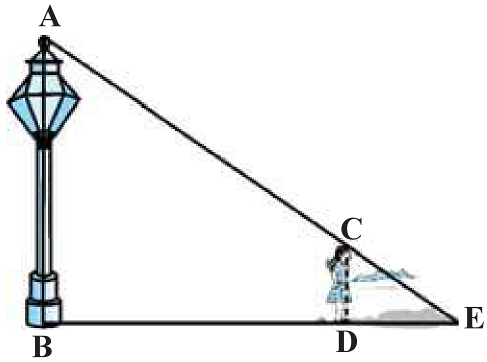
તેથી, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

વળી, એ જુઓ, $\angle AOD = \angle COB$ (અભિકોણો) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, $\Delta\ AOD \sim \Delta\ COB$ (બાખૂબા સમરૂપતા)

તેથી, $\angle A = \angle C$ અને $\angle D = \angle B$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

ઉદાહરણ 7 : 90 સેમી ઊંચાઈવાળી એક છોકરી વીજળીના થાંભલાના તળીયેથી 1.2 મી/સેની ઝડપથી દૂર જઈ રહી છે. જો વીજળીનો ગોળો જમીનના સમતલથી 3.6 મીટર ઊંચે હોય તો ચાર સેકન્ડ પછી તેના પડછાયાની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.32

ઉકેલ : ધારો કે AB એ વીજ થાંભલો છે અને CD વીજ થાંભલાથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછીની પરિસ્થિતિમાં છોકરીનું સ્થાન દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.32.)

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય કે DE છોકરીનો પડછાયો છે. ધારો કે, DE એ x મીટર છે.

હવે, BD = 1.2 × 4 = 4.8 મીટર

જુઓ કે, Δ ABE અને Δ CDE માં,

$\angle B = \angle D$ (દરેક 90° નો છે. કારણ કે લાઈટનો થાંભલો અને છોકરી જમીન પર શિરોલંબ છે.)

અને $\angle E = \angle E$ (એક જ ખૂણો)

તેથી, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

એટલે કે, $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ સેમી} = \frac{90}{100} \text{ મી} = 0.9 \text{ મી}\right)$

એટલે કે, $4.8 + x = 4x$

એટલે કે, $3x = 4.8$

એટલે કે, $x = 1.6$

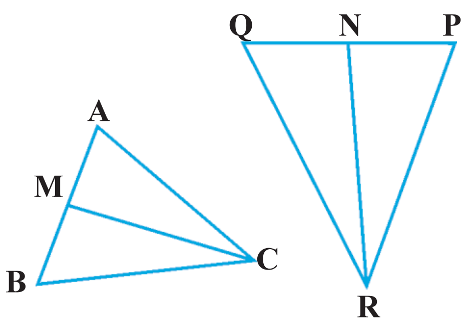
તેથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછી છોકરીનો પડછાયો 1.6 મીટર લાંબો હોય.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.33માં, CM અને RN અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગાઓ છે. જો Δ ABC ~ Δ PQR હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) Δ AMC ~ Δ PNR

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) Δ CMB ~ Δ RNQ



આકૃતિ 6.33

ઉકેલ : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

તેથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

અને $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ (2)

પરંતુ, $AB = 2\ AM$ અને $PQ = 2PN$

(કેમ કે, CM અને RN મધ્યગાઓ છે.)

તેથી, (1) પરથી, $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

એટલે કે, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

પરંતુ, $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) પરથી] (4)

તેથી, (3) અને (4) પરથી,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (બાખૂબા સમરૂપતા) (5)

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ [(5) પરથી] (6)

પરંતુ, $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) પરથી] (7)

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) અને (7) પરથી] (8)

(iii) ફરીથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) પરથી]

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) પરથી] (9)

પરંતુ, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

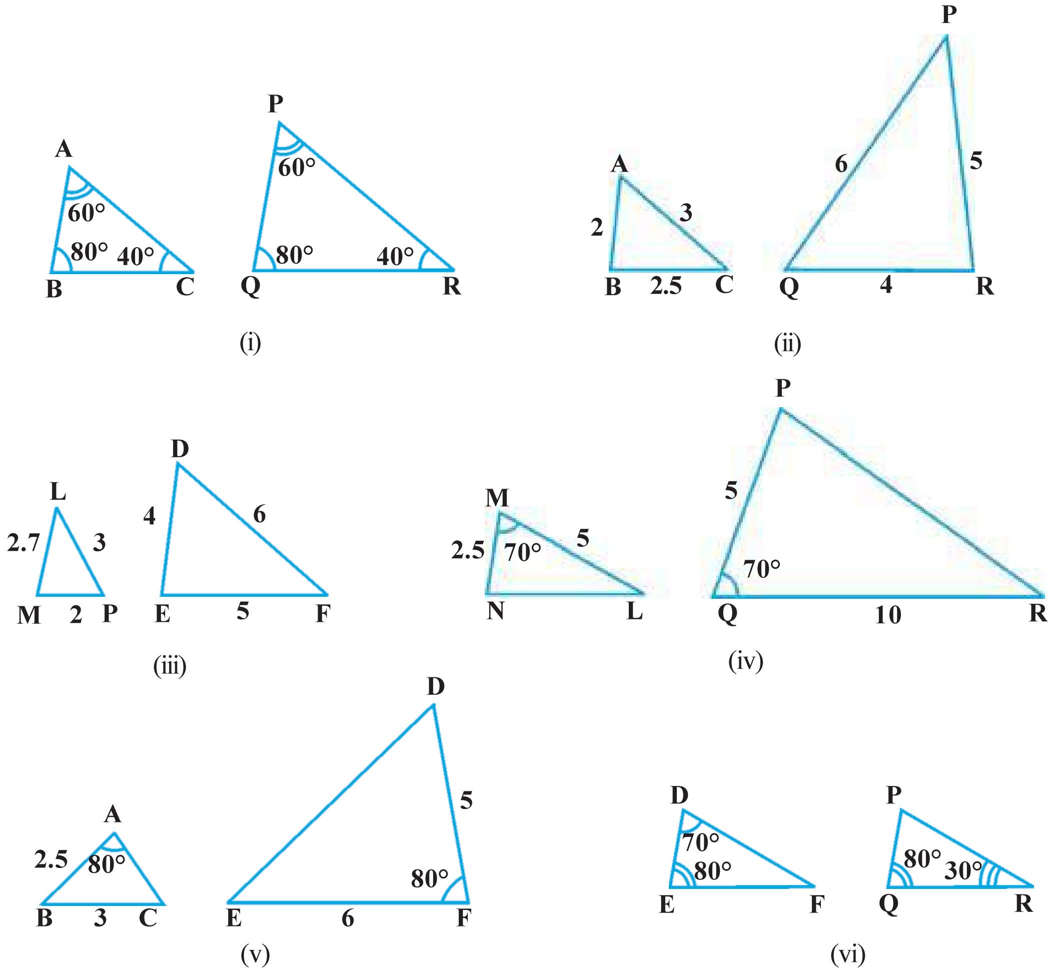
એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) અને (10) પરથી]

તેથી, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (બાબાબા સમરૂપતા)

[**નોંધ :** ભાગ (i) સાબિત કરવા પૈકી ઉપયોગમાં લીધેલ રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ ભાગ (iii) સાબિત કરી શકાય.]

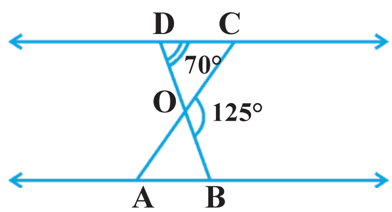
સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.34 માં આપેલ ત્રિકોણો પૈકી કઈ જોડીના ત્રિકોણો સમરૂપ છે તે જણાવો. પ્રશ્નનો જવાબ આપવા કઈ સમરૂપતાની શરતનો ઉપયોગ કર્યો તે લખો. અને સમરૂપ ત્રિકોણની જોડીઓને સંકેતમાં લખો :



આકૃતિ 6.34

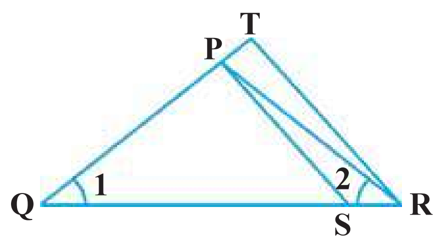
2. આકૃતિ 6.35માં, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ અને $\angle CDO = 70°$ હોય, તો $\angle DOC$, $\angle DCO$ અને $\angle OAB$ શોધો.



આકૃતિ 6.35

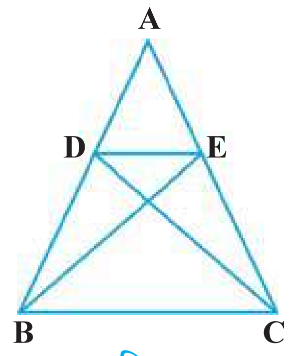
3. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. હવે ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

4. આકૃતિ 6.36 માં, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$. સાબિત કરો કે $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.



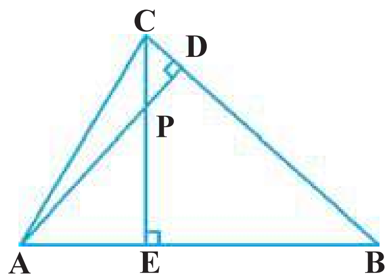
આકૃતિ 6.36

5. Δ PQR ની બાજુઓ PR અને QR પર બિંદુઓ S અને T એવાં છે કે, જેથી, $\angle P = \angle RTS$. સાબિત કરો કે, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$



આકૃતિ 6.37

6. આકૃતિ 6.37 માં, જો $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



આકૃતિ 6.38

7. આકૃતિ 6.38 માં, Δ ABC ના વેધ AD અને CE એકબીજાને P બિંદુ માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

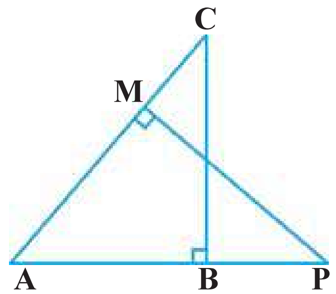
(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

8. બિંદુ E એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની લંબાવેલ બાજુ AD પરનું બિંદુ છે. BE એ CD ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.



આકૃતિ 6.39

9. આકૃતિ 6.39 માં, ત્રિકોણ ABC અને AMP કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને તેમાં ખૂણા B અને M કાટખૂણા છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

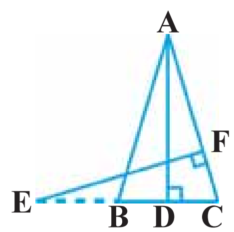
(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. D અને H એ Δ ABC અને Δ EFG ની અનુક્રમે બાજુઓ AB અને FE પર આવેલાં હોય તેવી રીતે CD અને GH અનુક્રમે $\angle ACB$ અને $\angle EGF$ ના દ્વિભાજક છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

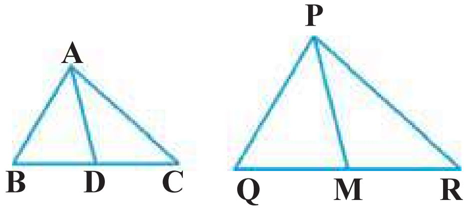
(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$



આકૃતિ 6.40

11. આકૃતિ 6.40 માં E એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC ની લંબાવેલ બાજુ CB પર આવેલ બિંદુ છે તથા AB = AC. જો $AD \perp BC$ અને $EF \perp AC$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ABD \sim \Delta ECF$.

12. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AD અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે (જુઓ, આકૃતિ 6.41) સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



આકૃતિ 6.41

13. બિંદુ D એ Δ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે, $\angle ADC = \angle BAC$. સાબિત કરો કે $CA^2 = CB \cdot CD$

14. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC તથા મધ્યગા AD એ અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

15. એક 6 મીટર ઊંચા શિરોલંબ વાંસનો જમીન પર પડતો પડછાયો 4 મીટર લાંબો છે. એ જ વખતે એક મિનારાનો પડછાયો 28 મીટર લાંબો છે. મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

16. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તથા AD અને PM અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગા હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

6.5 સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ

તમે જાણો છો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તર અને અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર વચ્ચેના સંબંધ વિશે તમે શું કલ્પના કરી શકો છો ? તમે જાણો છે કે, ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમમાં માપવામાં આવે છે. તેથી, તમે કદાચ એવી કલ્પના કરી હશે કે, આ ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હશે. આ ખરેખર સત્ય છે અને તે હવે આપણે પછીના પ્રમેયમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.6 : ***બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.***

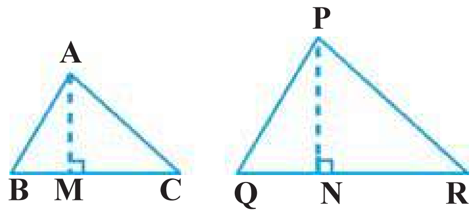
સાબિતી : અહીં બે ત્રિકોણો Δ ABC અને Δ PQR આપ્યા છે અને $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (જુઓ આકૃતિ 6.42.)

અહીં એ સાબિત કરવું છે કે, $\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

બે ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, ત્રિકોણોના વેધ AM અને PN દોરો.

હવે, $ABC = \frac{1}{2} BC \times AM$

અને $PQR = \frac{1}{2} QR \times PN$



આકૃતિ 6.42

તેથી, $$\frac{ABC}{PQR} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AM}{\frac{1}{2}QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad (1)$$

હવે, Δ ABM અને Δ PQN માં,

$\angle B = \angle Q$ (કારણ કે $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

અને $\angle M = \angle N$ (કાટખૂણા છે.)

તેથી, $\Delta\, ABM \sim \Delta\, PQN$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ (2)

વળી, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ (3)

તેથી, $\dfrac{ABC}{PQR} = \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AM}{PN}$ [(1) અને (3) પરથી]

$= \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ}$ [(2) પરથી]

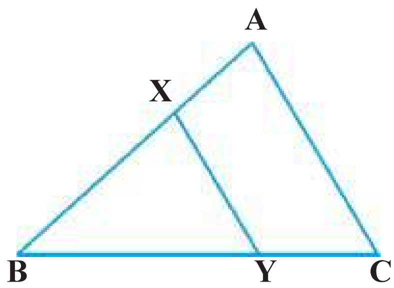
$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$

હવે, (3) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 \quad ■$$

જેમાં આ પ્રમેયનો ઉપયોગ થાય તેવાં ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 6.43 માં રેખાખંડ XY એ ΔABC ની બાજુ AC ને સમાંતર છે અને તે ત્રિકોણનું સમાન ક્ષેત્રફળના ભાગોમાં વિભાજન કરે છે. ગુણોત્તર $\dfrac{AX}{AB}$ શોધો.



આકૃતિ 6.43

ઉકેલ : અહીં $XY \parallel AC$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\angle BXY = \angle A$ અને $\angle BYX = \angle C$ (અનુકોણો)

તેથી, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, XBY$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\dfrac{ABC}{XBY} = \left(\dfrac{AB}{XB}\right)^2$ (પ્રમેય 6.6) (1)

વળી, $ABC = 2XBY$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\dfrac{ABC}{XBY} = \dfrac{2}{1}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ એટલે કે, } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

અથવા $\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

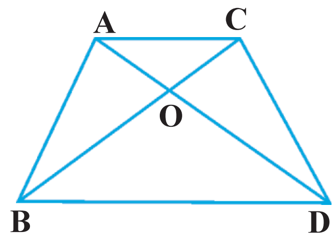
એટલે કે, $\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. Δ ABC ~ Δ DEF છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળો અનુક્રમે 64 સેમી^{2} અને 121 સેમી^{2} છે. જો EF = 15.4 સેમી હોય, તો BC શોધો.

2. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD છે. તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો AB = 2CD હોય, તો Δ AOB અને Δ COD નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

3. આકૃતિ 6.44માં, ABC અને DBC એક જ પાયા BC પરના બે ત્રિકોણો છે. જો AD એ BC ને O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\frac{ABC}{DBC} = \frac{AO}{DO}$.



આકૃતિ 6.44

4. જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે એકરૂપ છે.

5. D, E અને F અનુક્રમે Δ ABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. Δ DEF અને Δ ABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

6. સાબિત કરો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ મધ્યગાના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.

7. સાબિત કરો કે, ચોરસની કોઈ એક બાજુ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તે ચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી અડધું હોય છે.

સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસણી કરો.

8. જેમાં D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે, એવા બે સમબાજુ ત્રિકોણો ABC અને BDE છે. ત્રિકોણો ABC અને BDE નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

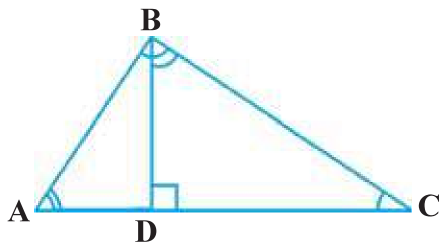
   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4

9. બે સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓનો ગુણોત્તર 4:9 છે. આ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 પાયથાગોરસ પ્રમેય

તમે અગાઉના ધોરણથી પાયથાગોરસ પ્રમેયથી પરિચિત છો. તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓથી આ પ્રમેયને ચકાસ્યો છે અને કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલવા તેનો ઉપયોગ કર્યો છે. તમે ધોરણ IX માં આ પ્રમેયની સાબિતી જોઈ ગયાં છો. હવે આપણે આ પ્રમેયને બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની સંકલ્પનાના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું. આ સાબિત કરવા માટે કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર તેની સામેના શિરોબિંદુથી રચાતા વેધથી બનતા બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા પર આધારિત પરિણામનો ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 6.45

હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લઈએ. તેમાં ખૂણો B કાટખૂણો છે. BD એ કર્ણ AC પરનો વેધ છે. (જુઓ, આકૃતિ 6.45.)

Δ ADB અને Δ ABC માં તમે જોઈ શકશો

$\angle A = \angle A$

અને $\angle ADB = \angle ABC$ (કેમ ?)

તેથી, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (કેમ ?) (1)

એ જ રીતે, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (કેવી રીતે ?) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, વેધ BD ની બંને બાજુ પરના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ છે.

તેથી $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ અને $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

હોવાથી, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (વિભાગ 6.2ની નોંધ પરથી)

ઉપરની ચર્ચા પરથી નીચેનો પ્રમેય મળે છે :

પાયથાગોરસ
(B.C.E.569 - B.C.E.479)

પ્રમેય 6.7 : જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતા શિરોબિંદુથી કર્ણ પર વેધ દોરેલ હોય, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

હવે પાયથાગોરસનો પ્રમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 6.8 : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

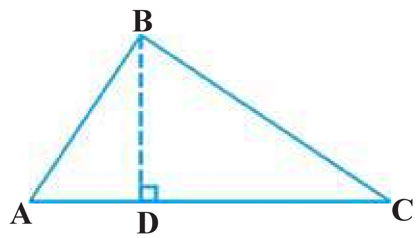
સાબિતી : Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે એમ આપ્યું છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

અહીં, $BD \perp AC$ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.46.)

હવે, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (બાજુઓ સમપ્રમાણમાં છે.)



આકૃતિ 6.46

અથવા, $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

તેમજ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

અથવા $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC\ (AD + CD) = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ■

ઉપરનું પ્રમેય અગાઉ પ્રાચીન *ભારતીય ગણિતજ્ઞ બોધાયને* (લગભગ B.C.E. 800) નીચેના સ્વરૂપમાં આપ્યું હતું.

લંબચોરસના વિકર્ણથી બનતા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ અને તેની બાજુઓથી બનતા (જેમ કે, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ) ચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો સમાન હોય છે.

આ કારણે, આ પ્રમેયને કેટલીક વાર *બોધાયન પ્રમેય* તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

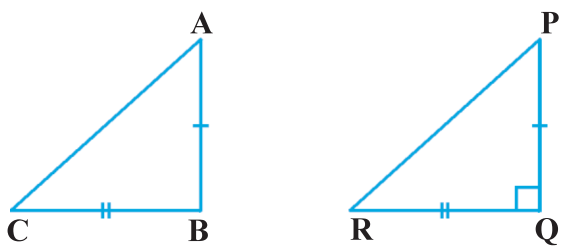
પાયથાગોરસના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકો ? તમે અગાઉના ધોરણમાં ચકાસ્યું છે કે, તે સત્ય છે. તેને પ્રમેયના સ્વરૂપમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.9 : ***ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય તો, પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.***

સાબિતિ : અહીં, ત્રિકોણ ABC માં, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ આપેલ છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $\angle B = 90°$

સાબિત કરવા, જેમાં એક ખૂણો Q કાટખૂણો હોય તેવો ΔPQR એવો રચીએ કે જેથી, PQ = AB અને QR = BC. (જુઓ આકૃતિ 6.47.)



આકૃતિ 6.47

હવે, ΔPQR પરથી,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય, જેમાં $\angle Q = 90°$)

અથવા $PR^2 = AB^2 + BC^2$ (રચના પરથી) (1)

પરંતુ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (આપેલ છે.) (2)

તેથી, $AC = PR$ [(1) અને (2) પરથી] (3)

હવે, ΔABC અને ΔPQR માં,

$AB = PQ$ (રચના પરથી)

$BC = QR$ (રચના પરથી)

$AC = PR$ (ઉપર (3)માં સાબિત કર્યું.)

તેથી, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (બાબાબા એકરૂપતા)

તેથી, $\angle B = \angle Q$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

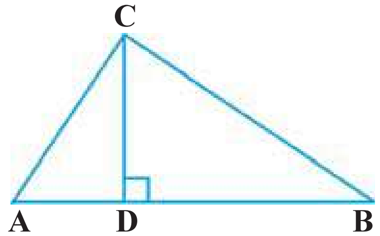
પરંતુ, $\angle Q = 90°$ (રચના પરથી)

તેથી, $\angle B = 90°$ ■

નોંધ : આ પ્રમેયની બીજી સાબિતી માટે પરિશિષ્ટ 1 પણ જુઓ.

હવે આપણે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : આકૃતિ 6.48 માં, $\angle ACB = 90°$ અને $CD \perp AB$. સાબિત કરો કે, $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.



આકૃતિ 6.48

ઉકેલ : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

અથવા $AC^2 = AB \cdot AD$ (1)

એ જ રીતે, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

અથવા $BC^2 = BA \cdot BD$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ઉદાહરણ 11 : એક નિસરણી દીવાલને અઢેલીને એવી રીતે ગોઠવી છે કે જેથી તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2.5 મીટર દૂર રહે અને તેનો ઉપરનો છેડો જમીનથી 6 મીટર ઊંચે એક બારીને અડકે. નિસરણીની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, AB નિસરણી છે અને CA દિવાલ છે. અને A બારી છે. (જુઓ આકૃતિ 6.49.)

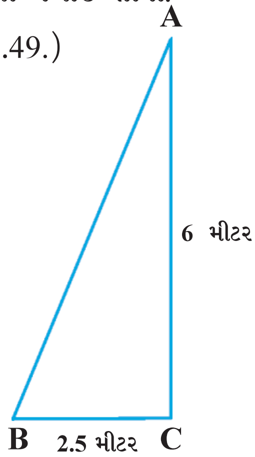
$$BC = 2.5 \text{ મીટર અને } CA = 6 \text{ મીટર}$$

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

તેથી, $AB = 6.5$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 6.5 મી છે.



આકૃતિ 6.49

ઉદાહરણ 12 : આકૃતિ 6.50 માં, જો $AD \perp BC$ તો સાબિત કરો કે, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

ઉકેલ : Δ ADC પરથી,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (1)

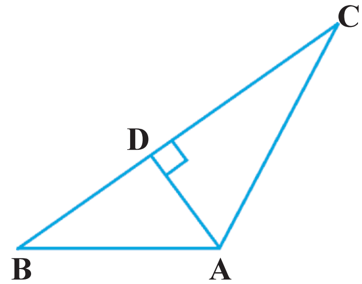
Δ ADB પરથી,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (2)

(2) માંથી (1) બાદ કરતાં,

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

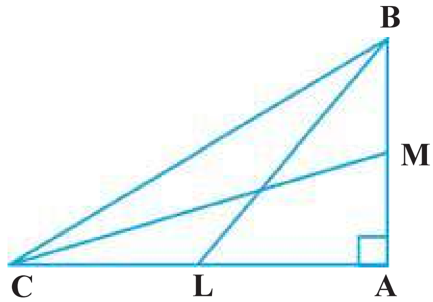
અથવા $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



આકૃતિ 6.50

ઉદાહરણ 13 : ખૂણો A કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં BL અને CM મધ્યગાઓ છે. સાબિત કરો કે, $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$

ઉકેલ : BL અને CM એ ΔABC ની મધ્યગાઓ છે તથા $\angle A = 90°$ (જુઓ આકૃતિ 6.51.)



આકૃતિ 6.51

Δ ABC પરથી,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

Δ ABL પરથી,

$BL^2 = AL^2 + AB^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

અથવા $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ (L એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.)

અથવા $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

અથવા $4\ BL^2 = AC^2 + 4\ AB^2$ (2)

Δ CMA પરથી

$CM^2 = AC^2 + AM^2$

અથવા $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (M એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

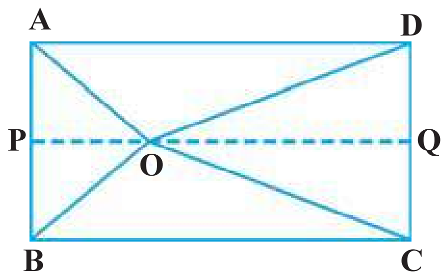
અથવા $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

અથવા $4\ CM^2 = 4\ AC^2 + AB^2$ (3)

(2) અને (3)નો સરવાળો લેતાં, $4\ (BL^2 + CM^2) = 5\ (AC^2 + AB^2)$

$4\ (BL^2 + CM^2) = 5\ BC^2$ [(1) પરથી]

ઉદાહરણ 14 : O એ લંબચોરસ ABCD ના અંદરના ભાગનું કોઈ બિંદુ હોય (જુઓ, આકૃતિ 6.52), તો સાબિત કરો કે, $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$



આકૃતિ 6.52

ઉકેલ : P એ AB પર અને Q એ DC પર આવે તે રીતે O માંથી PQ || BC દોરો.

હવે, PQ || BC

તેથી, $PQ \perp AB$ અને $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90°$ અને $\angle C = 90°$)

તેથી, $\angle BPQ = 90°$ અને $\angle CQP = 90°$

તેથી, BPQC અને APQD બંને લંબચોરસો છે.

હવે, Δ OPB પરથી,

$OB^2 = BP^2 + OP^2$ (1)

એ જ રીતે, Δ OQD પરથી,

$OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ (2)

Δ OQC પરથી,

$OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ (3)

અને Δ OAP પરથી,

$OA^2 = AP^2 + OP^2$ (4)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$

$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$ (કારણ કે, BP = CQ અને DQ = AP)

$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$

$= OC^2 + OA^2$ [(3) અને (4) પરથી]

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી છે. તે પૈકી કયા ત્રિકોણો કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો. જે કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તેના કર્ણની લંબાઈ શોધો.

   (i) 7 સેમી, 24 સેમી, 25 સેમી

   (ii) 3 સેમી, 8 સેમી, 6 સેમી

   (iii) 50 સેમી, 80 સેમી, 100 સેમી

   (iv) 13 સેમી, 12 સેમી, 5 સેમી

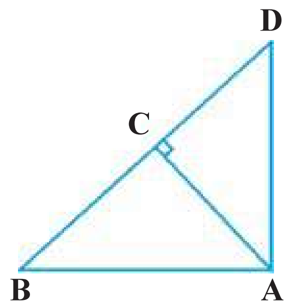
2. ત્રિકોણ PQR માં $\angle P$ કાટખૂણો છે અને M એ QR પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $PM \perp QR$. સાબિત કરો કે $PM^2 = QM \cdot MR$

3. આકૃતિ 6.53 માં, ત્રિકોણ ABD માં $\angle A$ કાટખૂણો છે અને $AC \perp BD$. સાબિત કરો કે

   (i) $AB^2 = BC \cdot BD$

   (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

   (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



આકૃતિ 6.53

4. સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. સાબિત કરો કે $AB^2 = 2AC^2$

5. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AC = BC. જો $AB^2 = 2AC^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

6. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ $2a$ છે. તેના દરેક વેધ શોધો.

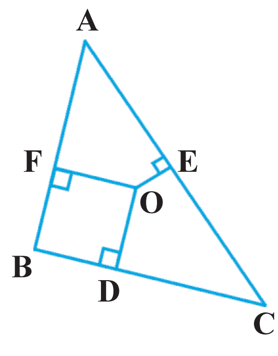
7. સાબિત કરો કે, સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય છે.

8. આકૃતિ 6.54 માં, O ત્રિકોણ ABC ની અંદરનું બિંદુ છે. $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ અને $OF \perp AB$

   સાબિત કરો કે,

   (i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,

   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



આકૃતિ 6.54

9. 10 મીટર લાંબી એક નિસરણી જમીનથી 8 મીટર ઊંચે આવેલી એક બારીને અડકે છે. નિસરણીના નીચેના છેડાનું દીવાલના તળિયેથી અંતર શોધો.

10. 18 મીટર ઊંચા શિરોલંબ થાંભલાના ઉપરના છેડાથી 24 મીટર લાંબા તારનો એક છેડો જોડાયેલો છે. તે તારનો બીજો છેડો એક ખીલા સાથે જોડાયેલો છે. થાંભલાના આધારથી કેટલા અંતરે ખીલો લગાડવામાં આવે તો તાર તંગ રહે ?

11. એક વિમાન એક વિમાન મથકની ઉત્તર દિશામાં 1000 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઊડે છે. એ જ સમયે, બીજું એક વિમાન એ જ વિમાનમથકની પશ્ચિમ દિશામાં 1200 કિમી/કલાકની ઝડપે ઊડે છે. $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી આ વિમાનો એકબીજાથી કેટલા દૂર હશે ?

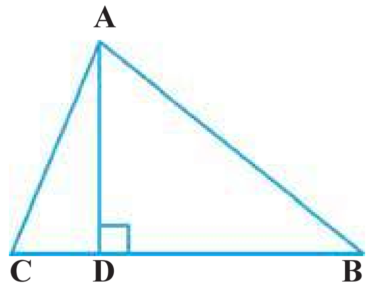
12. 6 મીટર અને 11 મીટર ઊંચાઈના બે થાંભલા સમતલ જમીન પર આવેલા છે. જો થાંભલાના નીચેના છેડા વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર હોય તો તેમના ઉપરના છેડા વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે અને D અને E અનુક્રમે તેની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે,

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

14. A માંથી Δ ABC ની બાજુ BC પર દોરેલો લંબ BC ને D માં એવી રીતે છેદે છે કે DB = 3CD (જુઓ આકૃતિ 6.55.) સાબિત કરો કે,

$2\,AB^2 = 2\,AC^2 + BC^2$



આકૃતિ 6.55

15. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પર D એવું બિંદુ છે કે જેથી, $BD = \frac{1}{3}BC$. સાબિત કરો કે, $9\,AD^2 = 7\,AB^2$

16. સમબાજુ ત્રિકોણમાં સાબિત કરો કે, કોઈ પણ બાજુના વર્ગના 3 ગણા એ તેના કોઈ પણ વેધના વર્ગના 4 ગણા બરાબર છે.

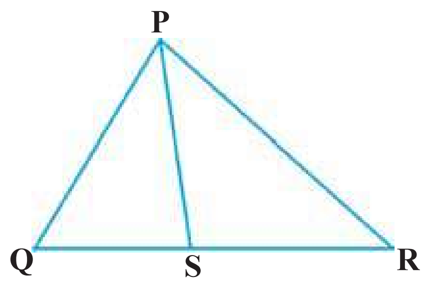
17. સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસો.

Δ ABC માં, AB = $6\sqrt{3}$ સેમી, AC = 12 સેમી અને BC = 6 સેમી હોય, તો ખૂણો B .... :

(A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. આકૃતિ 6.56 માં, PS એ Δ PQR ના $\angle$QPR નો દ્વિભાજક છે. સાબિત કરો કે $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.

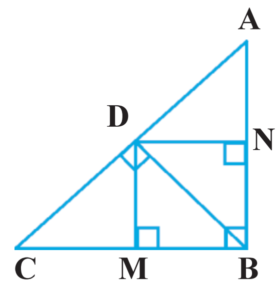


આકૃતિ 6.56

2. આકૃતિ 6.57 માં, Δ ABC માં $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ અને $DN \perp AB$ થાય તેવું બિંદુ D કર્ણ AC પર છે, સાબિત કરો કે,

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$

(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

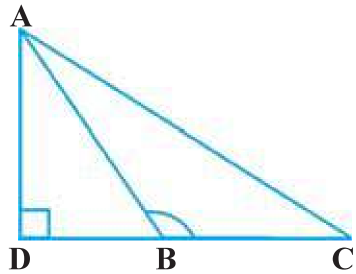


આકૃતિ 6.57

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

3. આકૃતિ 6.58માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC > 90°$ અને $AD \perp$ લંબાવેલ CB, સાબિત કરો કે.

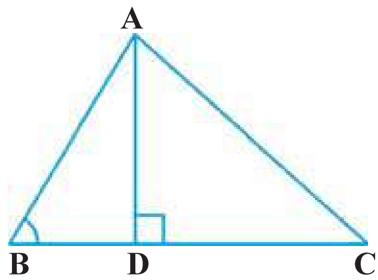
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$



આકૃતિ 6.58

4. આકૃતિ 6.59માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC < 90°$ અને $AD \perp BC$ છે. સાબિત કરો કે,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot BD$



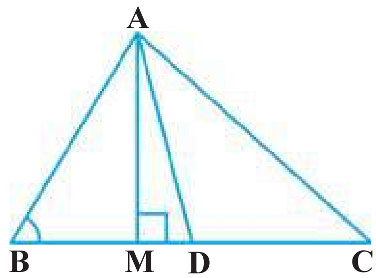
આકૃતિ 6.59

5. આકૃતિ 6.60 માં, AD એ ત્રિકોણ ABC ની મધ્યગા છે અને $AM \perp BC$. સાબિત કરો કે,

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\,AD^2 + \frac{1}{2}\,BC^2$



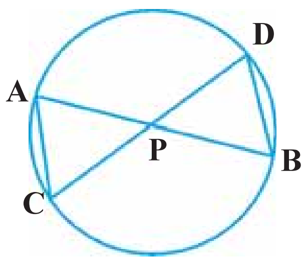
આકૃતિ 6.60

6. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના વર્ગોનો સરવાળો તેની બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

7. આકૃતિ 6.61માં, બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજાને બિંદુ P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta\, APC \sim \Delta\, DPB$

(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$

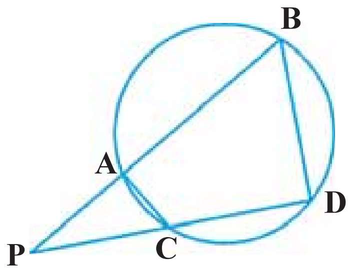


આકૃતિ 6.61

8. આકૃતિ 6.62માં, એક વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD (લંબાવીએ તો) વર્તુળના બહારના ભાગમાં એકબીજાને P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

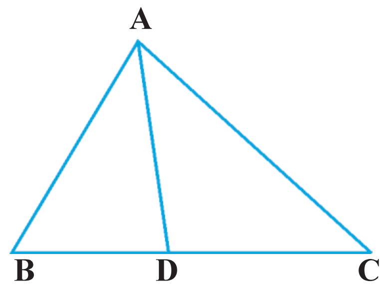
(i) $\Delta\, PAC \sim \Delta\, PDB$

(ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



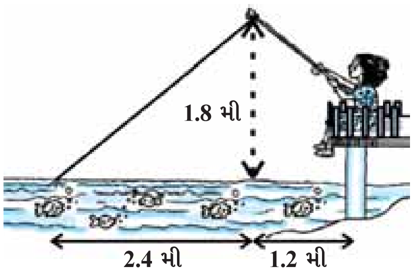
આકૃતિ 6.62

9. આકૃતિ 6.63માં, D એ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. સાબિત કરો કે AD એ ∠BAC નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 6.63

10. નાઝીમા પાણીના પ્રવાહમાં માછલીઓ પકડી રહી છે. તેનો માછલી પકડવાના સળિયાનો હૂક પાણીની સપાટીથી 1.8 મીટર ઊંચે છે અને દોરીના નીચેના છેડા પરનો આંકડો પાણીની સપાટી પર એવી રીતે સ્થિર છે કે, નાઝીમાથી તેનું અંતર 3.6 મીટર છે અને સળિયાના હુકની નીચેની પાણીની સપાટીથી તેનું અંતર 2.4 મીટર છે. એવું માની લઈએ કે, (સળિયાના હૂકથી આંકડા સુધી) તેની દોરી તંગ છે તો, તેણે કેટલી દોરી બહાર કાઢી છે ? (આકૃતિ 6.64 જુઓ.) જો તે દોરીને 5 સેમી/સે ના દરથી અંદર ખેંચે, તો 12 સેકન્ડ પછી નાઝીમાનું આંકડાથી સમક્ષિતિજ અંતર કેટલું હશે ?



આકૃતિ 6.64

6.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. સમાન આકાર ધરાવતી પરંતુ જેના માટે સમાન કદ હોય તે જરૂરી નથી તેવી બે આકૃતિઓને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.
2. બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ છે પરંતુ પ્રતીપ સાચું નથી.
3. જો (i) કોઈ બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય, (એટલે કે, સમપ્રમાણમાં હોય) તો સમાન સંખ્યામાં બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.
4. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા, બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન થાય છે.
5. જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય.
6. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરો સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય (ખૂખૂખૂ-સમરૂપતા).
7. જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (ખૂખૂ સમરૂપતા).
8. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી ત્રિકોણો સમરૂપ છે, (બાબાબા સમરૂપતા).

9. જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (બાખૂબા સમરૂપતા)

10. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ જેટલો હોય છે.

11. જો કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને તેમજ એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

12. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે (પાયથાગોરસ પ્રમેય).

13. જો ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.

વાચકને નોંધ

જો બે કાટકોણ ત્રિકોણોમાં, કોઈ એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને કોઈ એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને કોઈ એક બાજુને સમપ્રમાણમાં હોય તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આને કાકબા સમરૂપતા તરીકે ઓળખી શકીએ.

તમે પ્રકરણ 8ના ઉદાહરણ 2 માં આ સમરૂપતાનો ઉપયોગ કર્યો હોત, તો સાબિતી સરળ બની હોત.

યામ ભૂમિતિ 7

7.1 પ્રાસ્તાવિક

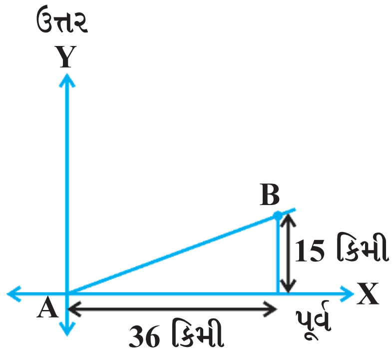
ધોરણ IX માં આપણે શીખ્યાં કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને પરસ્પર લંબ યામાક્ષોની જોડની જરૂર પડે છે. y-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને x-યામ અથવા **કોટિ** કહે છે. x-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને y-યામ અથવા **ભુજ** કહે છે. x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં અને y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

આપણે એક રમત રમીએ આલેખપત્ર પર પરસ્પર લંબ હોય તેવા અક્ષોની જોડી લો. હવે નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો અને સૂચના પ્રમાણે જોડો : બિંદુ A(4, 8), B(3, 9), C(3, 8), D(1, 6), E(1, 5), F(3, 3), G(6, 3), H(8, 5), I(8, 6), J(6, 8), K(6, 9), L(5, 8) ને ક્રમશઃ જોડી L ને A સાથે જોડો. હવે બિંદુઓ P(3.5, 7), Q (3, 6) અને R(4, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ રચાશે. વળી બિંદુઓ X(5.5, 7), Y(5, 6) અને Z(6, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ બનશે. હવે S(4, 5), T(4.5, 4) અને U(5, 5)ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી ત્રિકોણ બનશે. અંતમાં S ને બિંદુઓ (0, 5) અને (0, 6) સાથે તથા U ને બિંદુઓ (9, 5) અને (9, 6) સાથે જોડો. તમને કેવું ચિત્ર મળશે ?

વળી, તમે જોયું છે કે, $ax + by + c = 0$ (a, b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી.) સ્વરૂપના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરતાં એક રેખા મળે છે. વધુમાં પ્રકરણ 2 માં આપણે $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ નો પરવલય સ્વરૂપનો આલેખ જોયો હતો. ખરેખર તો યામભૂમિતિનો વિકાસ આકૃતિઓની ભૂમિતિ સમજવા માટે એક બીજગણિતીય ઉપકરણ તરીકે કરવામાં આવ્યો છે. તે આપણને બીજગણિતનો ઉપયોગ કરીને ભૂમિતિનો અભ્યાસ કરવા અને ભૂમિતિની મદદથી બીજગણિત સમજવામાં મદદરૂપ થાય છે. આ કારણે યામભૂમિતિ, ભૌતિકશાસ્ત્ર, ઈજનેરી, નૌકાશાસ્ત્ર, ભૂકંપશાસ્ત્ર, કલા જેવાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વ્યાપક રીતે વપરાય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે જેમના યામ આપેલા હોય એવાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધતાં શીખીશું અને આપેલાં ત્રણ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આપણે આપેલાં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધી શકાય તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

7.2 અંતરસૂત્ર

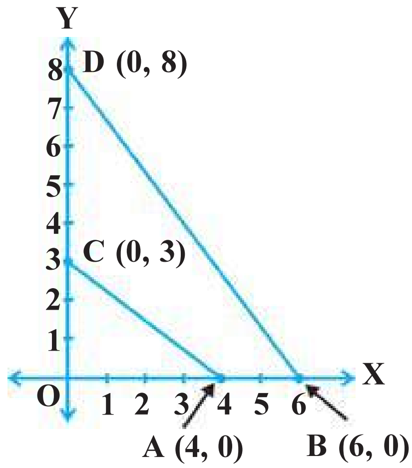


આકૃતિ 7.1

ચાલો, આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

એક શહેર A થી શહેર B પૂર્વમાં 36 કિમી અને ઉત્તરમાં 15 કિમી અંતરે આવેલ છે. ખરેખર માપ્યા વગર તમે શહેર A અને શહેર B વચ્ચેનું અંતર કેવી રીતે શોધી શકો? ચાલો આપણે જોઈએ. આ પરિસ્થિતિને આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આલેખમાં દર્શાવી શકાય. તમે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી અંતરની ગણતરી કરી શકો.

હવે, ધારો કે બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? ઉદાહરણ તરીકે બે બિંદુઓ A (4, 0) અને B (6, 0) લો. આકૃતિ 7.2 માં બિંદુઓ A અને B x-અક્ષ પર આવેલાં છે.



આકૃતિ 7.2

આકૃતિ પરથી તમે જોઈ શકો કે, OA = 4 એકમ અને OB = 6 એકમ છે.

આથી, B થી A સુધીનું અંતર,

AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 એકમ

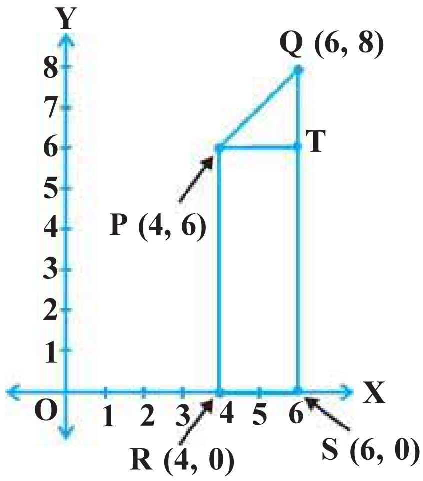
માટે, જો બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે સરળતાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ.

હવે, ધારો કે આપણે બે બિંદુઓ y-અક્ષ પર લઈએ. શું આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? ધારો કે, બિંદુઓ C (0, 3) અને D (0, 8) y-અક્ષ પર આવેલાં છે. તે જ રીતે આપણે મેળવી શકીએ કે,

CD = 8 – 3 = 5 એકમ (જુઓ આકૃતિ 7.2.)

હવે, તમે A થી C નું અંતર શોધી શકો ? (આકૃતિ 7.2માં) OA = 4 એકમ અને OC = 3 એકમ હોવાથી, A થી C સુધીનું અંતર AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5 એકમ. આ જ પ્રમાણે તમે B થી D સુધીનું અંતર BD = 10 એકમ મેળવી શકો.

હવે, જો આપણે અક્ષો પર ન હોય તેવાં બે બિંદુઓ વિચારીએ તો, શું આપણે તે બંને વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? હા ! આપણે તે મેળવવા માટે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.



આકૃતિ 7.3

આકૃતિ 7.3 માં બિંદુઓ P (4, 6) અને Q (6, 8) પ્રથમ ચરણમાં આવેલાં છે. આ બંને વચ્ચેનું અંતર શોધવા માટે આપણે કેવી રીતે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું ? ચાલો, આપણે P અને Q માંથી x-અક્ષ પરના લંબ અનુક્રમે PR અને QS દોરીએ. વળી, P માંથી QS ને T માં છેદતો QS પરનો લંબ દોરીએ. આથી, R અને S ના યામ અનુક્રમે (4, 0) અને (6, 0) થાય. માટે, RS = 2 એકમ. વળી, QS = 8 એકમ અને TS = PR = 6 એકમ.

આથી, QT = 2 એકમ અને PT = RS = 2 એકમ.

હવે, પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

આપણને $PQ^2 = PT^2 + QT^2$

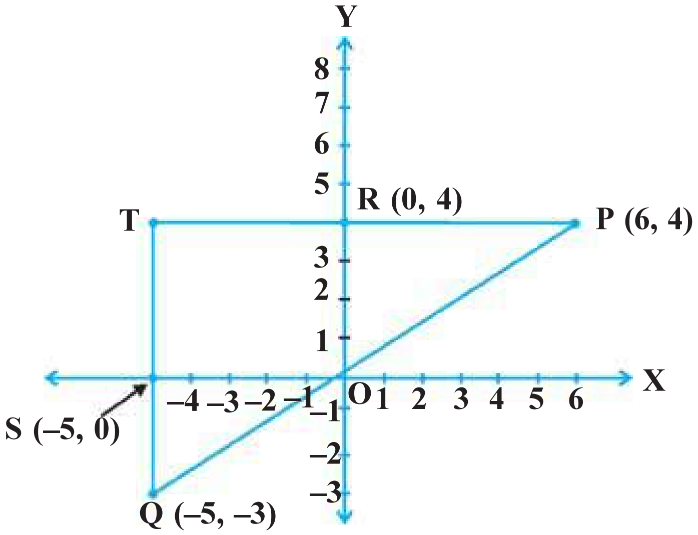
$= 2^2 + 2^2 = 8$

આથી, $PQ = 2\sqrt{2}$ એકમ મળે.

અલગ-અલગ ચરણમાં રહેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર આપણે કેવી રીતે મેળવીશું ?

બે બિંદુઓ P (6, 4) અને Q (–5, –3)નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.4.)

x-અક્ષ પરનો લંબ QS દોરો. બિંદુ P માંથી QS પર (લંબાવતાં...) લંબ PT પણ દોરો. તે y-અક્ષ ને R બિંદુએ છેદે છે.

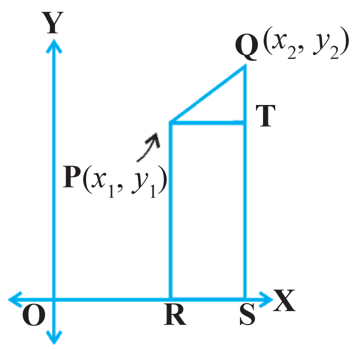


આકૃતિ 7.4

આથી PT = 11 એકમ અને QT = 7 એકમ (શા માટે ?)

કાટકોણ ત્રિકોણ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં આપણને $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ એકમ મળે.

ચાલો, હવે આપણે કોઈ પણ બે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર શોધીએ. x-અક્ષ પરના લંબ PR અને QS દોરીએ. બિંદુ P માંથી QS પરનો લંબ દોરતાં તે QS ને બિંદુ T માં મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.5.)



આકૃતિ 7.5

તેથી $OR = x_1$, $OS = x_2$ આથી, $RS = x_2 - x_1 = PT$

વળી, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$ આથી, $QT = y_2 - y_1$

હવે, Δ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$ મળે.

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

આથી, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

નોંધ કરો કે અંતર હંમેશાં અનૃણ હોય. આથી આપણે માત્ર ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું. માટે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

આને **અંતરસૂત્ર** કહે છે.

નોંધ :

1. ખાસ કરીને, બિંદુ P (x, y)નું ઊગમબિંદુ O (0, 0)થી અંતર $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ દર્શાવી શકાય.

2. આપણે, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ પણ લખી શકીએ (શા માટે ?)

3. આ સાબિતી આપણે P તથા Q ને પ્રથમ ચરણમાં લઈને આપી છે, પરંતુ તેમની કોઈ પણ સ્થિતિ માટે સૂત્ર યથાર્થ છે.

ઉદાહરણ 1 : બિંદુઓ (3, 2), (–2, –3) અને (2, 3) એક ત્રિકોણ બનાવશે ? જો હા, તો રચાયેલ ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓ P (3, 2), Q (–2, –3) અને R (2, 3) માટે અંતર PQ, QR અને PR શોધવા માટે અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (આશરે)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (આશરે)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (આશરે)}$$

કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધારે હોવાથી બિંદુઓ P, Q અને R ત્રિકોણ રચશે. વળી, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ હોવાથી પાયથાગોરસના પ્રતિપ્રમેયના વિધાન પરથી કહી શકાય કે, $\angle P = 90°$. માટે ત્રિકોણ PQR એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ આપેલાં બિંદુઓ છે. ABCD ચોરસ છે તે દર્શાવવા માટેનો એક રસ્તો એ છે કે ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન હોય તથા તેના વિકર્ણો પણ સમાન હોય એ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ. હવે,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

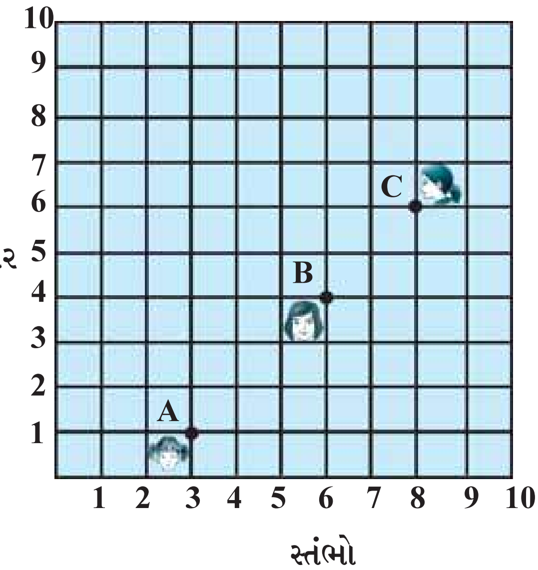
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

AB = BC = CD = DA અને AC = BD હોવાથી ચતુષ્કોણ ABCDની ચારેય બાજુઓ સમાન છે અને તેના વિકર્ણો AC અને BD પણ સમાન છે. આથી, ABCD એ એક ચોરસ છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ : આપણે ચારેય બાજુઓ તથા એક વિકર્ણ AC ઉપર પ્રમાણે શોધીએ. અહીં, $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતીપ અનુસાર $\angle D = 90°$ થાય. એક ચતુષ્કોણ કે જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તથા જેનો એક ખૂણો 90° હોય તે ચોરસ છે. માટે ABCD એક ચોરસ છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 7.6 એક વર્ગખંડમાં પાટલીઓની ગોઠવણી દર્શાવે છે. અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા અનુક્રમે A (3, 1), B (6, 4) અને C (8, 6) સ્થાન પર બેઠેલાં છે. તમે કલ્પી શકો છો કે, તે એક જ રેખામાં બેઠેલાં છે ? તમારા ઉત્તર માટેનું કારણ દર્શાવો.



આકૃતિ 7.6

ઉકેલ : અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણી પાસે ...

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે. આથી, અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા એક જ હરોળમાં બેઠા છે.

ઉદાહરણ 4 : બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (7, 1) અને (3, 5) થી સમાન અંતરે છે તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ એ બિંદુઓ A (7, 1) અને B (3, 5) થી સમાન અંતરે છે.

આપણને AP = BP આપેલ છે.

આથી, $AP^2 = BP^2$ થાય.

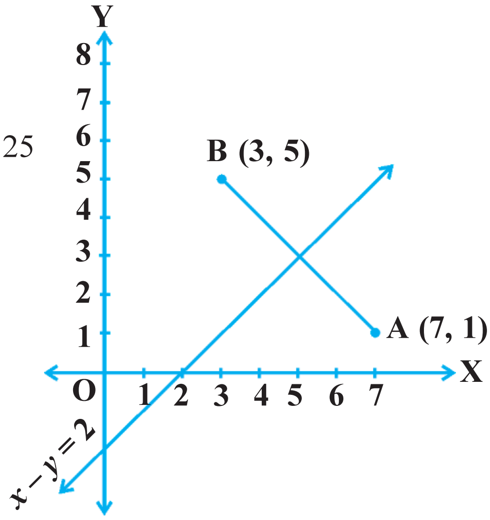
$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore \quad x - y = 2$$

એ માંગેલ સંબંધ છે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે, સમીકરણ $x - y = 2$ નો આલેખ રેખા છે. તમારા ભૂમિતિના અગાઉના અભ્યાસ પરથી, તમે જાણો છો કે, બિંદુ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ AB ના લંબદ્વિભાજક પરનું બિંદુ હોય. આથી, $x - y = 2$ નો આલેખ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.7.)



આકૃતિ 7.7

ઉદાહરણ 5 : બિંદુઓ A (6, 5) અને B (– 4, 3) થી સમાન અંતરે આવેલ હોય તેવું y-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય. આથી, ધારો કે P $(0, y)$ એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ છે. તેથી

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$\therefore\ 36 + 25 - 10y + y^2 = 16 + 9 - 6y + y^2$$

$$\therefore\ 4y = 36$$

$$\therefore\ y = 9$$

આથી, માંગેલ બિંદુ (0, 9) છે.

ચાલો, આપણે ઉકેલ ચકાસીએ : $AP = \sqrt{(6-0)^2+(5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2+(3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

નોંધ : ઉપરની નોંધનો અભ્યાસ કરતાં જણાશે કે, (0, 9) એ AB ના લંબદ્વિભાજક અને y-અક્ષનું છેદબિંદુ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચે આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

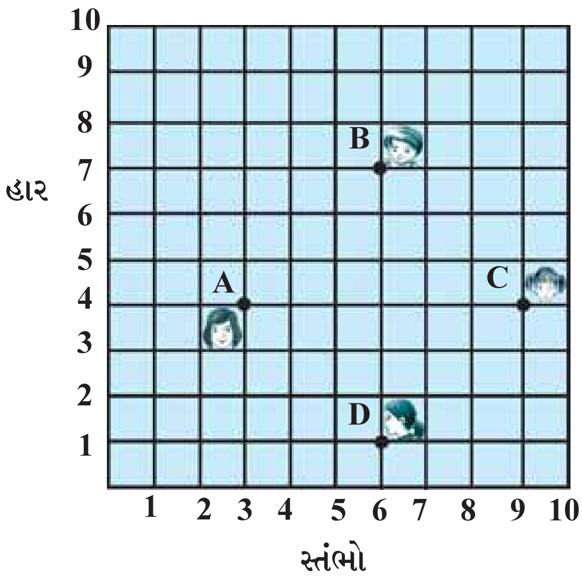
(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. બિંદુઓ (0, 0) અને (36, 15) વચ્ચેનું અંતર શોધો. હવે, તમે વિભાગ 7.2 માં જેની ચર્ચા કરેલ તે બે શહેરો A અને B વચ્ચેનું અંતર શોધી શકો.

3. બિંદુઓ (1, 5), (2, 3) અને (–2, –11) સમરેખ છે તેમ પ્રસ્થાપિત કરો.

4. ચકાસો કે, (5, –2), (6, 4) અને (7, –2) એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

5. એક વર્ગખંડમાં ચાર મિત્રો આકૃતિ 7.8માં દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B, C અને D દ્વારા દર્શાવેલ સ્થાન પર બેઠા છે. ચંપા અને ચમેલી વર્ગમાં આવી અને થોડી મિનિટોના અવલોકન બાદ ચંપાએ ચમેલીને પૂછ્યું કે "શું તું એવું માને છે કે, ABCD ચોરસ છે ? ચમેલી અસહમત થાય છે. અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરી કોણ સાચું છે તે શોધો.



આકૃતિ 7.8

6. નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓથી જો ચતુષ્કોણ રચાતો હોય તો તેનો પ્રકાર જણાવો અને તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

(i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. જે (2, –5) અને (–2, 9) થી સમાન અંતરે હોય તેવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

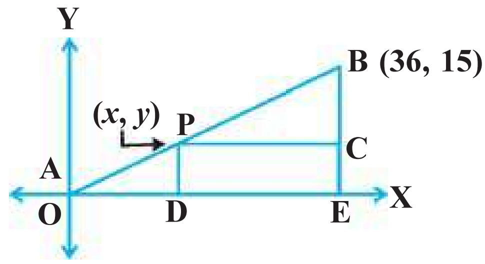
8. બિંદુઓ P (2, – 3) અને Q (10, y) વચ્ચેનું અંતર 10 એકમ હોય તો, y ની કિંમત શોધો.

9. જો Q (0, 1) એ P (5, –3) અને R (x, 6) થી સમાન અંતરે હોય તો, x ની કિંમત શોધો. અંતર QR અને PR પણ શોધો.

10. બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (3, 6) અને (–3, 4) થી સમાન અંતરે હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

7.3 વિભાજન સૂત્ર

ચાલો, વિભાગ 7.2 ની પરિસ્થિતિ યાદ કરીએ. ધારો કે એક ટેલિફોન કંપની પોતાના પ્રસારણ ટાવર P ને A અને B ની વચ્ચે એવી રીતે સ્થાપવા માંગે છે કે, જેથી ટાવર P થી B નું અંતર એ P થી A ના અંતર કરતાં બમણું હોય. જો P એ AB પર આવેલ હોય, તો તે AB ને 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાગે. (જુઓ આકૃતિ 7.9). જો આપણે A ને ઊગમબિંદુ O તરીકે લઈએ અને બંને અક્ષો પર 1 એકમને 1 કિમી તરીકે લઈએ. B ના યામ (36, 15) થાય. ટાવરનું સ્થાન જાણવા માટે આપણે P ના યામ જાણવા જ પડે. આ યામ આપણે કેવી રીતે શોધી શકીએ ?



આકૃતિ 7.9

ધારો કે, P ના યામ (x, y) છે. P અને B માંથી x-અક્ષ પર દોરેલા લંબ તેને અનુક્રમે D અને E માં મળે છે. P માંથી BE ને લંબ PC દોરો. બાદમાં, પ્રકરણ 6માં ભણી ગયા છો તે સમરૂપતાની ખૂણ્ખૂ શરત પ્રમાણે ΔPOD અને Δ BPC સમરૂપ થશે.

માટે, $\dfrac{\text{OD}}{\text{PC}} = \dfrac{\text{OP}}{\text{PB}} = \dfrac{1}{2}$ અને $\dfrac{\text{PD}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{OP}}{\text{PB}} = \dfrac{1}{2}$

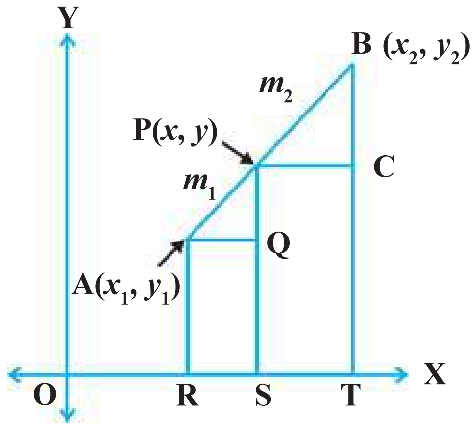
તેથી, $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ અને $\dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$

આ સમીકરણો પરથી $x = 12$ અને $y = 5$ મળે.

તમે ચકાસી શકો કે, P(12, 5) હોય, તો OP : PB = 1 : 2 ની સ્થિતિ બને.

હવે, આ ઉદાહરણ દ્વારા વ્યાપક સૂત્ર મેળવવા માટેની જે સમજ તમે વિકસાવી છે તેનો ઉપયોગ કરીશું.

કોઈ પણ બે બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)નો વિચાર કરો અને ધારો કે, P (x, y) એ ABનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 7.10

તેથી $\dfrac{\text{PA}}{\text{PB}} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (જુઓ આકૃતિ 7.10.)

x-અક્ષ પર લંબ AR, PS અને BT દોરો. AQ અને PC એ x-અક્ષને સમાંતર દોરો. બાદમાં સમરૂપતાની ખૂણ્ખૂ શરત મુજબ,

$$\Delta \text{PAQ} \sim \Delta \text{BPC}$$

માટે, $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

હવે,
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

આ કિંમતોને પરિણામ (1)માં મૂકતાં, આપણને,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \text{ મળે.}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ લેતાં, આપણને } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1+m_2} \text{ મળે.}$$

આ જ પ્રમાણે $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ લેતાં, આપણને $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1+m_2}$ મળે.

આથી, બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y)ના યામ,

$$\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આ સૂત્ર વિભાજન સૂત્ર તરીકે ઓળખાય છે.

y-અક્ષ પર A, P અને B માંથી લંબ દોરીને પણ આ સૂત્ર ઉપરની પ્રક્રિયા અનુસાર મેળવી શકાય.

જો P એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો P ના યામ

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right) \text{ થાય.}$$

એક અગત્યનું તારણ : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ રેખાખંડનું 1:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. માટે, A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{1\cdot x_1+1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1+1\cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ચાલો આપણે વિભાજન સૂત્ર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીએ.

ઉદાહરણ 6 : બિંદુઓ (4, –3) અને (8, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું 3:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, P (x, y) એ માંગેલ બિંદુ છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3 \text{ મળે.}$$

માટે, (7, 3) એ માંગેલ બિંદુ છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ?

ઉકેલ : ધારો કે, (– 4, 6) એ AB નું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

યાદ કરો કે, જો $(x, y) = (a, b)$ તો $x = a$ અને $y = b$

આથી, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ અને $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

હવે, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ પરથી,

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$
$$7m_1 = 2m_2$$
$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

તમે ચકાસી શકો છો કે, આ ગુણોત્તર y-યામનું પણ સમાધાન કરે છે.

હવે, $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2 વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

માટે, બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીતે : ગુણોત્તર $m_1 : m_2$ ને $\dfrac{m_1}{m_2} : 1$ અથવા $k : 1$ પણ લખી શકાય. ધારો કે, (– 4, 6) એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આથી, $-4 = \dfrac{3k - 6}{k + 1}$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$
$$\therefore 7k = 2$$
$$\therefore k : 1 = 2 : 7$$

તમે y-યામ માટે પણ આ પરિણામ ચકાસી શકો.

આથી, બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

નોંધ : જો A, P અને B સમરેખ છે તેમ આપેલું હોય તો તમે અંતર PA અને PB શોધી PA અને PBનો ગુણોત્તર મેળવી આ ગુણોત્તર પણ શોધી શકો, જો કે વિભાજન માટે સમરેખતા આવશ્યક છે.

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ A (2, –2) અને B (–7, 4) ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓ (અહીં, બિંદુઓ રેખાખંડનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.) ના યામ શોધો.

આકૃતિ 7.11

ઉકેલ : ધારો કે, P અને Q એ AB ને ત્રિભાગતાં બિંદુઓ છે.

જેથી, AP = PQ = QB (જુઓ આકૃતિ 7.11.)

માટે, P એ AB નું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. આથી, વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) = (-1, 0)$$

હવે, Q એ AB નું 2:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે. માટે, Q ના યામ,

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) = (-4, 2)$$

આથી, A અને B ને જોડતા રેખાખંડના ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ (–1, 0) અને (–4, 2) થાય.

નોંધ : આપણે Q ને PBના મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને પણ તેના યામ મેળવી શકીએ. આ માટે આપણે મધ્યબિંદુના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તેના યામ મેળવી શકીએ.

ઉદાહરણ 9 : y-અક્ષ એ બિંદુઓ (5, –6) અને (–1, –4) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તે શોધો અને આ છેદબિંદુ પણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, k : 1 માંગેલ ગુણોત્તર છે. આથી, વિભાજનસૂત્રની મદદથી ABનું k : 1 માં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right) \text{ થાય.}$$

આ બિંદુ y-અક્ષ પર આવેલું છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરના બિંદુનો x-યામ 0 હોય.

માટે, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

આથી, $k = 5$

આમ, માંગેલ ગુણોત્તર 5 : 1 થશે. કિંમત $k = 5$ $\left(\frac{-4k-6}{k+1}\right)$ માં મૂકતાં આપણને છેદબિંદુ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ મળશે.

ઉદાહરણ 10 : જો બિંદુઓ A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) અને D (p, 3) એ આ જ ક્રમમાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો p ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

આથી, AC ના મધ્યબિંદુના યામ = BD ના મધ્યબિંદુના યામ

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$\therefore p = 7$$

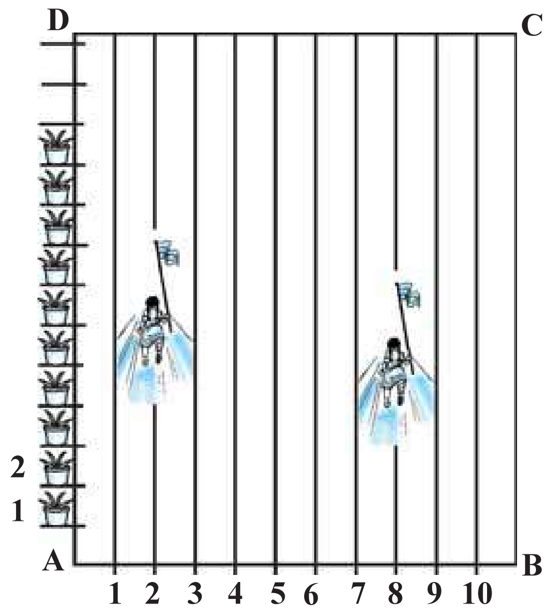
સ્વાધ્યાય 7.2

1. બિંદુઓ (– 1, 7) અને (4, –3) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

2. બિંદુઓ (4, – 1) અને (–2, –3) ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ મેળવો.

3. તમારી શાળાના લંબચોરસ આકારના મેદાન ABCD માં રમતગમત દિવસની પ્રવૃત્તિઓ યોજેલ છે. ચોક પાઉડરની મદદથી એક એક મીટરના અંતરે રેખાઓ દોરેલી છે. આકૃતિ 7.12 માં દર્શાવ્યા અનુસાર AD પર પ્રત્યેક 1 મીટરના અંતરે હોય તેવા 100 ફૂલના કુંડાં મૂક્યા છે.

નિહારીકા બીજી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{4}$ ભાગનું અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લીલો ધ્વજ ફરકાવે છે. પ્રિત આઠમી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{5}$ ભાગ અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લાલ ધ્વજ ફરકાવે છે. આ બંને ધ્વજ વચ્ચેનું અંતર કેટલું થશે ? જો રશ્મિએ આ બંને ધ્વજને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ પર વાદળી ધ્વજ ફરકાવવાનો હોય તો તે ધ્વજને ક્યાં ફરકાવશે ?



આકૃતિ 7.12

4. બિંદુ (–1, 6) એ બિંદુઓ (–3, 10) અને (6, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે ?

5. x-અક્ષ બિંદુઓ A (1, –5) અને B (–4, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પણ શોધો.

6. જો (1, 2), (4, y), (x, 6) અને (3, 5) એ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ હોય તો x અને y શોધો.

7. AB વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળનું કેન્દ્ર (2, –3) છે અને B (1, 4) છે. તો બિંદુ A ના યામ શોધો.

8. જો A અને B અનુક્રમે (–2, –2) અને (2, – 4) હોય, જેથી AP = $\frac{3}{7}$ AB થાય અને બિંદુ P રેખાખંડ AB પર આવેલ હોય, તેવા બિંદુ P ના યામ શોધો.

9. A (–2, 2) અને B (2, 8) ને જોડતા રેખાખંડનું ચાર સમાન ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.

10. સમબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (3, 0), (4, 5), (–1, 4) અને (–2, –1) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

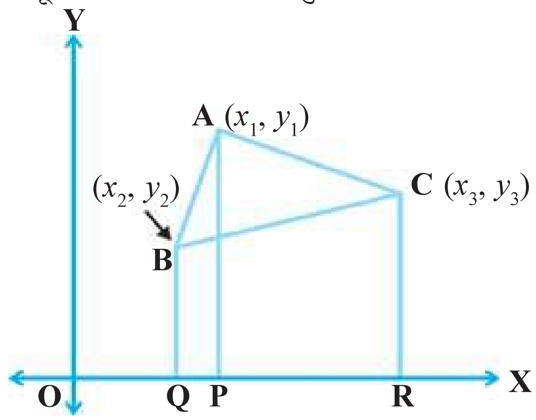
[**સૂચન :** સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (તેના વિકર્ણોનો ગુણાકાર)]

7.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણનો પાયો અને તેના પરનો વેધ આપેલ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધતાં શીખ્યા છો. તમે આ માટે નીચેનું સૂત્ર વાપર્યું છે :

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ}$$

ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે હેરોનું સૂત્ર પણ શીખ્યાં છો. હવે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ આપેલાં હોય તો તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? સારું, તમે અંતરસૂત્રની મદદથી ત્રણ બાજુઓની લંબાઈ શોધી શકો અને ત્યાર બાદ હેરોના સૂત્રની મદદથી ક્ષેત્રફળ શોધી શકો. પરંતુ, ખાસ કરીને જો બાજુઓના માપ અસંમેય સંખ્યા મળે તો આ કંટાળાજનક છે. ચાલો, આપણે જોઈએ કે કોઈ સરળ માર્ગ છે ?



આકૃતિ 7.13

ધારો કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) C (x_3, y_3) હોય તેવો કોઈ ત્રિકોણ ABC છે. A, B અને C માંથી x-અક્ષ પર લંબ અનુક્રમે AP, BQ અને CR દોરો. સ્પષ્ટપણે ABQP, APRC અને BQRC બધા સમલંબ ચતુષ્કોણ થશે. (જુઓ આકૃતિ 7.13.)

હવે, આકૃતિ 7.13 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ = સમલંબ ચતુષ્કોણ ABQPનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ ચતુષ્કોણ APRCનું ક્ષેત્રફળ – સમલંબ ચતુષ્કોણ BQRCનું ક્ષેત્રફળ

તમે આ પણ જાણો છો કે,

$$\text{સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}\ (\text{સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો})\ (\text{તેમની વચ્ચેનું અંતર})$$

આથી,

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

આમ, Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ આ સૂત્રથી મળતાં મૂલ્યની સંખ્યાત્મક કિંમત થાય.

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય}$$

ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : જેનાં શિરોબિંદુઓ (1, – 1), (– 4, 6) અને (–3, – 5) હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : A (1, – 1), B (– 4, 6) અને C (–3, – 5) શિરોબિંદુઓ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{1}{2}\ [1\ (6 + 5) + (-4)\ (-5 + 1) + (-3)\ (-1 - 6)]$$

$$= \frac{1}{2}\ (11 + 16 + 21) = 24$$

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 24 ચોરસ એકમ થાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શિરોબિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$= \frac{1}{2}\ [\ 5\ (7 + 4) + 4\ (-4 - 2) + 7\ (2 - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [55 - 24 - 35] = \frac{-4}{2} = -2$$

ક્ષેત્રફળ એ માપ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, આપણે –2 ની સંખ્યાત્મક કિંમત 2 લઈશું.

માટે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = 2 ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ P (–1.5, 3), Q (6, –2) અને R (–3, 4) થી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\ [\ -1.5\ (-2 - 4) + 6\ (4 - 3) + (-3)\ (3 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}\ (9 + 6 - 15) = 0$$

શું આપણી પાસે 0 ચોરસ એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ હોઈ શકે ? આનો અર્થ શું થાય ?

જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 ચોરસ એકમ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 14 : બિંદુઓ A (2, 3), B (4, k) અને C (6, –3) સમરેખ હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 જ થાય.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ [\ 2\ (k + 3) + 4\ (-3 - 3) + 6\ (3 - k)] = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ [\ -4k] = 0$$

$$\therefore\ k = 0$$

ચાલો, માટે આપણે આપણો ઉત્તર ચકાસીએ.

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\ [2\ (0 + 3) + 4\ (-3 -3) + 6\ (3 - 0)] = 0$

ઉદાહરણ 15 : જો A (–5, 7), B (–4, –5), C (–1, – 6) અને D (4, 5) ક્રમમાં એ એક ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : B થી D ને જોડવાથી, તમને Δ ABD અને Δ BCD એમ બે ત્રિકોણો મળશે.

હવે, Δ ABD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-5\,(-5-5) + (-4)\,(5-7) + 4\,(7+5)]$

$= \frac{1}{2}\,(50 + 8 + 48) = \frac{106}{2}$ = 53 ચોરસ એકમ

તથા, Δ BCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-4\,(-6-5) - 1\,(5+5) + 4\,(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}\,[44 - 10 + 4]$ = 19 ચોરસ એકમ

આથી, ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 53 + 19 = 72 ચોરસ એકમ

નોંધ : બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આપણે જેમાં સામાન્ય ક્ષેત્રફળ ન હોય તેવા ત્રિકોણીય પ્રદેશોમાં વિભાજન કરીએ અને તેનું ક્ષેત્રફળ આ પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. જેનાં શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે છે તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

   (i) (2, 3), (–1, 0), (2, – 4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ હોય તો પ્રત્યેકમાં 'k' ની કિંમત શોધો :

   (i) (7, –2), (5, 1), (3, k) (ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)

3. જેનાં શિરોબિંદુઓ (0, –1), (2, 1) અને (0, 3) હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને આપેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

4. એક ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (– 4, – 2), (– 3, – 5), (3, – 2) અને (2, 3) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. તમે ધોરણ IX (પ્રકરણ 9, પ્રશ્ન નં.3)માં શીખ્યા છો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે. જેનાં શિરોબિંદુઓ A (4, –6), B (3, –2) અને C (5, 2) હોય, તેવા Δ ABC માટે આ પરિણામ ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. રેખા $2x + y - 4 = 0$ બિંદુઓ A (2, –2) અને B (3, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે તે નક્કી કરો.

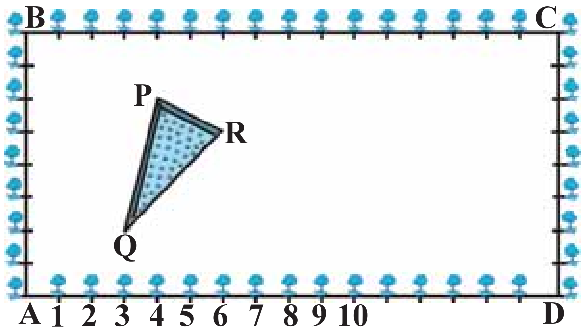
2. જો બિંદુઓ (x, y), (1, 2) અને (7, 0) સમરેખ હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

3. બિંદુઓ (6, –6), (3, –7) અને (3, 3)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.

4. ચોરસનાં બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ (– 1, 2) અને (3, 2) છે, તો બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

5. કૃષિનગરની માધ્યમિક શાળાના ધોરણ Xના વિદ્યાર્થીઓને બાગાયત પ્રવૃત્તિ માટે એક લંબચોરસ મેદાન ફાળવવામાં આવ્યું છે. તેની ફરતી બાજુએ ગુલમહોરના રોપા એક-એક મીટરના અંતરે વાવેલા છે. આકૃતિ 7.14માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ મેદાનમાં ઘાસની એક ત્રિકોણીય લોન છે. વિદ્યાર્થીઓને બાકીના ભાગ પર ફૂલોના છોડનાં બીજ વાવવાનાં છે.



આકૃતિ 7.14

(i) A ને ઊગમબિંદુ લઈ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

(ii) જો C ઊગમબિંદુ હોય, તો Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓના યામ શું થાય ? આ બંને કિસ્સાઓમાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

6. Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A (4, 6), B (1, 5) અને C (7, 2) છે. બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે એક રેખા D અને E માં એવી રીતે છેદે છે જેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. તો Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને Δ ABC ના ક્ષેત્રફળ સાથે તેની તુલના કરો. (પ્રમેય 6.2 અને પ્રમેય 6.6 યાદ કરો.)

7. A (4, 2), B (6, 5) અને C (1, 4) એ Δ ABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(i) A માંથી દોરેલ મધ્યગા BC ને D માં મળે છે. બિંદુ D ના યામ શોધો.

(ii) AP : PD = 2:1 થાય એવું બિંદુ P એ AD પર છે તો P ના યામ શોધો.

(iii) BQ : QE = 2 : 1 અને CR : RF = 2:1 હોય તેવાં બિંદુઓ Q અને R અનુક્રમે મધ્યગા BE અને CF પર છે, તો Q અને R ના યામ શોધો.

(iv) તમે શું અવલોકન કર્યું ?

(v) જો A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) એ Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ હોય તો આપેલ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો.

[**નોંધ :** ત્રણે ય મધ્યગાઓના છેદબિંદુને મધ્યકેન્દ્ર કહે છે અને તે દરેક મધ્યગાનું 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.]

8. બિંદુઓ A (– 1, – 1), B (–1, 4), C (5, 4) અને D (5, –1) થી લંબચોરસ ABCD રચાય છે. P, Q, R અને S અનુક્રમે AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. ચતુષ્કોણ PQRS ચોરસ છે ? લંબચોરસ છે ? કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

7.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ છે.

2. બિંદુ P (x, y) નું ઊગમબિંદુથી અંતર $\sqrt{x^2 + y^2}$ છે.

3. A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y) ના યામ $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ થાય.

4. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ છે.

5. બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\frac{1}{2}$ $[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ની સંખ્યાત્મક કિંમત છે.

વાચકને નોંધ

વિભાગ 7.3 માં A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરતા બિંદુ P ના યામ (x, y) કેવી રીતે મળે તેની ચર્ચા કરી છે.

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \; y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

PA : PB = $m_1 : m_2$ છે તેની નોંધ કરો.

પરંતુ જો, P, A અને B ની વચ્ચે ન હોય પરંતુ રેખા AB પર રેખાખંડ AB ની બહાર હોય તો આપણે કહીએ છીએ કે P એ A અને B ને જોડતા રેખાખંડનું બહિર્વિભાજન કરે છે. આવા વિકલ્પમાં વિભાજન સૂત્રનો આપણે ઉચ્ચ વર્ગમાં અભ્યાસ કરીશું.

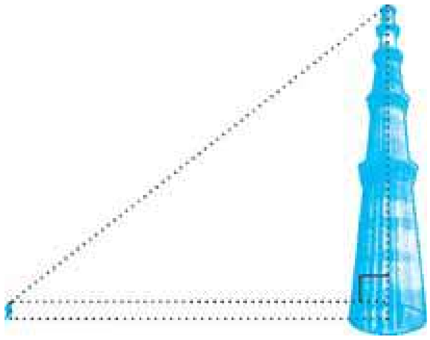
ત્રિકોણમિતિનો પરિચય 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.
– J.F. Herbart (1890)

8.1 પ્રાસ્તાવિક

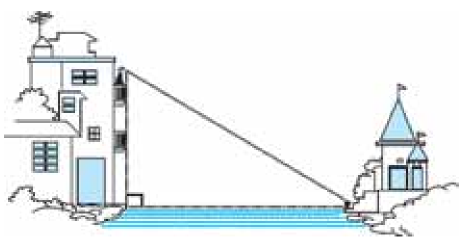
તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને વિશિષ્ટ વિકલ્પમાં કાટકોણ ત્રિકોણનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છો. હવે આપણી આસપાસમાંથી જ જેમાં કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ. ઉદાહરણ તરીકે :

1. ધારો કે, એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓ કુતુબમિનારની મુલાકાત લઈ રહ્યા છે. હવે જો કોઈ એક વિદ્યાર્થી મિનારની ટોચ તરફ જુએ તો અહીં આકૃતિ 8.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરી શકાય. શું આ મિનારની ઊંચાઈ વાસ્તવિક રીતે માપ્યા વગર વિદ્યાર્થી શોધી શકશે ?



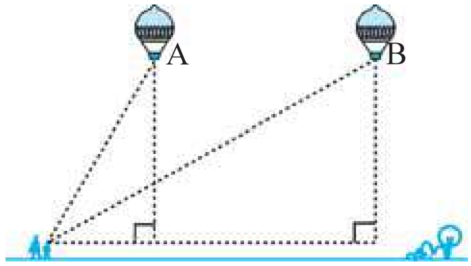
આકૃતિ 8.1

2. ધારો કે, એક છોકરી નદીના કિનારા પર રહેલા તેના ઘરની અગાસીમાં બેઠી છે. તે નદીના બીજા કિનારા પર આવેલા મંદિરનાં પગથિયાં પર રહેલા ફૂલોનાં કૂંડાંને જુએ છે. આ પરિસ્થિતિમાં પણ આકૃતિ 8.2માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય છે. જો તમે જાણતા હો કે, નિરીક્ષણ કરનાર વ્યક્તિ કેટલી ઊંચાઈ પર બેઠી છે, તો શું તમે નદીની પહોળાઈ શોધી શકશો ?



આકૃતિ 8.2

3. ધારો કે, ગરમ હવાવાળું એક બલૂન હવામાં ઊડી રહ્યું છે. આકાશમાં રહેલા આ બલૂનને એક છોકરી જુએ છે અને તેની જાણ કરવા તે પોતાની માતા પાસે દોડીને જાય છે. આ બલૂનને જોવા તેની માતા પણ તરત જ ઘરની બહાર આવે છે. હવે ધારો કે, છોકરીએ જ્યારે આ બલૂનને પ્રથમવાર જોયું ત્યારે તે બિંદુ A પર હતું અને હવે જ્યારે માતા અને પુત્રી બંને સાથે બલૂનને જુએ છે ત્યારે બલૂન બિંદુ B સુધી પહોંચી ગયું છે. શું તમે બિંદુ B નું જમીનથી શિરોલંબઅંતર શોધી શકશો ?



આકૃતિ 8.3

ઉપર્યુક્ત બધી જ પરિસ્થિતિઓમાં ગણિતશાસ્ત્રની એક શાખા ત્રિકોણમિતિમાં આવતી ગાણિતિક પદ્ધતિઓના ઉપયોગથી અંતર અને ઊંચાઈ શોધી શકાય છે. અંગ્રેજી શબ્દ 'Trigonometry' ત્રણ ગ્રીક શબ્દો, 'Tri' (એટલે કે, ત્રણ), 'Gon' (એટલે કે, બાજુ) અને 'metron' (એટલે કે, માપ)ના સંયોજનથી બનેલ છે. ખરેખર તો *ત્રિકોણમિતિ,* ત્રિકોણની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ છે. પ્રાચીન સમયમાં ત્રિકોણમિતિ પર થયેલ કાર્યનો ઉલ્લેખ ઇજિપ્ત અને બેબિલોનમાં મળે છે. પ્રાચીન સમયમાં ખગોળશાસ્ત્રીઓ ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી તારાઓ અને ગ્રહોનું અંતર શોધવા માટે કરતા હતા. આજે પણ યંત્રશાસ્ત્ર અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં વપરાતી પ્રૌદ્યોગિકીની નવીન પદ્ધતિઓ ત્રિકોણમિતિની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત છે.

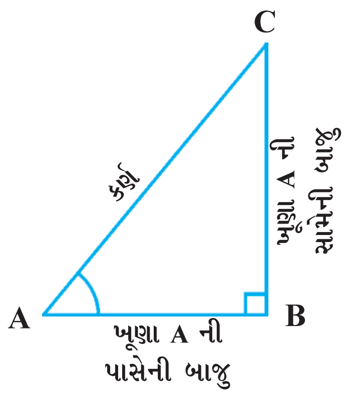
આ પ્રકરણમાં આપણે કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણોની સાપેક્ષમાં તેની બાજુઓના ગુણોત્તરો વિશે ચર્ચા કરીશું. આપણે તેને ખૂણાઓ માટેના *ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર* કહીશું. આ ગુણોત્તરનો વિસ્તાર બીજા ખૂણાઓ માટે પણ કરી શકાય છે. છતાં પણ આપણે અહીં આપણી ચર્ચા ફક્ત લઘુકોણ સુધી જ સીમિત રાખીશું. આપણે અહીં $0°$ અને $90°$ માપના ખૂણાઓના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પણ વ્યાખ્યાયિત કરીશું, તેમજ કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીશું તથા આ ગુણોત્તરોને સંબંધિત કેટલાક નિત્યસમ સ્થાપિત કરીશું. તેમને આપણે *ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ* કહીશું.

8.2 ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

વિભાગ 8.1માં તમે વિભિન્ન પરિસ્થિતિઓમાં કાલ્પનિક રીતે બનતા કાટકોણ ત્રિકોણ વિશે જોયું.

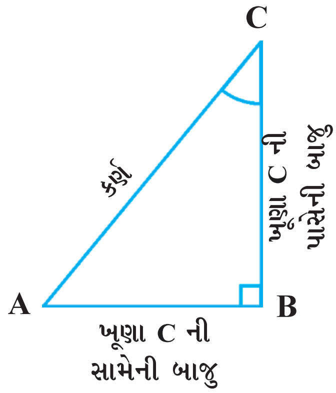
ચાલો, આકૃતિ 8.4 માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો.

અહીં, $\angle CAB$ (ટૂંકમાં $\angle A$) લઘુકોણ છે. ખૂણા A ને સાપેક્ષ બાજુ BC ની સ્થિતિ વિશે ધ્યાન આપો. તે ખૂણા A ની સામે છે. આપણે તેને ખૂણા A ની ***સામેની બાજુ (Opposite side)*** કહીશું. બાજુ AC ***કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ (Hypotenuse)*** છે અને બાજુ AB, $\angle A$ નો ભાગ છે તેથી, તેને ખૂણા A ની ***પાસેની બાજુ (Adjacent side)*** કહીશું.



આકૃતિ 8.4

ધ્યાન આપો, અહીં ખૂણા A ની જગ્યાએ ખૂણો C લઈએ તો બાજુઓની સ્થિતિ બદલાઈ જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 8.5.)



આકૃતિ 8.5

અગાઉના ધોરણમાં તમે ‘ગુણોત્તર’ની સંકલ્પના વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ સંબંધિત કેટલાક ગુણોત્તરોને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને તે ગુણોત્તરોને આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો કહીશું.

કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં (જુઓ આકૃતિ 8.4.) ખૂણા A માટેના ***ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો*** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$\angle A \text{ નો } sine = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } cosine = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } tangent = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } cosecant = \frac{1}{\angle A \text{ નો sine}} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ નો } secant = \frac{1}{\angle A \text{ નો } cosine} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } cotangent = \frac{1}{\angle A \text{ નો } tangent} = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC}$$

ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યાયિત ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં અનુક્રમે *sin* A, *cos* A, *tan* A, *cosec* A, *sec* A અને *cot* A સ્વરૂપે લખાય છે. ધ્યાન આપો, અહીં ગુણોત્તરો ***cosec A, sec A અને cot A*** અનુક્રમે ***sin A, cos A અને tan A*** ના વ્યસ્ત ગુણોત્તરો છે.

અહીં તમે એ પણ જોઈ શકો છો કે,

$$tan\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{sin\ A}{cos\ A} \quad \text{અને } cot\ A = \frac{cos\ A}{sin\ A}.$$

આમ, કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો, ત્રિકોણના ખૂણાઓ તથા બાજુઓની લંબાઈ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

તમે કાટકોણ ત્રિકોણના ખૂણા C માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકશો ? (જુઓ આકૃતિ 8.5.)

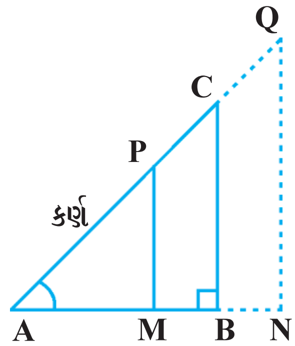
The first use of the idea of **'*sine*'** in the way we use it today was in the work *Aryabhatiyam* by ***Aryabhata,*** in C.E. 500. ***Aryabhata*** used the word ***ardha-jya*** for the half-chord, which was shortened to ***jya*** or ***jiva*** in due course. When the ***Aryabhatiyam*** was translated into Arabic, the word ***jiva*** was retained as it is. The word ***jiva*** was translated into ***sinus,*** which means curve, when the Arabic version was translated into Latin. Soon the word ***sinus***, also used as ***sine,*** became common in mathematical texts throughout Europe. An English Professor of astronomy ***Edmund Gunter*** (C.E.1581– C.E.1626), first used the abbreviated notation **'*sin*'.**

Aryabhata
C.E. 476 – 550

The origin of the terms **'*cosine*'** and **'*tangent*'** was much later. The ***cosine*** function arose from the need to compute the ***sine*** of the complementary angle. ***Aryabhata*** called it ***kotijya***. The name ***cosinus*** originated with ***Edmund Gunter***. In C.E.1674, the English Mathematician ***Sir Jonas Moore*** first used the abbreviated notation **'*cos*'**.

નોંધ : ધ્યાન આપો, અહીં *sin* A નો ઉપયોગ 'ખૂણા A ના *sine*' ના સંક્ષિપ્તરૂપે કરવામાં આવેલ છે. *sin* A એ *sin* અને A નો ગુણાકાર નથી. *sin* ને A થી અલગ કરીએ તો તેનો કોઈ જ અર્થ નથી. તે જ પ્રમાણે *cos* A એ *cos* અને A નો ગુણાકાર નથી. તેવી જ રીતે બીજા ગુણોત્તરો માટે પણ આવું જ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે જો આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ના કર્ણ AC પર બિંદુ P લઈએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AC પર એક બિંદુ Q લઈએ અને AB પર લંબ PM દોરીએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AB પર લંબ QN દોરીએ (જુઓ, આકૃતિ 8.6) તો Δ PAM માં ∠A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને Δ CAB માં ∠A માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અથવા Δ QAN માં ∠A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોમાં શું અંતર હોય ?



આકૃતિ 8.6

આનો ઉત્તર મેળવવા સૌપ્રથમ આ ત્રિકોણોનું નિરીક્ષણ કરો. શું Δ PAM અને Δ CAB સમરૂપ છે ? પ્રકરણ-6માં આપેલ સમરૂપતાની શરત (ખૂખૂ) યાદ કરો. આ સિદ્ધાંત પ્રમાણે તમે જોઈ શકો છો કે, ત્રિકોણ PAM અને ત્રિકોણ CAB સમરૂપ છે.

આમ, સમરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મ પ્રમાણે અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણ હોય છે.

આમ, આપણી પાસે $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$ છે.

તેના પરથી આપણને $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ વગેરે મળશે.

આ દર્શાવે છે કે, Δ PAM માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને Δ CAB માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો એક જ છે.

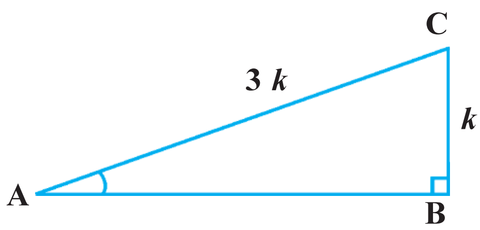
આ જ પ્રમાણે તમે ચકાસી શકો છો કે, Δ QAN માં પણ $\sin A$ (તથા અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો)નું મૂલ્ય સમાન જ મળે છે.

આપણા આ અવલોકનથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, ***જો ખૂણાનું માપ સમાન રહે તો તે ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યોમાં ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સાથે કોઈ પરિવર્તન થતું નથી.***

નોંધ : આપણી સુવિધા માટે આપણે $(\sin A)^2, (\cos A)^2$ વગેરેને બદલે અનુક્રમે $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ વગેરે લખીશું. પરંતુ $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (જેને *sin* ઈનવર્સ A વંચાય છે.) $\sin^{-1} A$ નો અર્થ જુદો થાય છે. તેની ચર્ચા આપણે પછીના ધોરણમાં કરીશું. આ જ પ્રમાણે ઉપર્યુક્ત વિધાનો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો માટે પણ લાગુ પડશે. કેટલીકવાર ખૂણો દર્શાવવા ગ્રીક અક્ષર θ (થીટા) પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

આપણે લઘુકોણ માટેના છ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા. જો આપણે કોઈ એક ગુણોત્તર જાણતા હોઈએ તો શું બીજા ગુણોત્તરો શોધી શકીશું ? ચાલો, જોઈએ.

જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\sin A = \frac{1}{3}$ હોય, તો આનો અર્થ એ થાય કે $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, એટલે કે, ત્રિકોણની બાજુઓ BC અને AC ની લંબાઈનો ગુણોત્તર 1:3 છે. (જુઓ આકૃતિ 8.7.) તેથી કોઈ એક ધન સંખ્યા k માટે જો BC બરાબર k લઈએ તો AC બરાબર $3k$ થાય. ખૂણા A માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે આપણે ત્રીજી બાજુ AB ની લંબાઈ શોધવી પડે. તમને પાયથાગોરસનું પ્રમેય યાદ છે? ચાલો તેના ઉપયોગથી આપણે AB ની લંબાઈ શોધીએ.



આકૃતિ 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

માટે, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

તેથી આપણને $AB = 2\sqrt{2}\,k$ મળે (AB = $-2\sqrt{2}\,k$ કેમ નહિ ?)

હવે, $\quad cos\, A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

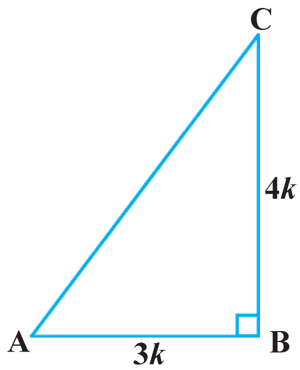
આ જ પ્રમાણે તમે ખૂણા A માટેના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પણ શોધી શકશો.

નોંધ : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, લાંબામાં લાંબી બાજુ કર્ણ હોવાથી *sin* A અને *cos* A નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 થી ઓછું હશે. (કોઈ વિશેષ સ્થિતિમાં જ તે 1 હશે.)

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : જો $tan\, A = \dfrac{4}{3}$ હોય, તો ∠A ના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ કાટકોણ ΔABC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.8).



આકૃતિ 8.8

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે, $tan\, A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{3}$

માટે, જો કોઈ ધન સંખ્યા k માટે BC = $4k$ હોય, તો AB = $3k$

હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

તેથી, $\quad AC = 5\,k$ મળે.

હવે, આપણે તેમની વ્યાખ્યાને આધારે બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.

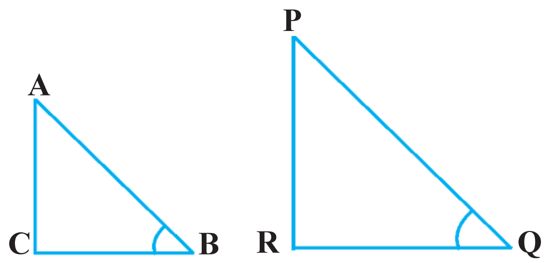
$$sin\, A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$cos\, A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

માટે, $\quad cot\, A = \dfrac{1}{tan\, A} = \dfrac{3}{4},\ cosec\, A = \dfrac{1}{sin\, A} = \dfrac{5}{4}$ અને $sec\, A = \dfrac{1}{cos\, A} = \dfrac{5}{3}$

ઉદાહરણ 2 : લઘુકોણ B તથા Q માટે *sin* B = *sin* Q છે. સાબિત કરો કે ∠B = ∠Q

ઉકેલ : ચાલો, આપણે જેમાં *sin* B = *sin* Q હોય, એવા બે કાટકોણ ΔABC અને ΔPQR લઈએ. (જુઓ આકૃતિ 8.9.)



આકૃતિ 8.9

અહીં, $\quad sin\, B = \dfrac{AC}{AB}$

અને $\quad sin\, Q = \dfrac{PR}{PQ}$

તેથી, $\quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$

માટે, $\quad \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ} = k \quad$ (ધારો) $\quad$ (1)