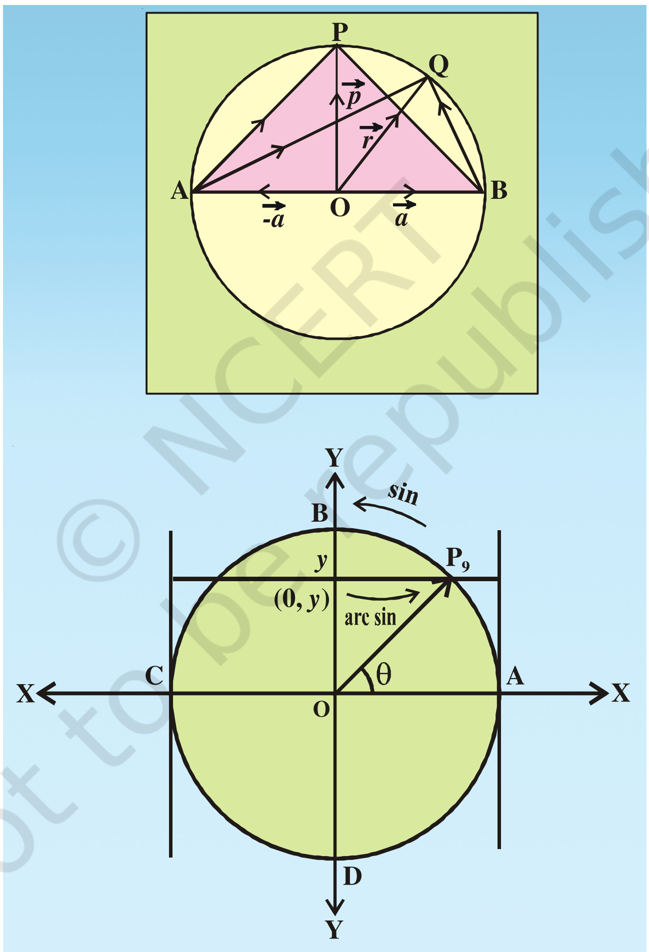
कक्षा 12 के लिए

क्रियाकलाप



The basic principles of learning mathematics are : (a) learning should be related to each child individually (b) the need for mathematics should develop from an intimate acquaintance with the environment (c) the child should be active and interested, (d) concrete material and wide variety of illustrations are needed to aid the learning process (e) understanding should be encouraged at each stage of acquiring a particular skill (f) content should be broadly based with adequate appreciation of the links between the various branches of mathematics, (g) correct mathematical usage should be encouraged at all stages.

– Ronwill

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य

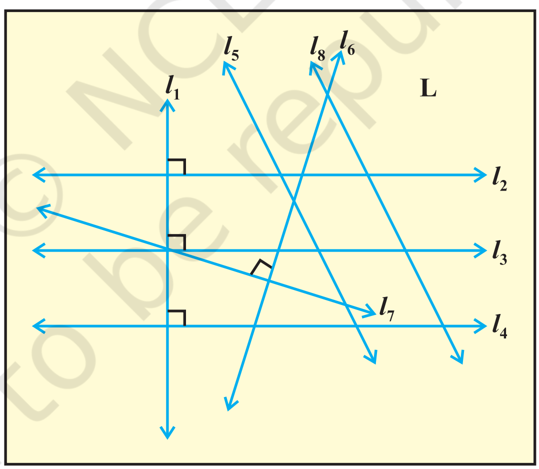
यह सत्यापित करना कि एक तल में सभी समांतर रेखाओं के समुच्चय L में एक R = $\{(l, m) : l \perp m\}$ द्वारा परिभाषित संबंध सममित है परंतु स्वतुल्य और संक्रामक नहीं है।

आवश्यक सामग्री

प्लाईवुड का टुकड़ा कुछ तारों के टुकड़े (8), कीलें, सफ़ेद कागज़, गोंद इत्यादि।

रचना की विधि

एक प्लाईवुड का टुकड़ा लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए। प्लाईवुड के ऊपर यादृच्छिक रूप से कीलों की सहायता से तारों को इस प्रकार स्थिर कीजिए कि इनमें से कुछ समांतर हों, कुछ एक दूसरे के लंबवत् हों तथा कुछ झुके हुए हों जैसा आकृति 1 में दिखाया गया है।



आकृति 1

प्रदर्शन

1. मान लीजिए कि दर्शाई गई तारें रेखाएँ $l_1, l_2, ..., l_8$ को निरूपित करती हैं।
2. तार l_1 प्रत्येक रेखा l_2, l_3, l_4 के लंबवत् है। (आकृति 1 देखिए)

3. l_6 रेखा l_7 के लंबवत् है।

4. रेखा l_2 रेखा l_3 के समांतर है, l_3 रेखा l_4 के समांतर है l_5, l_8 के समांतर है।

5. $(l_1, l_2), (l_1, l_3), (l_1, l_4), (l_6, l_7) \in R$

प्रेक्षण

1. आकृति 1 में कोई भी रेखा स्वयं के लंबवत् नहीं है इसलिए संबंध $R = \{(l, m) : l \perp m\}$ ______। (है/नहीं है)

2. आकृति 1 में $l_1 \perp l_2$ क्या $l_2 \perp l_1$? ______ (है/नहीं है)

   $\therefore \quad (l_1, l_2) \in R \Rightarrow (l_2, l_1)$ ______ R $(\notin / \in)$

   इसी प्रकार, $l_3 \perp l_1$ क्या $l_1 \perp l_3$? ______ (है/नहीं है)

   $\therefore \quad (l_3, l_1) \in R \Rightarrow (l_1, l_3)$ ______ R $(\notin / \in)$

   पुनः $\quad l_6 \perp l_7$ क्या $l_7 \perp l_6$? ______ (है/नहीं है)

   $\therefore \quad (l_6, l_7) \in R \Rightarrow (l_7, l_6)$ ______ R $(\notin / \in)$

   $\therefore$ संबंध R सममित .... (है/नहीं है)

3. आकृति 1 में, $l_2 \perp l_1$ और $l_1 \perp l_3$ क्या $l_2 \perp l_3$ ... (है/नहीं है)

   अर्थात् $\quad (l_2, l_1) \in R$ और $(l_1, l_3) \in R \Rightarrow (l_2, l_3)$ ______ R $(\notin / \in)$

   $\therefore$ संबंध R संक्रामक .... (है/या नहीं है)

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग, यह जाँचने के लिए किया जा सकता है कि एक दिया गया संबंध तुल्यता-संबंध है या नहीं है।

टिप्पणी

1. इस स्थिति में संबंध एक तुल्यता संबंध नहीं है।
2. इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति विभिन्न स्थितियों में कुछ और तारें लेकर की जा सकती है।

क्रियाकलाप 2

उद्देश्य

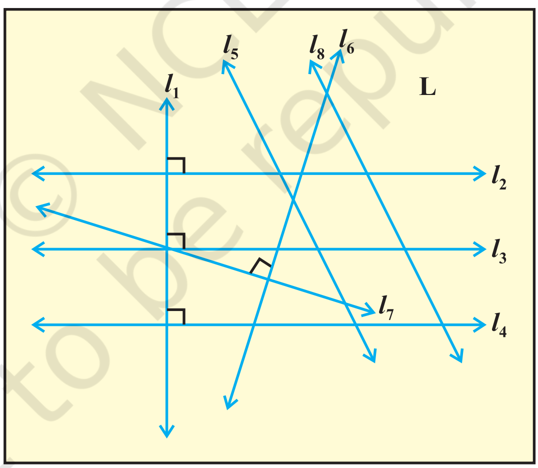
यह सत्यापित करना कि एक तल में सभी रेखाओं का समुच्चय R जो $R = \{(l, m) : l \parallel m\}$ द्वारा परिभाषित है, एक तुल्यता संबंध है।

आवश्यक सामग्री

प्लाईवुड का एक टुकड़ा, तार के कुछ टुकड़े (8) कीलें, सफ़ेद कागज़, गोंद इत्यादि।

रचना की विधि

उपयुक्त आकार का प्लाईवुड का एक टुकड़ा लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए। प्लाईवुड पर कीलों की सहायता से यादृच्छिक रूप से तारों को इस प्रकार स्थिर कीजिए कि उनमें से कुछ समांतर हों, कुछ एक दूसरे के लंबवत् हों और कुछ झुके हुए (तिर्यक) हों जैसा आकृति 2 में दिखाया गया है।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. मान लीजिए कि दर्शाई गई तारें रेखाओं $l_1, l_2, ..., l_8$ को निरूपित करती हैं।
2. रेखा l_1 प्रत्येक रेखा l_2, l_3, l_4 के लंबवत् है।
3. रेखा l_6 रेखा l_7 के लंबवत् है।

4. रेखा l_2 रेखा l_3 के समांतर है, रेखा l_3 रेखा l_4 के समांतर है और रेखा l_5 रेखा l_8 के समांतर है।
5. $(l_2, l_3), (l_3, l_4), (l_5, l_8), \in$ R

प्रेक्षण

1. आकृति 2 में प्रत्येक रेखा स्वयं के समांतर है। इसलिए संबंध $R = \{(l, m) : l \parallel m\}$ एक स्वतुल्य संबंध _______। (है/नहीं है)

2. आकृति 2 में प्रेक्षित कीजिए कि $l_2 \parallel l_3$ है

   क्या l_3 ... l_2 है ($\parallel$ / $\nparallel$)

   इसलिए $(l_2, l_3) \in R \Rightarrow (l_3, l_2)$ ... R ($\notin / \in$)

   इसीप्रकार $l_3 \parallel l_4$ क्या l_4 ...l_3? ($\parallel$ / $\nparallel$)

   इसलिए $(l_3, l_4) \in R \Rightarrow (l_4, l_3)$ ... R ($\notin / \in$)

   और $(l_5, l_8) \in R \Rightarrow (l_8, l_5)$ ... R ($\notin / \in$)

$\therefore$ अतः संबंध R एक सममित संबंध ... । (है/नहीं है)

3. आकृति 2 में प्रेक्षित कीजिए कि $l_2 \parallel l_3$ और

   $l_3 \parallel l_4$ । क्या l_2 ... l_4 ? ($\nparallel$/ $\parallel$)

   इसलिए $(l_2, l_3) \in R$ और $(l_3, l_4) \in R \Rightarrow (l_2, l_4)$ ... R ($\in / \notin$)

   इसी प्रकार $l_3 \parallel l_4$ और $l_4 \parallel l_2$ क्या l_3 ... l_2 ? ($\parallel$ / $\nparallel$)

   इसलिए $(l_3, l_4) \in R, (l_4, l_2) \in R \Rightarrow (l_3, l_2)$ ... R ($\in , \notin$)

इस प्रकार, संबंध R एक संक्रामक संबंध ... । (है/नहीं है)

अतः संबंध R एक स्वतुल्य, सममित और संक्रामक संबंध है। इसलिए R एक तुल्यता-संबंध है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप तुल्यता-संबंध समझने के लिए उपयोगी है।

टिप्पणी

इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति विभिन्न स्थितियों में कुछ और तार लेकर की जा सकती है।

क्रियाकलाप 3

उद्देश्य

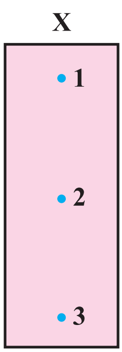
एक ऐसे फलन का निरूपण करना जो एकैकी नहीं है परंतु आच्छादक है।

आवश्यक सामग्री

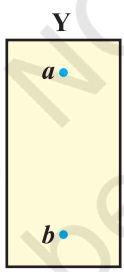
कार्डबोर्ड, कीलें, सुतली, गोंद और प्लास्टिक की पट्टी (पट्टी)

रचना की विधि

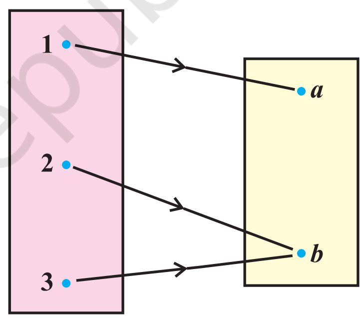
1. कार्डबोर्ड के बाईं ओर एक प्लास्टिक की पट्टी चिपकाइए और उस पर तीन कीलें स्थिर कीजिए जैसा आकृति 3.1 में दिखाया गया है। पट्टी पर कीलों को 1, 2 और 3 से नामांकित कीजिए।
2. कार्डबोर्ड के दायीं ओर एक दूसरी प्लास्टिक की पट्टी चिपकाइए और उस पर दो कीलें स्थिर कीजिए जैसा आकृति 3.2 में दिखाया गया है। पट्टी पर कीलों को a और b नाम दीजिए।



आकृति 3.1



आकृति 3.2



आकृति 3.3

3. आकृति 3.3 में दिखाए गए अनुसार बाईं पट्टी की कीलों को दाईं पट्टी की कीलों से सुतली द्वारा जोड़िए।

प्रदर्शन

1. समुच्चय $X = \{1, 2, 3\}$ लीजिए।
2. समुच्चय $Y = \{a, b\}$ लीजिए।
3. समुच्चय X के अवयवों को समुच्चय Y के तदनुरूपों अवयवों से सुतली द्वारा जोड़िए जैसा आकृति 3.3 में दिखाया गया है।

प्रेक्षण

1. X के अवयव 1 का Y में प्रतिबिंब ___________ है।

   X के अवयव 2 का Y में प्रतिबिंब ___________ है।

   X के अवयव 3 का Y में प्रतिबिंब ___________ है।

   इसलिए, आकृति 3.3 एक ___________ निरुपित करती है।

2. X के प्रत्येक अवयव का Y में __________ प्रतिबिंब है। इसलिए फलन __________ है। (एकैकी/एकैकी नहीं)

3. Y के प्रत्येक अवयव का X में पूर्व प्रतिबिंब (pre-image) का __________ है। (अस्तित्व/अस्तित्व नहीं) इसलिए फलन _________ है। (आच्छादक/आच्छादक नहीं)

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग एकैकी और आच्छादक फलनों को प्रदर्शित करने के लिए किया जा सकता है।

टिप्पणी

समुच्चय X और Y के अवयवों की संख्या में परिवर्तन करते हुए इस क्रियाकलाप का प्रदर्शन कीजिए।

क्रियाकलाप 4

उद्देश्य

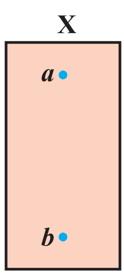
एक फलन को प्रदर्शित करना जो एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है।

आवश्यक सामग्री

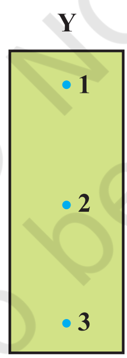
कार्डबोर्ड, कीलें, सुतली, गोंद और प्लास्टिक की पट्टियाँ।

रचना की विधि

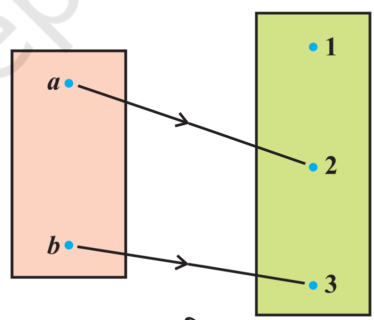
1. कार्डबोर्ड के बाईं ओर एक प्लास्टिक की पट्टी चिपकाइए और इस पर दो कीलें स्थिर कीजिए जैसा आकृति 4.1 में दिखाया गया हैं। कीलों को a और b नाम दीजिए।
2. कार्डबोर्ड के दाईं ओर एक दूसरी प्लास्टिक की पट्टी चिपकाइए और उस पर तीन कीलें स्थिर कीजिए जैसा आकृति 4.2 में दिखाया गया है। दाईं ओर की पट्टी पर कीलों को 1, 2 और 3 नाम दीजिए।



आकृति 4.1



आकृति 4.2



आकृति 4.3

3. बाईं ओर की पट्टी की कीलों को दाईं ओर की कीलों से सुतली द्वारा जोड़िए जैसा आकृति 4.3 में दिखाया गया है।

प्रदर्शन

1. समुच्चय $X = \{a, b\}$ लीजिए
2. समुच्चय $Y = \{1, 2, 3\}$ लीजिए
3. X के अवयवों को Y के अवयवों से सुतली द्वारा जोड़िए जैसा आकृति 4.3 में दिखाया गया है।

प्रेक्षण

1. X के अवयव a का Y में प्रतिबिंब _______________ है।

   X के अवयव b का Y में प्रतिबिंब _______________ है।

   इसलिए, आकृति 4.3 एक _______________________ निरुपित करती है।

2. X के प्रत्येक अवयव का Y में __________ प्रतिबिंब है। इसलिए फलन _____________ है। (एकैकी/एकैकी नहीं)

3. Y के अवयव 1 का X में पूर्व प्रतिबिंब का ___________ (अस्तित्व है/अस्तित्व नहीं है) इसलिए, फलन___________ है। (आच्छादक/आच्छादक नहीं)

   इस प्रकार, आकृति 4.3 एक फलन को निरूपित करती है जो __________ है परंतु आच्छादक नहीं है।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग एकैकी जो आच्छादक नहीं हैं। फलनों की संकल्पना को प्रदर्शित करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 5

उद्देश्य

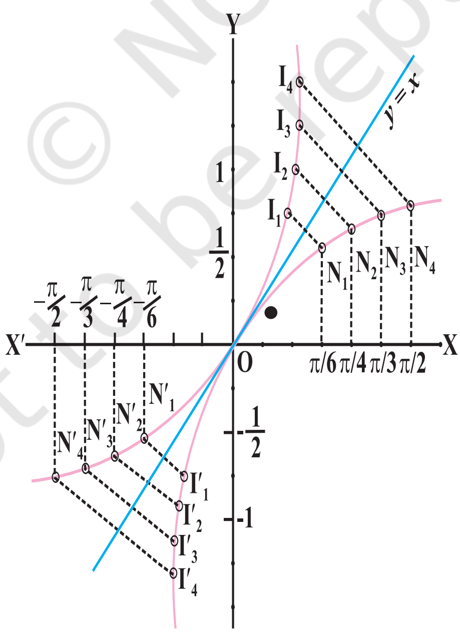
$\sin x$ के ग्राफ़ का प्रयोग करके $\sin^{-1} x$ का ग्राफ़ खींचना और दर्पण परावर्तन (रेखा $y = x$ के सापेक्ष) की संकल्पना का प्रदर्शन करना।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद चार्ट पेपर, रूलर, रंगीन पेन, गोंद, पेंसिल, रबर (eraser), कटर, कीलें और पतले तार

रचना की विधि

1. उपयुक्त विमाओं, मान लीजिए 30 cm × 30 cm का एक कार्डबोर्ड लीजिए।
2. कार्डबोर्ड पर 25 cm × 25 cm आकार का सफ़ेद चार्ट पेपर चिपकाइए।
3. पेपर पर दो परस्पर लंब रेखाएँ खींचिए और उन्हें समकोणिक अक्ष X′OX और YOY′ के नाम दीजिए (आकृति 5 देखिए)।



आकृति 5

4. x–अक्ष पर 1 इकाई को y–अक्ष की 1 इकाई का 1.25 गुणा लेते हुए अक्षों को सन्निकट रूप में अंशांकित कीजिए जैसा आकृति 5 में दिखाए गया है।

5. निर्देशांक तल में बिंदुओं $\left(\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$ को सन्निकट रूप में अंकित कीजिए और प्रत्येक बिंदु N_1, N_2, N_3, N_4, पर कीलें स्थिर कीजिए।

6. इसी प्रक्रिया को x अक्ष के दूसरी ओर बिंदुओं

$\left(\frac{-\pi}{6}, \sin\frac{-\pi}{6}\right), \left(\frac{-\pi}{4}, \sin\frac{-\pi}{4}\right), \left(\frac{-\pi}{3}, \sin\frac{-\pi}{3}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \sin\frac{-\pi}{2}\right)$ के सन्निकट मान लेकर दोहराइए और इन बिंदुओं N_1', N_2', N_3', N_4' पर कीलें स्थिर कीजिए। बिंदु O पर भी एक कील स्थिर कीजिए।

7. x–अक्ष के दोनों ओर की कीलों को तार द्वारा जोड़िए जिससे $\sin x$ का ग्राफ़ $\frac{-\pi}{2}$ से $\frac{\pi}{2}$ प्राप्त होगा।

8. रेखा $y = x$ का ग्राफ़ खींचिए। (बिंदुओं (1, 1), (2, 2), (3, 3), ... आदि को आलेखित कर और इन बिंदुओं को तार से जोड़िए)

9. कीलों N_1, N_2, N_3, N_4 से रेखा $y = x$ पर लंब खींचिए और इतना बढ़ाइए कि रेखा $y = x$ से लंब की दोनों ओर की दूरी बराबर हो। इन बिंदुओं I_1, I_2, I_3, I_4 पर कीलें स्थिर कीजिए।

10. उपर्युक्त क्रियाकलाप को x–अक्ष के दूसरी ओर दोहराइए और I_1', I_2', I_3', I_4' पर कीलें स्थिर कीजिए।

11. रेखा $y = x$ के दोनों ओर की कीलों को एक तार से मिलाइए जो $y=\sin^{-1} x$ का ग्राफ़ दर्शाता है।

प्रदर्शन

रेखा $y = x$ पर एक दर्पण रखिए। $\sin x$ के ग्राफ़ का दर्पण प्रतिबिंब $\sin^{-1} x$ के ग्राफ़ को निरूपित करेगा। यह इस तथ्य को दर्शाता है कि $\sin x$ का दर्पण परावर्तन $\sin^{-1} x$ होता है और विलोमतः भी।

प्रेक्षण

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_1 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_2 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_3 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_4 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_1^1 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_2^1 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_3^1 का प्रतिबिंब __________ है।

दर्पण (रेखा $y = x$) में बिंदु N_4^1 का प्रतिबिंब __________ है।

$y = x$ में $\sin x$ के ग्राफ़ का प्रतिबिंब __________ का ग्राफ़ है और $y = x$ में $\sin^{-1}x$ के ग्राफ़ का प्रतिबिंब ___________ का ग्राफ़ है।

अनुप्रयोग

$\cos^{-1}x$, $\tan^{-1} x$ इत्यादि का ग्राफ़ खींचने के लिए इसी प्रकार के क्रियाकलाप निष्पादित किए जा सकते हैं।

क्रियाकलाप 6

उद्देश्य

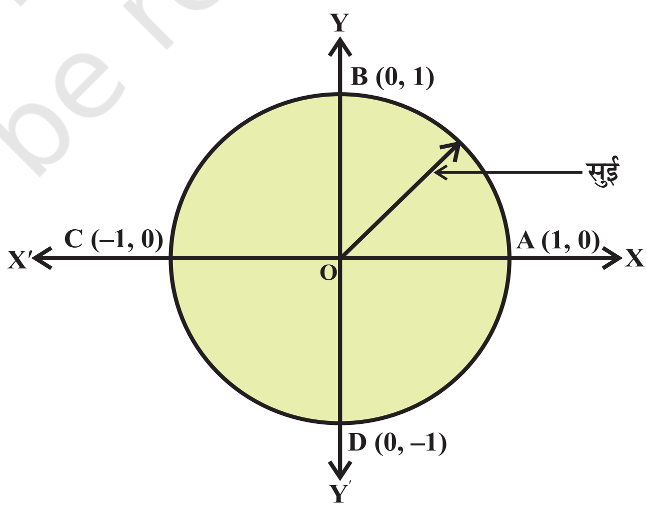
एकक वृत्त का प्रयोग करके प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन $\sin^{-1} x$ के मुख्य मानों की छान–बीन करना।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद चार्ट पेपर, पटरियाँ, रूलर, गोंद, स्टील के तार और सुई।

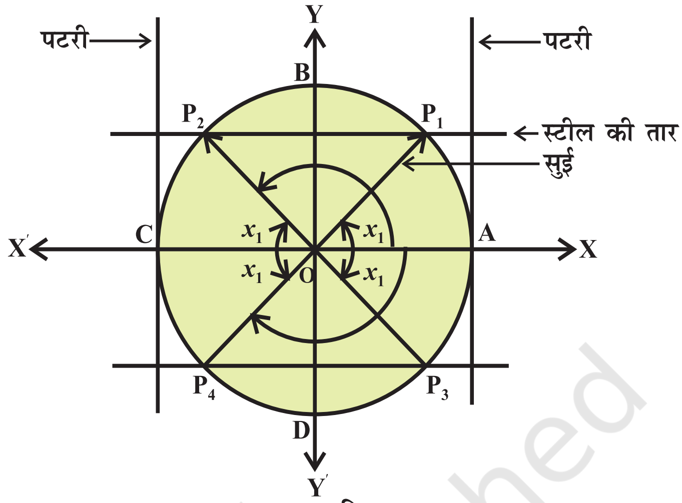
रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. इस पर एक एकक वृत्त खीचिए जिसका केंद्र O है।
3. वृत्त के केंद्र से दो लंब रेखाएँ X′OX और YOY′ खींचिए जो क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष को निरूपित करें जैसा आकृति 6.1 में दिखाया गया है।
4. जहाँ वृत्त x-अक्ष और y-अक्ष को काटता है, उन बिंदुओं को क्रमशः A, C, B और D से अंकित कीजिए, जैसा आकृति 6.1 में दिखाया गया है।
5. दो पटरियों को y-अक्ष के समांतर तथा कार्डबोर्ड की सम्मुख दिशाओं में स्थिर कीजिए। एक स्टील के तार को दोनों पटरियों के बीच इस तरह से रखिए कि वह x-अक्ष के समांतर चल (खिसक) सके जैसा आकृति 6.2 में दिखाया गया है।
6. इकाई लंबाई की एक सुई लीजिए। इसके एक सिरे को वृत्त के केंद्र पर इस प्रकार



आकृति 6.1

रखना है कि इसका दूसरा सिरा वृत्त के अनुदिश स्वतंत्र रूप से घूम सके, जैसा आकृति 6.2 में दिखाया गया है।



आकृति 6.2

प्रदर्शन

1. सुई को x-अक्ष की धनात्मक दिशा में एक स्वेच्छ कोण, मान लीजिए x_1, के अनुदिश रखिए। कोण का रेडियन माप एकक वृत्त के अंतः खंडित चाप की लंबाई के बराबर है।

2. स्टील के तार को पटरियों के बीच x-अक्ष के समांतर इस तरह सरकाइए कि तार सुई के स्वंतत्र सिरे (मान लीजिए P_1 पर) मिलता है।

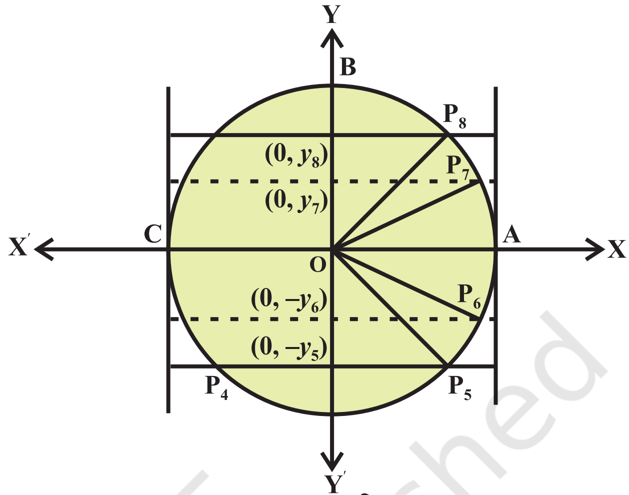
3. बिंदु P_1 के y-निर्देशांक को y_1 से निर्दिष्ट कीजिए, जहाँ y_1 एकक वृत्त के केंद्र से स्टील के तार की लंबवत् दूरी है जिससे $y_1 = \sin x_1$ प्राप्त होता है।

4. सुई को वामावर्त और आगे घुमाइए जिससे यह कोण $\pi - x_1$ पर पहुँच जाए। सरकने वाले स्टील के तार की सहायता से प्रतिच्छेदी बिंदु P_2 का y-निर्देशांक ज्ञात कीजिए। कोणों के विभिन्न मानों के लिए बिंदुओं P_1 और P_2 के y-निर्देशांक का मान समान है अर्थात $y_1 = \sin x_1$ और $y_1 = \sin (\pi - x_1)$। इससे यह प्रदर्शित होता है कि प्रथम और द्वितीय चतुर्थांश में लिए गए कोणों के लिए फलन sin एक एकैकी फलन नहीं है।

5. सुई को क्रमशः कोणों $-x_1$ और $(-\pi + x_1)$ पर रखिए। स्टील के तार को x-अक्ष के समांतर सरकाते हुए यह दिखाइए कि बिंदुओं P_3 और P_4 के लिए y-निर्देशांक समान है और इस प्रकार फलन sin, तीसरे और चौथे चतुर्थांश के बिंदुओं के लिए एकैकी फलन नहीं है जैसा आकृति 6.2 में दिखाया गया है।

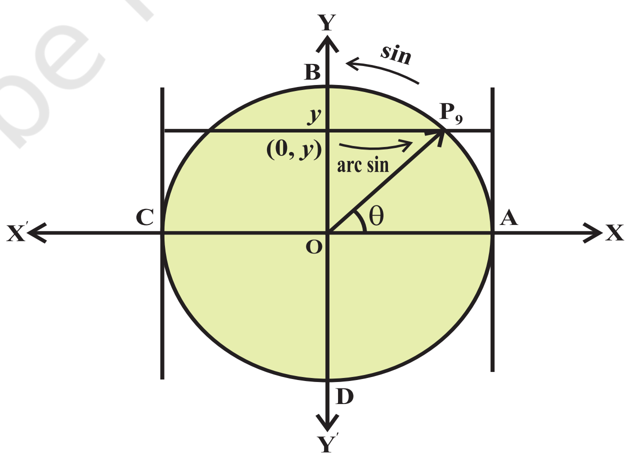
6. परंतु बिंदुओं P_3 और P_1 के y-निर्देशांक भिन्न हैं। सुई को वामावर्त $-\frac{\pi}{2}$ से प्रारंभ करके $\frac{\pi}{2}$

तक घुमाइए और स्टील के तार को x-अक्ष के समांतर सरकाते हुए बिंदुओं P_5, P_6, P_7 और P_8 के y-निर्देशांकों के व्यवहार को ध्यानपूर्वक देखिए। इसके अनुसार बिन्दुओं P_5, P_6, P_7 और P_8 के y-निर्देशांक भिन्न हैं। (देखिए आकृति 6.3)। अतः फलन sin, प्रांत $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में एकैकी है और इसका परिसर [– 1, 1] है।



आकृति 6.3

7. सुई को अंतराल $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में स्थित किसी स्वेच्छ कोण (मान लीजिए θ) पर रखिए और प्रतिच्छेदी बिंदु P_9 के y-निर्देशांक को y से निर्दिष्ट (Denote) कीजिए (देखिए आकृति 6.4)। तब $y = \sin\theta$ अथवा $\theta = \sin^{-1}y$ क्योंकि sine फलन प्रांत $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ और परिसर [–1, 1] में एकैकी तथा आच्छादी है। इसलिए प्रतिलोम फलन $\sin^{-1}$ का अस्तित्व है। $\sin^{-1}$ फलन का प्रांत [–1, 1] है और परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है। इस परिसर को $\sin^{-1}$ फलन का मुख्य मान कहते हैं।



आकृति 6.4

प्रेक्षण

1. sin फलन चतुर्थांश ______ और ______ में शून्येतर है।

2. तीसरे और चौथे चतुर्थांश में sin फलन ______ है।

3. $\theta = \sin^{-1} y \Rightarrow y =$ ________ θ जहाँ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq$ ________.

4. sin फलन के दूसरे प्रांत जहाँ यह एकैकी और आच्छादक है $\sin^{-1}$ फलन के _____ है।

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग $\cos^{-1}y$ फलन के मुख्य मान ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 7

उद्देश्य

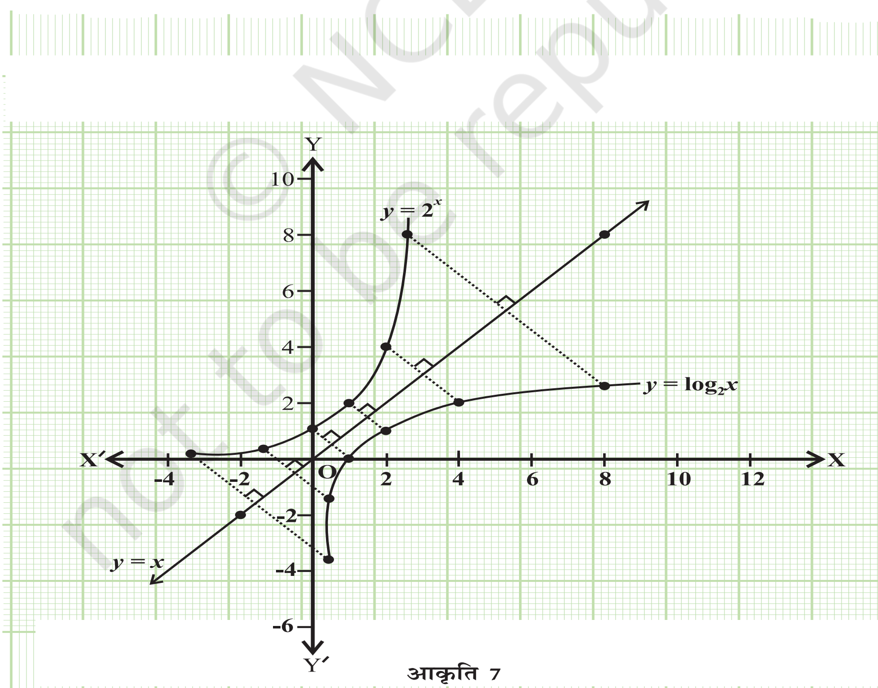
a^x और $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ के ग्राफ़ खींचना और यह जाँचना कि वे एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं।

आवश्यक सामग्री

ड्राइंग–बोर्ड, ज्यामितीय उपकरण, ड्राइंग पिन, पतला तार, स्केच पेन, सफ़ेद मोटा कागज़ गोंद, पेंसिल, इरेज़र (रबड़), ग्राफ़ पेपर।

रचना की विधि

1. ड्राइंग बोर्ड पर 20 cm × 20 cm के उपयुक्त आकार का मोटा सफ़ेद कागज़ गोंद से चिपकाइए।
2. कागज़ पर दो लंबवत् रेखाएँ XOX′ और YOY′ खींचिए जो निर्देशांक अक्षों को प्रदर्शित करती हैं।।



आकृति 7

3. दोनों अक्षों का अंशाकंन कीजिए जैसा आकृति 7 में दिखाया गया है।

4. $a = 2$ मानते हुए कुछ क्रमित युग्म जो $y = a^x$ और $y = \log_a x$ को संतुष्ट करते हैं, ज्ञात कीजिए। दोनों स्थितियों में बिंदुओं के संगत क्रमित युग्मों को आलेखित कीजिए और स्वतंत्र हस्त वक्र से मिलाइए। इन आलेखों के अनुदिश ड्राइंग पिनों की सहायता से पतली तारें स्थिर कीजिए।

5. $y = x$ का ग्राफ़ खींचिए और ग्राफ़ के अनुदिश ड्राइंग पिनों की सहायता से एक तार स्थिर कीजिए।

प्रदर्शन

1. a^x के लिए $a = 2$ (माना) लीजिए और इसको संतुष्ट करने वाले क्रमित युग्म ज्ञात कीजिए जैसे

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4
2^x	1	2	0.5	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$	1.4	0.7	16

और इन क्रमित युग्मों को ग्राफ़ पेपर पर आलेखित कीजिए और प्रत्येक बिंदु पर ड्राइंग पिन स्थिर कीजिए।

2. ड्राइंग पिनों के आधार को एक पतले तार से जोड़िए, यह 2^x के ग्राफ़ को निरूपित करता है।

3. $\log_2 x = y$ से $x = 2^y$ प्राप्त होता है, इसको संतुष्ट करने वाले कुछ क्रमित युग्म हैं

x	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$
y	0	1	–1	2	–2	3	–3

इन क्रमित युग्मों को ग्राफ़ पेपर पर आलेखित कीजिए और प्रत्येक आलेखित बिंदु पर ड्राइंग पिन लगाइए। ड्राइंग पिनों के आधार को एक पतले तार से जोड़िए। यह $\log_2 x$ के ग्राफ़ को निरूपित करता है।

4. ग्राफ़ पेपर पर रेखा $y = x$ का ग्राफ़ खींचिए।

5. तार के अनुदिश एक दर्पण रखिए जो $y = x$ को निरूपित करता है। यह देखा जा सकता है कि दोनों ग्राफ़ दिए गए फलनों के रेखा $y = x$ के सापेक्ष एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं।

प्रेक्षण

1. $y = 2^x$ के ग्राफ़ में क्रमित युग्म (1, 2) का $y = x$ में प्रतिबिंब _______ है। यह $y =$ ________ के ग्राफ़ में स्थित है।
2. $y = \log_2 x$ के ग्राफ़ में क्रमित युग्म (4, 2) का $y = x$ में प्रतिबिंब _________ है जो $y =$ ________ के ग्राफ़ में स्थित है।

इस प्रक्रिया को दोनों ग्राफ़ों में कुछ और बिंदु लेकर दोहराइए।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप चरघातांकी ओर लघुगुणकीय फलनों की संकल्पना को समझने में उपयोगी है जो $y = x$ पर एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब है।

क्रियाकलाप 8

उद्देश्य

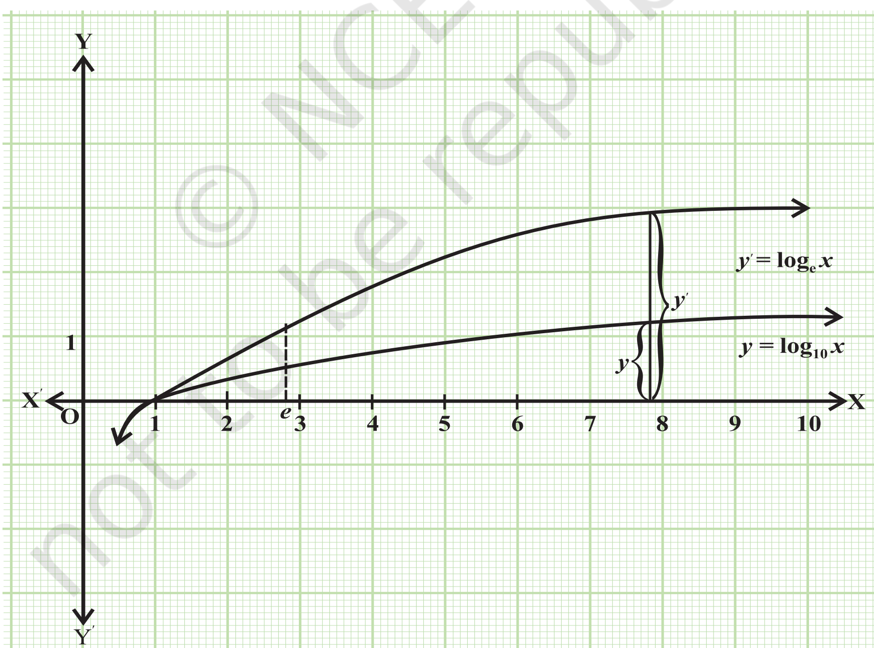
साधारण लघुगुणक (आधार 10 पर) और प्राकृतिक लघुगुणक (आधार e पर) के बीच किसी संख्या x के लिए संबंध निर्धारित करना।

आवश्यक सामग्री

हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, ग्राफ़ पेपर, पेंसिल, स्केल लघुगुणक सारणी या कैलकुलेटर

रचना की विधि

1. एक ग्राफ़ पेपर को सफ़ेद कागज़ पर चिपकाइए और उसे हार्डबोर्ड पर स्थिर कीजिए।
2. लघुगुणक सारणी या कैलकुलेटर की सहायता से फलन $y = \log_{10} x$ को संतुष्ट करने वाले कुछ क्रमित युग्म ज्ञात कीजिए और फलन का ग्राफ़ पेपर पर खींचिए (देखिए आकृति 8)।



आकृति 8

3. इसी प्रकार फलन $y' = \log_e x$ का ग्राफ़ उसी ग्राफ़ पेपर पर जैसा आकृति 8 में दिखाया गया है, खींचिए (इसके लिए लघुगुणक सारणी या कैलकुलेटर का प्रयोग करें।)

प्रदर्शन

1. x-अक्ष की धनात्मक दिशा में कोई बिंदु लीजिए और इसका x-निर्देशांक नोट कीजिए।
2. x के इस मान के लिए, दोनों फलनों $y = \log_{10} x$ और $y' = \log_e x$ के ग्राफ़ से y-निर्देशांकों को स्केल की सहायता से सही मापिए और उनको y तथा y' के रूप में रिकार्ड कीजिए।
3. $\frac{y}{y'}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. उपर्युक्त चरणों को x-अक्ष पर कुछ और मानों के लिए दोहराइए और चरण 3 के अनुसार उनकी तदनुरूपी कोटियों (ordinates) के अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. ये सभी अनुपात सन्निकटतः समान होंगे और लगभग 0.4 के बराबर होंगे, जो सन्निकट $\frac{1}{\log_e 10}$ के बराबर हैं।

प्रेक्षण

क्रम संख्या	x-अक्ष पर बिंदु	$y = \log_{10} x$	$y' = \log_e x$	अनुपात $\frac{y}{y'}$ (लगभग)
1.	x_1= ______	y_1 = ______	y'_1 = ______	__________
2.	x_2= ______	y_2 = ______	y'_2 = ______	__________
3.	x_3= ______	y_3 = ______	y'_3 = ______	__________
4.	x_4= ______	y_4 = ______	y'_4 = ______	__________
5.	x_5= ______	y_5 = ______	y'_5 = ______	__________
6.	x_6= ______	y_6 = ______	y'_6 = ______	__________

1. प्रत्येक बिंदु x के लिए $\frac{y}{y'}$ का सन्निकट मान लगभग ________ है।

2. क्या प्रत्येक दशा में $\frac{y}{y'}$ का प्रेक्षित मान लगभग $\frac{1}{\log_e 10}$ के बराबर है? (हाँ/नहीं)

3. इसलिए $\log_{10} x = \frac{\_\_\_\_\_\_}{\log_e 10}$ है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप किसी संख्या के एक आधार के लघुगुणक को दूसरे आधार के लघुगुणक में परिवर्तित करने में उपयोगी है।

टिप्पणी

मान लीजिए, $y = \log_{10} x$, अर्थात् $x = 10^y$.

दोनों ओर आधार e का लघुगुणक लेने पर, हमें $\log_e x = y \log_e 10$

या $y = \frac{1}{\log_e 10}(\log_e x)$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow \frac{\log_{10} x}{\log_e x} = \frac{1}{\log_e 10} = 0.434294$ (लघुगुणक सारणी या कैलकुलेटर के प्रयोग से)

क्रियाकलाप 9

उद्देश्य

वैश्लेषिक (Analytically) विधि से एक फलन $f(x)$ की $x = c$ पर सीमा ज्ञात करना और यह भी परीक्षण करना कि फलन उस बिंदु पर संतत है या नहीं है।

आवश्यक सामग्री

पेपर, पेंसिल, कैलकुलेटर

रचना की विधि

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4\\ 10, & x=4\end{cases}$ द्वारा दिए फलन पर विचार कीजिए।
2. $c\ (=4)$ के बाईं ओर कुछ बिंदु और दाईं ओर कुछ बिंदु लीजिए जो c के अत्यंत निकट हों।
3. चरण दो में लिए गए प्रत्येक बिंदु के संगत $f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. c के बाईं और दाईं ओर के बिंदुओं को x और $f(x)$ के संगत मानों को सारणी में अभिलेखित (रिकार्ड) कीजिए।

प्रदर्शन

1. x तथा $f(x)$ के मानों को निम्न प्रकार अभिलेखित (रिकार्ड) किया गया है।

सारणी 1 : $c\ (= 4)$ के बाईं ओर के बिंदुओं के लिए

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	3.99999	3.999999	3.9999999
$f(x)$	7.9	7.99	7.999	7.9999	7.99999	7.999999	7.9999999

2. **सारणी 2** : $c\ (= 4)$ के दाईं ओर के बिंदुओं के लिए

x	4.1	4.01	4.001	4.0001	4.00001	4.000001	4.0000001
$f(x)$	8.1	8.01	8.001	8.0001	8.00001	8.000001	8.0000001

प्रेक्षण

1. जैसे-जैसे बाईं ओर से x, 4 की ओर अग्रसर होता है $(x \to 4)$, $f(x)$ के मान _________ की ओर अग्रसर होते हैं।
2. जैसे-जैसे दाईं ओर से $x \to 4$, $f(x)$ के मान _________ की ओर अग्रसर होते हैं।
3. इसलिए $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ _________ और $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$ _________
4. इस प्रकार $\lim_{x \to 4} f(x) =$ _________ , $f(4) =$ _________
5. क्या $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$ _________ ? (हाँ/नहीं)
6. क्योंकि $f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$, इसलिए $x = 4$ पर फलन _________ है। (संतत/संतत नहीं)

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप एक फलन की सीमा और संतता की संकल्पना को समझने में उपयोगी है।

क्रियाकलाप 10

उद्देश्य

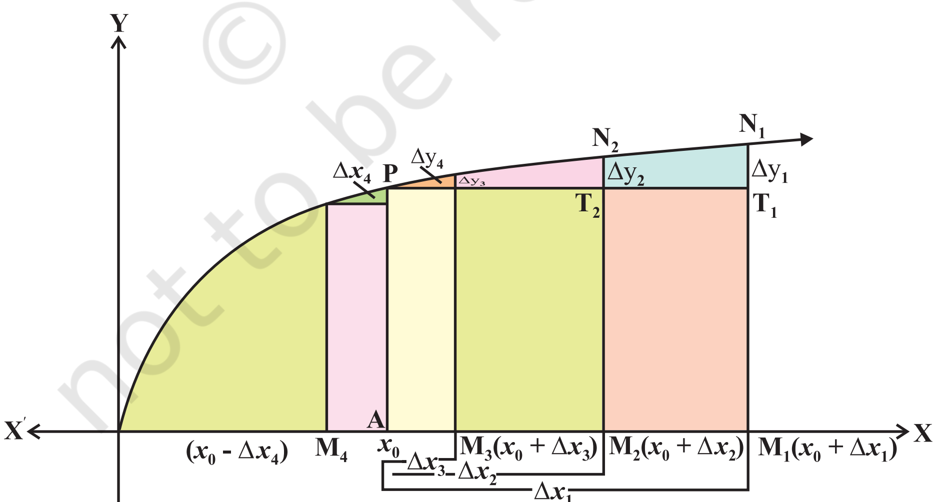
यह सत्यापित करना कि एक दिए गए बिंदु x_0 पर एक फलन संतत है यदि Δx के पर्याप्त छोटे मान के लिए $\Delta y = \left| f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right|$ का स्वेच्छ छोटा मान है।

आवश्यक सामग्री

हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, पेंसिल, स्केल, कैलकुलेटर, गोंद

रचना की विधि

1. हार्ड बोर्ड पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. दिए गए संतत फलन का वक्र खींचिए जैसा कि आकृति 10 में दिखाया गया है।
3. x-अक्ष पर धनात्मक दिशा में कोई बिंदु A $(x_0, 0)$ लीजिए और इस बिंदु के संगत बिंदु P (x_0, y_0) को वक्र पर अंकित कीजिए।



आकृति 10

प्रदर्शन

1. A के दाईं ओर एक बिंदु M_1 $(x_0 + \Delta x_1, 0)$ लीजिए जहाँ Δx_1, x में वृद्धि है।
2. M_1 से एक लंब खींचिए जो वक्र को N_1 पर मिले। माना N_1 के निर्देशांक $(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y_1)$ है।
3. बिंदु P (x_0, y_0) से एक लंब खींचिए जो N_1M_1 को बिंदु T_1 पर मिले।
4. अब AM_1 को मापिए। मान लीजिए यह Δx_1 है। इसको रिकार्ड कीजिए और $N_1T_1 = \Delta y_1$ को मापिए और रिकार्ड कीजिए।
5. x में वृद्धि को कम कर Δx_2 (अर्थात् $\Delta x_2 < \Delta x_1$) कीजिए जिससे एक दूसरा बिंदु $M_2\left(x_0 + \Delta x_2, 0\right)$ प्राप्त हो। इसके संगत वक्र पर बिंदु N_2 प्राप्त कीजिए।
6. माना लंब PT_1, N_2M_2 को T_2 पर प्रतिच्छेद करता है।
7. पुनः $AM_2 = \Delta x_2$ को मापिए और इसको रिकार्ड कीजिए। अब $N_2T_2 = \Delta y_2$ को मापिए और रिकार्ड कीजिए।
8. उपर्युक्त चरणों की पुनरावृत्ति कुछ और बिंदुओं के लिए कीजिए जिससे Δx छोटे से छोटा होता जाए।

प्रेक्षण

क्रम संख्या	x_0 में वृद्धि का मान	y में संगत वृद्धि का मान
1.	$\|\Delta x_1\| =$ ______	$\|\Delta y_1\| =$ ______
2.	$\|\Delta x_2\| =$ ______	$\|\Delta y_2\| =$ ______
3.	$\|\Delta x_3\| =$ ______	$\|\Delta y_3\| =$ ______
4.	$\|\Delta x_4\| =$ ______	$\|\Delta y_4\| =$ ______
5.	$\|\Delta x_5\| =$ ______	$\|\Delta y_5\| =$ ______

6.	$\lvert\Delta x_6\rvert=$	$\lvert\Delta y_6\rvert=$
7.	$\lvert\Delta x_7\rvert=$	$\lvert\Delta y_7\rvert=$
8.	$\lvert\Delta x_8\rvert=$	$\lvert\Delta y_8\rvert=$
9.	$\lvert\Delta x_9\rvert=$	$\lvert\Delta y_9\rvert=$
10.		

1. अत: जब Δx छोटा होता जाता है तब Δy __________ होता जाता है।

2. इस प्रकार एक संतत फलन के लिए $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप, एक दिए गए फलन के अवकलज (वामावर्ती: और दक्षिणावर्त) की संकल्पना को वक्र के किसी बिंदु पर समझाने में सहायक है।