ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1215/12-22/છ, તા. 1-3-2016 –થી મંજૂર

આંકડાશાસ્ત્ર

ધોરણ 11

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર — 382010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે.
આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

વિષય-સલાહકાર
ડૉ. આર. ટી. રતાણી

લેખન
ડૉ. એમ. એન. પટેલ (કન્વીનર)
પ્રો. શુભા એ. લાગવણકર
ડૉ. ચિરાગ જે. ત્રિવેદી
ડૉ. કુંજલ એચ. શાહ
ડૉ. પરાગ બી. શાહ
શ્રી મહેશભાઈ એ. પટેલ
શ્રી યતિન એ. પરીખ

સમીક્ષા
ડૉ. કિશોરભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી રમેશચંદ્ર બી. ઠક્કર
શ્રી વિષ્ણુભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી હિમાંશુભાઈ ડી. રાચ્છ
શ્રી ગિરીશકુમાર એ. પટેલ
શ્રી રાજેન્દ્રકુમાર બી. ભટ્ટ
શ્રી વિનયકાન્ત એચ. ઉપાધ્યાય
ડૉ. મૂળુભાઈ એમ. સોલંકી
શ્રી નીતેષભાઈ કે. જોષી
શ્રી રમેશચંદ્ર જે. પ્રજાપતિ
શ્રી વૈશાલી એમ. સેવક

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી છાયાબહેન એમ. પારેખ

સંયોજન
ડૉ. ચિરાગ એન. શાહ
(વિષય-સંયોજક : કૉમર્સ)

નિર્માણ-સંયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવ્યા છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11, આંકડાશાસ્ત્ર** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનું લેખન તથા સમીક્ષા નિષ્ણાત શિક્ષકો અને પ્રાધ્યાપકો પાસે કરાવવામાં આવ્યાં છે. સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

નિયામક
તા.01-03-2016

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2016
પ્રકાશક : નિયામક, ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર-10-એ, ગાંધીનગર
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેનાં આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપંખીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ તથા જિજ્ઞાસા અને સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતા રહી, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 થી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ ૫૧-क

અનુક્રમણિકા

1.	માહિતીનું એકત્રિકીકરણ	1
2.	માહિતીનું નિરૂપણ	14
3.	મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ	67
4.	પ્રસારમાન	121
5.	આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા	171
6.	ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ	214
7.	નિદર્શન પદ્ધતિઓ	248
8.	વિધેય	265
9.	ગુણોત્તર-શ્રેણી	277
•	જવાબો	300

•

"Statistics is a Science that concerns itself with experimentation and the collection, description and analysis of data...Stastical methods are tools for examining data."

– R. A. Hultquist

1

માહિતીનું એકત્રિકીકરણ
(Collection of Data)

વિષયવસ્તુ :

1.1 આંકડાશાસ્ત્રનો ઉદ્ભવ અને વિકાસ

1.2 સંખ્યાત્મક માહિતી અને ગુણાત્મક માહિતી : અર્થ અને તફાવત

1.3 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી : અર્થ અને તફાવત

1.4 પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવાની રીતો

1.4.1 પ્રત્યક્ષ તપાસ : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

1.4.2 પરોક્ષ તપાસ : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

1.4.3 પ્રશ્નાવલિની રીત : અર્થ, પ્રકાર, લાભ અને ગેરલાભ

1.4.3.1 આદર્શ પ્રશ્નાવલિનાં લક્ષણો

1.4.3.2 ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિ : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

1.4.3.3 આગણક દ્વારા પ્રશ્નાવલિ : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

1.5 ગૌણ માહિતી

1.5.1 ગૌણ માહિતીનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો

1.5.2 ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતી વખતે રાખવી પડતી સાવચેતીઓ

1.1 આંકડાશાસ્ત્રનો ઉદ્‌ભવ અને વિકાસ (Origin and Growth of Statistics)

આઈ-ને-અકબરી

અબુલ ફઝલ

આંકડાશાસ્ત્રના ક્ષેત્રે ભારતનું પ્રદાન મૌર્ય સામ્રાજ્ય (ઈ. પૂ. 321–296)ના સમયથી મહત્ત્વનું રહ્યું છે તેવી નોંધ મળે છે. મોગલ સમ્રાટ અકબરના શાસન (ઈ.સ. 1596–1597 દરમિયાન મોગલ સામ્રાજ્યની વહીવટી અને મુલ્કી સેવાઓને અનુરૂપ ઉચ્ચ કક્ષાની પ્રસ્થાપિત થયેલ આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિનો ઉલ્લેખ અબુલ ફઝલ રચિત 'આઈ-ને-અકબરી'માં પણ જોવા મળે છે.

રાજ્યને લગતી માહિતીનું પૃથક્કરણ કરવા માટે સૌપ્રથમ વખત ગોટફ્રિડ એકેન વોલે (Gottfried Achen wall) 1749માં જર્મન શબ્દ સ્ટેટિસ્ટિક (Statistik)નો ઉપયોગ કર્યો હતો ઈ.સ. 1750 પહેલાં આંકડાશાસ્ત્રમાં પ્રદાન મુખ્યત્વે સ્પષ્ટ સંભાવનાયુક્ત કલ્પનાઓના ઉપયોગ સિવાયના માહિતી પૃથક્કરણના દાખલાઓ પર આધારિત હતું.

18મી સદી સુધી આંકડાશાસ્ત્ર શબ્દનો ઉપયોગ રાજ્યો દ્વારા માહિતીને પદ્ધતિસર એકત્રિત કરવા માટે થતો હતો. આંકડાશાસ્ત્રનો ઉલ્લેખ 'એનસાઈક્લોપીડિયા બ્રિટાનિકા'માં ઈ. સ. 1797માં થયો હતો. સંભાવનાશાસ્ત્રનાં પ્રારંભિક પરિણામો 17મી અને 18મી સદીઓમાં શોધાયા હતાં, જેના બે મહારથીઓ લાપ્લાસ (1749–1827) અને ગોસ (1772–1855) હતા. સૌપ્રથમ રચાયેલ આંકડાશાસ્ત્રીય સમિતિ "રોયલ આંકડાશાસ્ત્રીય સંગઠન" (Royal Statistical Society)ની સ્થાપના ઈ. સ. 1834માં લંડન શહેરમાં થઈ હતી.

19મી સદીના અંતમાં અને 20મી સદીની શરૂઆતમાં આંકડાશાસ્ત્રના આધુનિક પાસાઓની રચના થઈ હતી. ગેલ્ટન અને કાર્લ પિયર્સને ગણિતીય આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ વિજ્ઞાન, ઉદ્યોગો અને રાજકારણમાં કર્યો હતો. ગણિતીય આંકડાશાસ્ત્રના રચયિતા કાર્લ પિયર્સન હતા. તેમણે ઈંગ્લેન્ડમાં ઉચ્ચ કક્ષાની આંકડાકીય પ્રયોગશાળાની તથા ઈ. સ. 1911માં લંડન ખાતે યુનિવર્સિટી કોલેજમાં સૌપ્રથમ યુનિવર્સિટીના આંકડાશાસ્ત્ર વિષયના વિભાગની સ્થાપના કરી હતી. ઈ. સ. 1910 અને 1920ના સમયગાળા દરમિયાન ગોસેટ અને ફિશરે લઘુ નિદર્શ માહિતીને માટે આધુનિક આંકડાશાસ્ત્રીય વિજ્ઞાનની રચના કરવાનો પ્રારંભ કરેલ. ફિશરે જિનેટિક્સ (Genetics), બાયોમેટ્રી (Biometry), મનોવિજ્ઞાન (Psychology), શિક્ષણ, ખેતી જેવા જાત-જાતનાં ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કર્યો હતો. તેઓ આંકડાશાસ્ત્રના પિતા તરીકે ખૂબ જાણીતા છે. ઈ. સ. 1930 દરમિયાન ઈ. પિયરસન તથા જે. નેમાન દ્વારા સંયુક્ત રીતે થયેલા કાર્યોમાં અગાઉ વિકસિત થયેલ રચનાઓની સુધારણા તથા વ્યાપકતા જોવા મળતી હતી. ત્યાર બાદ ઉત્તરોત્તર આંકડાશાસ્ત્રની આધુનિક પદ્ધતિઓનો વિકાસ થયો.

ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્રનો વિકાસ

ભારતના જાણીતા આંકડાશાસ્ત્રી પી. સી. મહાલનોબિસ દ્વારા ભારતીય આંકડાશાસ્ત્રીય સંસ્થા (Indian Statistical Institute-I.S.I)ની સ્થાપના ઈ. સ. 1931માં કોલકાતા ખાતે થયેલ. તેમણે ઈ. સ. 1941માં કોલકાતા યુનિવર્સિટીમાં સૌપ્રથમ અનુસ્નાતક કક્ષાએ આંકડાશાસ્ત્ર વિષયની શરૂઆત કરી હતી. ઈ. સ. 1950માં મહાલનોબિસ દ્વારા પ્રસ્તુત કરાયેલ રાષ્ટ્રીય નિદર્શ તપાસ (National Sample Survey)ને સરકાર દ્વારા માન્ય કરવામાં આવી અને માહિતી એકત્રિકીકરણનો પ્રથમ તબક્કો ઓક્ટોબર, 1950માં શરૂ થયો હતો. અન્ય સંસ્થા ભારતીય ખેતીવિષયક આંકડાશાસ્ત્ર સંશોધન સંસ્થા (Indian Agriculture Statistics Research Institute- IASRI)નું પણ ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્રના વિકાસમાં ખૂબ જ યોગદાન રહેલું છે. વિષયનો અર્થ, કાર્યક્ષેત્ર અને મર્યાદા ઉપર આધારિત આંકડાશાસ્ત્રની સો ઉપરાંત વ્યાખ્યાઓની સૂચિ ડબલ્યુ. એફ. વિલકોક્સે (W. F. Willcox) 1935માં એકત્રિત કરી હતી. ક્રોક્સ્ટન (Croxton) અને કાઉડન (Cowden)ના મતે આંકડાશાસ્ત્રની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે.

"આંકડાશાસ્ત્ર એ વિજ્ઞાન છે જે આંકડાકીય માહિતીનું એકત્રિકીકરણ, પૃથક્કરણ અને અર્થઘટન કરે છે."

હાલના સમયમાં આંકડાશાસ્ત્ર વિષય માત્ર જથ્થાવાચક માહિતી માટે જ વપરાય છે એવું નથી પરંતુ ગુણવાચક માહિતી માટે પણ વપરાય છે તથા તેને વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિના એક સ્વતંત્ર ભાગ તરીકે ગણવામાં આવે છે. ઔદ્યોગિક આંકડાશાસ્ત્ર અને આંકડાશાસ્ત્રની એક શાખા કાર્યાત્મક સંશોધન (Operations Research)નો ઉપયોગ બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન મિલેટરી પ્રોજેક્ટમાં થયો હતો. ભારતમાં 1949માં હૈદરાબાદમાં 'રીજિઅનલ રિસર્ચ લેબોરેટરી' ખાતે કાર્યાત્મક સંશોધનનું એકમ અસ્તિત્વમાં આવ્યું હતું. રાષ્ટ્રીય આયોજન અને તપાસ માટે 1953માં ISI કોલકાતા ખાતે કાર્યાત્મક સંશોધનની રીતોનો ઉપયોગ કરીને પી. સી. મહાલનોબિસે બીજી પંચવર્ષીય યોજનાનું માળખું તૈયાર કર્યું હતું. કાર્યાત્મક સંશોધનની પદ્ધતિઓ સરકાર માટે ઓછામાં ઓછા સ્રોતનો ઉપયોગ કરીને

મહત્તમ માથાદીઠ આવક મેળવવામાં, ઉદ્યોગોમાં જુદા-જુદા ઘટકો જેવા કે માણસો, યંત્રો વગેરેની ઇષ્ટતમ ફાળવણી નક્કી કરવા માટે તેમજ બજારમાં ભવિષ્યની માંગને પહોંચી વળવા માટે સંગ્રહનું કદ નક્કી કરવા માટે પણ ઉપયોગી થાય છે.

આમ, હાલના સમયમાં આંકડાશાસ્ત્રની ઉપયોગિતા જોતા તેનું મહત્ત્વ અવગણી શકાય નહિ. આંકડાકીય અભ્યાસમાં થયેલ રચનાત્મક પાસાઓએ તેના કાર્યક્ષેત્ર અને તેની અગત્યમાં નોંધનીય રીતે વધારો કરેલ છે.

1.2 સંખ્યાત્મક માહિતી અને ગુણાત્મક માહિતી (Quantitative Data and Qualitative Data)

અર્થ અને તફાવત

સમષ્ટિ

નિદર્શ

આંકડાશાસ્ત્રમાં અભ્યાસ હેઠળ આવતા એકમોના સમૂહને **સમષ્ટિ (Population)** કહેવામાં આવે છે. દા.ત., એક ફેક્ટરીના કામદારોના જીવનધોરણ વિશે અભ્યાસ કરવો હોય તો તે ફેક્ટરીના બધા જ કામદારોનો સમૂહ એ આ અભ્યાસ માટેની સમષ્ટિ બનશે. સમષ્ટિના એકમોની કુલ સંખ્યાને **સમષ્ટિનું કદ** કહેવાય છે. જો સમષ્ટિના કુલ એકમોની સંખ્યા N સાન્ત હોય તો તે સમષ્ટિને આપણે **સાન્ત સમષ્ટિ** કહીશું. દા.ત., જો ફેક્ટરીમાં કુલ 700 કામદારો કામ કરતા હોય તો આ સમષ્ટિ માટે N = 700 થશે અને આ સમષ્ટિને આપણે સાન્ત સમષ્ટિ કહીશું. સમષ્ટિમાંથી કોઈ ચોક્કસ પદ્ધતિ વડે પસંદ કરેલ એકમોના સમૂહને નિદર્શ કહેવામાં આવે છે અને નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા (n) નિદર્શના કદ તરીકે ઓળખાય છે. દા.ત., ઉપર દર્શાવેલ સમષ્ટિમાંથી જો આપણે કોઈ આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિ વડે 150 કામદારો પસંદ કરીએ, તો આ પસંદ થયેલા 150 કામદારોના સમૂહને નિદર્શ કહેવાય છે અને નિદર્શનું કદ n = 150 થશે. નિદર્શમાં પસંદ કરેલા એકમોને નિદર્શ એકમ કહેવામાં આવે છે. અહીંયાં પસંદગી પામેલા કામદારો એ નિદર્શ માટેના એકમો બનશે. કોઈ પણ સમસ્યા કે પ્રશ્નની વિવિધ બાબતો સંબંધી અભ્યાસ કરવા માટે સમષ્ટિ અથવા નિદર્શના બધા જ એકમોના તપાસનું આયોજન કરવામાં આવે છે. આવી તપાસ દ્વારા એકત્રિત થતાં પરિણામોના સમૂહને **માહિતી** કહેવામાં આવે છે.

સમષ્ટિ અથવા નિદર્શના એકમ જુદાં-જુદાં લક્ષણો ધરાવે છે. આ લક્ષણનું માપ પ્રત્યેક એકમ દીઠ બદલાતું હોય તે શક્ય છે. એકમના આવા લક્ષણને આપણે ચલ લક્ષણ કહીશું. તે સંખ્યાત્મક અથવા અસંખ્યાત્મક લક્ષણ હોઈ શકે છે. જો ચલ લક્ષણ અસંખ્યાત્મક હોય તો તેને **ગુણાત્મક ચલ** કહેવામાં આવે છે. આવા ગુણાત્મક લક્ષણને આપણે ગુણધર્મ (Attribute) કહીશું. ગુણધર્મનાં અવલોકનોના સમૂહને **ગુણાત્મક માહિતી (Qualitative data)** કહેવામાં આવે છે. જો ચલ લક્ષણ સંખ્યાત્મક હોય તો તેને **સંખ્યાત્મક ચલ** કહીશું અને આવા સંખ્યાત્મક ચલનાં અવલોકનોના સમૂહને **સંખ્યાત્મક માહિતી (Quantitative data)** કહેવામાં આવે છે. અગાઉના ઉદાહરણમાં કામદારોની જાતિ (સ્ત્રી/પુરુષ) અથવા તો તેમનું શૈક્ષણિક સ્તર વગેરે ગુણધર્મને લગતી માહિતીને ગુણાત્મક માહિતી કહીશું અને કામદારોની માસિક આવક, તેમની ઉંમર વગેરે સંખ્યાત્મક ચલ લક્ષણને લગતી માહિતીને સંખ્યાત્મક માહિતી કહીશું.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે ગુણાત્મક લક્ષણનું ફક્ત નિરીક્ષણ કરી શકાય છે, પરંતુ તે કોઈ એકમ દ્વારા માપી શકાતું નથી જ્યારે સંખ્યાત્મક ચલને કોઈ એકમ દ્વારા માપી શકાય છે. દા.ત., આવક રૂપિયામાં, ઉંમર વર્ષમાં વગેરે. અન્ય ઉદાહરણો જેવા કે ધર્મ, શાકાહારી કે માંસાહારી વગેરે ચલને લગતી માહિતીને ગુણાત્મક માહિતી કહેવાય, જ્યારે કંપનીનો નફો, જાહેરાતનો ખર્ચ વગેરે ચલને લગતી માહિતીને સંખ્યાત્મક માહિતી કહેવાય.

1.3 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી (Primary and Secondary Data)

અર્થ

કોઈ પણ આંકડાકીય તપાસ દ્વારા મેળવેલ માહિતી તદ્દન સાચી અને યોગ્ય જ હોવી જોઈએ, નહિ તો ઉપયોગી અને સ્વીકૃત તારણો મેળવી શકાય નહિ.

માહિતી પ્રાથમિક માહિતી (Primary Data) અથવા ગૌણ માહિતી (Secondary Data) હોઈ શકે છે.

પ્રાથમિક માહિતી

કોઈ પણ અધિકૃત સંસ્થા અથવા સંશોધકો દ્વારા સૌપ્રથમ વખત અસલ સ્વરૂપે માહિતી એકઠી કરાયેલ હોય તેવી માહિતીને **પ્રાથમિક માહિતી** કહેવાય છે. દા.ત., NSSO (National Sample Survey Organisation) દ્વારા એકત્રિત કરાયેલ માહિતી ભારતની વસ્તી-ગણતરીની માહિતી અને ભારતના રજિસ્ટ્રાર ઓફિસ, ન્યૂ દિલ્લી દ્વારા ભારતમાં મૃત્યુદર અને જન્મદરને લગતી પ્રકાશિત કરેલ માહિતીને **પ્રાથમિક માહિતી** કહેવામાં આવે છે.

ગૌણ માહિતી

જ્યારે કોઈ સંસ્થા કે સંશોધક કોઈ અન્ય સંસ્થા કે સંશોધક દ્વારા એકત્રિત કરાયેલ માહિતીનો ઉપયોગ કરે તો આવી માહિતી ઉપયોગ કરનાર સંસ્થા કે સંશોધક માટે ગૌણ માહિતી બની જાય છે. દા.ત., ભારતની રજિસ્ટ્રાર ઑફિસ, ન્યૂ દિલ્હી દ્વારા એકત્રિત કરાયેલ ભારતના મૃત્યુદર અને જન્મદરને લગતી માહિતી ફરી વખત UNO (United Nations Organisation) દ્વારા U.N. Statistical Abstractમાં પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે. અહીંયાં UNO માટે આ માહિતી ગૌણ માહિતી બનશે. કોઈ સંસ્થા દ્વારા ગુજરાતની કેટલીક ઔદ્યોગિક સંસ્થાઓને લગતી માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ પાછળથી સંશોધન કરનાર વિદ્યાર્થી દ્વારા આંકડાકીય વિશ્લેષણ કરવા માટે ઉપયોગમાં લેવાય છે. સંશોધન કરનાર વિદ્યાર્થી માટે આ ઉપયોગમાં લેવાયેલ માહિતી એ ગૌણ માહિતી બની જાય છે.

પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત (Difference Between Primary and Secondary Data)

(1) પ્રાથમિક માહિતી એ પ્રથમ વખત એકઠી કરાયેલ મૌલિક માહિતી છે જ્યારે ગૌણ માહિતી એ મૌલિક માહિતી નથી પરંતુ એકઠી કરાયેલ માહિતી અન્યો દ્વારા ફરીથી ઉપયોગમાં લેવાય છે.

(2) પ્રાથમિક માહિતી તપાસ હેઠળના એકમો પરથી એકત્રિત કરવામાં આવે છે, જ્યારે ગૌણ માહિતી એ પ્રાથમિક માહિતીમાંથી લેવામાં આવે છે.

(3) પ્રાથમિક માહિતી સામાન્ય રીતે એના મૂળભૂત સ્વરૂપમાં હોય છે. જેથી તેને વર્ગીકરણ અને કોષ્ટક રચનાના સ્વરૂપમાં ફેરવવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે, જ્યારે ગૌણ માહિતી સામાન્ય રીતે વર્ગીકરણ અને કોષ્ટક રચનાયુક્ત હોઈ શકે છે.

(4) પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવા માટે મોટા પ્રમાણમાં ખર્ચ, સમય અને શક્તિની જરૂરિયાત પડે છે, જ્યારે ગૌણ માહિતી મેળવવા માટે ખર્ચ, સમય અને શક્તિની જરૂરિયાત સરખામણીમાં ઓછી પડે છે.

(5) પ્રાથમિક માહિતી સામાન્ય રીતે વિશ્વસનીય હોય છે, જ્યારે ગૌણ માહિતી અન્ય વ્યક્તિઓ દ્વારા તેમના પોતાના હેતુ માટે ઉપયોગમાં લેવાતી હોવાથી માહિતી વાપરનારના હેતુના અનુસંધાનમાં તે વિશ્વસનીય ન પણ હોય એવું બની શકે.

1.4 પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવાની રીતો (Methods of Collecting Primary Data)

પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવા માટે ઘણી બધી રીતો પ્રચલિત છે. સામાન્ય રીતે પ્રત્યક્ષ તપાસ, પરોક્ષ તપાસ, ટેલિફોન અથવા ઈ–મેલ (E–mail) દ્વારા તપાસ, પ્રશ્નાવલિની રીત, સ્થાનિક ખબરપત્રીઓ દ્વારા તપાસ જેવી પદ્ધતિઓ પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવા માટે વપરાય છે.

પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટે નીચે દર્શાવેલ ત્રણ રીતોનો આપણે અભ્યાસ કરીશું :

(1) પ્રત્યક્ષ તપાસ (2) પરોક્ષ તપાસ (3) પ્રશ્નાવલિની રીત.

1.4.1 પ્રત્યક્ષ તપાસ (Direct Inquiry)

અર્થ :

પ્રત્યક્ષ તપાસ

આ રીતમાં સંશોધક જાતે અથવા તેણે નીમેલ આગણક (સત્તાવાર પ્રતિનિધિ) તપાસના સ્થળની રૂબરૂ મુલાકાત લે છે અને જરૂરી માહિતી મેળવે છે. દા.ત., કોઈ વ્યક્તિ અમદાવાદ જિલ્લાના સાણંદ તાલુકાના ખેડૂતોની પરિસ્થિતિ વિશે માહિતી એકત્રિત કરવા ઇચ્છતી હોય તો તેણે જાતે સાણંદ તાલુકામાં જઈને ત્યાંના ખેડૂતોને રૂબરૂ મળીને તેમની પરિસ્થિતિ વિશેની માહિતી એકઠી કરવી જોઈએ. આ રીતે એકત્રિત કરાયેલ માહિતી એ પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મેળવેલી માહિતી કહેવાય. તે જ પ્રમાણે અમદાવાદ શહેરની મ્યુનિસિપાલિટીની શાળામાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓની તંદુરસ્તી બાબતની માહિતી મેળવનારે, મ્યુનિસિપાલિટીની શાળામાં જઈને ત્યાં વિદ્યાર્થીઓને રૂબરૂ મળીને તેમની તંદુરસ્તીવિષયક પ્રશ્નો પૂછીને જરૂરી માહિતી એકત્રિત કરે તો તે પ્રત્યક્ષ તપાસ કહેવાય.

લાભ :

(1) આ પદ્ધતિ દ્વારા સાચી અને વિશ્વસનીય માહિતી મળી શકે છે.

(2) માહિતી આપનાર સાથેની રૂબરૂ મુલાકાતને લીધે જો માહિતી આપનારને કોઈ પ્રશ્ન, શંકા કે મૂંઝવણ હોય તો આગણકો (Enumerators) તેનો યોગ્ય ખુલાસો કરીને તેનો ઉકેલ લાવી શકે છે.

(3) વ્યક્તિગત તપાસ વખતે આગણક દ્વારા કેટલીક વખત માહિતી આપનાર પાસેથી પૂરક માહિતી મેળવી લેવાય છે જે પરિણામોનું અર્થઘટન કરતી વખતે ઉપયોગી બને છે.

(4) જ્યારે તપાસનું ક્ષેત્ર મર્યાદિત હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ વધારે સારી નીવડે છે.

(5) કેટલીક વાર માહિતી આપનાર અમુક પ્રકારની માહિતી આપવામાં સંકોચ અનુભવતા હોય તો આવા સમયે આગણક આવી માહિતી આપનારને પૂરક પ્રશ્નો પૂછીને અને આ માહિતીનો દુરુપયોગ નહિ થાય તેની ખાતરી આપીને માહિતી મેળવી શકે છે.

ગેરલાભ :

(1) જ્યારે તપાસનું ક્ષેત્ર વિશાળ હોય ત્યારે આ પદ્ધતિમાં વધારે પડતો સમય લાગે છે અને વધારે આગણકોની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે.

(2) આ પદ્ધતિ વધારે ખર્ચાળ છે.

(3) જો આગણકો તાલીમયુક્ત ન હોય તો તેમના દ્વારા મેળવેલ માહિતી ઓછી વિશ્વસનીય નીવડે છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારી શાળાના વિદ્યાર્થીઓની તંદુરસ્તી અંગેનો અભ્યાસ કરવા માટે કોઈ પણ પાંચ તંદુરસ્તીનાં લક્ષણો વિશે પ્રાથમિક માહિતી એકઠી કરો. આ એકઠી કરેલ માહિતીમાંથી ગુણાત્મક માહિતી અને સંખ્યાત્મક માહિતીની ઓળખ કરો.

1.4.2 પરોક્ષ તપાસ (Indirect Inquiry)

અર્થ :

નીચેની પરિસ્થિતિમાંથી કોઈ પણ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવે ત્યારે સંશોધક, તપાસ અંગેની જાણકારી ધરાવનાર સક્ષમ સંસ્થા કે વ્યક્તિનો સંપર્ક સાધે છે અને આવી સંસ્થા કે વ્યક્તિ પાસેથી અનુરૂપ માહિતી મેળવે છે.

(1) જ્યારે પ્રત્યક્ષ સ્રોત અસ્તિત્વમાં ન હોય.

(2) પ્રત્યક્ષ તપાસ માટેનું ક્ષેત્ર ખૂબ જ વિશાળ હોઈ, આ ક્ષેત્રમાં આવતી માહિતી આપનાર વ્યક્તિઓની રૂબરૂ મુલાકાત લેવા જેટલો સમય ન હોય.

(3) જે માહિતી મેળવવાની હોય તેનું સ્વરૂપ ગૂંચવણભર્યું હોય.

(4) જ્યારે પ્રત્યક્ષ તપાસ હેઠળ થતો ખર્ચ અસહ્ય હોય.

આ રીતે માહિતી એકત્રિત કરવાની રીતને પરોક્ષ તપાસની રીત કહેવામાં આવે છે. આ રીતમાં આગણકોને બદલે ત્રાહિત વ્યક્તિ (Third Party)ની મદદથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે. દા.ત., અગાઉ આપેલા ઉદાહરણમાં જે વ્યક્તિને સાણંદ તાલુકાના ખેડૂતોની પરિસ્થિતિ વિશે માહિતી એકત્રિત કરવી હોય તે વ્યક્તિ સાણંદ તાલુકાના દરેક ખેડૂતની રૂબરૂ મુલાકાત લેવાને બદલે સાણંદ તાલુકાના તલાટી કે જેમની પાસે સાણંદ તાલુકાના બધા જ ખેડૂતોની પૂરેપૂરી માહિતી હોય છે તેમનો સંપર્ક કરશે.

કોઈ વ્યક્તિ 2000 કામદારો ધરાવતા મોટા ઔદ્યોગિક એકમના કામદારોના શૈક્ષણિક સ્તરની માહિતી મેળવવામાં રસ ધરાવતી હોય તો તે વ્યક્તિ દરેક કામદારની વ્યક્તિગત મુલાકાત લેવાને બદલે ઔદ્યોગિક એકમના મૅનેજર કે જેઓની પાસે દરેક કામદારની સંપૂર્ણ વિગત ધરાવતો સંગ્રહ હોય છે તેમનો સંપર્ક કરશે અને મૅનેજર પાસેથી માહિતી મેળવશે. તે જ પ્રમાણે ખૂનના બનાવો તથા ચોરીના બનાવો અંગેની માહિતી વકીલને જરૂર પડે ત્યારે પોલીસ-સ્ટેશનમાંથી આવી માહિતી મેળવી શકે છે.

આમ, પરોક્ષ તપાસની રીત વ્યવહારમાં ઘણી પ્રચલિત છે, તેમ છતાં આ રીત દ્વારા મળતી માહિતીની વિશ્વસનીયતા તપાસ કરનારની કાબેલિયત, પ્રામાણિકતા અને અનુભવ પર આધાર રાખે છે.

લાભ :

(1) જ્યારે માહિતી એકત્ર કરવાનું કાર્યક્ષેત્ર ખૂબ જ વિશાળ હોય ત્યારે આ રીત વધુ અનુકૂળ રહે છે.

(2) જ્યારે તપાસ હેઠળની વ્યક્તિ માહિતી આપવા માટે તૈયાર ના હોય ત્યારે આ એક જ રીત માહિતી એકત્રિત કરવા માટે ઉપયોગી બને છે.

(3) પ્રત્યક્ષ તપાસની રીતની સરખામણીમાં આ રીતમાં ખર્ચ, સમય અને શક્તિ પ્રમાણમાં ઓછા થાય છે.

(4) સરકારના જુદા-જુદા વિભાગ માટે જોઈતી જુદા-જુદા પ્રકારની માહિતી મેળવવા માટે આ રીતનો ખૂબ જ ઉપયોગ થાય છે.

ગેરલાભ :

(1) જ્યારે વ્યક્તિ અથવા સંસ્થા કે જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તે વ્યક્તિ કે સંસ્થા પૂર્વગ્રહયુક્ત અથવા પક્ષપાતી વલણ ધરાવનાર હોય ત્યારે આ રીત ઓછી વિશ્વસનીય બને છે.

(2) જ્યારે ત્રાહિત વ્યક્તિ કે જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તે અપ્રામાણિક, બિનકાબેલ અથવા સાચી માહિતી આપવા માટે સક્ષમ ન હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ નકામી બની જાય છે.

1.4.3 પ્રશ્નાવલિની રીત (Method of Questionnaire)

અભ્યાસસંબંધી હેતુને અનુરૂપ તર્કબદ્ધ રીતે ક્રમમાં ગોઠવેલા પ્રશ્નોની એક યાદી બનાવવામાં આવે છે. આ પ્રશ્નો વચ્ચે તેમના ઉત્તર લખવા માટે જગ્યા રાખવામાં આવે છે. આ રીતે તૈયાર કરેલ પ્રશ્નોની યાદીને પ્રશ્નાવલિ કહેવામાં આવે છે. આવા પ્રકારની પ્રશ્નાવલિ દ્વારા માહિતી મેળવવાની રીતને પ્રશ્નાવલિની રીત કહેવામાં આવે છે.

પ્રશ્નાવલિમાં પ્રશ્નો ટૂંકા અને સરળ હોવા જોઈએ કે જેથી કરીને ઉત્તરદાતા પ્રશ્નોને સમજી શકે અને સરળતાથી તેમના ઉત્તર આપી શકે. જે પ્રદેશ અથવા ક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવવાની હોય તે ખૂબ જ વિશાળ હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી નીવડે છે. આમાં સમય અને ખર્ચમાં બચત થતી હોવાથી તે ખૂબ જ કરકસરયુક્ત બને છે. પ્રત્યક્ષ તપાસ અને પરોક્ષ તપાસ બંનેમાં પ્રશ્નાવલિનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.

પ્રશ્નાવલિ દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરવા માટે બે રીતો છે : (1) આગણક દ્વારા (2) ટપાલ દ્વારા. હવે પછીના વિભાગમાં પ્રશ્નાવલિની રચના કરવા માટે કયા-કયા મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ તેની ચર્ચા કરીશું.

1.4.3.1 આદર્શ પ્રશ્નાવલિનાં લક્ષણો (Characteristics of an Ideal Questionnaire)

માહિતી એકત્રિકીકરણની સફળતાનો આધાર મુખ્યત્વે પ્રશ્નાવલિની રચના ઉપર રહેલો છે. સારી રીતે તૈયાર કરેલ પ્રશ્નાવલિને આદર્શ પ્રશ્નાવલિ કહેવામાં આવે છે. આદર્શ પ્રશ્નાવલિ તૈયાર કરતી વખતે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જ જોઈએ :

(1) દરેક પ્રશ્નાવલિ સાથે તેને સંબંધિત પત્ર અથવા તેને યોગ્ય શીર્ષક રાખવું જોઈએ કે જેથી વાચનારને અભ્યાસ હેઠળના હેતુનો સ્પષ્ટ ખ્યાલ મળી રહે.

(2) પ્રશ્નોની સંખ્યા જેટલી શક્ય બને તેટલી ઓછી હોવી જોઈએ. પ્રશ્નોની સંખ્યા ઓછી રાખવાથી ઉત્તરદાતા પાસેથી સારો પ્રતિસાદ મળવાની શક્યતા વધારે રહેલ છે. લાંબી પ્રશ્નાવલિ ઉત્તરદાતાને ખાસ કરીને પાછળના ક્રમના પ્રશ્નોના સચોટ ઉત્તર આપવા માટે બિનઉત્સાહિત કરે છે. પ્રશ્નોની સંખ્યા ચોક્કસ કેટલી રાખવી તેના માટે કોઈ બળજબરીપૂર્વકનો નિયમ નથી. જો પ્રશ્નોની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે હોય, જેમકે 25 અથવા વધારે, ત્યારે પ્રશ્નોની સ્પષ્ટતા મેળવવા માટે પ્રશ્નાવલિને જુદા-જુદા વિભાગોમાં વહેચી દેવી સલાહભરેલું છે.

(3) પ્રશ્નાવલિમાં પ્રશ્નોની સંખ્યા તપાસના હેતુ સાથે સુસંગત હોવી જોઈએ.

(4) પ્રશ્નો સરળ, ટૂંકા અને સમજી શકાય તેવા હોવા જોઈએ. અસ્પષ્ટ અને દ્વિઅર્થી ન હોવા જોઈએ. દા.ત., જો પ્રશ્ન આ રીતે લઈએ કે "તમે શિક્ષિત છો ?" અહીં ઉત્તરદાતા "શિક્ષિત"નો અર્થ સમજી શકશે નહિ. તેનો અર્થ એવો થઈ શકે છે કે શિક્ષણ માધ્યમિક કક્ષા સુધીનું, ઉચ્ચતર માધ્યમિક કક્ષા સુધીનું કે કૉલેજ સુધીનું ? વગેરે. પરંતુ પ્રશ્ન આ રીતે હોવો જોઈએ કે, "તમારું શૈક્ષણિક સ્તર ક્યાં સુધીનું છે ?" આ પ્રશ્નને અનુરૂપ જવાબ માટે પાંચ વિકલ્પ નીચે મુજબ આપી શકીએ :

(a) પ્રાથમિક કક્ષા સુધીનું (b) માધ્યમિક કક્ષા સુધીનું (c) ઉચ્ચતર માધ્યમિક કક્ષા સુધીનું (d) કૉલેજ સુધીનું (e) અભણ.

(5) પ્રશ્નોની ગોઠવણી તાર્કિક હોવી જોઈએ. પ્રશ્નોનો ક્રમ સામાન્ય પ્રશ્નોથી શરૂ કરીને અભ્યાસસંબંધી ચોક્કસ પ્રશ્નો તરફનો હોવો જોઈએ. દા.ત., (a) 'સ્માર્ટ ફોન' અંગે તમારું શું મંતવ્ય છે ? (b) તમે 'સ્માર્ટ ફોન' વાપરો છો ? આ ક્રમ યોગ્ય નથી. પરંતુ, સાચો ક્રમ એ (b) પ્રશ્ન પ્રથમ સ્થાને અને (a) પ્રશ્ન બીજા સ્થાને હોવો જોઈએ.

(6) લાગણીસભર અથવા અંગત જીવનને લગતા પ્રશ્નો પૂછવાનું ટાળવું જોઈએ. દા.ત., ઉત્તરદાતાના લગ્નજીવન, આવકના અન્ય સ્રોત વગેરે. જો અભ્યાસમાં આવા પ્રશ્નોની જરૂરિયાત જણાતી હોય તો ઉત્તરદાતાને એવી બાંહેધરી આપવી જોઈએ કે તેના દ્વારા આપેલ માહિતી ખાનગી રાખવામાં આવશે અને તેનો અન્ય હેતુ માટે ઉપયોગ કરવામાં નહિ આવે.

(7) પ્રશ્નોના જવાબ કોઈ પણ પ્રકારની ગણતરી વગરના હોવા જોઈએ. દા.ત., તમારા કુટુંબના કમાતા સભ્યોની સરેરાશ આવક કેટલી છે ? આવા પ્રશ્નો પૂછવાનું ટાળવું જોઈએ.

(8) જે પ્રશ્નોના જવાબ હા/ના કે તેથી વધારે વિકલ્પવાળા હોય તેવા પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ પરંતુ જે પ્રશ્નોના જવાબ માટે કોઈ ચોક્કસ વિકલ્પ ન હોય તેવા પ્રશ્નો પૂછવાનું ટાળવું જોઈએ. દા.ત. શિક્ષણમાં વાર્ષિક પદ્ધતિને બદલે અર્ધવાર્ષિક પદ્ધતિના વિશે તમારું શું મંતવ્ય છે ? આવા પ્રશ્નોના ઉત્તરમાં ખૂબ જ અસમાનતા હોય છે. જેવા કે (a) તદ્દન તરફેણમાં (b) તરફેણમાં (c) તટસ્થ (d) વિરુદ્ધમાં (e) તદ્દન વિરુદ્ધમાં. તેથી આવા ઉત્તરોની કોષ્ટક સ્વરૂપમાં ગોઠવણી કરવાનું કે અર્થઘટન કરવાનું ખૂબ જ મુશ્કેલ બને છે. આથી પ્રશ્નાવલિમાં જો આવા પ્રશ્નો પૂછવાની જરૂરિયાત હોય તો તેવા પ્રશ્નો ખૂબ જ ઓછી સંખ્યામાં હોવા જોઈએ.

હવે આપણે પ્રશ્નાવલિનું એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ગુજરાત રાજ્યના 12મા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓના અભ્યાસ અંગેની ટેવ વિશેની માહિતી એકત્રિત કરવા માટેની પ્રશ્નાવલિનો નમૂનો :

1. વિદ્યાર્થીનું નામ : ______________________
2. જાતિ : ☐ સ્ત્રી ☐ પુરુષ
3. સ્થળ : ____________ ગામ/તાલુકો : ____________ જિલ્લો : ____________
4. શાળા : ☐ સરકારી ગ્રાન્ટ ન લેતી ☐ સરકારી ગ્રાન્ટ લેતી
5. વિદ્યાશાખા : ☐ વિનયન ☐ વાણિજ્ય ☐ વિજ્ઞાન ☐ અન્ય
6. અભ્યાસનું માધ્યમ : ☐ અંગ્રેજી ☐ ગુજરાતી ☐ અન્ય
7. શાળાનો સમય : ______________________
8. શાળાનું ગૃહકાર્ય કરવા માટે તમે કેટલો સમય આપો છો ? ____________
9. તમારા અભ્યાસના વાચન અને તૈયારી માટે લાગતો દૈનિક સમય ____________
10. મનોરંજન કરવા માટેનાં માધ્યમો :
    ☐ રમતગમત ☐ ચલચિત્ર કે ટી.વી. ☐ સંગીત ☐ ઘરના સભ્યો સાથે
11. મનોરંજન પાછળ તમે કેટલો સમય આપો છો ? ____________
12. દૈનિક ઊંઘના સરેરાશ કલાકો : ____________

પ્રવૃત્તિ

તમારી શાળાના વિદ્યાર્થીઓની વચ્ચે જુદા–જુદા પ્રકારની ચૉકલેટની લોકપ્રિયતા અંગેની માહિતી મેળવવા માટે યોગ્ય પ્રશ્નાવલિ તૈયાર કરો.

1.4.3.2 ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિ (Questionnaire by Post)

અર્થ :

આદર્શ પ્રશ્નાવલિ તૈયાર કર્યા બાદ જેમની પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોય તેવા ઉત્તરદાતાને આપેલ સમયમર્યાદામાં બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપી પરત મોકલી આપે તેવી વિનંતી સાથે ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિ મોકલવામાં આવે છે. આથી દરેક ઉત્તરદાતાને પ્રશ્નાવલિની સાથે પોતાના સરનામાવાળું (માહિતી મંગાવનારનું) યોગ્ય ટિકિટ લગાડેલ જવાબી પરબીડિયું મોકલવું જરૂરી છે. ઉત્તરદાતાએ પોતે જ પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના હોઈ પ્રશ્નાવલિના પ્રશ્નો સ્પષ્ટ, ટૂંકા, સરળ, મુદ્દાસર અને સ્વયંસ્પષ્ટ હોવા જોઈએ. અત્યારના સમયમાં પ્રશ્નાવલિ કમ્પ્યૂટર (ઈ-મેલ) તથા મોબાઇલ દ્વારા પણ મોકલવામાં આવે છે.

લાભ :

(1) જ્યારે માહિતી એકત્રિત કરવાનું ક્ષેત્ર વિશાળ હોય ત્યારે માહિતી એકત્રિત કરવા માટે આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી નીવડે છે.

(2) આ રીત સરળ છે અને ઓછા ખર્ચે વધારે માહિતી મેળવી આપે છે.

(3) જે ક્ષેત્રમાં વ્યક્તિગત કે ટેલિફોનના માધ્યમ દ્વારા સંપર્ક સાધવાનું મુશ્કેલીભર્યું હોય તેવા ક્ષેત્રમાં રહેતા ઉત્તરદાતાઓ પાસેથી આગણક આ રીત વડે માહિતી મેળવી શકે છે.

ગેરલાભ :

(1) જ્યારે ઉત્તરદાતા અશિક્ષિત હોય અને સહકારની ભાવના ધરાવતા ન હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી નીવડતી નથી.

(2) ક્યારેક ઉત્તરદાતા તરફથી મળેલ માહિતી ખોટી હોય છે અથવા અધૂરી કે જવાબ આપ્યા વગરની જ પ્રશ્નાવલિ આગણકને પાછી મોકલી આપેલ હોય છે.

(3) ઉત્તરદાતાની આળસના પરિણામે પ્રશ્નાવલિ ગેરવલ્લે જવાની અથવા માહિતી મેળવવામાં વિલંબ થવાની શક્યતા રહેલ છે.

(4) આ રીતમાં ઉત્તરદાતાને સૂચનાઓની સ્પષ્ટતા કરી આપે કે પ્રશ્નોનું અર્થઘટન કરી આપે તેવી મદદ કરનાર વ્યક્તિની ખોટ રહે છે. તેથી પ્રશ્નોનું ખોટું અર્થઘટન થવાની શક્યતા રહેલ છે.

1.4.3.3 આગણક દ્વારા પ્રશ્નાવલિ (Questionnaire by Enumerator)

અર્થ :

આ રીતમાં આગણકો પોતે ઉત્તરદાતાને રૂબરૂ મળે છે અને પ્રશ્નોના જવાબ મેળવે છે. પ્રશ્નાવલિમાં પ્રશ્નોના જવાબ આગણક પોતે પોતાના હસ્તાક્ષર દ્વારા લખે છે. આમ, અગાઉની રીત અને આ રીતમાં તફાવત એ છે કે અગાઉની રીતમાં ઉત્તરદાતાને પ્રશ્નાવલિ ટપાલ દ્વારા મોકલવામાં આવે છે, જ્યારે આ રીતમાં આગણક પોતે પ્રશ્નાવલિ લઈને જાય છે અને ઉત્તરદાતાને રૂબરૂ મળે છે. અહીંયાં આગણકો ઉત્સાહી, વિનયી, પ્રામાણિક અને તેમના કાર્યમાં કુશળ હોવા જોઈએ જેથી કરીને ઉત્તરદાતાને પ્રશ્નોને અનુરૂપ અને પૂરક જાણકારી પૂરી પાડીને પ્રશ્નોના સાચા જવાબ મેળવી શકે. આગણકને ઉત્તરદાતા સાથે કોઈ પણ જાતના બિનજરૂરી વિવાદમાં ન ઉતરવા કે તેની માનહાનિ ન થાય તેવી તકેદારી રાખી મિત્રતાભર્યું વાતાવરણ સર્જવા સૂચના આપવામાં આવે છે.

લાભ :

(1) યોગ્ય આગણકોની પસંદગી કરીને ઉત્તરદાતા પાસેથી પૂરી, સાચી અને વધારે યોગ્ય માહિતી મેળવી શકાય છે.

(2) જ્યારે ઉત્તરદાતા અશિક્ષિત અથવા સહકાર આપે તેવા ન હોય ત્યારે ઉત્તરદાતાને યોગ્ય ખુલાસો આપી તે યોગ્ય માહિતી મેળવી શકે છે.

(3) પ્રશ્નાવલિ ગેરવલ્લે જવાનો કે પ્રશ્નાવલિના પ્રશ્નોની અધૂરી માહિતી મળવાનો પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો નથી.

(4) મળેલ માહિતી વધારે વિશ્વસનીય હોય છે.

ગેરલાભ :

(1) કેટલીક વખત પૂરતા પ્રમાણમાં નિષ્ણાત આગણકો મેળવવાનું એકદમ મુશ્કેલ બની જાય છે.

(2) મોટી સંખ્યામાં નિમાયેલ આગણકોને લીધે તેમને ચૂકવવામાં આવતું મહેનતાણું તપાસના કુલ ખર્ચમાં વધારો કરે છે.

(3) તપાસ માટેના બિનતાલીમબદ્ધ આગણકોને તાલીમ આપવાનું કાર્ય ખૂબ જ મુશ્કેલીભર્યું છે. વળી, તાલીમ મેળવ્યા બાદ તેઓ કુશળતાપૂર્વક, પ્રામાણિકતાપૂર્વક અથવા કાર્યદક્ષતાપૂર્વક કામ કરશે તેવું માની લેવું વાજબી નથી. તેથી ક્યારેક તેમના દ્વારા મેળવેલ માહિતી શંકાસ્પદ બની જાય છે.

(4) જ્યારે ઉત્તરદાતા વિશાળ ક્ષેત્રમાં ફેલાયેલ હોય ત્યારે આ રીત અયોગ્ય બની જાય છે. આ સંજોગોમાં તપાસના ખર્ચ અને સમયમાં વધારો થાય છે.

(5) આગણકોએ માહિતી આપનાર સાથે સમયની અનુકૂળતા ગોઠવવી પડે છે અથવા કેટલીક વખત એક જ ઉત્તરદાતા પાસે બે-ત્રણ વખત મુલાકાત લેવી પડે છે. પરિણામે તપાસ નિર્ધારિત સમયમાં પૂરી કરવી શક્ય બનતી નથી.

પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવા અગાઉ ચર્ચા કરેલ ત્રણ રીતો પૈકી કોઈ એક રીતનો સ્વીકાર કરવા માટે કોઈ ચોક્કસ નિયમ નથી. તપાસ માટેની રીતની પસંદગીનો આધાર મુખ્યત્વે નીચેની બાબતો પર આધાર રાખે છે :

(1) તપાસ હેઠળ આવતા ક્ષેત્રનો વિસ્તાર (ફેલાવો) (2) તપાસનો હેતુ (3) નાણાકીય જોગવાઈ (4) સમયમર્યાદા (5) કુશળ આગણકો મેળવવાની શક્યતા (6) ચોકસાઈના ધોરણ

1.5 ગૌણ માહિતી (Secondary Data)

1.5.1 ગૌણ માહિતીનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો (Sources of Secondary Data)

ગૌણ માહિતી મેળવવા માટેનાં મુખ્યત્વે બે પ્રાપ્તિસ્થાનો છે : પ્રકાશિત અને બિનપ્રકાશિત.

પ્રકાશિત પ્રાપ્તિસ્થાનો દ્વારા ગૌણ માહિતી :

(1) સરકારી પ્રકાશનો : લોકોની જાણ માટે કેન્દ્ર સરકાર અને રાજ્ય સરકારનાં ઘણાંબધાં એવાં સંગઠનો છે કે જેઓ આંકડાકીય માહિતી એકઠી કરે છે અને તેમનાં તારણો પ્રકાશિત કરે છે. કેટલાંક સરકારી પ્રકાશનો નિયમિત રીતે અને નિયત સમયે માહિતી પૂરી પાડે છે. દા.ત., કેન્દ્રીય આંકડાકીય સંગઠન (Central Statistical Organisation - CSO), રાષ્ટ્રીય નિદર્શ તપાસ સંગઠન (National Sample Survey Organisation - NSSO), ભારતના વસ્તી નિયામક અને રજિસ્ટ્રાર જનરલની કચેરી, ખેતીવાડી સંશોધનની ભારતીય કારોબારી (Indian Council of Agricultural Research - ICAR), સ્ટેટેસ્ટિકલ એબસ્ટ્રેક્ટ ઑફ ગુજરાત સ્ટેટ, સ્ટેટેસ્ટિકલ આઉટલાઇન; ગુજરાત સ્ટેટ, સોશિઓ–ઇકોનોમિક રિવ્યુ; ગુજરાત સ્ટેટ વગેરે.

આવાં સરકારી સંગઠનો દ્વારા પ્રકાશિત થયેલ માહિતીમાંથી જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચકઆંક, આયાત-નિકાસના આંકડા, જન્મ-મરણના આંકડા, કૃષિવિષયક આંકડા, વસ્તી-ગણતરીનાં પરિબળોને લગતી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(2) અર્ધ-સરકારી પ્રકાશનો : અર્ધ-સરકારી સંસ્થાઓ જેવી કે જીવનવીમા નિગમ, રાજ્ય વિદ્યુત બોર્ડ વગેરે તરફથી નિયમિત રીતે વિવિધ અગત્યની માહિતીનું પ્રકાશન થતું રહે છે.

(3) આંતરરાષ્ટ્રીય પ્રકાશનો : આંતરરાષ્ટ્રીય સંગઠનો જેવા કે યુનાઇટેડ નેશન્સ ઓર્ગેનાઇઝેશન (United Nation Organisation - UNO), આંતરરાષ્ટ્રીય નાણાભંડોળ (International Monetory Fund - IMF), આંતરરાષ્ટ્રીય મજદૂર સંગઠન (International Labour Organisation - ILO) દ્વારા અગત્યની માહિતી પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે.

(4) સંશોધક સંસ્થાના અહેવાલો : સંશોધન સંસ્થા જેવી કે અમદાવાદ ટેક્સટાઇલ ઇન્ડસ્ટ્રિઝ રિસર્ચ ઍસોસિયેશન (Ahmedabad Textile Industry's Research Association - ATIRA), ફિઝિકલ રિસર્ચ લેબોરેટરી (Physical Research Laboratory - PRL); અમદાવાદ, સોલ્ટ ઍન્ડ મરીન રિસર્ચ લેબોરેટરી (Salt and Marine Research Laboratory); ભાવનગર, ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ઇકોનોમિક ગ્રોથ (Institute of Econimic Growth - IEG); દિલ્લી, નેશનલ કાઉન્સિલ ઑફ એપ્લાઇડ ઇકોનોમિક રિસર્ચ (National Council of Applied Economic Research); ન્યૂ દિલ્લી તેમનાં પ્રકાશનો દ્વારા માહિતી પૂરી પાડે છે.

(5) સ્થાનિક સ્વરાજ્યની સંસ્થાઓ અને સ્વાયત્ત સંસ્થાઓ, નગરપાલિકાઓ, જિલ્લા પંચાયત, એગ્રિકલ્ચરલ યુનિવર્સિટી તેના વાર્ષિક અહેવાલો પ્રકાશિત કરે છે.

(6) વ્યાપારી અને વ્યાવસાયિક સંસ્થાનાં પ્રકાશનો : ફેડરેશન ઑફ ઇન્ડિયન ચેમ્બર્સ ઑફ કૉમર્સ ઍન્ડ ઇન્ડસ્ટ્રિઝ દ્વારા પ્રકાશિત થતું જર્નલ 'ઇકોનોમિક ટ્રેન્ડ્ઝ', ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ચાર્ટર્ડ એકાઉન્ટન્ટ દ્વારા પ્રકાશિત થતું જર્નલ 'ધ ચાર્ટર્ડ એકાઉન્ટન્ટ', ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ફોરેન ટ્રેડ દ્વારા પ્રકાશિત થતું જનરલ 'ટ્રેડ રિવ્યુ'.

(7) વર્તમાનપત્રો અને સામયિકો : અર્થશાસ્ત્ર, વાણિજ્ય વ્યાપાર, રમતગમત જેવાં ક્ષેત્રો માટેની માહિતી ઇકોનોમિક ઍન્ડ પોલિટિકલ વિકલી (EPW), કૉમર્સ, બિઝનેસ ટુડે, ફાઇનાન્સિયલ એક્સપ્રેસ જેવાં જુદાં જુદાં વર્તમાનપત્રો અને સામયિકોમાંથી મેળવી શકાય છે. આ પણ ગૌણ માહિતી માટેના અગત્યનાં પ્રાપ્તિસ્થાન છે.

બિનપ્રકાશિત પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી મળતી ગૌણ માહિતી :

સંસ્થાઓ દ્વારા કેટલીક આંકડાકીય માહિતી પ્રકાશિત થયેલી હોતી નથી, પરંતુ વિનંતી કરીને ખાનગી અને જાહેર સંગઠનો દ્વારા પોતાના સંદર્ભ માટે તૈયાર કરેલ બિનપ્રકાશિત આંતરિક અહેવાલમાંથી માહિતી મેળવી શકાય છે. દા.ત., કામદારોનો પગાર, તેઓ કેટલા સમયથી નોકરી કરે છે, તેમનું શૈક્ષણિક સ્તર, ખાનગી અને જાહેર ક્ષેત્રની કંપનીઓમાં મ્યુચ્યુઅલ ફંડ દ્વારા થતું રોકાણ, જુદી જુદી યુનિવર્સિટીના પીએચ.ડી મહાનિબંધ વિશેની માહિતી વગેરે.

1.5.2 ગૌણ માહિતીના ઉપયોગ દરમિયાન રાખવી જોઈતી સાવચેતીઓ (Precautions while using Secondary Data) :

ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતા પહેલાં કાળજીપૂર્વક ચકાસણી કરવી જોઈએ કારણ કે આવી માહિતી ખામીયુક્ત, અપૂરતા નિદર્શ કદવાળી હોઈ શકે છે અથવા તપાસના હેતુ સાથે બંધબેસતી ન પણ હોય. આવી અયોગ્ય ગૌણ માહિતી આંકડાકીય પૃથક્કરણ માટે અને તેના પરથી તારણો મેળવવા માટે અને તેનું અર્થઘટન કરવા માટે ઉપયોગી બની શકતી નથી. આથી, આવી માહિતીનો ઉપયોગ કરતા પહેલાં નીચેની સાવચેતીઓ ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ :

(1) ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતાં પહેલાં માહિતી કોણે મેળવી છે, ક્યાંથી માહિતી મેળવેલ છે એ ખાસ જોવું જોઈએ. ખાનગી સંસ્થા દ્વારા તૈયાર કરાયેલ અહેવાલમાંથી લેવાયેલ માહિતી ઓછી વિશ્વસનીય હોય છે, કારણ કે ખાનગી સંસ્થાઓ પોતપોતાના પૂર્વગ્રહો અને વિચારસરણી અનુસાર માહિતી એકત્રિત કરતી હોય છે.

(2) ગૌણ માહિતી મેળવવાનો હેતુ અભ્યાસના હેતુ સાથે સુસંગત હોવો જોઈએ, અન્યથા આવી માહિતી બિનઉપયોગી બની જાય છે.

(3) એકત્રિત કરેલ માહિતી ખૂબ જ જૂની ન હોવી જોઈએ. તે અત્યારના સમયગાળા સાથે બંધબેસતી હોવી જોઈએ. દા.ત., અનાજ, સોનું, પેટ્રોલ વગેરેના ભાવ.

(4) ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતા પહેલાં માહિતીનું કાર્યક્ષેત્ર શું છે અને તે કયા વિસ્તાર માટે એકત્રિત કરવામાં આવેલ છે અને તેમાં વપરાયેલાં પદોની વ્યાખ્યા વગેરે જાણી લેવું જોઈએ.

(5) સીધેસીધી આગણિત કરેલ માહિતીનો ઉપયોગ કરવાનું ટાળવું જોઈએ. આવી આગણિત કરેલ માહિતી ક્યારેક ખોટી રીતે ગણતરી કરીને ઉપજાવેલ હોઈ શકે છે.

(6) કઈ રીત દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરેલ છે તે જાણી લેવું જોઈએ જેથી સંશોધનકર્તા તે રીતના લાભ-ગેરલાભથી વાકેફ બને. ગૌણ માહિતીનો યોગ્ય લાભ પ્રાપ્ત કરવા માટે ઉપરની સાવચેતીઓને લક્ષમાં રાખીને તેનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

સારાંશ

- માહિતી એ સંખ્યાત્મક સ્વરૂપમાં અથવા ગુણાત્મક સ્વરૂપમાં પ્રદર્શિત કરેલ અવલોકનોનો સમૂહ છે.
- માહિતી પ્રાથમિક સ્રોત અથવા ગૌણ સ્રોત દ્વારા મેળવી શકાય છે.
- જ્યારે સંશોધક દ્વારા જાતે માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે ત્યારે તે માહિતીને પ્રાથમિક માહિતી કહે છે.
- જ્યારે બીજા દ્વારા એકત્રિત કરાયેલ માહિતી સંશોધક ઉપયોગમાં લે તો તે માહિતીને ગૌણ માહિતી કહે છે.
- પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવાની સૌથી અગત્યની રીત એ પ્રશ્નાવલિની રીત છે.
- પ્રશ્નાવલિ એ એવું સાધન છે જેના ઉપયોગથી માહિતી આપનાર પાસેથી પ્રશ્નોના જવાબ મેળવી લેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. જર્મન શબ્દ 'Statistik' સૌપ્રથમ કોના દ્વારા વપરાયો હતો ?

(a) જહોન ગ્રાઉન્ટ (b) વિલિયમ પેટટી (c) ગોટફ્રિડ એકેન વૉલ (d) ગૉસ

2. સંભાવનાશાસ્ત્રનાં પ્રારંભિક પરિણામો માટેના મહારથીઓમાંના એક નીચેના પૈકી કોણ હતા ?

(a) જહોન ગ્રાઉન્ટ (b) લાપ્લાસ (c) ફિશર (d) જે. નેમાન

3. ગણિતીય આંકડાશાસ્ત્રના સ્થાપક કોણ હતા ?

(a) કાર્લ પિયર્સન (b) લાપ્લાસ (c) મહાલાનોબિસ (d) ગૉસેટ

4. નીચેનામાંથી કયું ઉદાહરણ પ્રાથમિક માહિતીનું છે ?

(a) મ્યુનિસિપાલિટીના અહેવાલમાંથી મેળવેલ માહિતી

(b) ઉદ્યોગ માટેના પ્રકાશિત થયેલ જર્નલમાંથી મેળવેલ માહિતી

(c) વેબસાઇટ ઉપરથી મેળવેલ માહિતી

(d) NSSO દ્વારા એકત્રિત થયેલ માહિતી

5. નીચેનામાંથી કયું ઉદાહરણ ગુણાત્મક માહિતીનું છે ?

(a) આવકના ઓછી, મધ્યમ, ઉચ્ચ એવા વર્ગો (b) ઉત્પાદન (ટનમાં)

(c) કામદારોની ઉંમર (વર્ષમાં) (d) વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ (મીટરમાં)

6. ગૌણ માહિતી માટે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) ક્યારેય ઉપયોગમાં ન લેવી જોઈએ.

(b) કાળજીપૂર્વક ચકાસણી કર્યા બાદ જ ઉપયોગમાં લેવી જોઈએ.

(c) ના ઉપયોગ દરમિયાન તેની ચકાસણી કરવી જરૂરી નથી.

(d) ગૌણ માહિતી એ જ પ્રાથમિક માહિતી છે.

7. પ્રાથમિક માહિતી માટે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) પ્રાથમિક માહિતી ગૌણ માહિતીની સરખામણીમાં હંમેશાં વધારે ભરોસાપાત્ર છે.

(b) પ્રાથમિક માહિતી ગૌણ માહિતીની સરખામણીમાં ઓછી ભરોસાપાત્ર છે.

(c) પ્રાથમિક માહિતી કાળજીપૂર્વક એકઠી કરાયેલ છે કે નહિ તેના પર આધાર રાખે છે.

(d) પ્રાથમિક માહિતી પ્રકાશિત થયેલ સરકારી પ્રકાશનોમાંથી મેળવાય છે.

8. નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી વધારે ચોકસાઈ ભરેલ હોઈ શકે છે.

(b) પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી ઓછી ચોકસાઈ ભરેલ હોઈ શકે છે.

(c) પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી ભરોસાપાત્ર ન હોઈ શકે.

(d) ઈ-મેઈલ દ્વારા મેળવાતી માહિત પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી કહેવાય છે.

9. માહિતી આપનારનાં અંગત લક્ષણો બાબતની પૂરક માહિતી મેળવવા માટેની યોગ્ય પદ્ધતિ નીચેનામાંથી કઈ છે ?

(a) ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિ (b) રૂબરૂ તપાસ (c) પરોક્ષ તપાસ (d) સમાચાર પત્રોમાંથી

10. તપાસ હેઠળની વ્યક્તિઓની સંખ્યા વધારે હોય અને તેઓ વિશાળ ક્ષેત્રમાં ફેલાયેલી હોય ત્યારે કઈ પદ્ધતિ વધારે ખર્ચાળ નીવડી શકે છે ?

(a) ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિ (b) પરોક્ષ તપાસ (c) પ્રત્યક્ષ તપાસ (d) ટેલિફોન દ્વારા

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ભારતીય આંકડાશાસ્ત્રીય સંસ્થાના સ્થાપક કોણ હતા ?
2. સમષ્ટિ વ્યાખ્યાયિત કરો.
3. નિદર્શ વ્યાખ્યાયિત કરો.
4. ગુણાત્મક માહિતી વ્યાખ્યાયિત કરો.
5. સંખ્યાત્મક માહિતી વ્યાખ્યાયિત કરો.
6. પ્રાથમિક માહિતી વ્યાખ્યાયિત કરો.
7. ગૌણ માહિતી વ્યાખ્યાયિત કરો.
8. પ્રાથમિક માહિતી એકત્રિત કરવાની રીતો જણાવો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કોક્ષટન અને કાઉડન દ્વારા અપાયેલ આંકડાશાસ્ત્રની વ્યાખ્યા રજૂ કરો.
2. માહિતી શું છે ?
3. પ્રશ્નાવલિ શું છે ?
4. બિનપ્રકાશિત માહિતી એટલે શું ?
5. ચલ લક્ષણ શું છે ?
6. ગુણધર્મ શું છે ?

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્રના વિકાસમાં પી. સી. મહાલાનોબિસનું શું પ્રદાન છે ?
2. ગુણાત્મક માહિતી અને સંખ્યાત્મક માહિતી વચ્ચેનો તફાવત જણાવો.
3. પ્રાથમિક માહિતીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપો.
4. પ્રશ્નાવલિની રીતની ચર્ચા કરો.
5. ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિની ચર્ચા કરો.
6. આગણક દ્વારા પ્રશ્નાવલિની ચર્ચા કરો.
7. બિનપ્રકાશિત પ્રાપ્તિસ્થાનોમાંથી ગૌણ માહિતી મેળવવા માટેની રીત વર્ણવો.
8. આંકડાશાસ્ત્રના કેટલાક ઉપયોગોની ચર્ચા કરો.

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત જણાવો.
2. પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા પ્રાથમિક માહિતી મેળવવાની રીતની ચર્ચા કરો.
3. પરોક્ષ તપાસ દ્વારા પ્રાથમિક માહિતી મેળવવાની રીતની ચર્ચા કરો.
4. ગૌણ માહિતી મેળવવાની રીતની ચર્ચા કરો.

5. આંકડાશાસ્ત્રના ઉદ્‌ભવ અને વિકાસની ચર્ચા કરો.
6. પ્રત્યક્ષ તપાસના લાભ-ગેરલાભની ચર્ચા કરો.
7. પરોક્ષ તપાસના લાભ-ગેરલાભની ચર્ચા કરો.
8. આદર્શ પ્રશ્નાવલિનાં લક્ષણોની ચર્ચા કરો.
9. ટપાલ દ્વારા પ્રશ્નાવલિની રીતના લાભ-ગેરલાભની ચર્ચા કરો.
10. આગણકો દ્વારા પ્રશ્નાવલિની રીતના લાભ-ગેરલાભની ચર્ચા કરો.
11. ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતી વખતે કઈ બાબતોની સાવચેતીઓ રાખવી જોઈએ તેની ચર્ચા કરો.

● ઐતિહાસિક નોંધ ●

'આંકડાશાસ્ત્ર' શબ્દ એ લેટિન શબ્દ "સ્ટેટેસ્ટિકમ કોલેજિયમ" (એટલે કે રાજ્યની સભા) અને ઇટાલિયન શબ્દ "સ્ટેટિસ્ટા" (એટલે કે રાજ્યનો માણસ અથવા રાજકારણી) ઉપરથી ઉપજાવેલ છે. જહોન ગ્રાઉન્ટ તથા વિલિયમ પેટ્ટીએ મૃત્યુદરનાં બિલોનું પૃથક્કરણ કરવા ઈ. સ. 1662માં આંકડાકીય તથા વસ્તીવિષયક પદ્ધતિઓ વિકસાવી હતી.

કેટલાક ભારતીય આંકડાશાસ્ત્રીઓ જેમણે ભારતમાં આંકડાશાસ્ત્ર વિષયના વિકાસમાં નોંધપાત્ર પ્રદાન કરેલ છે. જેવા કે પ્રો. સી. આર. રાવ, પ્રો. આર. આર. બહાદુર, પ્રો. ડી. બાસુ, પ્રો. ડી. લાહીરી, પ્રો. કે. આર. નાયર, પ્રો. પી. સી. સુખાત્મે, પ્રો. એસ. કે. મિત્રા, પ્રો. આર. સી. બોઝ, પ્રો. એસ. એન. રોય, પ્રો. એન. એમ. ભટ્ટ, પ્રો. સી. જી. ખત્રી વગેરે.

P. C. Mahalanobis
(1893 - 1972)

P. C. Mahalanobis, in full Prasanta Chandra Mahalanobis was an Indian statistician. He devised the Mahalanobis distance, a measure of distance between two populations. It is a fundamental concept in multivariate analysis. He was instrumental in formulating India's strategey for industrialization in the Second Five–Year Plan (1956–61). On December 17, 1931, he founded the Indian Staistical Institute in Kolkata.

With the objective of providing comprehensive socioeconomic statistics, Mahalanobis became the pioneer of the establishment of the National Sample Survery in 1950 and also of the Central Statistical Organization to coordinate statistical activities in India. He served as the chairman of the United Nations Sub-Commission on sampling from 1947 to 1951 and was appointed as the honorary statistical advisor to the Government of India in 1949.

For the pioneering work, he was awarded the Padma Vibhushan, one of India's highest honours, by the Indian government in 1968. A postage stamp was issued by Goverment of India with his picture.

●

"Statistics are measurements, enumerations or estimates of natural or social phenomena, usually systematically arranged, analysed and presented as to exhibit important inter–relationships among them."

– A. M. Tuttle

2

માહિતીનું નિરૂપણ
(Presentation of Data)

વિષયવસ્તુ :

2.1 વર્ગીકરણ : અર્થ અને જરૂરિયાતો

2.2 વર્ગીકરણના પ્રકારો :

2.2.1 સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ

2.2.1.1 અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

2.2.1.2 સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

2.2.1.3 સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

2.2.1.4 સતત આવૃત્તિ-વિતરણ રચના માટેના મુદ્દા

2.2.2 ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ

2.2.2.1 સાદું વર્ગીકરણ

2.2.2.2 બહુવિધ વર્ગીકરણ

2.3 કોષ્ટક રચના, તેના પ્રકારો, ઉપયોગો

2.3.1 કોષ્ટક રચનાના માર્ગદર્શક નિયમો

2.4 આકૃતિઓ : આંકડાશાસ્ત્રમાં આકૃતિનું મહત્ત્વ, મર્યાદાઓ

2.4.1 આકૃતિના પ્રકારો

2.4.2 એકમાપી આકૃતિ

2.4.2.1 સ્તંભાકૃતિ

2.4.2.2 પાસપાસેની સ્તંભાકૃતિ

2.4.2.3 સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

2.4.2.4 પ્રતિશત (ટકાવારી) વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

2.4.3 દ્વિમાપી આકૃતિ

2.4.3.1 વર્તુળ આકૃતિ

2.4.3.2 વૃતાંશ આકૃતિ

2.4.4 ચિત્રાકૃતિ

2.1 વર્ગીકરણ (Classification)

અર્થ અને જરૂરિયાતો

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે, આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીમાં મુખ્યત્વે બે પ્રકારની માહિતી હોય છે : સંખ્યાત્મક માહિતી અને ગુણાત્મક માહિતી. સંખ્યાત્મક માહિતી એ સંખ્યાત્મક ચલ (numerical variable)ને આધારે મેળવેલી હોય છે. જ્યારે ગુણાત્મક માહિતી એ ગુણાત્મક ચલ (attributes or qualitative variable)ને આધારે મેળવેલી હોય છે. સંખ્યાત્મક ચલના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર હોય છે : (i) અસતત ચલ (discrete variable) (ii) સતત ચલ (continuous variable). જે ચલ બે સીમાઓ વચ્ચેની નિશ્ચિત કે ગણી શકાય તેટલી કિંમતો જ ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેને અસતત ચલ કહે છે. દા.ત., કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યા, માર્ગ પર થતા અકસ્માતોની સંખ્યા. જો કોઈ ચલ x ની કિંમતો 1.2, 1.3, 1.5 વગેરે નિશ્ચિત કિંમતો ધારણ કરે તો તે ચલને અસતત ચલ કહેવાય. જે ચલ બે સીમાઓની વચ્ચેની બધી જ કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તે ચલને સતત ચલ કહેવામાં આવે છે. દા.ત., વ્યક્તિની ઊંચાઈ, દિવસનું મહત્તમ તાપમાન વગેરે સતત ચલનાં ઉદાહરણો છે. વ્યવહારમાં સામાન્ય રીતે જ્યારે ચલની કિંમત મેળવવા માટે ગણતરી કરવી પડતી હોય ત્યારે તે ચલને અસતત ચલ કહેવાય. જેમકે કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યા ગણવી પડે, માર્ગ પર થતા અકસ્માતોની સંખ્યા ગણવી પડે. જે ચલની કિંમત મેળવવા માટે માપણી કરવી પડતી હોય એટલે કે ચલની કિંમતની સાથે માપનો એકમ જરૂરી હોય તેને સતત ચલ કહેવામાં આવે છે, જેમકે વ્યક્તિની ઊંચાઈ સેમી કે ઈંચ કે ફૂટમાં મપાય, દિવસનું મહત્તમ તાપમાન સેલ્સિયસમાં મપાય. અસતત ચલ દ્વારા રજૂ થતી માહિતીને અસતત સંખ્યાત્મક માહિતી કહેવામાં આવે છે અને સતત ચલ દ્વારા રજૂ થતી માહિતીને સતત સંખ્યાત્મક માહિતી કહેવામાં આવે છે.

સમષ્ટિ તપાસ અથવા નિદર્શ તપાસને અંતે મળતી માહિતીને મૂળ માહિતી કે અવર્ગીકૃત માહિતી કહેવામાં આવે છે. આ માહિતી અવ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં હોવાથી તેનો ઉપયોગ કરી આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ કરવામાં મુશ્કેલી પડતી હોય છે. આથી તેને સંક્ષિપ્ત અને વ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં ગોઠવવાની જરૂર પડે છે. અવર્ગીકૃત માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં અને વ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં ગોઠવવાની ક્રિયાને માહિતીનું વર્ગીકરણ (classification) કહે છે અને તે ગોઠવેલી માહિતીને વર્ગીકૃત માહિતી કહે છે. દા.ત., એક અઠવાડિયા દરમિયાન કોઈ એક વસ્તુની દૈનિક માંગ અનુક્રમે 12, 16, 8, 12, 8, 8, 10 એકમો હતી એવું માલૂમ પડે છે. તો આ અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી સ્પષ્ટ રીતે જોઈ શકાય કે અઠવાડિયા દરમિયાન વસ્તુની માંગ 8 એકમો હોય તેવા 3 દિવસો છે, માંગ 10 એકમો હોય તેવો એક દિવસ છે, માંગ 12 એકમો હોય તેવા 2 દિવસો છે અને વસ્તુની માંગ 16 એકમો હોય તેવો એક દિવસ છે. આ વિગતને નીચે પ્રમાણે વર્ગીકૃત માહિતીમાં દર્શાવી શકાય :

અઠવાડિયા દરમિયાન વસ્તુની દૈનિક માંગ દર્શાવતું કોષ્ટક

વસ્તુની માંગ	8	10	12	16	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	3	1	2	1	7

આમ, આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં રજૂ કરવાની પદ્ધતિને વર્ગીકરણ કહે છે. આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં વર્ગીકરણની જરૂરિયાત મુખ્યત્વે નીચેનાં કારણોસર છે :

(1) વિસ્તૃત માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં, સરળ અને આકર્ષક રીતે રજૂ કરવા માટે.

(2) માહિતીનાં જુદાં જુદાં લક્ષણો વચ્ચે સરળતાથી સરખામણી કરવા માટે. (વર્ગીકરણમાં માહિતીને સમાન ગુણધર્મો અનુસાર સમૂહોમાં વહેંચાતા હોવાથી સરખામણી સરળ બને છે.)

(3) સમય, શક્તિ અને ખર્ચની બચત કરવા માટે. (અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી કરવામાં આવતા પૃથક્કરણમાં વધુ સમય, શક્તિ અને ખર્ચ થાય છે.)

(4) અભ્યાસ ક્ષેત્રનાં જુદાં જુદાં લક્ષણો વિશે સરળતાથી માહિતી મેળવવા માટે.

2.2 વર્ગીકરણના પ્રકારો (Types of Classification)

વર્ગીકરણના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (i) સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ (ii) ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ. આ પ્રકારો નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ :

ધારો કે કોઈ એક વિસ્તારમાં રહેતાં કુટુંબોમાંથી 100 કુટુંબોનો એક નિદર્શ પસંદ કરી તે 'કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા' વિશે માહિતી એકઠી કરવામાં આવે તો 'કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યા' દર્શાવતા 100 જુદાં જુદાં અવલોકનો મળશે, જેને અવર્ગીકૃત માહિતી કહેવાય છે. હવે આ માહિતીનો અભ્યાસ કરતા એવું તારણ મળ્યું કે નિદર્શમાં એક પણ બાળક ન હોય તેવાં 10 કુટુંબો છે, એક બાળક હોય તેવાં 35 કુટુંબો છે, બે બાળકો હોય તેવાં 40 કુટુંબો છે અને 3 બાળકો હોય તેવાં 15 કુટુંબો છે. આ વર્ગીકરણને સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કહેવાય અને તેને સંક્ષિપ્તમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

100 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા દર્શાવતું વર્ગીકરણ

બાળકોની સંખ્યા	0	1	2	3	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા	10	35	40	15	100

ઉપરના ઉદાહરણમાં 'કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા' એ સંખ્યાત્મક ચલ છે તેથી આ વર્ગીકરણને સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કહે છે. હવે આ 100 કુટુંબોના નિદર્શમાં 'બાળકોની સંખ્યા'ને બદલે જો 'કુટુંબના મુખ્ય વ્યવસાય' વિશે માહિતી એકઠી કરવામાં આવે અને તે પરથી એવું તારણ મેળવવામાં આવે કે 30 કુટુંબોનો મુખ્ય વ્યવસાય ખેતી છે, 25 કુટુંબોનો મુખ્ય વ્યવસાય વેપાર છે, 25 કુટુંબનો મુખ્ય વ્યવસાય નોકરી છે અને બાકીનાં 20 કુટુંબોનો મુખ્ય વ્યવસાય મજૂરી છે, તો આ પ્રક્રિયાને પણ વર્ગીકરણ કહેવાય અને તેને સંક્ષિપ્તમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

100 કુટુંબોનો મુખ્ય વ્યવસાય દર્શાવતું વર્ગીકરણ

કુટુંબનો મુખ્ય વ્યવસાય	ખેતી	વેપાર	નોકરી	મજૂરી	કુલ
કુટુંબની સંખ્યા	30	25	25	20	100

ઉપરનાં ઉદાહરણમાં 'કુટુંબનો મુખ્ય વ્યવસાય' એ ગુણાત્મક ચલ છે તેથી આ વર્ગીકરણને ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કહેવાય છે.

આમ, એકઠી કરેલી અવર્ગીકૃત માહિતીનું મુખ્યત્વે બેમાંથી કોઈ એક પ્રકારમાં વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે : (i) સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ (ii) ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ.

2.2.1 સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ (Classification of Quantitative Data)

સંખ્યાત્મક ચલના બે પ્રકારો છે : (i) અસતત ચલ (ii) સતત ચલ. અસતત ચલની માહિતીના વર્ગીકરણને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે, જ્યારે સતત ચલની માહિતીના વર્ગીકરણને સતત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.

2.2.1.1 અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ (Discrete Frequency Distribution)

ચલના મૂલ્યના પુનરાવર્તન દર્શાવતી સંખ્યાને ચલની તે મૂલ્યની આવૃત્તિ (f) કહે છે. અસતત ચલનાં વિવિધ શક્ય મૂલ્યોને અનુરૂપ આવૃત્તિ દર્શાવતા કોષ્ટકને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. આ સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ :

શહેરના એક માર્ગ પર મે માસ દરમિયાન થયેલ દૈનિક અકસ્માતોની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે મળે છે :

0, 1, 3, 2, 0, 3, 4, 5, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 3

3, 0, 2, 1, 2, 4, 5, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 2, 1

આ માહિતીનું આપણે વર્ગીકરણ કરવું છે.

અહીં માર્ગ પર થયેલ 'દૈનિક અકસ્માતની સંખ્યા' એ અસતત ચલ (x) છે અને આપણે તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરીશું. અહીં ચલ x ની લઘુતમ કિંમત 0 અને મહત્તમ કિંમત 5 છે તેથી ચલ x ની શક્ય કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4 અને 5 થશે. આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીને ક્રમશઃ વાંચતા જતા ચલની જે કિંમત વંચાય તેની સામે આવૃત્તિ ચિહ્ન (|) મૂકવામાં આવે છે. ચલની કોઈ પણ કિંમતની આગળ ચાર આવૃત્તિ ચિહ્ન થઈ ગયા બાદ પાંચમું આવૃત્તિ ચિહ્ન ત્રાસું મૂકીને પાંચ આવૃત્તિ ચિહ્નનો સમૂહ બને (||||) તે રીતે દર્શાવવામાં આવે છે. આનો હેતુ ફક્ત આવૃત્તિ ચિહ્નોની ગણતરી સરળ બને તેટલો જ છે. જ્યારે ચલની બધી જ કિંમતો વંચાઈ જાય ત્યાર બાદ અવલોકનની દરેક કિંમતની સામેનાં આવૃત્તિ ચિહ્નો ગણીને આવૃત્તિ (f) મેળવવામાં આવે છે. આ રીતે દરેક અવલોકનોની આવૃત્તિઓનો સરવાળો ચલની આપેલી કુલ કિંમતો (અવલોકનો) જેટલો થવો જોઈએ એટલે કે $n = \Sigma f = 31$. આ રીતે મેળવેલ આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

મે માસ દરમિયાન શહેરના માર્ગ પર થયેલ દૈનિક અકસ્માતોની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

અકસ્માતોની સંખ્યા x	આવૃત્તિ ચિહ્ન	દિવસોની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)
0	||||, ||||	9
1	||||, ||	7
2	||||, ||	7
3	||||	4
4	||	2
5	||	2
	કુલ	**31**

અવર્ગીકૃત માહિતીમાં ચલની મહત્તમ કિંમત અને લઘુતમ કિંમતો વચ્ચેના તફાવતને માહિતીનો વિસ્તાર (range R) કહે છે એટલે કે વિસ્તાર R = મહત્તમ કિંમત − લઘુતમ કિંમત

ઉપરના ઉદાહરણ માટે વિસ્તાર $R = 5 - 0 = 5$ થાય.

નોંધ : જ્યારે અસતત ચલની કિંમતનો વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોય ત્યારે તે માહિતી માટે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ કરવું યોગ્ય નથી. આ સંજોગોમાં અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ કરવું યોગ્ય છે, જેનો અભ્યાસ આપણે સતત આવૃત્તિ-વિતરણ સાથે કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : **ટેલિવિઝન સેટનું ઉત્પાદન કરતી એક ફેક્ટરીમાં અઠવાડિયા દરમિયાન 500 સેટનું ઉત્પાદન થયું હતું અને તેમાંથી 50 ટેલિવિઝન સેટનો એક નિદર્શ લઈ દરેક ટેલિવિઝન સેટની તપાસ કરતાં નીચે પ્રમાણે ખામીઓની સંખ્યા મળે છે. આ માહિતી પરથી યોગ્ય આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.**

0	3	2	1	0	5	2	3	0	2	3	0	0	1	0
2	3	4	1	0	4	5	2	1	0	3	2	1	1	0
2	4	2	1	0	0	0	1	0	1	3	1	0	0	0
0	1	1	0	2										

અહીં 'ટેલિવિઝન સેટમાં ખામીઓની સંખ્યા'એ અસતત ચલ છે તેમજ ખામીઓની મહત્તમ સંખ્યા 5 અને લઘુતમ સંખ્યા 0 છે તેથી આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર $R = 5 - 0 = 5$ થાય. તેથી ટેલિવિઝન સેટ દીઠ ખામીઓ દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ પૃષ્ઠ નંબર 18 પ્રમાણે મેળવી શકાય.

50 ટેલિવિઝન સેટના નિદર્શમાં ટેલિવિઝન સેટ દીઠ ખામીઓની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ટેલિવિઝન સેટ દીઠ ખામીઓની સંખ્યા (ચલ x)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	ટેલિવિઝન સેટની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)
0	𝍸 𝍸 𝍸 III	18
1	𝍸 𝍸 II	12
2	𝍸 IIII	9
3	𝍸 I	6
4	III	3
5	II	2
	કુલ	**50**

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આજુબાજુના વિસ્તારમાં રહેતાં 30 કુટુંબોમાં વ્યક્તિઓની સંખ્યા વિશે માહિતી એકઠી કરી તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

2.2.1.2 સતત આવૃત્તિ-વિતરણ (Continuous Frequency Distribution)

જ્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીનો ચલ સતત હોય અથવા તેનો વિસ્તાર મોટો હોય ત્યારે તે માહિતી માટે સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરવામાં આવે છે. આ માટે સૌપ્રથમ અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનોને કેટલા વર્ગોમાં કે વર્ગ-અંતરાલમાં વર્ગીકૃત કરવાના છે તેની સંખ્યા નક્કી કરવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે વર્ગોની સંખ્યા છ થી પંદર સુધીની કોઈ પણ સંખ્યા, આપેલ માહિતીને આધારે નક્કી કરવામાં આવે છે. અહીં એ સ્પષ્ટ કરવું જરૂરી છે કે, આ ફક્ત એક સર્વસ્વીકૃત પ્રણાલી છે જે દરેક અભ્યાસ માટે સાચી હોય તે જરૂરી નથી. વિશિષ્ટ સંજોગોમાં આપેલી માહિતીને આધારે છ થી ઓછા કે પંદરથી વધુ વર્ગો બનાવી શકાય છે. વર્ગોની સંખ્યા નક્કી કર્યા બાદ દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ નક્કી કરવી જોઈએ. આ માટે અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર (R) મેળવવામાં આવે છે ત્યાર બાદ તેને વર્ગોની સંખ્યા (K) વડે ભાગતા વર્ગલંબાઈ (C) મેળવી શકાય છે. વ્યાવહારિક રીતે વર્ગોની સંખ્યા (K) અને વર્ગલંબાઈ (C) એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે જેથી બંનેની સંખ્યા ધન પૂર્ણાંક હોય અને આ બંનેનો ગુણાકાર માહિતીના વિસ્તાર જેટલો કે તેથી વધુ થાય. સંકેતમાં $C{\cdot}K \geq R$ થાય. જો સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ સમાન હોય તો તેને સમાન વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે પણ જ્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોય ત્યારે એવું બની શકે કે આપેલી માહિતીને આધારે આવૃત્તિ-વિતરણનાં જુદા જુદા વર્ગોની વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય. તેને અસમાન વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. વર્ગની વર્ગલંબાઈ નક્કી કર્યા બાદ દરેક વર્ગની વર્ગસીમાઓ નક્કી કરવામાં આવે છે. વર્ગસીમાઓને આધારે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના બે પ્રકાર પાડી શકાય : નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ અને અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ. જો કોઈ પણ વર્ગની ઉપલી સીમા એ તેના પછીના વર્ગની નીચલી સીમા સમાન હોય તો તે વર્ગને નિવારક વર્ગ (exclusive class) કહે છે. નિવારક વર્ગમાં નીચલી સીમા જેટલું મૂલ્ય ધરાવતા અવલોકનને તે વર્ગમાં સમાવવામાં આવે છે જ્યારે ઉપલી સીમા જેટલું મૂલ્ય ધરાવતા અવલોકનને તે વર્ગ પછીના વર્ગમાં સમાવવામાં આવે છે. દા.ત., કોઈ એક નિવારક વર્ગ 30 - 35 છે અને કોઈ એક અવલોકનનું મૂલ્ય 30 મળે તો તેને તે જ વર્ગ 30 - 35માં મૂકવામાં આવે છે, જ્યારે બીજા કોઈ અવલોકનનું મૂલ્ય 35 મળે તો તે અવલોકનને 30 - 35માં ન મૂકતાં તેના પછીના ક્રમના વર્ગમાં મૂકવામાં આવે છે. જ્યારે કોઈ એક વર્ગની ઉપલી સીમા અને ત્યાર પછીના વર્ગની નીચલી સીમા સમાન ન હોય તો તેને અનિવારક વર્ગ (inclusive class)

કહેવામાં આવે છે. અનિવારક વર્ગમાં નીચલી સીમા અને ઉપલી સીમા જેટલા મૂલ્ય ધરાવતાં અવલોકનોનો સમાવેશ તે વર્ગમાં જ થાય છે. દા.ત., કોઈ એક અનિવારક વર્ગ 30 - 35 છે અને કોઈ એક અવલોકનનું મૂલ્ય 35 મળે છે, તો આ અવલોકન માટેનું આવૃત્તિ ચિહ્ન તે જ વર્ગમાં મૂકવામાં આવે છે.

જ્યારે સતત અવર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે તેનું વર્ગીકરણ કરવા માટે સામાન્ય રીતે નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવવામાં આવે છે. જ્યારે અસતત અવર્ગીકૃત માહિતી આપેલી હોય અને તેનો વિસ્તાર પ્રમાણમાં મોટો હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે તેનું વર્ગીકરણ કરવા માટે અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવવામાં આવે છે. અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણને નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવા માટે તેની દરેક વર્ગસીમાને વર્ગ સીમાબિંદુઓ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. કોઈ પણ વર્ગની અધઃસીમાબિંદુ (lower boundary point) અને ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ (upper boundary point) નીચેનાં સૂત્રો દ્વારા શોધી શકાય છે :

$$\text{વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ} = \frac{\text{તે વર્ગની નીચલી સીમાની કિંમત} + \text{તેની ઉપરના વર્ગની ઉપલી સીમાની કિંમત}}{2}$$

$$\text{વર્ગનું ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ} = \frac{\text{તે વર્ગની ઉપલી સીમાની કિંમત} + \text{તે પછીના વર્ગની નીચલી સીમાની કિંમત}}{2}$$

અથવા

વર્ગનું ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ = અધઃ સીમાબિંદુ + વર્ગલંબાઈ

આમ, વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ એ વર્ગની નીચલી સીમા તેમજ તેના ઉપરના વર્ગની ઊપલી સીમાની સરેરાશ તેમજ વર્ગનું ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ એ વર્ગની ઊપલી સીમા અને ત્યાર પછીના વર્ગની નીચલી સીમાની સરેરાશ દ્વારા મેળવી શકાય છે. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે નિવારક વર્ગ માટે વર્ગ સીમાઓ એ તે વર્ગની વર્ગ સીમાબિંદુઓ જેટલી જ હોય છે. વર્ગનાં ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ તેમજ અધઃ સીમાબિંદુ વચ્ચેના તફાવતને તે વર્ગની વર્ગલંબાઈ (class interval) કહે છે. વર્ગલંબાઈ = ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ – અધઃ સીમાબિંદુ.

વર્ગ સીમાઓની સરેરાશને તે વર્ગની મધ્ય કિંમત (mid–value) અથવા મધ્યબિંદુ (mid–point) કહેવામાં આવે છે.

$$\text{વર્ગની મધ્ય કિંમત} = \frac{\text{ઉપલી સીમાની કિંમત} + \text{નીચલી સીમાની કિંમત}}{2}$$

જ્યારે વર્ગની મધ્ય કિંમત અને વર્ગલંબાઈની કિંમતો જાણીતી હોય તો તે પરથી વર્ગસીમાઓ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

ઉપલી સીમા = મધ્યકિંમત + $\frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

નીચલી સીમા = મધ્યકિંમત – $\frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

અવર્ગીકૃત સતત માહિતી માટે સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરવાની રીત સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ જોઈએ :

એક શાળામાં નોકરી કરતા 50 કર્મચારીઓની ઉંમર (વર્ષમાં) નીચે પ્રમાણે છે :

32	34	48	31	34	27	57	36	49	51
45	29	36	46	46	49	51	47	50	30
35	41	36	47	30	35	48	53	37	47
45	30	50	44	49	43	42	46	28	48
52	36	43	38	39	50	49	34	36	50

હવે આ માહિતી પરથી ધારો કે આપણે 7 વર્ગો ધરાવતું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવવું છે.

અહીં શાળામાં નોકરી કરતા 50 ‘કર્મચારીઓની ઉંમર’ એ સતત ચલ છે અને આપણે તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરવાનું છે.

આપેલી માહિતીમાં સૌથી નાની ઉંમરનો કર્મચારી 27 વર્ષનો છે, જ્યારે સૌથી વધુ ઉંમર ધરાવતા કર્મચારીની ઉંમર 57 વર્ષ છે.

તેથી માહિતીનો વિસ્તાર $R = 57 - 27$

$= 30$ વર્ષ

તેમજ આ માહિતીને 7 વર્ગોમાં વિભાજિત કરવાની છે $\therefore K = 7$

$\therefore$ વર્ગની વર્ગલંબાઈ $C = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગોની સંખ્યા}} = \frac{R}{K}$

$= \frac{30}{7}$

$= 4.29$

વર્ગલંબાઈની કિંમત સામાન્ય રીતે ધન પૂર્ણાંક રાખવામાં આવે છે તેથી અહીં $C = 4$ અથવા $C = 5$ લઈ શકાય પણ જો વર્ગલંબાઈ $C = 4$ લઈએ તો $C \cdot K = 4 \times 7 = 28$ જે વિસ્તારથી નાની કિંમત છે ($\because C \cdot K \geq R$) તેથી $C = 4$ શક્ય નથી. હવે જો $C = 5$ લઈએ તો $C \cdot K = 5 \times 7 = 35$ જે વિસ્તારની કિંમત R કરતાં મોટી છે તેથી $C = 5$ લઈ શકાય.

વર્ગોની સંખ્યા $K = 7$ અને વર્ગલંબાઈ $C = 5$ નક્કી કર્યા બાદ પ્રથમ વર્ગની નીચલી સીમા એવી રીતે પસંદ કરવી જોઈએ કે જેથી નાનામાં નાના અવલોકનની કિંમતનો સમાવેશ પ્રથમ વર્ગમાં થઈ જાય. અહીં લઘુતમ કિંમત 27 છે તેથી નીચલી સીમા 25 લઈ શકાય અને તેમાં વર્ગલંબાઈ 5 ઉમેરીએ તો પ્રથમ વર્ગની ઉપલી સીમા 30 મળે તેથી પ્રથમ વર્ગ 25 - 30, બીજો વર્ગ 30 - 35 વગેરે મળે. હવે છેલ્લો વર્ગ મહત્તમ અવલોકનની કિંમત ધરાવતો હોવો જોઈએ. અહીં તે 55 - 60 થશે. અહીં એ સ્પષ્ટ કરવું જરૂરી છે કે, આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતી માટે આ સિવાયના વર્ગોવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ પણ બનાવી શકાય છે.

હવે આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનોની કિંમતોને જુદા જુદા વર્ગોમાં આવૃત્તિ ચિહ્નો દ્વારા વિતરીત કરવામાં આવે છે.

શાળામાં નોકરી કરતા 50 કર્મચારીઓની ઉંમર દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કર્મચારીઓની ઉંમર (વર્ષમાં) (નિવારક વર્ગો)	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**કર્મચારીઓની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)**
25 - 30	III	3
30 - 35	~~IIII~~ III	8
35 - 40	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
40 - 45	~~IIII~~	5
45 - 50	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
50 - 55	~~IIII~~ III	8
55 - 60	I	1
	કુલ	**50**

ઉદાહરણ 2 : એક સુપર મોલમાં ચાર અઠવાડિયા દરમિયાન થયેલ વેચાણના આંકડા (હજાર રૂપિયામાં) નીચે મુજબ છે :

228	125	100	90	115	125	230
220	130	80	95	160	180	200
200	128	120	85	185	140	265
230	135	127	100	145	150	210

આ માહિતીને 8 વર્ગોમાં વિભાજિત કરતા આવૃત્તિ-વિતરણની રચના કરો.

આપેલ માહિતીનો ચલ વેચાણ (હજાર રૂપિયામાં) એ સતત ચલ તરીકે લઈશું. તેમજ વર્ગોની સંખ્યા $K = 8$ આપેલ છે.

માહિતીનો વિસ્તાર R = મહત્તમ કિંમત – લઘુતમ કિંમત

$= 265 - 80$

$= 185$

∴ વર્ગની વર્ગલંબાઈ $C = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગોની સંખ્યા}} = \frac{R}{K}$

$= \frac{185}{8}$

$= 23.125$

∴ અહીં ગણતરીની સરળતા માટે વર્ગની વર્ગલંબાઈ $C \approx 25$ લેવી જોઈએ $(C \cdot K \geq R)$

પ્રથમ વર્ગની નીચલી સીમા 75 અને ઉપલી સીમા 100 લેતાં લઘુતમ અવલોકન 80ને સમાવે તેવો પ્રથમ વર્ગ 75 - 100 થાય. તે જ રીતે છેલ્લો વર્ગ 250 - 275 થાય, જે મહત્તમ અવલોકન 265ને સમાવે છે.

સુપર મોલમાં ચાર અઠવાડિયા દરમિયાન થયેલ વેચાણ (હજાર રૂપિયામાં) દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વસ્તુનું વેચાણ (હજાર રૂપિયા) વર્ગો	આવૃત્તિ ચિહ્ન	દિવસોની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)
75 - 100	||||	4
100 - 125	||||	4
125 - 150	~~||||~~ |||	8
150 - 175	||	2
175 - 200	||	2
200 - 225	||||	4
225 - 250	|||	3
250 - 275	|	1
	કુલ	**28**

ઉદાહરણ 3 : એક બગીચામાં મોસમના 50 દિવસ દરમિયાન ગુલાબના જુદા જુદા છોડ પરથી દરરોજ ઊગેલાં ગુલાબોની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી એક વર્ગ 30 - 39 હોય તેવું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

34	35	37	39	39	54	52	69	71	75	74	76	84	96	23	33	51	39
26	46	65	65	53	53	72	71	84	94	34	24	99	19	18	27	17	38
45	55	57	66	82	85	35	19	18	28	47	52	64	75				

આપેલ માહિતીમાં 'બગીચામાં ગુલાબના જુદા જુદા છોડ પર ઊગેલા ગુલાબોની સંખ્યા' એ અસતત ચલ છે.

માહિતીનો વિસ્તાર $R = 99 - 17$

$= 82$

અહીં માહિતીનો વિસ્તાર મોટો છે અને ચલ અસતત છે તેથી અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરવું હિતાવહ છે. આપેલ વર્ગ 30 - 39ને અનિવારક વર્ગ લઈને સૌથી નાના અવલોકનની કિંમત 17 ધરાવતો વર્ગ 10 - 19 થાય, જ્યારે સૌથી મોટા અવલોકનની કિંમત ધરાવતો વર્ગ 90 - 99 થાય.

મોસમના 50 દિવસો દરમિયાન બગીચામાં જુદા જુદા છોડ પર ઊગેલ ગુલાબની સંખ્યાનું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ગુલાબની સંખ્યા (અનિવારક વર્ગો)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	દિવસોની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)
10 - 19	𝍸	5
20 - 29	𝍸	5
30 - 39	𝍸 𝍸	10
40 - 49	III	3
50 - 59	𝍸 III	8
60 - 69	𝍸	5
70 - 79	𝍸 II	7
80 - 89	IIII	4
90 - 99	III	3
	કુલ	**50**

ઉદાહરણ 4 : ઉદાહરણ 3માં મેળવેલ અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ માટે

(i) નિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો તેમજ (ii) દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત દર્શાવતું આવૃત્તિ-વિતરણ લખો.

(i) ઉપરના ઉદાહરણ 3માં બીજા વર્ગની નીચલી સીમા 20 અને પ્રથમ વર્ગની ઉપલી સીમા 19 છે તેથી બીજા વર્ગની અધઃ સીમા બિંદુ = $\frac{20+19}{2}$ = 19.5 અને તે વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ = 19.5 + 10 = 29.5 તેથી બીજા વર્ગની સીમાબિંદુઓ 19.5 - 29.5 અને પ્રથમ વર્ગની સીમાબિંદુઓ 9.5 - 19.5 થશે.

આ ગણતરી વૈકલ્પિક રીતે નીચે પ્રમાણે છે :

પ્રથમ વર્ગની ઉપલી સીમા 19 અને ત્યાર પછીના વર્ગની નીચલી સીમા 20 છે. હવે આ બંને સીમાઓના તફાવત (20 – 19 = 1) ને 2 વડે ભાગતા 0.5 મળે છે. તેથી દરેક વર્ગની નીચલી સીમામાંથી 0.5 બાદ કરતા અને ઉપલી સીમામાં 0.5 ઉમેરતા દરેક વર્ગ માટે અનુક્રમે અધઃ સીમાબિંદુ અને ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ મળે જે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

ગુલાબની સંખ્યા (નિવારક વર્ગો)	દિવસો આવૃત્તિ (f)
9.5 - 19.5	5
19.5 - 29.5	5
29.5 - 39.5	10
39.5 - 49.5	3
49.5 - 59.5	8
59.5 - 69.5	5
69.5 - 79.5	7
79.5 - 89.5	4
89.5 - 99.5	3
કુલ	**50**

(ii) વર્ગની મધ્ય કિંમત એ તે વર્ગની ઉપલી સીમા અને નીચલી સીમાઓની સરેરાશ દ્વારા મેળવાય છે. તેથી દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત દર્શાવતું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ થાય :

ગુલાબની સંખ્યા (અનિવારક વર્ગ)	**મધ્યકિંમત** $= \frac{\text{ઉપલી સીમા + નીચલી સીમા}}{2}$	**દિવસો આવૃત્તિ** (f)
10 - 19	$\frac{10+19}{2} = 14.5$	5
20 - 29	$\frac{20+29}{2} = 24.5$	5
30 - 39	$\frac{30+39}{2} = 34.5$	10
40 - 49	$\frac{40+49}{2} = 44.5$	3
50 - 59	$\frac{50+59}{2} = 54.5$	8
60 - 69	$\frac{60+69}{2} = 64.5$	5
70 - 79	$\frac{70+79}{2} = 74.5$	7
80 - 89	$\frac{80+89}{2} = 84.5$	4
90 - 99	$\frac{90+99}{2} = 94.5$	3
	કુલ	**50**

ઉદાહરણ 5 : કોઈ એક માહિતી માટે અનિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મળે છે. તે પરથી દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ તેમજ મધ્યકિંમત દર્શાવતું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

વર્ગ	0 - 20	20 - 50	50 - 70	70 - 90	90 - 100	કુલ
આવૃત્તિ	20	30	30	15	5	100

દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ તેમજ મધ્યકિંમત દર્શાવતું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

વર્ગ	**વર્ગલંબાઈ**	**મધ્યકિંમત**	**આવૃત્તિ**
0 - 20	$20 - 0 = 20$	$\frac{0+20}{2} = 10$	20
20 - 50	$50 - 20 = 30$	$\frac{20+50}{2} = 35$	30
50 - 70	$70 - 50 = 20$	$\frac{50+70}{2} = 60$	30
70 - 90	$90 - 70 = 20$	$\frac{70+90}{2} = 80$	15
90 - 100	$100 - 90 = 10$	$\frac{90+100}{2} = 95$	5
		કુલ	**100**

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસનાં 30 ઘરોમાં રહેતી સૌથી મોટી ઉંમરની વ્યક્તિની ઊંચાઈ વિશે માહિતી મેળવો તેમજ તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

2.2.1.3 સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (Cumulative Frequency Distribution)

ચલની જાણીતી કિંમત કે વર્ગની આવૃત્તિ અને તેની આગળની બધી જ કિંમત કે વર્ગોની આવૃત્તિઓના સરવાળાને સંચયી આવૃત્તિ (*cf*) કહે છે અને તેના વિતરણને સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.

આપેલ ચલની કિંમત કે આપેલ વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુથી ઓછી કિંમત ધરાવતાં અવલોકનોને સમાવતા બધી જ કિંમતો કે વર્ગોની આવૃત્તિઓના સરવાળાને 'થી ઓછા' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ કહે છે અને તેના વિતરણને 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ ('less than' type cumulative frequency distribution) કહે છે.

આપેલ ચલની કિંમત કે આપેલ વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુ જેટલી કે તેથી વધુ કિંમત ધરાવતાં અવલોકનોને સમાવતા બધી જ કિંમતો કે વર્ગોની આવૃત્તિને 'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ કહે છે અને તેના વિતરણને 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ ('more than' type cumulative frequency distribution) કહે છે.

આપેલ અસતત ચલની કિંમતને ધ્યાનમાં રાખીને જો સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવવામાં આવે તો તેને અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (discrete cumulative frequency distribution) કહેવામાં આવે છે જ્યારે વર્ગ અંતરાલના સીમાબિંદુઓને ધ્યાનમાં રાખીને વિતરણ મેળવવામાં આવે તો તેને સતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (continuous cumulative frequency distribution) કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 6 : એક વિસ્તારમાં રહેતાં 50 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા વિશે એકઠી કરેલી માહિતી માટે નીચે પ્રમાણેનું વિતરણ મળે છે :

બાળકોની સંખ્યા (x)	0	1	2	3	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા (f)	10	25	12	3	50

આ માટે 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનાં સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણો મેળવો.

અહીં અસતત ચલ માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે તેથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

'થી ઓછા' પ્રકારનું અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

બાળકોની સંખ્યા x	**કુટુંબોની સંખ્યા f**	**x કે તેથી ઓછા બાળકો ($\leq x$)**	**સંચયી આવૃત્તિ (cf)**
0	10	0	10 = 10
1	25	1	10 + 25 = 35
2	12	2	10 + 25 + 12 = 47
3	3	3	10 + 25 + 12 + 3 = 50
કુલ	**50**		

'થી વધુ' પ્રકારનું અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

બાળકોની સંખ્યા x	કુટુંબોની સંખ્યા f	x કે તેથી વધુ બાળકો $(\geq x)$	સંચયી આવૃત્તિ (cf)
0	10	0	3 + 12 + 25 + 10 = 50
1	25	1	3 + 12 + 25 = 40
2	12	2	3 + 12 = 15
3	3	3	3 = 3
કુલ	**50**		

ઉદાહરણ 7 : 500 વ્યક્તિઓની માસિક આવકનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનાં આવૃત્તિ-વિતરણો બનાવો :

માસિક આવક (હજાર ₹)	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	કુલ
વ્યક્તિઓની સંખ્યા (f)	30	80	100	50	150	80	10	500

500 વ્યક્તિઓની માસિક આવક દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે અને તેના પરથી 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ દરેક વર્ગના ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુને ધ્યાનમાં રાખીને નીચે મુજબ બનાવી શકાય. અહીં સ્પષ્ટ છે કે ₹ 25,000 થી ઓછી આવક ધરાવતી વ્યક્તિ માહિતીમાં નથી. તે દર્શાવવા માટે પ્રથમ વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુને તેની આગળના વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ તરીકે લઈ તેની આવૃત્તિ શૂન્ય લેવામાં આવે છે.

500 વ્યક્તિઓની માસિક આવક દર્શાવતું 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ 'થી ઓછી' માસિક આવક (હજાર રૂપિયા)	'થી ઓછી' સંચયી આવૃત્તિ cf
25	0 = 0
30	0 + 30 = 30
35	0 + 30 + 80 = 110
40	0 + 30 + 80 + 100 = 210
45	0 + 30 + 80 + 100 + 50 = 260
50	0 + 30 + 80 + 100 + 50 + 150 = 410
55	0 + 30 + 80 + 100 + 50 + 150 + 80 = 490
60	0 + 30 + 80 + 100 + 50 + 150 + 80 + 10 = 500

દરેક વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુને ધ્યાનમાં રાખીને નીચે મુજબ 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવી શકાય. અહીં માહિતીમાં ₹ 60,000 થી વધુ આવક ધરાવતી વ્યક્તિ નથી તે દર્શાવવા માટે છેલ્લા વર્ગની ઊર્ધ્વસીમાને તે પછીના વર્ગની અધઃસીમા તરીકે લઈ તેની આવૃત્તિ શૂન્ય દર્શાવવામાં આવે છે.

500 વ્યક્તિઓની માસિક આવક દર્શાવતું 'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃ સીમાબિંદુ કે તેથી વધુ માસિક આવક (હજાર રૂપિયા)	'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ
25	10 + 80 + 150 + 50 + 100 + 80 + 30 = 500
30	10 + 80 + 150 + 50 + 100 + 80 = 470
35	10 + 80 + 150 + 50 +100 = 390
40	10 + 80 + 150 + 50 = 290
45	10 + 80 + 150 = 240
50	10 + 80 = 90
55	10 = 10
60	0 = 0

ઉદાહરણ 8 : 90 દિવસના સમયગાળા દરમિયાન એક આંતરરાષ્ટ્રીય હોટલમાં રૂમની દૈનિક માંગનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારના સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણો મેળવો :

રૂમની માંગ	1 - 50	51 - 100	101 - 150	151 - 200	201 - 250	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	10	20	30	18	12	90

સૌપ્રથમ આપેલ અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણને નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

રૂમની માંગ	દિવસોની સંખ્યા
0.5 - 50.5	10
50.5 - 100.5	20
100.5 - 150.5	30
150.5 - 200.5	18
200.5 - 250.5	12
કુલ	**90**

ઉપરના નિવારક વર્ગો પરથી નીચે મુજબ 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવી શકાય.

90 દિવસ દરમિયાન હોટલમાં રૂમની માંગ દર્શાવતું 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુથી ઓછી માંગ	'થી ઓછા' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ
0.5	0 = 0
50.5	0 + 10 = 10
100.5	0 + 10 + 20 = 30
150.5	0 + 10 + 20 + 30 = 60
200.5	0 + 10 + 20 + 30 + 18 = 78
250.5	0 + 10 + 20 + 30 + 18 + 12 = 90

90 દિવસ દરમિયાન હોટલમાં રૂમની માંગ દર્શાવતું 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃ સીમાબિંદુ કે તેથી વધુ માંગ	'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ
0.5	12 + 18 + 30 + 20 + 10 = 90
50.5	12 + 18 + 30 + 20 = 80
100.5	12 + 18 + 30 = 60
150.5	12 + 18 = 30
200.5	12 = 12
250.5	0 = 0

ઉદાહરણ 9 : 50 વ્યક્તિઓનું વજન (કિગ્રામાં) 'થી ઓછા' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનાં સ્વરૂપમાં નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે.

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુથી ઓછું વજન (કિગ્રા)	સંચયી આવૃત્તિ
30	0
35	7
40	15
45	30
50	38
55	44
60	47
65	49
70	50

(i) કેટલી વ્યક્તિઓનું વજન 45 કિગ્રાથી ઓછું હશે ?

(ii) કેટલી વ્યક્તિઓનું વજન 50 કિગ્રાથી 65 કિગ્રાની વચ્ચે હશે ?

(iii) મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

(i) કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે કે, 30 વ્યક્તિઓનું વજન 45 કિગ્રાથી ઓછું હશે.

(ii) 65 કિગ્રાથી ઓછું વજન ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા = 49

50 કિગ્રાથી ઓછું વજન ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા = 38

$\therefore$ 50 થી 65 કિગ્રાની વચ્ચે વજન ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા = 49 – 38 = 11

(iii) 50 વ્યક્તિઓનું વજન દર્શાવતું મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

વજન (વર્ગ)	વ્યક્તિઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
30 - 35	7 – 0 = 7
35 - 40	15 – 7 = 8
40 - 45	30 – 15 = 15
45 - 50	38 – 30 = 8
50 - 55	44 – 38 = 6
55 - 60	47 – 44 = 3
60 - 65	49 – 47 = 2
65 - 70	50 – 49 = 1
કુલ	**50**

ઉદાહરણ 10 : નીચે આપેલ 'થી વધુ' પ્રકારના સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી

(i) 40 કે તેથી વધુ ઉંમર ધરાવતા વ્યક્તિઓની સંખ્યા (ii) 40 થી ઓછી ઉંમર ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો. (iii) મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ શોધો.

ઉંમર અધઃ સીમા-બિંદુ કે તેથી વધુ	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
વ્યક્તિઓની સંચયી આવૃત્તિ	100	96	87	70	45	25	14	6	1	0

(i) 40 કે તેથી વધુ ઉંમર ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા = 70

(ii) કુલ આવૃત્તિ = 100

ઉંમર 40 થી ઓછી વ્યક્તિઓની સંખ્યા = કુલ વ્યક્તિઓ – 40 કે તેથી વધુ ઉંમર ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા

= 100 – 70 = 30

(iii) મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મળી શકે :

ઉંમર વર્ગ	વ્યક્તિઓની સંખ્યા આવૃત્તિ
25 - 30	100 – 96 = 4
30 - 35	96 – 87 = 9
35 - 40	87 – 70 = 17
40 - 45	70 – 45 = 25
45 - 50	45 – 25 = 20
50 - 55	25 – 14 = 11
55 - 60	14 – 6 = 8
60 - 65	6 – 1 = 5
65 - 70	1 – 0 = 1
કુલ	**100**

સતત આવૃત્તિ-વિતરણની રચના માટેના મુદ્દા :

આપેલી અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવા જેવા કેટલાક અગત્યના મુદ્દાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) સામાન્ય સંજોગોમાં સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગોની સંખ્યા ઓછામાં ઓછી 6 અને વધુમાં વધુ 15 રાખવામાં આવે છે. વિશિષ્ટ સંજોગોમાં આપેલી માહિતીને આધારે આ સિવાયની સંખ્યાના વર્ગો ધરાવતું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવી શકાય છે.

(2) વર્ગોની સંખ્યાને K વડે દર્શાવીશું.

(3) આપેલી અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર (R) મેળવવામાં આવે છે.

વિસ્તાર R = અવલોકનની મહત્તમ કિંમત – અવલોકનની લઘુતમ કિંમત

(4) વર્ગલંબાઈ 'C' ની કિંમત નક્કી કરવા માટે

$$C = \frac{R}{K} = \frac{\text{વિસ્તાર}}{\text{વર્ગોની સંખ્યા}}$$ ની મદદથી એવી કિંમત નક્કી કરો કે જેથી $C \cdot K \geq R$ થાય.

(5) અવર્ગીકૃત માહિતીના લઘુતમ અવલોકનની કિંમતને સમાવતી હોય તે પ્રમાણે પ્રથમ વર્ગની વર્ગ સીમાઓ મેળવો અને ત્યાર બાદ વર્ગ-લંબાઈને આધારે બાકીના વર્ગોની વર્ગ સીમાઓ મેળવો. છેલ્લા વર્ગની વર્ગ સીમાઓ આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીના મહત્તમ અવલોકનને સમાવતી હોય તે રીતે બનાવવામાં આવે છે. સામાન્ય સંજોગોમાં વર્ગોની વર્ગલંબાઈ સમાન રાખવામાં આવે છે. પરંતુ જ્યારે માહિતીનો પ્રસાર (વિસ્તાર) ખૂબ જ મોટો હોય ત્યારે અનિયમિત વર્ગલંબાઈ રાખવામાં આવે છે.

(6) જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગની મધ્ય કિંમત અને વર્ગની વર્ગલંબાઈ આપેલી હોય ત્યારે વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવવા માટે નીચેનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ થાય છે :

$$\text{વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ} = \text{મધ્યકિંમત} - \frac{1}{2}\ (\text{વર્ગલંબાઈ})$$

$$\text{વર્ગનું ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ} = \text{મધ્યકિંમત} + \frac{1}{2}\ (\text{વર્ગલંબાઈ})$$

(7) સતત માહિતી માટે સામાન્ય રીતે નિવારક વર્ગો બનાવવામાં આવે છે. જ્યારે અસતત માહિતીનો વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોય ત્યારે તેને માટે અનિવારક વર્ગો બનાવવાની સામાન્ય પ્રણાલી છે.

(8) અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી સંચયી આવૃત્તિ બનાવતી વખતે અનિવારક વર્ગોને નિવારક વર્ગોમાં ફેરવવામાં આવે છે.

(9) આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવવા પ્રથમ વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુને તેની આગળના વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ તરીકે લઈ તેની આવૃત્તિ શૂન્ય દર્શાવવામાં આવે છે, જ્યારે 'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિમાં છેલ્લા વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુને તેના પછીના વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુ તરીકે લઈ તેની આવૃત્તિ શૂન્ય દર્શાવવામાં આવે છે.

નોંધ : અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરવાથી મૂળ માહિતીને બદલે તેની લગભગ કિંમતનો ગણતરીમાં ઉપયોગ થાય છે. દા.ત., કોઈ એક અવલોકનનું મૂલ્ય 8 હોય તો તેને ધારો કે વર્ગ 0 - 10માં નોંધીશું તેથી મૂળ માહિતી 8 નું વર્ગ 0 - 10માં વિલીનીકરણ થાય છે. વર્ગીકરણથી માહિતીનાં અવલોકનોના પ્રસારનું વલણ તેમ જ અન્ય લાક્ષણિકતાઓનો સહેલાઈથી ખ્યાલ મળે છે.

ઉદાહરણ 11 : કોઈ એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપનીના 250 ડ્રાઇવરની ઉંમર વિશે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી સમાન વર્ગલંબાઈવાળું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

ડ્રાઇવરની ઉંમરના વર્ગની મધ્યકિંમત	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5
ડ્રાઇવરની સંખ્યા (આવૃત્તિ f)	25	30	50	80	50	15

'ડ્રાઇવરની ઉંમર' એ સતત ચલ છે. તેથી નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવવું હિતાવહ છે.

બે ક્રમિક મધ્ય કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત 5 છે. તેથી $C = 5$

પ્રથમ વર્ગ માટે નીચલી સીમા = મધ્યકિંમત $- \frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

$= 22.5 - \frac{1}{2}(5)$

$= 22.5 - 2.5$

$= 20$

પ્રથમ વર્ગ માટે ઉપલી સીમા= મધ્યકિંમત $+ \frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

$= 22.5 + \frac{1}{2}(5)$

$= 22.5 + 2.5$

$= 25$

$\therefore$ પ્રથમ વર્ગ 20–25 થાય અને તે જ પ્રમાણે બાકીના વર્ગોની વર્ગસીમાઓ મેળવી શકાય.

250 ડ્રાઈવરની ઉંમર દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ડ્રાઈવરની ઉંમર	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	કુલ
ડ્રાઈવરની સંખ્યા	25	30	50	80	50	15	250

ઉદાહરણ 12 : 500 પાનાંના એક પુસ્તકમાં પાનાદીઠ મળેલ ભૂલોની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી મળે છે તે પરથી અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

પાનાદીઠ ભૂલોના વર્ગની મધ્યકિંમત	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5
પાનાંની સંખ્યા (f)	380	100	12	6	2

પુસ્તકના પાના પર ભૂલની સંખ્યા એ અસતત ચલ છે.

બે ક્રમિક મધ્યકિંમતો વચ્ચેનો તફાવત 2 છે તેથી વર્ગલંબાઈ $C = 2$

પ્રથમ વર્ગની નીચલી સીમા = મધ્યકિંમત $- \frac{1}{2}$ વર્ગલંબાઈ

$= 0.5 - \frac{1}{2}(2)$

$= -0.5$

પ્રથમ વર્ગની ઉપલી સીમા = મધ્યકિંમત $+ \frac{1}{2}$ વર્ગલંબાઈ

$= 0.5 + \frac{1}{2}(2)$

$= 0.5 + 1$

$= 1.5$

$\therefore$ પ્રથમ વર્ગ – 0.5 થી 1.5 થશે.

તે જ પ્રમાણે અન્ય વર્ગો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

પાનાંદીઠ ભૂલની સંખ્યા	– 0.5 - 1.5	1.5 - 3.5	3.5 - 5.5	5.5 - 7.5	7.5 - 9.5	કુલ
પાનાંની સંખ્યા (f)	380	100	12	6	2	500

ઉપરના નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણને અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવા માટે અધઃ સીમાબિંદુમાં 0.5 ઉમેરવા અને ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુમાંથી 0.5 બાદ કરતાં અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મળે :

પુસ્તકના પાનાદીઠ ભૂલોની સંખ્યા દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ભૂલોની સંખ્યા	0 - 1	2 - 3	4 - 5	6 - 7	8 - 9	કુલ
પાનાંની સંખ્યા	380	100	12	6	2	500

નોંધ : નિવારક આવૃત્તિ-વિતરણને અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવા માટે જે અચલાંકને અધઃ સીમાબિંદુમાં ઉમેરવામાં આવે છે તેમ જ ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુમાંથી બાદ કરવામાં આવે છે તે અચલાંક આપેલ માહિતીને આધારે નક્કી કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 13 : એપ્રિલ મહિના દરમિયાન કોઈ એક ઇલેક્ટ્રૉનિક્સની દુકાનમાં દુકાનદારે દિવસ દરમિયાન વેચેલાં ઉપકરણોની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. કોઈ એક વર્ગ 60 - 70 હોય તેવું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો તેમજ તે પરથી

(i) સૌથી વધુ ઉપકરણો વેચાયાં હોય તેવા દિવસોની સંખ્યા કહો.

(ii) સૌથી વધુ દિવસ કેટલાં ઉપકરણોનું વેચાણ થયું હશે તે જણાવો.

54	58	52	73	57	39	46	64	49	53	75	34	57	68	51
44	34	40	82	88	80	36	85	66	58	41	62	72	80	81

દિવસ દરમિયાન વેચાયેલ ઉપકરણોની સંખ્યા જે અસતત ચલ છે. પરંતુ અહીં સ્પષ્ટ કહેવામાં આવ્યું છે કે, એક વર્ગ 60 - 70 હોય તેવું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો.

પ્રથમ વર્ગ = સૌથી નાની કિંમત (34) ધરાવતો વર્ગ = 30 – 40

છેલ્લો વર્ગ = સૌથી મોટી કિંમત (88) ધરાવતો વર્ગ = 80 – 90

એપ્રિલ માસ દરમિયાન ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ દુકાનમાં વેચાયેલ ઉપકરણોની સંખ્યા દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વેચાયેલ ઉપકરણોની સંખ્યા (નિવારક વર્ગ)	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**દિવસોની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)**
30 - 40	IIII	4
40 - 50	~~IIII~~	5
50 - 60	~~IIII~~ III	8
60 - 70	IIII	4
70 - 80	III	3
80 - 90	~~IIII~~ I	6
	કુલ	**30**

(i) સૌથી વધુ 80 થી 90 ઉપકરણો વેચાયાં હોય તેવા કુલ 6 દિવસો છે.

(ii) સૌથી વધુ 8 દિવસ દરમિયાન થયેલ ઉપકરણોનું વેચાણ 50 થી 60 એકમો છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વિસ્તારમાં રહેતી કુલ 300 વ્યક્તિઓમાંથી 30 વ્યક્તિઓનો એક નિદર્શ પસંદ કરી તેમની ઊંચાઈ (સેમીમાં) મેળવતાં નીચે પ્રમાણે માહિતી મળે છે :

163	148	151	162	145	152	149	158	153	149
150	152	145	141	162	168	148	158	149	141
146	155	159	150	161	153	162	160	154	165

(i) આ માહિતીને 6 વર્ગોમાં વિભાજિત કરો તેમજ દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત શોધો.

(ii) 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

(iii) કેટલા ટકા વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 155 સેમીથી ઓછી હશે ?

(iv) 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

(v) કેટલી વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 147 થી 157 સેમીની વચ્ચે હશે ?

(i) વ્યક્તિની ઊંચાઈ એ સતત ચલ છે.

માહિતીનો વિસ્તાર $R = 168 - 141$

$= 27$

વર્ગોની સંખ્યા $K = 6$ (આપેલ છે.)

વર્ગલંબાઈ $C = \frac{R}{K} = 4.5 \approx 5$

300 વ્યક્તિઓના સમૂહમાંથી પસંદ થયેલ 30 વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊંચાઈ (સેમી) વર્ગ	આવૃત્તિ ચિહ્ન	વ્યક્તિઓની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)	મધ્યકિંમત
140 - 145	II	2	142.5
145 - 150	~~IIII~~ III	8	147.5
150 - 155	~~IIII~~ III	8	152.5
155 - 160	IIII	4	157.5
160 - 165	~~IIII~~ I	6	162.5
165 - 170	II	2	167.5
	કુલ	**30**	

(ii) 300 વ્યક્તિઓના સમૂહમાંથી યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ 30 વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ દર્શાવતું 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ (થી ઓછી ઊંચાઈ)	'થી ઓછા' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ (cf)
140	0 = 0
145	0 + 2 = 2
150	0 + 2 + 8 = 10
155	0 + 2 + 8 + 8 = 18
160	0 + 2 + 8 + 8 + 4 = 22
165	0 + 2 + 8 + 8 + 4 + 6 = 28
170	0 + 2 + 8 + 8 + 4 + 6 + 2 = 30

(iii) ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે 155 સેમીથી ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતી 18 વ્યક્તિઓ છે.

$\therefore$ તેની ટકાવારી = $\frac{18}{30} \times 100 = 60$ %

(iv) 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

અધઃ સીમાબિંદુ કે તેથી વધુ ઊંચાઈ	**'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ**
140	2 + 6 + 4 + 8 + 8 + 2 = 30
145	2 + 6 + 4 + 8 + 8 = 28
150	2 + 6 + 4 + 8 = 20
155	2 + 6 + 4 = 12
160	2 + 6 = 8
165	2 = 2
170	0 = 0

(v) ઊંચાઈ 147 થી 157 સેમીની વચ્ચે હોય તેવી વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા શોધવા માટે મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણને ધ્યાનમાં રાખીશું.
147 એ બીજા વર્ગ 145 - 150 માં છે જેની આવૃત્તિ 8 છે.

તેમજ જ્યારે વર્ગ (145 - 150)ની વર્ગલંબાઈ 5 હોય ત્યારે આવૃત્તિ 8 થાય.

તો વર્ગ (147 - 150)ની વર્ગલંબાઈ 3 હોય ત્યારે આવૃત્તિ $\frac{3}{5} \times 8 = 4.8$ થાય.

150 - 155ના વર્ગની આવૃત્તિ 8 છે અને 155 થી 157 ના વર્ગની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે ગણી શકાય :
જ્યારે વર્ગલંબાઈ 5 (155 - 160) ત્યારે આવૃત્તિ 4

$\therefore$ જ્યારે વર્ગલંબાઈ 2 (155 - 157) ત્યારે આવૃત્તિ = $\frac{2}{5} \times 4 = 1.6$

$\therefore$ 147 થી 157 સેમી ઊંચાઈ ધરાવતી વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા = $4.8 + 8 + 1.6 = 14.4 \approx 14$

નોંધ : આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી 147 થી 157 સેમીની વચ્ચે ઊંચાઈ ધરાવતી વ્યક્તિઓની ગણતરી કરતાં 15 વ્યક્તિઓ માલૂમ પડે છે અને ઉપર પ્રમાણે ગણતરી કરતાં 14 વ્યક્તિઓ માલૂમ પડે છે. આ તફાવતનું કારણ સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે ત્યારે મૂળ માહિતીની જગ્યાએ તેની લગભગ કિંમતનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ 15 : બોમ્બે સ્ટોક એક્સચેન્જમાં નોંધાયેલી 40 જુદી જુદી કંપનીઓના શૅરની કિંમતમાં દિવસ દરમિયાન થયેલ ફેરફારો નીચે પ્રમાણે છે, તો એક વર્ગની મધ્યકિંમત –1 અને નિયમિત વર્ગલંબાઈ 5 હોય તેવું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

– 8	8	7	16	8	22	6	10	– 7	5
3	– 4	9	– 11	11	16	9	– 3	– 11	2
5	– 6	10	– 6	13	– 5	3	– 7	12	0
7	6	12	– 5	21	0	4	–10	14	– 2

કંપનીના શૅરની કિંમતમાં થતો ફેરફાર એ સતત ચલ છે.

મધ્યકિંમત – 1 અને વર્ગલંબાઈ $C = 5$ હોય તેવા

વર્ગની નીચલી સીમા $= \text{મ.કિં.} - \frac{1}{2}C$

$= -1 - \frac{1}{2}(5)$

$= -3.5$

તે વર્ગની ઉપલી સીમા $= \text{મ.કિં.} + \frac{1}{2}C$

$= -1 + \frac{1}{2}(5)$

$= 1.5$

તેથી તે વર્ગ – 3.5 થી 1.5 થાય, જે નિવારક છે. તેને અનિવારક વર્ગમાં ફેરવતા – 3.5 + 0.5 થી 1.5 – 0.5

= – 3 થી 1

હવે આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીમાં લઘુતમ કિંમત –11 અને મહત્તમ કિંમત 22 છે. તેથી તે કિંમતોને સમાવે ત્યાં સુધીના વર્ગો ઉપર મેળવેલ વર્ગ પરથી બનાવી શકાય.

40 કંપનીઓના શૅરના ભાવમાં થતા ફેરફારો દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

શૅરની કિંમતમાં થતા ફેરફારો	આવૃત્તિ ચિહ્ન	કંપનીની સંખ્યા (f)
–13 થી –9	|||	3
–8 થી –4	𝍸 |||	8
–3 થી 1	||||	4
2 થી 6	𝍸 |||	8
7 થી 11	𝍸 ||||	9
12 થી 16	𝍸		6
17 થી 21			1
22 થી 26			1
	કુલ	**40**

ઉદાહરણ 16 : એક ખાનગી કંપનીમાં કામ કરતા 24 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન (રૂપિયામાં) નીચે પ્રમાણે છે તેને યોગ્ય આવૃત્તિ-વિતરણમાં દર્શાવો :

3000, 3500, 4200, 5600, 7500, 9100, 10600, 16200, 18100, 24000, 30000, 36000

3200, 3800, 5200, 7000, 8400, 9600, 12800, 17700, 22750, 24900, 34000, 40000

કર્મચારીનું 'માસિક વેતન'ને સતત ચલ તરીકે લઈશું. તેમજ માહિતીનો વિસ્તાર $R = 40000 - 3000 = 37000$ જે ખૂબ જ મોટો છે તેથી અસમાન વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવવું જોઈએ. જુદા જુદા વર્ગોની વર્ગલંબાઈ આપેલી માહિતીના અભ્યાસ પરથી નક્કી કરી શકાય.

કંપનીના 24 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન દર્શાવતું અસમાન વર્ગલંબાઈવાળું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કર્મચારીનું વેતન વર્ગ	**આવૃત્તિ ચિહ્ન**	**કર્મચારીની સંખ્યા આવૃત્તિ (f)**
3000 - 5000	~~IIII~~	5
5000 - 10000	~~IIII~~ II	7
10000 - 20000	~~IIII~~	5
20000 - 25000	III	3
25000 - 45000	IIII	4
	કુલ	**24**

નોંધ : અહીં ઉપર બનાવેલ વર્ગો સિવાયના વર્ગો ધરાવતું આવૃત્તિ-વિતરણ શક્ય છે.

ઉદાહરણ 17 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

(i)

વર્ગો	24 - 29	24 - 34	24 - 39	24 - 44	24 - 49	24 - 54	24 - 59	24 - 64
સંચયી આવૃત્તિ	3	12	30	55	78	88	95	100

(ii)

વર્ગો	10 - 90	20 - 90	30 - 90	40 - 90	50 - 90	60 - 90	70 - 90	80 - 90
સંચયી આવૃત્તિ	200	180	140	90	55	30	8	3

(i) અહીં 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલું છે. તેના માટે મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

વર્ગો	**સંચયી આવૃત્તિ**	**આવૃત્તિ (f)**
24 - 29	3	3
29 - 34	12	12 − 3 = 9
34 - 39	30	30 − 12 = 18
39 - 44	55	55 − 30 = 25
44 - 49	78	78 − 55 = 23
49 - 54	88	88 − 78 = 10
54 - 59	95	95 − 88 = 7
59 - 64	100	100 − 95 = 5
	કુલ	**100**

(ii) અહીં 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલું છે. તેના પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

વર્ગો	'થી વધુ' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ	આવૃત્તિ (f)
10 - 20	200	200 – 180 = 20
20 - 30	180	180 – 140 = 40
30 - 40	140	140 – 90 = 50
40 - 50	90	90 – 55 = 35
50 - 60	55	55 – 30 = 25
60 - 70	30	30 – 8 = 22
70 - 80	8	8 – 3 = 5
80 – 90	3	= 3
	કુલ	**200**

સ્વાધ્યાય 2.1

1. એક વિસ્તારમાં રહેતાં 50 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા અંગે નીચેની માહિતી મળે છે તે પરથી યોગ્ય આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

1	1	2	1	1	1	1	2	1	0
0	2	2	0	3	3	2	1	2	1
2	1	3	1	1	2	2	2	1	2
3	0	3	0	2	1	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	3	3	2	1

2. એક ઓફિસમાં નોકરી કરતાં 60 કર્મચારીઓની પૂરા વર્ષમા ઉંમર નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવી છે. આ માહિતી પરથી વર્ગલંબાઇ 5 લઇને આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો :

32	42	48	35	23	58	52	38	36	44	48	39
24	27	29	32	34	41	45	51	30	47	45	44
52	38	41	31	25	38	36	34	37	51	25	56
32	39	32	35	42	26	46	42	57	28	43	33
31	42	43	53	43	39	27	54	21	47	26	40

3. મોબાઇલ બનાવતી એક કંપનીએ છેલ્લા 60 દિવસમાં ઉત્પાદિત કરેલ મોબાઇલની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે. તેને 10 વર્ગોમાં વિતરિત કરો :

699	380	625	653	452	763	385	959	485	970
749	595	1029	500	499	453	525	621	465	565
188	785	276	1060	760	355	645	775	825	235
390	399	530	540	695	999	849	550	720	430
752	389	1075	701	875	552	351	265	199	370
1025	825	783	225	603	553	503	663	385	465

આ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી 'થી ઓછા' તેમજ 'થી વધુ' પ્રકારનું આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો.

4. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ તેમજ મધ્યકિંમત શોધી, વિતરણ લખો :

વર્ગ	0 - 99	100 - 299	300 - 499	500 - 749	750 - 899	900 - 999
આવૃત્તિ	10	12	14	16	8	10

5. નીચે આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ માટે 'થી ઓછી' અને 'થી વધુ' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણો મેળવો :

પાનાદીઠ ભૂલોની સંખ્યા	0	1	2	3
પાનાંની સંખ્યા	140	110	120	30

6. નીચે આપેલી માહિતી પરથી અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

અધઃ સીમાબિંદુ કે થી વધુ	44.5	49.5	54.5	59.5	64.5	69.5	74.5	79.5
સંચયી આવૃત્તિ	500	470	390	290	240	90	10	0

7. નીચે આપેલ માહિતી પરથી નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

વજન થી ઓછું (કિગ્રા)	30	35	40	45	50	55	60	65	70
સંચયી આવૃત્તિ	0	17	25	40	48	54	57	59	60

8.

મધ્યકિંમતો	25	105	230	400	650	900	કુલ
આવૃત્તિ	10	30	40	60	80	30	250
વર્ગલંબાઈ	50	110	140	200	300	200	

મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

9. વર્ષ દરમિયાન શહેરમાં થયેલ અકસ્માતોની સંખ્યા નીચે મુજબ છે તે પરથી અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

અકસ્માતની સંખ્યા મધ્યકિંમત	11.5	21.5	31.5	41.5	51.5	કુલ
દિવસો	160	120	43	40	2	365

10. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણની વર્ગ સીમાઓ પરથી વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવી આવૃત્તિ-વિતરણ લખો :

વર્ગ	1 - 1.475	1.5 - 1.975	2 - 2.475	2.5 - 2.975	3 - 3.475	3.5 - 3.975	કુલ
આવૃત્તિ	5	10	20	20	10	5	70

2.2.2 ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ (Classification of Qualitative Data)

ગુણાત્મક માહિતીનાં અવલોકનોને વર્ગીકરણ માટેના નિર્ધારિત ધોરણો અનુસાર હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવવાની પદ્ધતિને ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કહે છે. ગુણાત્મક અવર્ગીકૃત માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં અને આકર્ષક રીતે રજૂ કરવા ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે અને તેને સામાન્ય રીતે કોષ્ટક-રચના દ્વારા પણ ઓળખવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આ વર્ગીકરણના બે પ્રકાર છે : (૧) સાદું વર્ગીકરણ (૨) બહુવિધ કોષ્ટક

2.2.2.1 સાદું વર્ગીકરણ (Simple Classification)

આ પ્રકારના વર્ગીકરણની રચનામાં માહિતીના એક જ ગુણધર્મને ધ્યાનમાં રાખવામાં આવે છે. દા.ત., કોઈ એક બૅન્કના કર્મચારીઓને તેમના હોદ્દા અનુસાર મૅનેજર, ક્લાર્ક, પટાવાળા, સિક્યોરિટી વગેરેમાં વિભાજિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 18 : **અમદાવાદ જિલ્લાની કોઈ એક સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખામાં કર્મચારીઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવતા આ મુજબની માહિતી મળી. બૅન્કમાં કુલ 20 સિક્યોરિટી કર્મચારી, 30 પટાવાળા, 40 ક્લાર્ક અને 8 મૅનેજર હતા. આ માહિતીના વર્ગીકરણને કોષ્ટકમાં દર્શાવો.**

આપેલ માહિતીમાં કર્મચારીના નોકરીનો દરજ્જો એ ગુણ લક્ષણ છે.

અમદાવાદ જિલ્લાની સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખાના કર્મચારીઓનો દરજ્જો દર્શાવતું કોષ્ટક

કર્મચારીનો દરજ્જો	કર્મચારીની સંખ્યા
સિક્યોરિટી	20
પટાવાળા	30
ક્લાર્ક	40
મૅનેજર	8
કુલ	**98**

2.2.2.2 બહુવિધ કોષ્ટક (Manifold Classification)

માહિતીના અભ્યાસ હેઠળના એકમના એક કરતાં વધુ ગુણધર્મને ધ્યાનમાં રાખીને માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના વર્ગીકરણને બહુવિધ કોષ્ટકની રચના કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 19 : **અમદાવાદ જિલ્લાની એક સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખાઓના કર્મચારીઓ વિશે અભ્યાસ કરતા એમ માલૂમ પડ્યું કે કર્મચારીઓમાં 20 સિક્યોરિટી કર્મચારીઓ હતા અને તેમાં 6 સ્ત્રી કર્મચારીઓ હતી. 30 પટાવાળામાં 10 સ્ત્રીઓ હતી જ્યારે 40 ક્લાર્કમાંથી 25 સ્ત્રીઓ હતી અને 8 મૅનેજરોમાંથી 3 સ્ત્રીઓ હતી.**

આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટક દ્વારા રજૂ કરો.

આપેલી માહિતીમાં બે ગુણધર્મો છે : (i) કર્મચારીનો દરજ્જો અને (ii) કર્મચારીની જાતિ. તેને આધારે આપેલ માહિતીનું નીચે પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરી શકાય :

અમદાવાદ જિલ્લાની સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખાઓમાં કર્મચારીનો દરજ્જો જાતિવાર દર્શાવતું કોષ્ટક

કર્મચારીનો દરજ્જો	જાતિ		કુલ
	પુરુષ	સ્ત્રી	
સિક્યોરિટી	14	**6**	**20**
પટાવાળા	20	**10**	**30**
ક્લાર્ક	15	**25**	**40**
મૅનેજર	5	**3**	**8**
કુલ	54	44	98

નોંધ : અહીં બોલ્ડ (ઘાટા) અક્ષરોમાં દર્શાવેલ કિંમતો દાખલાની રકમમાં આપેલી છે અને તે સિવાયની કિંમતો સાદી ગણતરીથી મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 20 : અમદાવાદ જિલ્લાની એક સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખાઓના કર્મચારી વિશે અભ્યાસ કરતા એમ માલૂમ પડ્યું કે, 20 સિક્યુરિટી કર્મચારીમાંથી 7 પુરુષો પરિણીત હતા અને તેમાં 6 સ્ત્રીઓ પૈકી 4 સ્ત્રીઓ પરિણીત હતી. પટાવાળા તરીકે કાર્ય કરતા કુલ 20 પુરુષોમાંથી 12 પુરુષો પરણેલા હતા, જ્યારે 10 સ્ત્રી પટાવાળા અપરિણીત હતી. 40 ક્લાર્ક કર્મચારીઓમાંથી 25 સ્ત્રીઓ હતી અને તેમાંથી 12 સ્ત્રીઓ પરિણીત હતી. જ્યારે 7 પુરુષ ક્લાર્ક પરિણીત હતા. કુલ 8 મૅનેજરોમાંથી 3 સ્ત્રીઓ હતી જે તમામ અપરિણીત હતી. જ્યારે 5 પરિણીત પુરુષો મૅનેજર હતા.

આ માહિતીને યોગ્ય સ્વરૂપમાં ગોઠવો.

આપેલ ગુણાત્મક માહિતીમાં મુખ્ય ત્રણ ગુણધર્મો છે :

(1) કર્મચારીનો દરજ્જો (2) કર્મચારીની જાતિ (3) કર્મચારીનો વૈવાહિક દરજ્જો. તેને આધારે માહિતીને નીચે પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકાય :

અમદાવાદ જિલ્લાની સહકારી બૅન્કની વિવિધ શાખાઓમાં કર્મચારીનો દરજ્જો જાતિવાર
પરિણીત/અપરિણીત કર્મચારી દર્શાવતું કોષ્ટક

કર્મચારીનો દરજ્જો	જાતિ						કુલ		
	પુરુષ			સ્ત્રી					
	અપરિણીત	પરિણીત	કુલ	અપરિણીત	પરિણીત	કુલ	અપરિણિત	પરિણીત	કુલ
સિક્યુરિટી	7	**7**	14	2	**4**	**6**	9	11	**20**
પટાવાળા	8	**12**	**20**	**10**	0	**10**	18	12	**30**
ક્લાર્ક	8	**7**	15	13	**12**	**25**	21	19	**40**
મૅનેજર	0	**5**	5	**3**	0	**3**	3	5	**8**
કુલ	**23**	**31**	**54**	**28**	**16**	**44**	**51**	**47**	**98**

નોંધ : અહીં બોલ્ડ અક્ષરમાં લખેલી કિંમતો દાખલાની રકમમાં આપેલી છે જ્યારે બાકીની કિંમતો સાદા સરવાળા/બાદબાકીથી મેળવી શકાય છે. દા.ત., સિક્યુરિટીમાં કુલ 20 કર્મચારી છે તેમાંથી 6 સ્ત્રીઓ છે. તેથી પુરુષોની સંખ્યા 20 – 6 = 14 થાય. સિક્યુરિટી તરીકે ફરજ બજાવતી 6 સ્ત્રીઓમાંથી 4 સ્ત્રીઓ પરિણીત છે. તેથી અપરિણીત સ્ત્રીઓની સંખ્યા 6 – 4 = 2 થાય. સિક્યુરિટી તરીકે ફરજ બજાવતા 14 પુરુષોમાંથી 7 પુરુષ પરિણીત છે તેથી અપરિણીત પુરુષોની સંખ્યા 14 – 7 = 7 થાય. સિક્યુરિટી તરીકે ફરજ બજાવતા કુલ અપરિણીતો 7 + 2 = 9 થાય અને કુલ પરિણીતો 7 + 4 = 11 થાય અને આ બંનેનો સરવાળો 9 + 11 = 20 થાય, જે કુલ સિક્યુરિટી તરીકે ફરજ બજાવતા કર્મચારીઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. આ જ પ્રમાણે બાકીના કર્મચારીઓ માટે ગણતરી કરી શકાય.

2.3 કોષ્ટક-રચનાના પ્રકાર અને તેના ઉપયોગો (Types of Tabulation and its uses)

સંખ્યાત્મક માહિતી કે ગુણાત્મક માહિતીના વર્ગીકરણનાં ધોરણો નક્કી કર્યાં બાદ વર્ગીકૃત માહિતીને કોષ્ટકના રૂપમાં ગોઠવવામાં આવે છે. સંખ્યાત્મક માહિતી માટેનું સાદું કોષ્ટક એ તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ છે અને દ્વિચલ માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણને દ્વિવિધ કોષ્ટક કહે છે જેનો સમાવેશ આપણા અભ્યાસક્રમમાં નથી.

કોષ્ટક-રચનાના ઉપયોગો

(1) આપેલ વિસ્તૃત માહિતીને વ્યવસ્થિત, સરળ અને સચોટ રીતે રજૂ કરી શકાય છે.

(2) જે-તે અભ્યાસ માટે તપાસ હેઠળની જરૂરી માહિતીનો જ ઉપયોગ થતો હોવાથી સમય, શક્તિ અને નાણાંની બચત થાય છે.

(3) કોષ્ટક-રચનામાં જે માહિતીની સરખામણી કરવાની હોય તે પાસે પાસે ગોઠવવાની હોવાથી સરખામણી સરળતાથી કરી શકાય છે.

(4) કોષ્ટક-રચનામાં હાર અને/અથવા સ્તંભની માહિતીની કિંમતોનો સરવાળો કરવાનો હોવાથી માહિતીના વર્ગીકરણમાં શરતચૂક થઈ હોય તોપણ તે ભૂલ સહેલાઈથી સુધારી શકાય છે.

(5) કોષ્ટક-રચનાથી માહિતીનું વિશ્લેષણ કરવામાં સરળતા અને સુગમતા રહે છે.

2.3.1 કોષ્ટક-રચનાના માર્ગદર્શક નિયમો (Guiding rules for Tabulation)

કોષ્ટક પરથી આપેલી વિગતોને વધુ અર્થપૂર્ણ રીતે રજૂ કરી તેના પરથી જરૂરી નિર્ણયો સરળતાથી તારવી શકાય તે માટે કેટલાક સામાન્ય નિયમો નીચે મુજબ છે :

(1) કોષ્ટકને યોગ્ય શીર્ષક હોવું જોઈએ.

(2) કોષ્ટકમાં આવતી હાર અને સ્તંભના શીર્ષક સ્પષ્ટ અને સરળ હોવા જોઈએ.

(3) જો આંકડા મોટા હોય તો તેને સો, હજાર, લાખ કે કરોડમાં દર્શાવવા જોઈએ.

(4) કોષ્ટકમાં પરસ્પર સંબંધ દર્શાવતી માહિતી પાસપાસે એવી રીતે મૂકેલી હોવી જોઈએ કે જેથી તેનું વિશ્લેષણ સરળતાથી કરીને પરિણામો તારવી શકાય.

(5) મુખ્ય ગુણધર્મો જુદા પડે તે દર્શાવવા માટે યોગ્ય લીટીઓ દોરવી જોઈએ.

(6) મુખ્ય અને ગૌણ ગુણધર્મો દર્શાવતાં ખાનાઓના સરવાળાનાં ખાનાં હોવાં જોઈએ.

(7) કોષ્ટકને અંતે માહિતીના સ્રોતનો ઉલ્લેખ કરવો જોઈએ.

(8) પાકું કોષ્ટક બનાવતા પહેલાં કાચું કોષ્ટક બનાવવું જોઈએ.

(9) સામાન્ય રીતે જેટલી માહિતી એકસાથે દર્શાવીએ તેટલી સરખામણી, ગણતરી અને વિશ્લેષણ સરળ બને પરંતુ વધુ પડતી માહિતી એકસાથે દર્શાવવાને બદલે જુદાં જુદાં કોષ્ટકો દ્વારા દર્શાવવી જોઈએ.

કોઈ પણ ગુણાત્મક માહિતીને રજૂ કરવા માટે જુદી જુદી વ્યક્તિઓ જુદાં જુદાં કોષ્ટકો બનાવી શકે છે પરંતુ સામાન્ય રીતે માહિતીના વર્ગીકરણના હેતુની પૂર્તિ કરે તેવા કોષ્ટકને શ્રેષ્ઠ કોષ્ટક કહેવાય છે. વ્યવહારમાં ત્રણ કરતાં વધુ ગુણધર્મો ધરાવતી માહિતીને પણ વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે પરંતુ અહીં અભ્યાસક્રમની મર્યાદામાં રહીને ત્રણ ગુણધર્મો ધરાવતી માહિતીનું વર્ગીકરણ કર્યું છે.

ઉદાહરણ 21 : એક યુનિવર્સિટીમાં અભ્યાસ કરતા 50,000 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 35 % વિદ્યાર્થીઓ કૉમર્સ શાખાનાં, 30 % આટ્‌ર્સ શાખામાં, 20 % સાયન્સ શાખાના, 10 % એન્જિનિયરિંગ અને બાકીનાં 5 % વિદ્યાર્થીઓ મેડિકલ શાખામાં છે. કૉમર્સ શાખામાં છોકરાઓ અને છોકરીઓનું પ્રમાણ 4:3 છે. આટ્‌ર્સ શાખામાં છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતા બમણી છે. સાયન્સ શાખામાં છોકરાઓની સંખ્યા 60 % છે, જ્યારે એન્જિનિયરિંગ શાખામાં 70 % છોકરાઓ છે. મેડિકલ શાખામાં છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા સમાન છે.

આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

અહીં બે ગુણધર્મો છે : (1) અભ્યાસ શાખા (2) વિદ્યાર્થીઓની જાતિ.

કૉમર્સ શાખાના કુલ વિદ્યાર્થીઓ $= 50000 \times \frac{35}{100} = 17500$

તેમાં છોકરાઓની સંખ્યા $= \frac{4}{4+3} \times 17500 = 10000$

તેમાં છોકરીઓની સંખ્યા $= \frac{3}{4+3} \times 17500 = 7500$

આટ્‌ર્સ શાખામાં કુલ વિદ્યાર્થીઓ $= 50000 \times \frac{30}{100} = 15000$

તેમાં છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં બમણી છે.

જો છોકરાઓની સંખ્યા x હોય તો છોકરીઓની સંખ્યા $2x$ થાય.

તેમજ $x + 2x = 15000$ થાય.

$\therefore\ x = 5000$

$\therefore$ આટ્‌ર્સમાં છોકરાઓની સંખ્યા = 5000 અને છોકરીઓની સંખ્યા = 10000 થાય.

સાયન્સ શાખાના કુલ વિદ્યાર્થીઓ $= 50000 \times \frac{20}{100} = 10000$

તેમાં છોકરાઓની સંખ્યા $= 10000 \times \frac{60}{100} = 6000$

$\therefore$ તેમાં છોકરીઓની સંખ્યા $= 10000 - 6000 = 4000$

એન્જિનિયરિંગમાં વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = $50000 \times \frac{10}{100} = 5000$

તેમાં છોકરાઓની કુલ સંખ્યા = $5000 \times \frac{70}{100} = 3500$

$\therefore$ તેમાં છોકરીઓની કુલ સંખ્યા = $5000 \times \frac{30}{100} = 1500$

મેડિકલ શાખાનાં કુલ વિદ્યાર્થીઓ = $50000 \times \frac{5}{100} = 2500$

તેમાં છોકરાઓની સંખ્યા = $\frac{2500}{2} = 1250$

અને તેમાં છોકરીઓની સંખ્યા = $\frac{2500}{2} = 1250$

યુનિવર્સિટીનાં 50000 વિદ્યાર્થીઓની વિદ્યાશાખા અનુસાર વિદ્યાર્થીઓની જાતિ દર્શાવતું કોષ્ટક

વિદ્યાશાખા	વિદ્યાર્થીની જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
કૉમર્સ	10,000	7500	17500
આટ્‌ર્સ	5000	10,000	15,000
સાયન્સ	6000	4000	10,000
એન્જિનિયરિંગ	3500	1500	5000
મેડિકલ	1250	1250	2500
કુલ	**25,750**	**24,250**	**50,000**

ઉદાહરણ 22 : **એક શાળાના પ્રવાસમાં કુલ 80 વ્યક્તિઓ જોડાઈ હતી અને તેમણે સરેરાશ ₹ 300 પ્રવાસ ફી પેટે ચૂકવ્યા હતા. 60 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી દરેકે ફાળામાં ₹ 325 ચૂકવ્યા હતા અને શિક્ષકો પાસેથી થોડી વધુ રકમ ફાળા પેટે લેવામાં આવી હતી. મદદનીશ સ્ટાફ 10 પુરુષોનો હતો અને તેમની પાસેથી કોઈ પણ ફાળો લીધો ન હતો. પ્રવાસમાં કુલ 20 % સ્ત્રીઓ હતી તેમાંથી 2 સ્ત્રીઓ શિક્ષિકા હતી. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.**

માહિતીના ગુણલક્ષણ (1) પ્રવાસી અને (2) જાતિ છે

પ્રવાસનો કુલ ફાળો = $80 \times 300 = 24000$

તેમાં વિદ્યાર્થીઓનો ફાળો = $60 \times 325 = 19500$

મદદનીશ સ્ટાફનો ફાળો = 0

શિક્ષકોનો ફાળો = $24000 - 19500 = 4500$

$\therefore$ શિક્ષક દીઠ ફાળો = $\frac{4500}{10} = 450$

શાળાના પ્રવાસમાં ભાગ લેનાર પ્રવાસીઓની માહિતી દર્શાવતું કોષ્ટક

પ્રવાસી	જાતિ			વ્યક્તિદીઠ ફાળો (રૂપિયામાં)	કુલ ફાળો (રૂપિયામાં)
	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ		
વિદ્યાર્થી	46	14	**60**	325	19500
મદદનીશ સ્ટાફ	**10**	–	**10**	–	–
શિક્ષક	8	**2**	10	450	4500
કુલ	**64**	**16**	**80**	–	**24,000**

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસનાં 40 ઘરમાં રહેતી પુખ્તવયની વ્યક્તિઓની તેમની જાતિ, અભ્યાસ અને વૈવાહિક દરજ્જા વિશે માહિતી એકઠી કરી તેનું કોષ્ટક બનાવો.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક કૉમર્સ કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતા 1400 વિદ્યાર્થીઓમાં કુલ 855 છોકરાઓ હતા. તેમાંથી 225 છોકરાઓ દ્વિતીય વર્ષમાં ભણતા હતા. દ્વિતીય વર્ષમાં છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા સમાન હતી. પ્રથમ વર્ષના કુલ 550 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી છોકરાઓ અને છોકરીઓનું પ્રમાણ 3:2 હતું જ્યારે તૃતીય વર્ષમાં છોકરાઓની સંખ્યા છોકરીઓની સંખ્યા કરતાં ત્રણ ગણી વધુ હતી. આ માહિતીને કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

2. એક ઓફિસમાં કુલ 1600 કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. આ કર્મચારીઓ પૈકી પુરુષોની સંખ્યા, સ્ત્રીઓની સંખ્યા કરતાં કુલ કર્મચારીઓના 15 % જેટલી વધુ છે. અપરિણિત કર્મચારીઓની સંખ્યા, પરિણિત કર્મચારીઓની સંખ્યા કરતાં 800 ઓછી છે. અપરિણિત સ્ત્રીઓની સંખ્યા 195 છે. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

3. એક બૅન્કમાં વિવિધ જગ્યાઓની ભરતી માટે બોલાવેલ ઉમેદવારોનું નીચેનાં લક્ષણોને ધ્યાનમાં રાખીને કોષ્ટકનો ઢાંચો તૈયાર કરો :

(1) હોદ્દો : મૅનેજર, ક્લાર્ક, કૅશિયર, પટાવાળા

(2) વૈવાહિક દરજ્જો : પરિણીત, અપરિણીત

(3) જાતિ : પુરુષ, સ્ત્રી

4. એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતી કુલ 1850 સ્ત્રીઓમાંથી 549 સ્ત્રીઓ મજૂર વિસ્તારમાં રહેતી હતી. મજૂર વિસ્તારમાં રહેતી પરિણીત સ્ત્રીઓમાં 250 સ્ત્રીઓને નોકરીનો અનુભવ હતો અને 93 સ્ત્રીઓ બિનઅનુભવી હતી. જ્યારે અન્ય વિસ્તારમાં રહેતી સ્ત્રીઓ માટે આ અંકો અનુક્રમે 87 અને 400 હતા. નોકરીનો અનુભવ ન હોય તેવી કુલ 1336 સ્ત્રીઓ હતી, જેમાંથી 136 મજૂર વિસ્તારમાં રહેતી હતી. કુલ સ્ત્રીઓમાંથી 1020 સ્ત્રીઓ અપરિણીત હતી. તેમાંથી નોકરીના અનુભવવાળી સ્ત્રીઓની સંખ્યા મજૂર વિસ્તાર અને અન્ય વિસ્તારમાં અનુક્રમે 163 અને 14 હતી. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

5. એક ખાનગી કંપનીમાં 2011ના વર્ષમાં 1250 કેળવાયેલા અને 400 બિનકેળવાયેલા કારીગરો હતા. 220 સ્ત્રી કારીગરો હતી, તેમાંથી 140 બિનકેળવાયેલી હતી. વર્ષ 2012માં કેળવાયેલા કારીગરોની સંખ્યા 1475 થઈ, જેમાં 1300 પુરુષો હતા. 250 બિનકેળવાયેલ કારીગરોમાંથી 200 પુરુષો હતા. 2013ના વર્ષમાં 1700 કેળવાયેલા અને 50 બિનકેળવાયેલા કારીગરો હતા. કુલ કારીગરોમાંથી 250 સ્ત્રીઓ હતી. તેમાંથી 240 કેળવાયેલી સ્ત્રીઓ હતી. વર્ષ 2014માં કુલ 2000 કારીગરો હતા. જેમાંથી 2 % બિનકેળવાયેલ હતા. કુલ કારીગરોમાં 300 સ્ત્રીઓ હતી, જેમાં 10 બિનકેળવાયેલ સ્ત્રીઓ હતી. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

2.4 આકૃતિઓ (Diagrams)

આંકડાશાસ્ત્રમાં આકૃતિનું મહત્ત્વ–મર્યાદાઓ :

વિશાળ અને જટિલ માહિતીને સરળતાથી સમજી શકાય તેમજ તેને આકર્ષક રીતે રજૂ કરવા માટે વર્ગીકૃત કરેલ માહિતીને આકૃતિઓ કે આલેખો દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આપણા અભ્યાસક્રમમાં આકૃતિઓ જ હોવાથી આપણે તેની ચર્ચા કરીશું. આકૃતિ દ્વારા માહિતીનાં મુખ્ય તારણો આપોઆપ સ્પષ્ટ બને તે રીતે માહિતીની રજૂઆત થાય છે. દા.ત., ટેલિવિઝન પર હવામાન અંગેની આગાહી વિવિધ પ્રકારની આકૃતિઓ દ્વારા થતી હોય છે. તે રીતે દેશના કે રાજ્યનાં જુદાં જુદાં સરકારી તંત્રો, વેપારી સંસ્થાઓ વગેરે તેમની વાર્ષિક કામગીરીને લગતી માહિતીના અહેવાલ વિવિધ પ્રકાશનોમાં આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરે છે.

મહત્ત્વ : આકૃતિનું મહત્ત્વ તેના નીચે જણાવેલ ઉપયોગોથી સ્પષ્ટ થાય છે :

(1) આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરેલી માહિતી આકર્ષક અને સંક્ષિપ્તમાં હોય છે.

(2) માહિતીની લાક્ષણિકતાઓ લાંબા સમય સુધી યાદ રહે છે.

(3) બે કે વધુ સમૂહની માહિતીના પ્રમાણમાં આકૃતિઓ દોરવામાં આવે તો તે આકૃતિઓ પરથી સરળતાથી તુલનાત્મક અભ્યાસ થઈ શકે છે.

(4) માહિતીને દર્શનીય આકૃતિથી રજૂ કરી હોય તો તેના અભ્યાસમાં સમયની બચત થાય છે.

(5) આકૃતિઓ દ્વારા માહિતી દર્શાવવાથી અભણ, ઓછું ભણેલ વ્યક્તિઓ તેમજ બાળકો પણ માહિતીનો સાચો અર્થ સરળતાથી સમજી શકે છે.

(6) વેપાર-વાણિજ્યનાં ક્ષેત્રમાં આકૃતિઓના ઉપયોગથી અસરકારક જાહેરાતો બનાવી શકાય છે.

(7) સામાજિક સુધારાઓ માટે આકૃતિઓની મદદથી મહત્ત્વની બાબતો સરળતાથી સ્પષ્ટ કરી શકાય છે.

(8) આકૃતિઓને ભાષાનું બંધન ન હોવાથી જુદી જુદી ભાષાની વ્યક્તિઓ પણ આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ થતું એકસરખું તારણ મેળવી શકે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આકૃતિ દોરવામાં ચોકસાઈ ન રાખવામાં આવે તો તે ગેરમાર્ગે દોરે છે.

(2) દૃષ્ટિભ્રમને કારણે આકૃતિઓ લોકમાનસને મૂંઝવી નાખે છે.

(3) આકૃતિ દ્વારા માહિતીને દર્શાવવામાં આવે છે ત્યારે, તેમાં માહિતીની ચોકસાઈ ઓછી થાય છે.

2.4.1 આકૃતિના પ્રકારો (Types of Diagrams)

આકૃતિના મુખ્યત્વે ત્રણ પ્રકારો છે :

(1) એકમાપી આકૃતિ

(2) દ્વિમાપી આકૃતિ

(3) ચિત્રાકૃતિ

2.4.2 એકમાપી આકૃતિ (One Dimensional Diagram)

જ્યારે આપેલી માહિતીના કોઈ એક જ ગુણલક્ષણ ધ્યાનમાં લઈને આકૃતિ દોરવામાં આવે છે ત્યારે તેને એકમાપી આકૃતિ કહે છે. એકમાપી આકૃતિમાં આપણે નીચેની ચાર આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરીશું :

(1) સ્તંભાકૃતિ

(2) પાસપાસેના સ્તંભ દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ

(3) સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

(4) ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

2.4.2.1 સ્તંભાકૃતિ (Bar Diagram)

સ્તંભાકૃતિ આપેલી માહિતીના એક જ ગુણલક્ષણને ધ્યાનમાં રાખીને રચવામાં આવે છે. વિવિધ સ્થળો, વસ્તુઓ કે સમયની માહિતી રજૂ કરવા માટે સ્તંભાકૃતિ દોરવામાં આવે છે. આ માટે x-અક્ષ પર સમાન અંતરે સ્થળ, વસ્તુ કે સમય દર્શાવવામાં આવે છે અને y-અક્ષ પર આપેલ સ્થળ, વસ્તુ કે સમયની માહિતીના જથ્થા કે માપને લઈ પ્રમાણસર ઊંચાઈ અને એકસરખી પહોળાઈવાળા સ્તંભ દોરવામાં આવે તો તે આકૃતિને સ્તંભાકૃતિ કહે છે. સ્તંભાકૃતિમાં દોરેલા સ્તંભોના તાર્કિક ક્રમ જાળવવા જોઈએ. જ્યારે કોઈ સ્થળ કે વસ્તુના સંદર્ભમાં માહિતી આપેલી હોય તો તે માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવવી જોઈએ કે જેથી તેમનો તુલનાત્મક અભ્યાસ સરળતાથી થઈ શકે. જ્યારે સમય આધારિત માહિતી આપેલી હોય ત્યારે તે માહિતીને સમય અનુસાર સ્તંભાકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 23 : કોઈ એક વર્ષમાં શહેરની કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની વિદ્યાશાખાવાર સંખ્યા નીચે પ્રમાણે હતી, તો તેને યોગ્ય આકૃતિ વડે દર્શાવો :

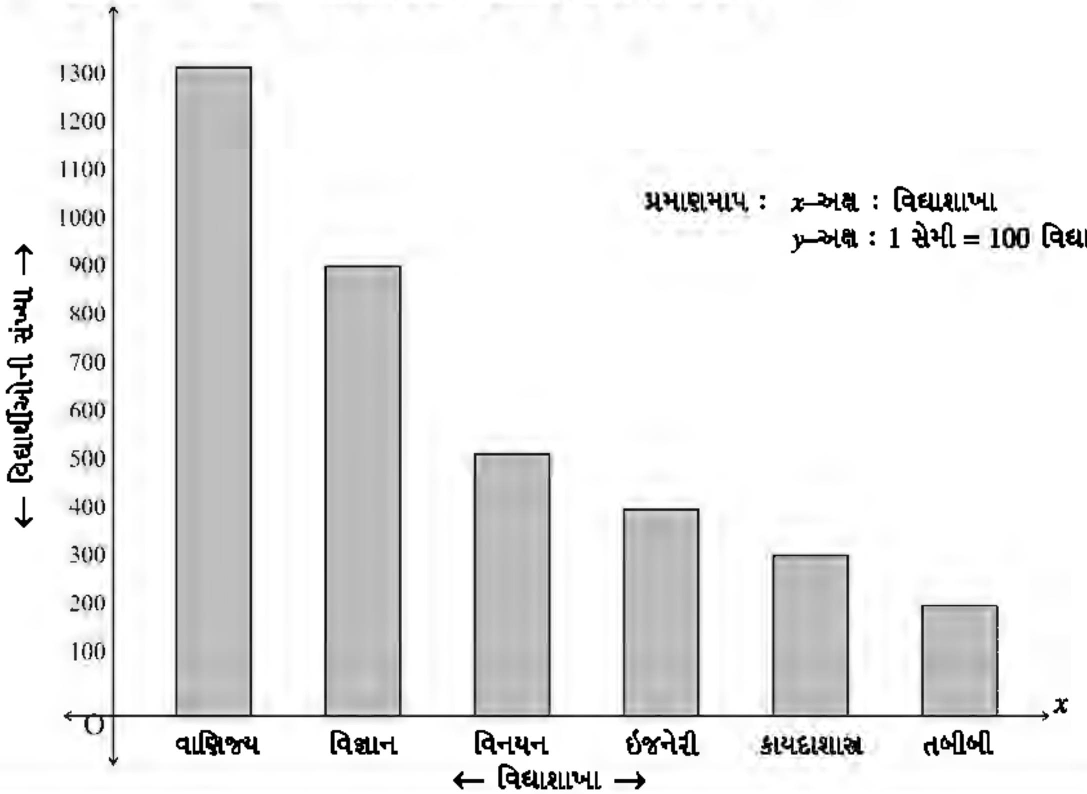
વિદ્યાશાખા	વિનયન	વાણિજ્ય	વિજ્ઞાન	ઇજનેરી	તબીબી	કાયદાશાસ્ત્ર
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	500	1300	900	400	200	300

અહીં એક જ ગુણલક્ષણ–વિદ્યાશાખાને આકૃતિમાં દર્શાવવાની હોવાથી સ્તંભાકૃતિ દોરીશું. વિદ્યાશાખાને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અનુસાર ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવતા નીચે પ્રમાણેની માહિતી મળે છે :

વિદ્યાશાખા	વાણિજ્ય	વિજ્ઞાન	વિનયન	ઇજનેરી	કાયદાશાસ્ત્ર	તબીબી
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1300	900	500	400	300	200

વિદ્યાશાખાને x–અક્ષ પર અને વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને y–અક્ષ પર યોગ્ય સ્કેલ સાથે નીચે પ્રમાણે સ્તંભાકૃતિ દોરી શકાય :

શહેરની કૉલેજમાં વિવિધ વિદ્યાશાખાઓમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ



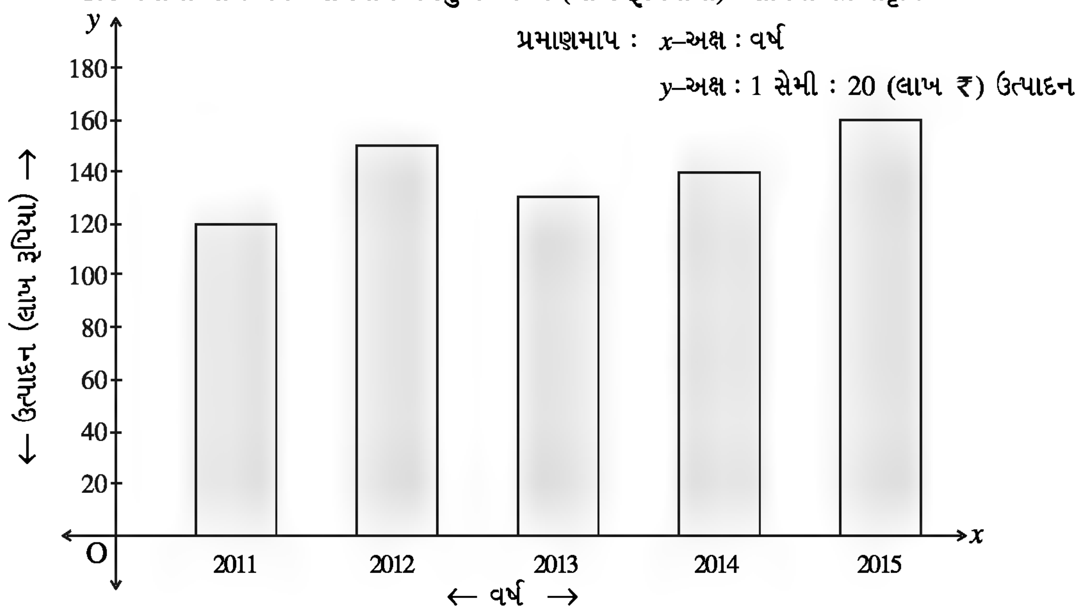
ઉદાહરણ 24 : કોઈ એક કારખાનામાં પાંચ વર્ષ દરમિયાન થયેલ ઉત્પાદન (લાખ રૂપિયામાં) નીચે મુજબ છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિમાં રજૂ કરો :

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (લાખ રૂપિયા)	120	150	130	140	160

સમય આધારિત એક લક્ષણ (ઉત્પાદન)ની માહિતી દર્શાવવાની હોવાથી સ્તંભાકૃતિ દોરીશું.

x–અક્ષ પર વર્ષ અને y–અક્ષ પર ઉત્પાદન (લાખ રૂપિયામાં) લેતાં નીચે મુજબની સ્તંભાકૃતિ દોરાય :

કારખાનામાં પાંચ વર્ષ દરમિયાન થયેલું ઉત્પાદન (લાખ રૂપિયામાં) દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ



2.4.2.2 પાસપાસેના સ્તંભો દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ (Multiple Bar Diagram)

જ્યારે વિવિધ સ્થળો, વસ્તુઓ કે સમય માટે એક કરતાં વધુ લક્ષણની માહિતી એકઠી કરેલી હોય ત્યારે તે માહિતીને આકૃતિમાં દર્શાવવા માટે પાસપાસેના સ્તંભો દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિનો ઉપયોગ થાય છે. આપેલ માહિતી સમય સાથે સંકળાયેલી હોય તો તેને આપેલ સમયના ક્રમમાં જ રજૂ કરવામાં આવે છે. પરંતુ જ્યારે માહિતી સમયના એકમ સાથે સંકળાયેલી ન હોય ત્યારે વિવિધ લક્ષણોની માહિતી પૈકી કોઈ એક લક્ષણને ધ્યાનમાં રાખીને માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ તેને આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 25 : કોઈ એક વર્ષ દરમિયાન એક શહેરની કૉલેજની વિવિધ વિદ્યાશાખામાં અભ્યાસ કરતાં છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિમાં રજૂ કરો :

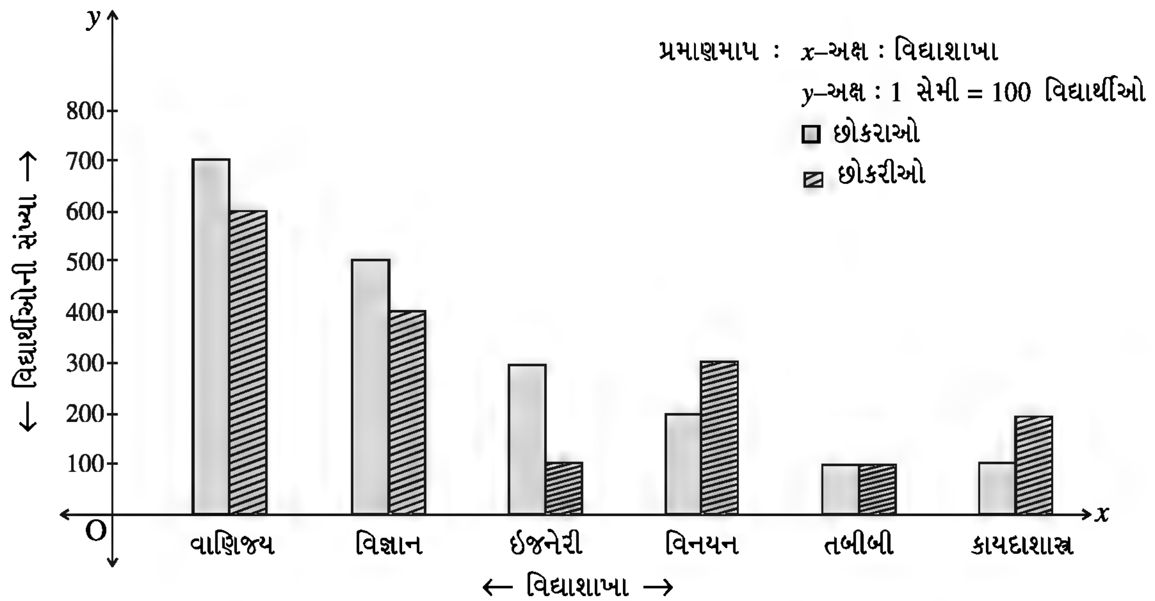
વિદ્યાશાખા	વિજ્ઞાન	વાણિજ્ય	વિનયન	ઇજનેરી	તબીબી	કાયદાશાસ્ત્ર
છોકરાઓની સંખ્યા	500	700	200	300	100	100
છોકરીઓની સંખ્યા	400	600	300	100	100	200

વિદ્યાશાખા અંગે બે ગુણલક્ષણોની માહિતી આપેલી હોવાથી પાસપાસેના સ્તંભો દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ દોરીશું. તે પહેલાં આપેલી માહિતીને દરેક વિદ્યાશાખાના છોકરાઓની ઊતરતી સંખ્યામાં ગોઠવતા નીચે પ્રમાણે માહિતી દર્શાવી શકાય :

વિદ્યાશાખા	વાણિજ્ય	વિજ્ઞાન	ઇજનેરી	વિનયન	તબીબી	કાયદાશાસ્ત્ર
છોકરાઓની સંખ્યા	700	500	300	200	100	100
છોકરીઓની સંખ્યા	600	400	100	300	100	200

વિદ્યાશાખાને x–અક્ષ પર અને છોકરાઓની/છોકરીઓની સંખ્યાને y–અક્ષ પર દર્શાવતાં નીચે પ્રમાણેની આકૃતિ બને :

શહેરની કૉલેજમાં વિવિધ વિદ્યાશાખામાં અભ્યાસ કરતા છોકરાઓ/છોકરીઓની સંખ્યા દર્શાવતી પાસપાસેના સ્તંભ દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ

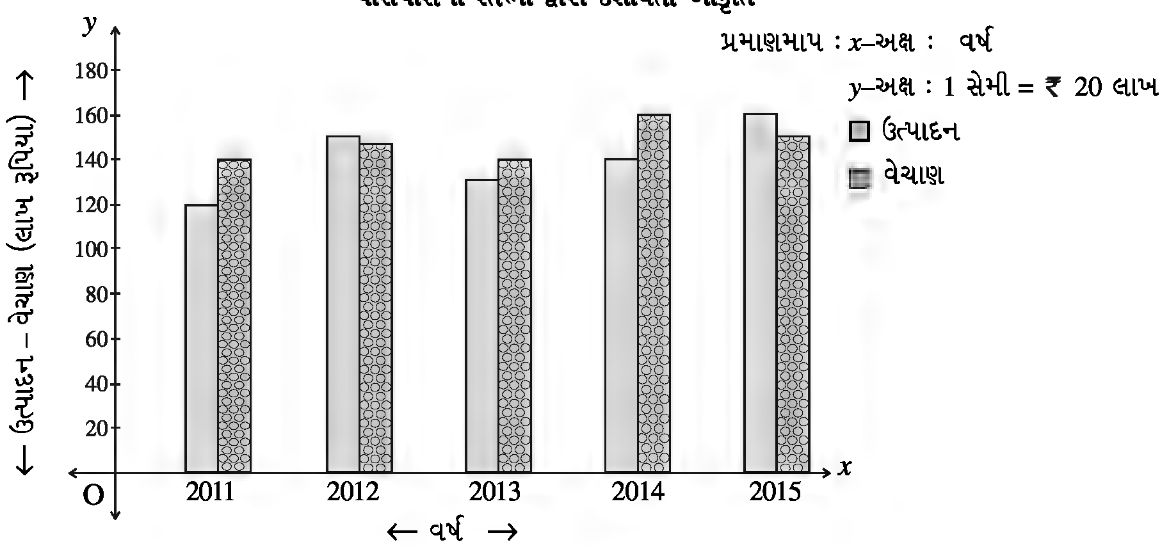


ઉદાહરણ 26 : એક કારખાનામાં પાંચ વર્ષ દરમિયાન થયેલ ઉત્પાદન તેમજ વેચાણની વિગતો નીચે મુજબ છે, તેને યોગ્ય આકૃતિમાં દર્શાવો :

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (લાખ રૂપિયા)	120	150	130	140	160
વેચાણ (લાખ રૂપિયા)	140	145	140	160	150

કારખાનામાં પાંચ વર્ષ દરમિયાન થયેલ ઉત્પાદન અને વેચાણની માહિતી આપેલી છે તેથી પાસપાસેના સ્તંભ દર્શાવતી સ્તંભાકૃતિ દોરીશું. x–અક્ષ પર વર્ષ અને y–અક્ષ પર ઉત્પાદન/વેચાણ (લાખ રૂપિયામાં) લેતા નીચે મુજબ આકૃતિ દોરી શકાય :

એક કારખાનામાં છેલ્લા પાંચ વર્ષ દરમિયાન થયેલ ઉત્પાદન અને વેચાણ (લાખ રૂપિયા)ને પાસપાસેના સ્તંભો દ્વારા દર્શાવતી આકૃતિ



2.4.2.3 સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ (Simple divided Bar Diagram)

વિવિધ સ્થળો,વસ્તુઓ કે સમય માટે આપેલી માહિતીની પરસ્પર સંબંધિત પેટા-માહિતીને આકૃતિમાં દર્શાવવા માટે સ્તંભાકૃતિને પેટા માહિતી પ્રમાણે વિભાજિત કરતાં જે આકૃતિ મળે તેને સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ કહે છે. દા.ત., કોઈ એક કુટુંબના જીવનનિર્વાહ માટે ખોરાક, કપડાં, ભાડું, બળતણ અને પરચૂરણ ખર્ચની માહિતી આપેલી હોય તો કુલ ખર્ચ માટેનો એક સ્તંભ બનાવી તેને જુદાં જુદાં ચિહ્નથી પેટા ખર્ચની માહિતીને તે જ સ્તંભાકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવે તો તેને સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ કહે છે. ટૂંકમાં, જ્યારે કુલ માહિતી આપેલી હોય ત્યારે તે માહિતીના જુદા જુદા પેટાવિભાગોને રજૂ કરવા વિભાજિત સ્તંભાકૃતિનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ 27 : એક શહેરમાં રહેતાં બે કુટુંબોની માસિક ખર્ચની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. તેને યોગ્ય આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

માસિક ખર્ચ (₹)	ખોરાક	કપડાં	શિક્ષણ	બળતણ	ભાડું	અન્ય	કુલ
કુટુંબ A	8100	2700	2880	1800	1620	900	18,000
કુટુંબ B	7000	2000	2000	3000	4000	2000	20,000

કુટુંબના માસિક ખર્ચની જુદી જુદી વિગતોને આકૃતિમાં દર્શાવવાની હોવાથી સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દોરીશું. તેના માટે x–અક્ષ પર કુટુંબ A અને Bને યોગ્ય અંતરે દર્શાવીશું તેમજ y–અક્ષ પર ખર્ચને યોગ્ય સ્કેલ વડે દર્શાવતા નીચે પ્રમાણે વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દોરી શકાય :

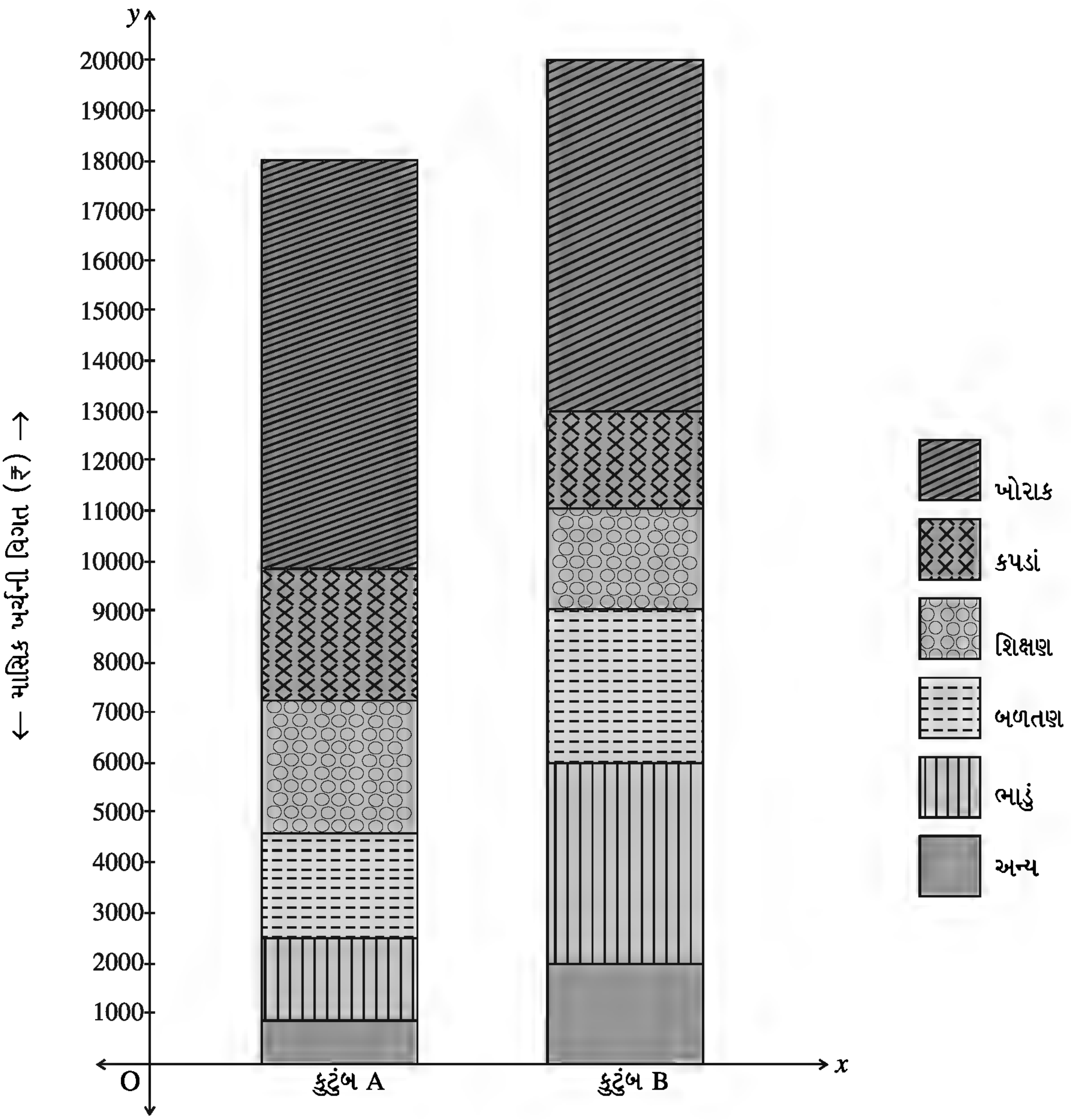
કુલ ખર્ચનો સ્તંભ દોર્યા પછી વિગતના ખર્ચને દર્શાવતી વિભાજન કરતી રેખા નીચે પ્રમાણે ગણી આલેખમાં દર્શાવવામાં આવે છે :

	કુટુંબ A		કુટુંબ B	
વિગત	ખર્ચ	વિભાજિત રેખા	ખર્ચ	વિભાજિત રેખા
ખોરાક	8100	18000 – 8100 = 9900	7000	20000 – 7000 = 13000
કપડાં	2700	9900 – 2700 = 7200	2000	13000 – 2000 = 11000
શિક્ષણ	2880	7200 – 2880 = 4320	2000	11000 – 2000 = 9000
બળતણ	1800	4320 – 1800 = 2520	3000	9000 – 3000 = 6000
ભાડું	1620	2520 – 1620 = 900	4000	6000 – 4000 = 2000
અન્ય	900	–	2000	–
કુલ	**18,000**	**–**	**20,000**	**–**

બે કુટુંબોના માસિક ખર્ચની વિગતવાર માહિતી દર્શાવતી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

પ્રમાણમાપ : x-અક્ષ : કુટુંબ

y–અક્ષ : 1 સેમી = ₹ 1000



2.4.2.4 ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ (Percentage divided Bar Diagram)

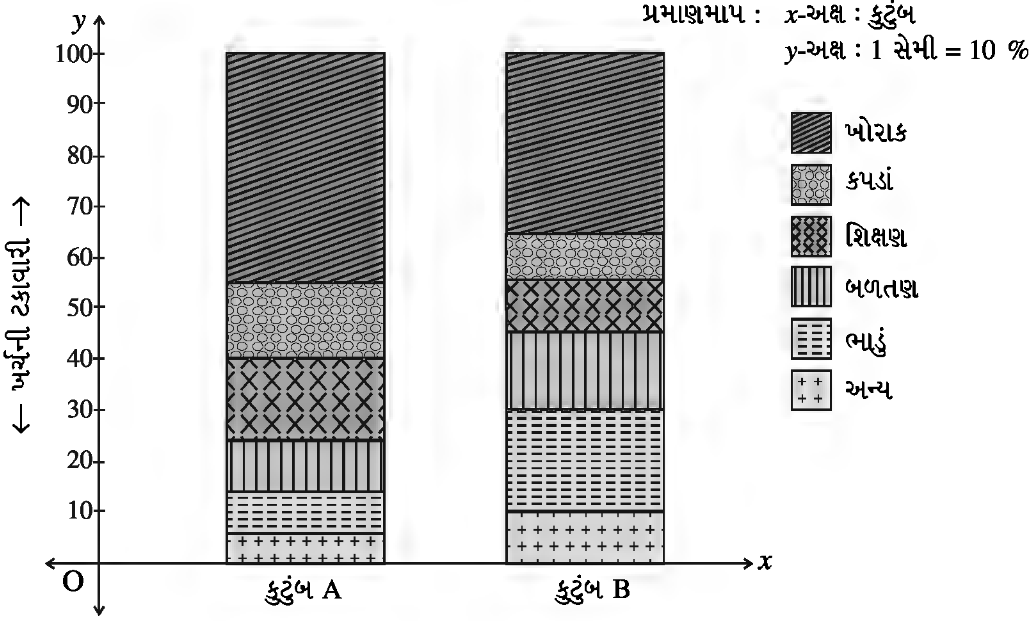
સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દ્વારા કુલ માહિતીની પેટામાહિતી આકર્ષક રીતે રજૂ થઈ શકે છે. પરંતુ પરસ્પર સંબંધિત પેટા માહિતીઓની સરખામણી થઈ શકતી નથી. આ ખામીને દૂર કરવા માટે પ્રતિશત કે ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિનો ઉપયોગ થાય છે. તેમાં કુલ માહિતીને 100 % ગણી પેટામાહિતીની ટકાવારી ગણી તેને સ્તંભાકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 28 : ઉદાહરણ 27માં આપેલ બે કુટુંબોના ખર્ચની માહિતીની સરખામણી કરવા માટે યોગ્ય આકૃતિ દર્શાવો.

કુટુંબના માસિક ખર્ચ વિશેની જુદી જુદી પેટામાહિતીઓની સરખામણી કરવા માટે આકૃતિ દોરવાની હોવાથી ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દોરીશું.

માસિક ખર્ચની વિગત	કુટુંબ A			કુટુંબ B		
	ખર્ચ	ટકાવારી	વિભાજિત રેખા	ખર્ચ	ટકાવારી	વિભાજિત રેખા
ખોરાક	8100	45	100 – 45 = 55	7000	35	100 – 35 = 65
કપડાં	2700	15	55 – 15 = 40	2000	10	65 – 10 = 55
શિક્ષણ	2880	16	40 – 16 = 24	2000	10	55 – 10 = 45
બળતણ	1800	10	24 – 10 = 14	3000	15	45 – 15 = 30
ભાડું	1620	9	14 – 9 = 5	4000	20	30 – 20 = 10
અન્ય	900	5	–	2000	10	–
કુલ	**18,000**	**100**	**–**	**20,000**	**100**	**–**

બે કુટુંબોના માસિક ખર્ચ દર્શાવતી ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ



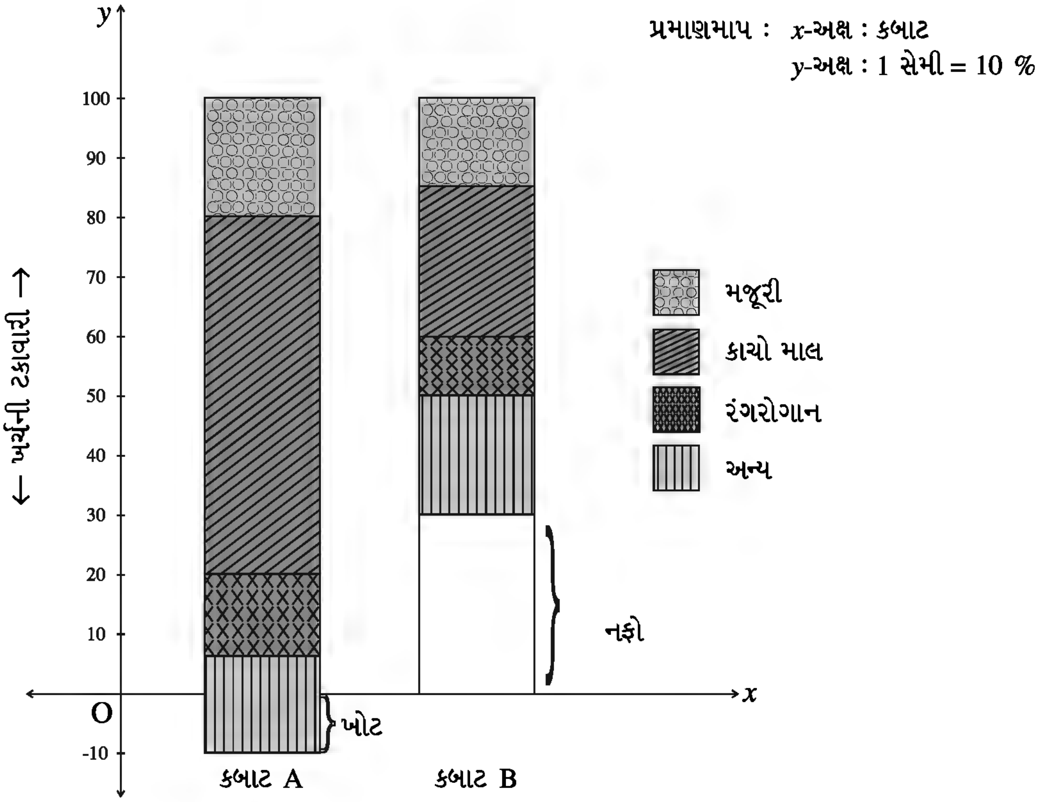
ઉદાહરણ 29 : એક કારખાનામાં બે પ્રકારના કબાટ A અને Bનું ઉત્પાદન કરી તેનું વેચાણ કરે છે. કબાટ A બહુ આકર્ષક નથી પરંતુ ટકાઉ છે તેથી તેનો ઉપયોગ ઔદ્યોગિક એકમોમાં થાય છે. જ્યારે કબાટ B આકર્ષક હોવાથી તેનો ઉપયોગ રહેઠાણમાં થાય છે. કબાટ Aની વેચાણકિંમત 5000 રૂપિયા અને કબાટ Bની વેચાણકિંમત 8000 રૂપિયા પ્રતિ કબાટ રાખવામાં આવી છે. બંને કબાટ બનાવવાના ખર્ચની વિગત નીચે મુજબ છે, તો કબાટના ખર્ચની વિગતો તેમજ તેના વેચાણથી થતા નફા-નુકસાન દર્શાવતી પ્રતિશત વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દોરો.

ખર્ચની વિગત	કબાટ A	કબાટ B
મજૂરી	1000	1200
કાચો માલ	3000	2000
રંગરોગાન	700	800
અન્ય	800	1600
કુલ	5500	5600

કબાટના વેચાણથી થતા નફા-નુકસાન દર્શાવતી આકૃતિ દોરવાની હોવાથી કુલ વેચાણકિંમતને 100 % લઈ કબાટના ખર્ચની વિગતોની ટકાવારી શોધી તેને વિભાજિત સ્તંભાકૃતિમાં દર્શાવીશું :

ખર્ચની વિગત	કબાટ A			કબાટ B		
	ખર્ચ	ટકાવારી	વિભાજિત રેખા	ખર્ચ	ટકાવારી	વિભાજિત રેખા
મજૂરી	1000	20	100 – 20 = 80	1200	15	100 – 15 = 85
કાચો માલ	3000	60	80 – 60 = 20	2000	25	85 – 25 = 60
રંગરોગાન	700	14	20 – 14 = 6	800	10	60 – 10 = 50
અન્ય	800	16	6 – 16 = –10	1600	20	50 – 20 = 30
પડતર કિંમત	5500	110	–	5600	70	–
વેચાણકિંમત	5000	100	–	8000	100	–
નફો/નુકસાન	**–500**	**–10**	**–**	**2400**	**30**	**–**

કબાટના ખર્ચની વિગત તેમજ કબાટોનાં વેચાણથી થતા નફા/નુકસાન દર્શાવતી પ્રતિશત વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ



2.4.3 દ્વિમાપી આકૃતિ (Two Dimensional Diagram)

એકમાપી આકૃતિઓ એક જ પરિમાણ રજૂ કરવા માટે વપરાય છે. તેમાં ફક્ત આકૃતિની ઊંચાઈ અથવા પહોળાઈમાંથી એકને જ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. જો માહિતીનો વ્યાપ મોટો હોય તો તેને આકૃતિમાં રજૂ કરવા માટે લંબાઈ અને પહોળાઈ બંને માપને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આમ, કુલ માપને આકૃતિનાં ક્ષેત્રફળ બરાબર ગણીને દોરવામાં આવે છે તેથી આવી આકૃતિઓમાં ચોરસ, લંબચોરસ, વર્તુળ, વૃતાંશ જેવી આકૃતિઓનો સમાવેશ કરી શકાય. અહીં આપણે વર્તુળ આકૃતિ અને વૃતાંશ આકૃતિનો જ અભ્યાસ કરીશું.

2.4.3.1 વર્તુળ આકૃતિ (Circle Diagram)

આંકડાકીય માહિતી ખૂબ જ મોટી હોય અને બે કે તેથી વધુ બાબતો માટે વસ્તુઓ, સ્થળ કે સમય અંગેની માહિતીને રજૂ કરવાની હોય ત્યારે આ આકૃતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ આકૃતિમાં વસ્તુના જથ્થાને વર્તુળનાં ક્ષેત્રફળ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. વસ્તુનો જથ્થો = વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

જ્યાં $\pi = 3.14$ અથવા $\frac{22}{7}$ અને r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

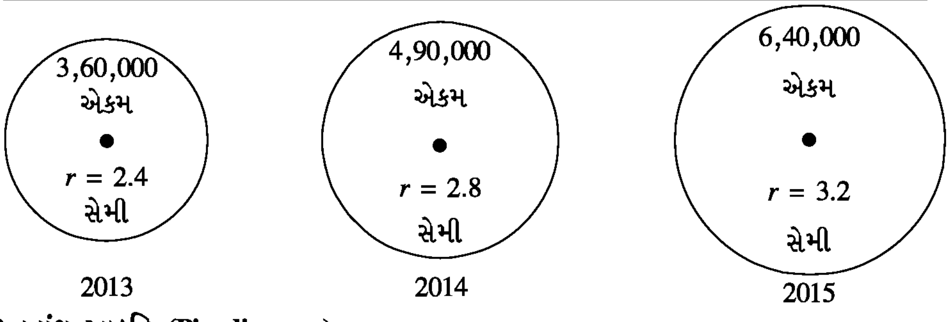
કોઈ પણ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ તેની ત્રિજ્યાના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે તેથી વર્તુળ આકૃતિ દોરવા માટે અલગ અલગ માહિતીની સંખ્યાત્મક કિંમતોનું વર્ગમૂળ શોધવામાં આવે છે અને તે વર્ગમૂળના માપની ત્રિજ્યા લઈ એક સીધી રેખા પર વર્તુળના કેન્દ્રબિંદુ આવે તેવા અલગ અલગ વર્તુળો સમાન અંતરે ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં દોરવામાં આવે છે. જ્યારે સમયની સાપેક્ષમાં માહિતી આપેલી હોય ત્યારે આપેલ સમય પ્રમાણે જ વર્તુળ દોરવામાં આવે છે. જો વર્તુળની ત્રિજ્યા મોટી હોય તો તેને કોઈ અચળાંક વડે ભાગીને અથવા જો ત્રિજ્યા નાની હોય તો કોઈ અચળાંક વડે ગુણીને વર્તુળાકૃતિ દોરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 30 : એક ઔદ્યોગિક એકમમાં ત્રણ વર્ષ દરમિયાન થયેલ ઉત્પાદન નીચે મુજબ છે, તેને વર્તુળાકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો :

વર્ષ	ઉત્પાદન (એકમમાં)
2013	3,60,000
2014	4,90,000
2015	6,40,000

આપેલી માહિતી સંખ્યાત્મક રીતે મોટી છે તેથી તેનું વર્ગમૂળ લઈ મળતી સંખ્યાને 250 વડે ભાગી વર્તુળની ત્રિજ્યા નક્કી કરીશું.

વર્ષ	ઉત્પાદન (એકમમાં)	વર્ગમૂળ	ત્રિજ્યા = વર્ગમૂળ/250
2013	3,60,000	600	2.4
2014	4,90,000	700	2.8
2015	6,40,000	800	3.2



2.4.3.2 વૃતાંશ આકૃતિ (Pie–diagram)

જ્યારે કોઈ વસ્તુ, સ્થળ કે સમય માટેની પેટામાહિતી સંખ્યાત્મક રીતે મોટી હોય ત્યારે તેને વિભાજિત સ્તંભાકૃતિની જગ્યાએ વૃતાંશ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આ આકૃતિમાં કુલ માહિતી દર્શાવવા માટે યોગ્ય માપની ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ માહિતીના પેટાવિભાગને વૃતાંશમાં દર્શાવવામાં આવે છે. આકૃતિમાં કુલ માહિતીના 360° ગણવામાં આવે છે અને તેને આધારે પ્રત્યેક પેટાવિભાગની માહિતીને અનુરૂપ વૃતાંશના અંશ શોધી તેને વર્તુળ પર રજૂ કરવામાં આવે છે.

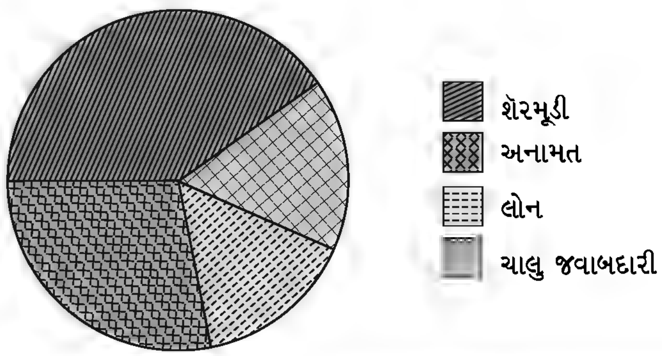
ઉદાહરણ 31 : કોઈ કંપનીના નાણાકીય વર્ષના અંતે તૈયાર કરાયેલ પાકા સરવૈયામાં નોંધાયેલ જવાબદારીઓ નીચે મુજબ છે, તેને વૃતાંશ આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો :

વિગત	શૅરમૂડી	અનામત	લોન	ચાલુ જવાબદારી	કુલ
જવાબદારી (₹)	12,00,000	8,00,000	4,00,000	4,80,000	28,80,000

દરેક જવાબદારીના વૃતાંશ નીચે પ્રમાણે ગણી શકાય :

વિગત	જવાબદારી	વૃતાંશ (ખૂણાનું માપ)
શૅરમૂડી	12,00,000	$\frac{1200000}{2880000} \times 360^\circ = 150^\circ$
અનામત	8,00,000	$\frac{800000}{2880000} \times 360^\circ = 100^\circ$
લોન	4,00,000	$\frac{400000}{2880000} \times 360^\circ = 50^\circ$
ચાલુ જવાબદારી	4,80,000	$\frac{480000}{2880000} \times 360^\circ = 60^\circ$
કુલ	28,80,000	360°

યોગ્ય ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ પર ઉપરની પેટામાહિતી નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય. નાણાકીય વર્ષને અંતે કંપનીની જવાબદારીઓ દર્શાવતી વૃતાંશ આકૃતિ.



પ્રવૃત્તિ

તમારા ઘરમાં દર મહિને ખોરાક, શિક્ષણ, બળતણ અને પરચૂરણ ખર્ચ વિશે માહિતી એકઠી કરી તેને વૃતાંશ આકૃતિમાં દર્શાવો.

ઉદાહરણ 32 : મધ્યમ વર્ગીય બે કુટુંબોની વાર્ષિક ખર્ચની વિગતો નીચે મુજબ છે, તેને વૃતાંશ-આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

વિગત	વાર્ષિક ખર્ચ (રૂપિયામાં)	
	કુટુંબ A	કુટુંબ B
ખોરાક	40000	50,000
કપડાં	10000	20,000
ભાડું	25000	30,000
શિક્ષણ	10000	32,000
પરચૂરણ	5000	28,000
કુલ	**90,000**	**1,60,000**

બંને કુટુંબો માટે અલગ-અલગ વર્તુળની ત્રિજ્યા તેમના કુલ ખર્ચના વર્ગમૂળના પ્રમાણમાં લઈશું તેમજ કુલ ખર્ચને 360° લઈ તેમના પેટાવિભાગ ખર્ચનો વૃતાંશ મેળવીશું.

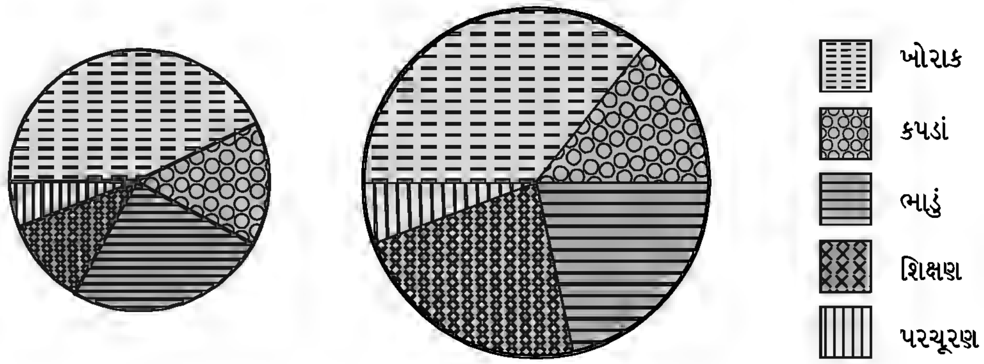
કુટુંબ A માટેની ત્રિજ્યા $= \frac{\sqrt{90000}}{100} = \frac{300}{100} = 3$ સેમી

કુટુંબ B માટેની ત્રિજ્યા $= \frac{\sqrt{160000}}{100} = \frac{400}{100} = 4$ સેમી

વાર્ષિક ખર્ચ (₹માં)

વિગત	કુટુંબ A		કુટુંબ B	
	ખર્ચ	અંશ	ખર્ચ	અંશ
ખોરાક	40,000	$\frac{40000}{90000} \times 360° = 160°$	50,000	$\frac{50000}{160000} \times 360° = 112.5°$
કપડાં	10,000	= 40°	20,000	= 45°
ભાડું	25,000	= 100°	30,000	= 67.5°
શિક્ષણ	10,000	= 40°	32,000	= 72°
પરચૂરણ	5000	= 20°	8000	= 63°
કુલ	90,000	= 360°	1,60,000	= 360°

બે કુટુંબોના વાર્ષિક ખર્ચની વિગતો દર્શાવતી વૃતાંશ આકૃતિ



પ્રવૃત્તિ

ઉપર દર્શાવેલ માહિતીને પ્રતિશત વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

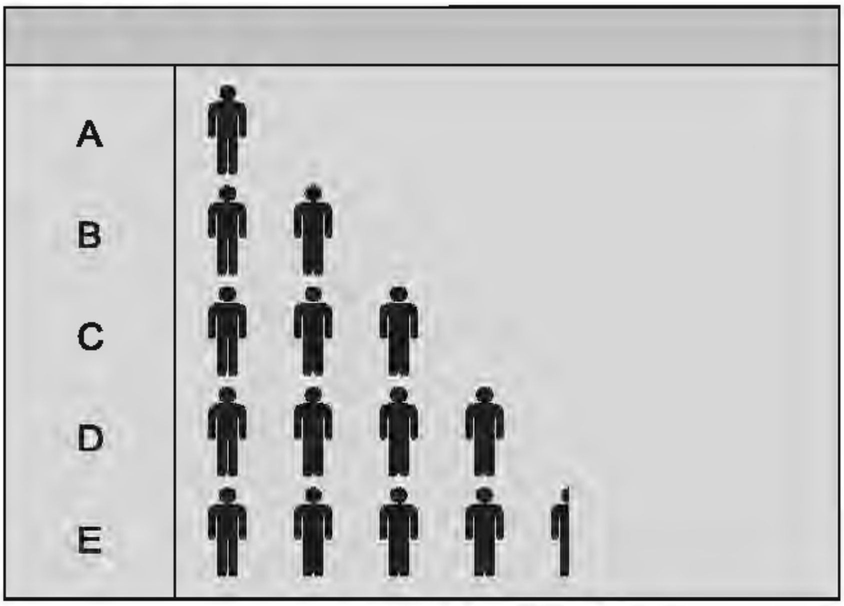
2.4.4 ચિત્રાકૃતિ (Pictogram)

જે પ્રકારની માહિતી આપેલી હોય તે મુજબનાં ચિત્રો દ્વારા માહિતીની રજૂઆત કરવામાં આવે તો તેને ચિત્રાકૃતિ કહેવામાં આવે છે. દા.ત., જો વસ્તીને લગતા આંકડા આપેલા હોય તો તેની રજૂઆત માનવચિત્રોવાળી આકૃતિ દ્વારા કરવામાં આવે છે. ચિત્રાકૃતિ લોકોનું ધ્યાન જલદી આકર્ષે છે તેમજ ઓછું ભણેલ વ્યક્તિઓ અને બાળકોને માહિતી સમજાવવા માટે આ રીત વધુ ઉપયોગી છે. વળી માહિતી ચિત્રો દ્વારા રજૂ થતી હોવાથી તેને ભાષાનો બાધ રહેતો નથી. જે માહિતીની ચિત્રાકૃતિ દોરવાની હોય તેના જથ્થાના પ્રમાણમાં યોગ્ય માપ લઈ ચિત્રો દોરવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિનો મુખ્ય ગેરફાયદો એ છે કે આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણમાં તેનો ઉપયોગ મર્યાદિત છે.

ઉદાહરણ 33 : પાંચ શહેરોની વસ્તીસંબંધી માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે તેને ચિત્રાકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો.

શહેર	A	B	C	D	E
વસ્તી	20,000	40,000	60,000	80,000	90,000

અહીં એક માનવચિત્ર = 20,000 વ્યક્તિઓ દર્શાવતાં.

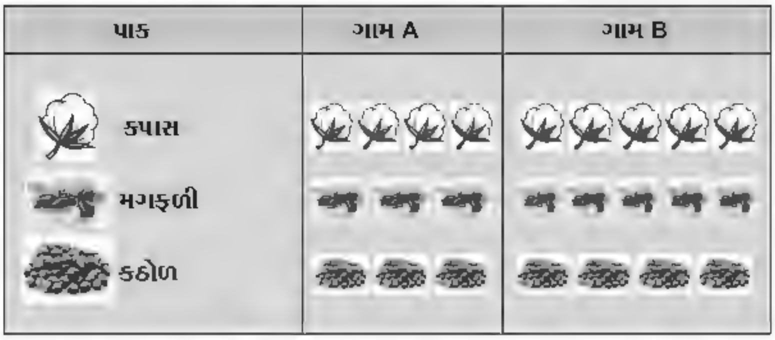


ઉદાહરણ 34 : એક વિસ્તારનાં બે ગામોના ખેતરમાં વાવેતર હેઠળની જમીનની વિગતો નીચે મુજબ છે, તો તેને ચિત્રાકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો.

પાક	વાવેતર હેઠળ જમીન (એકરમાં)	
	ગામ A	ગામ B
કપાસ	400	500
મગફળી	300	500
કઠોળ	300	400

પાકના પ્રકાર પ્રમાણે તેની ચિત્રાકૃતિ નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

બે ગામોમાં થયેલ વાવેતરની વિગત દર્શાવતી ચિત્રાકૃતિ.



અહીં વાવેતરના પ્રકારનો એક ચિત્ર એ 100 એકરમાં વાવેતર દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. કોઈ એક વર્ષ દરમિયાન સરકારના જુદા જુદા વિભાગોમાં કાર્ય કરતા કર્મચારીઓની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. તેને યોગ્ય આકૃતિમાં દર્શાવો.

વિભાગ	માર્ગ પરિવહન	રેલવે	આયકર	નાણાં ખાતું	આયોજનપંચ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	4000	6000	3000	2500	1500

2. કોઈ એક કંપનીનો વાર્ષિક નફો નીચે મુજબ છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિમાં દર્શાવો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (કરોડ)	10	5	–2	4	8	6

3. મુંબઈ શૅરબજારમાં પાંચ કંપનીઓના શૅરના ભાવ પંદર દિવસના અંતરાલમાં નીચે મુજબ હતા, તો તેને યોગ્ય આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો :

કંપની	A	B	C	D	E
શૅરનો બંધભાવ (₹)	40	20	100	80	30
15 દિવસ બાદ તે જ શૅરનો બંધભાવ (₹)	60	30	150	60	10

4. કોઈ એક વર્ષે પાંચ દેશોના જન્મદર અને મૃત્યુદરની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો.

દેશ	અમેરિકા	જાપાન	ભારત	જર્મની	યુ.કે.
જન્મદર	16.5	20.8	34.2	16.4	15.2
મૃત્યુદર	10.2	12.2	20.4	10.3	12.0

5. કોઈ બે અલગ-અલગ વિસ્તારમાં રહેતી વ્યક્તિઓની ઉંમર વિશે નીચે પ્રમાણેની માહિતી મળે છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો.

ઉંમર	15થી ઓછી (બાળક)	15થી 35 (યુવાન)	35થી 60 (વયસ્ક)	60થી વધુ (વૃદ્ધ)	કુલ
વિસ્તાર A	480	360	240	120	1200
વિસ્તાર B	350	250	200	200	1000

6. દાખલા નંબર 5માં આપેલી માહિતીને ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

7. કાર બનાવતી કંપનીએ ત્રણ વર્ષ દરમિયાન કરેલું ઉત્પાદન નીચે મુજબ છે, તેને વર્તુળ આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરો.

વર્ષ	2012	2013	2014
કારનું ઉત્પાદન	25,600	1,02,400	1,60,000

8. જુદાં જુદાં દૈનિકપત્રોની નકલમાં વેચાણની માહિતીની ટકાવારી નીચે મુજબ છે, આ માહિતીને વૃતાંશ આકૃતિથી દર્શાવો.

દૈનિકપત્ર	P	Q	R	S	કુલ
વેચાણની ટકાવારી	25	23	24	28	100

9. નીચે આપેલ માહિતીને ચિત્રાકૃતિથી દર્શાવો :

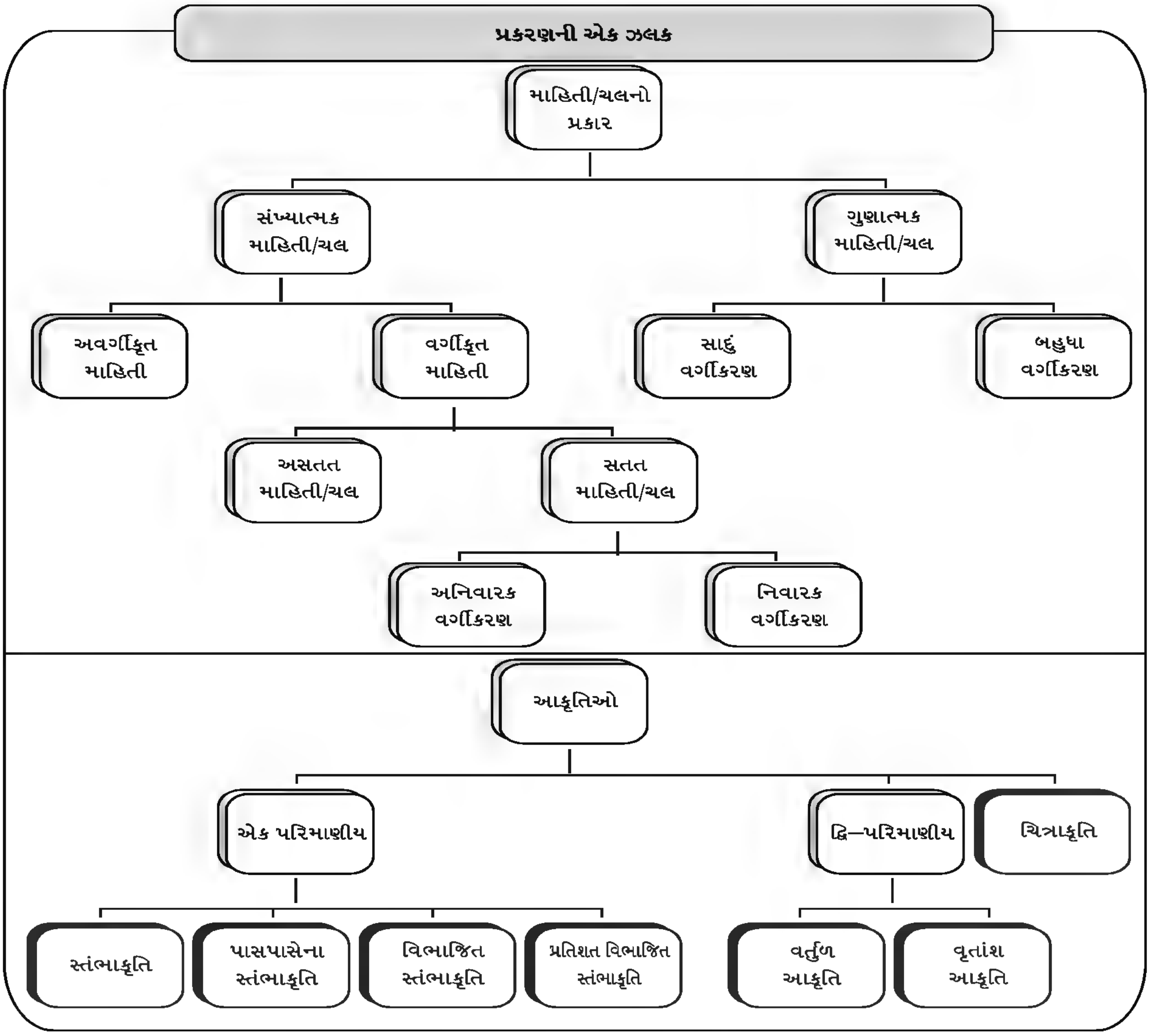
વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014
કેરીનું ઉત્પાદન (કિલોગ્રામ)	1,00,000	1,50,000	2,50,000	1,50,000	75,000

10. વીજળીના ગોળા બનાવતી બે જાણીતી કંપનીના ઉત્પાદનના આંકડા નીચે મુજબ છે. તેને ચિત્રાકૃતિમાં રજૂ કરો.

વર્ષ	**ગોળાનું ઉત્પાદન (લાખ એકમમાં)**	
	કંપની A	**કંપની B**
2012	50	100
2013	100	150
2014	175	200
2015	200	200

સારાંશ

- નિશ્ચિત સીમાઓ વચ્ચે કોઈ ચોક્કસ કિંમતો જ ધારણ કરી શકતા ચલને અસતત ચલ કહે છે.
- નિશ્ચિત સીમાઓ વચ્ચે કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકતા ચલને સતત ચલ કહે છે.
- અવર્ગીકૃત માહિતીને સંક્ષિપ્તમાં અને વ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવવાની ક્રિયાને વર્ગીકરણ કહે છે.
- ચલના મૂલ્યના પુનરાવર્તન દર્શાવતી સંખ્યાને તે ચલનાં મૂલ્યની આવૃત્તિ કહે છે.
- અસતત ચલનાં વિવિધ શક્ય મૂલ્યોને અનુરૂપ આવૃત્તિ દ્વારા દર્શાવતા કોષ્ટકને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.
- અવર્ગીકૃત માહિતીને ચલના મૂલ્યના વર્ગો અનુસાર આવૃત્તિ દર્શાવતા કોષ્ટકને સતત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.
- જ્યારે અસતત ચલની માહિતીનો વિસ્તાર મોટો હોય ત્યારે તે માહિતીને અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે.
- ચલની જાણીતી કિંમત કે વર્ગની આવૃત્તિ અને તેની આગળની બધી જ કિંમતો કે વર્ગોની આવૃત્તિના સરવાળાને સંચયી આવૃત્તિ કહે છે અને તેના વિતરણને સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.
- સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવતી વખતે અનિવારક વર્ગોને નિવારક વર્ગોમાં ફેરવવામાં આવે છે.
- નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગ સીમાઓ અને વર્ગ સીમાબિંદુઓ સમાન હોય છે.
- જ્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોય તો તેને માટે અનિયમિત વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવવામાં આવે છે.
- વર્ગીકૃત માહિતીને સરળ તેમ જ આકર્ષક રીતે રજૂ કરવા આલેખ દ્વારા દર્શાવાય છે.
- એકમાપી આકૃત્તિમાં માહિતીના એક જ ગુણધર્મને ધ્યાનમાં રાખીને આકૃતિ દોરવામાં આવે છે.
- માહિતીના એક લક્ષણને દર્શાવવા માટે સ્તંભાકૃતિ તેમજ એક કરતાં વધુ લક્ષણને દર્શાવવા માટે પાસપાસેના સ્તંભોવાળી સ્તંભાકૃતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- કુલ માહિતીના વિવિધ ભાગોને સ્તંભમાં દર્શાવવા માટે વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ તેમજ તેમની સરખામણી કરવા માટે ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- જ્યારે આપેલ માહિતી સંખ્યાત્મક રીતે મોટી હોય ત્યારે તેને વૃતાંશ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. વૃતાંશ આકૃતિનો ઉપયોગ વિશાળ માહિતીની સરખામણી કરવા માટે થાય છે.
- માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆતને ચિત્રાકૃતિ કહે છે.



સૂત્રોની યાદી

(1) માહિતીનો વિસ્તાર R = મહત્તમ કિંમત – લઘુતમ કિંમત

(2) વર્ગલંબાઈ $C \approx \dfrac{\text{માહિતીનો વિસ્તાર}}{\text{વર્ગોની સંખ્યા}}$

(3) વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $= \dfrac{\text{તે વર્ગની નીચલી સીમાની કિંમત} + \text{તેની ઉપરના વર્ગની ઉપલી સીમાની કિંમત}}{2}$

વર્ગનું ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ $= \dfrac{\text{તે વર્ગની ઉપલી સીમાની કિંમત} + \text{તેની પછીના વર્ગની નીચલી સીમાની કિંમત}}{2}$

(4) વર્ગનું મધ્યકિંમત $= \dfrac{\text{ઉપલી સીમાની કિંમત + નીચલી સીમાની કિંમત}}{2}$

(5) વર્ગનું નીચલી સીમા = મધ્યકિંમત – $\frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

વર્ગની ઉપલી સીમા = મધ્યકિંમત + $\frac{1}{2}$ (વર્ગલંબાઈ)

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્ન માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેનાં પૈકી કયો ચલ અસતત છે ?

(a) વ્યક્તિની ઊંચાઈ (b) વસ્તુનું વજન

(c) મેદાનનું ક્ષેત્રફળ (d) કુટુંબદીઠ બાળકીની સંખ્યા

2. નીચેનાં પૈકી સતત ચલ કયો છે ?

(a) પુસ્તકમાં પાનાદીઠ ભૂલની સંખ્યા (b) કારના ઉત્પાદનની સંખ્યા

(c) માર્ગ પરના અકસ્માતની સંખ્યા (d) વ્યક્તિની માસિક આવક

3. વસ્તુની દૈનિક માંગ વિશે આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીને વર્ગીકૃત કરવાની રીતને શું કહે છે ?

(a) ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ (b) સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ

(c) અવર્ગીકૃત વર્ગીકરણ (d) બહુવિધ વર્ગીકરણ

4. કોઈ એક વિસ્તારમાં રહેતા લોકોના વ્યવસાય અને તેમના અભ્યાસ વિશે આપેલ માહિતીને વર્ગીકૃત કરવાની રીતને શું કહે છે ?

(a) કોષ્ટક-રચના (b) સંખ્યાત્મક માહિતીનું વિતરણ

(c) અવર્ગીકૃત વિતરણ (d) અસતત આવૃત્તિ વિતરણ

5. સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગની વર્ગલંબાઈ એટલે શું ?

(a) બે ક્રમિક અધઃ સીમાબિંદુની સરેરાશ

(b) વર્ગની વર્ગસીમાઓની સરેરાશ

(c) વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ અને અધઃ સીમાબિંદુઓ વચ્ચેનો તફાવત

(d) વર્ગની ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ અને અધઃ સીમાબિંદુની સરેરાશ.

6. કોઈ એક અવર્ગીકૃત માહિતીનો વિસ્તાર 55 છે અને તેને છ સમાન વર્ગ લંબાઈવાળા વર્ગોમાં વિભાજિત કરવાની હોય તો વર્ગલંબાઈ કેટલી થાય ?

(a) 10 (b) 9 (c) 9.17 (d) 10.17

7. અનિવારક વર્ગો 10 - 19.5, 20 - 29.5, 30 - 39.5 છે, તો બીજા વર્ગની નિવારક સીમાઓ કઈ થશે ?

(a) 19.5 - 29.5 (b) 19.75 - 29.75 (c) 20 - 30 (d) 19 - 29

8. એક અસતત ચલની કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4 માટેની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે 2, 4, 6, 8, 14 છે, તો ચલની કિંમત 2ને અનુરૂપ 'થી વધુ' સંચયી આવૃત્તિ કેટલી થાય ?

(a) 28 (b) 12 (c) 34 (d) 6

9. સતત ચલ માટેના વર્ગો 0 - 9, 10 - 19, 20 - 29, 30 - 39 છે અને તેની આવૃત્તિ અનુક્રમે 10, 20, 40, 10 છે, તો સીમાબિંદુ 29.5ને અનુરૂપ 'થી ઓછી' સંચયી આવૃત્તિ કેટલી થાય ?

(a) 30 (b) 50 (c) 70 (d) 80

10. એક સતત માહિતી માટેના વર્ગો 1 - 1.95, 2 - 2.95, 3 - 3.95, 4 - 4.95, 5 - 5.95 છે, તો બીજા વર્ગની અધઃ સીમાબિંદુ કેટલી થાય ?
   (a) 1.995   (b) 2   (c) 2.975   (d) 1.975

11. આકૃતિઓ માટે નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાનો સાચાં છે ?
   વિધાન 1 : વિશાળ અને જટિલ માહિતીને સરળ અને આકર્ષક રીતે રજૂ કરવાની રીત એટલે આકૃતિ.
   વિધાન 2 : માહિતીનાં મુખ્ય લક્ષણો આપોઆપ સ્પષ્ટ બને તે રીતની રજૂઆત એટલે આકૃતિ.
   વિધાન 3 : માહિતીનો તુલનાત્મક અભ્યાસ સ્પષ્ટ કરતી રજૂઆત એટલે આકૃતિ.
   (a) ફક્ત વિધાન 1 સાચું   (b) ફક્ત વિધાન 2 અને 3 સાચાં
   (c) વિધાન 1, 2 અને 3 સાચાં   (d) ત્રણેય વિધાન ખોટા

12. એક સતત માહિતી માટેના વર્ગો 0 - 99, 100 - 199, 200 - 299, 300 - 399, 400 - 499 છે, તો બીજા વર્ગની મધ્યકિંમત કેટલી થાય ?
   (a) 149.5   (b) 150   (c) 199.5   (d) 99.5

13. કોઈ એક કંપનીમાં કામ કરતા કર્મચારીઓનો દરજ્જો, જાતિ તેમજ વૈવાહિક દરજ્જો દર્શાવતા કોષ્ટકને શું કહેવાય ?
   (a) સાદું વર્ગીકરણ   (b) સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ
   (c) જટિલ વર્ગીકરણ   (d) સાદું કોષ્ટક

14. વર્ગીકૃત માહિતીની પેટામાહિતીની રજૂઆત માટે કઈ આકૃતિ ઉપયોગી છે ?
   (a) સાદી સ્તંભાકૃતિ   (b) વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ
   (c) પાસપાસેની સ્તંભાકૃતિ   (d) ચિત્રાકૃતિ

15. વર્ગીકૃત માહિતીઓની પેટામાહિતીની સરખામણી માટે કઈ આકૃતિ ઉપયોગી છે ?
   (a) ચિત્રાકૃતિ   (b) વૃત્તાંશ આકૃતિ
   (c) સાદી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ   (d) વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. અસતત ચલની વ્યાખ્યા આપો.
2. સતત ચલની વ્યાખ્યા આપો.
3. વર્ગીકરણ એટલે શું ?
4. વર્ગીકરણના પ્રકારો જણાવો.
5. ચલના મૂલ્યની આવૃત્તિની વ્યાખ્યા આપો.
6. વર્ગની વર્ગલંબાઈ અને માહિતીનો વિસ્તાર આપેલ હોય ત્યારે વર્ગોની સંખ્યા શોધવાની રીત લખો.
7. અસમાન વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ ક્યારે બનાવવું જોઈએ ?
8. સંચયી આવૃત્તિની વ્યાખ્યા આપો.
9. અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ વ્યાખ્યાયિત કરો.
10. સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ વ્યાખ્યાયિત કરો.
11. વર્ગની મધ્યકિંમત શોધવાનું સૂત્ર જણાવો.
12. કોષ્ટક-રચનાની વ્યાખ્યા આપો.
13. બહુવિધ કોષ્ટકને વ્યાખ્યાયિત કરો.
14. કેવા કોષ્ટકને શ્રેષ્ઠ કોષ્ટક કહે છે ?

15. માહિતીના વર્ગીકરણનો મુખ્ય ગેરફાયદો શું છે ?
16. આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં આકૃતિઓનો મુખ્ય ઉદ્દેશ શું છે ?
17. આકૃત્તિઓના પ્રકાર જણાવો.
18. પાસપાસેના સ્તંભોની આકૃતિ ક્યારે દોરવામાં આવે છે ?
19. વિભાજિત સ્તંભાકૃતિ ક્યારે દોરવામાં આવે છે ?
20. ટકાવારી વિભાજિત સ્તંભાકૃતિનો મુખ્ય ઉદ્દેશ જણાવો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ગુણાત્મક માહિતી અને સંખ્યાત્મક માહિતીની વ્યાખ્યા આપો.
2. અસતત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.
3. સતત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.
4. નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા સમજાવો.
5. અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા સમજાવો.
6. અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણની વર્ગસીમાઓ પરથી વર્ગ સીમાબિંદુઓ શોધવાનાં સૂત્રો જણાવો.
7. નીચે જણાવેલ આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગોની મધ્યકિંમતો જણાવો.

વર્ગ	0 - 9	10 - 24	25 - 49	50 - 74	75 - 100
આવૃત્તિ	10	20	30	20	10

8. ઉપર જણાવેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ જણાવો :
9. નીચ આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો :

પ્રાપ્તાંક	10	20	30	40	50
આવૃત્તિ	10	30	30	20	10

10. એક વસ્તુની માંગને સારી, મધ્યમ અને ઓછી એમ ત્રણ વિભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે. એક વર્ષના અભ્યાસ દરમિયાન માલૂમ પડ્યું કે 22 અઠવાડિયા દરમિયાન માંગ મધ્યમ હતી જ્યારે 18 અઠવાડિયા દરમિયાન વસ્તુની માંગ ઓછી હતી. આ માહિતીને કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.
11. નીચે આપેલ કોષ્ટકની પૂર્તિ કરો :

	ગુણધર્મ A			ગુણધર્મ B			કુલ		
વર્ષ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ
2014	200		300	100		200			
2015		400		150	300		300		

12. નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ અને અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ વચ્ચેનો તફાવત આપો.
13. આકૃતિની મર્યાદાઓ જણાવો.
14. એકમાપી આકૃતિઓ એટલે શું ? તેના નામો આપો.
15. દ્વિમાપી આકૃતિઓ વિશે ટૂંકમાં જણાવો.

16. નીચે આપેલી માહિતીને સ્તંભાકૃતિમાં દર્શાવો :

(1)

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (કરોડ ₹)	3.5	4.2	5.8	7.4	10.2

(2)

વિદ્યાશાખા	વિનયન	વાણિજ્ય	વિજ્ઞાન	ઈજનેરી	અન્ય
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5900	10,200	6000	4500	8000

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં વર્ગીકરણની જરૂરિયાત શા કારણે છે ?
2. સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ યોગ્ય ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
3. ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ યોગ્ય ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
4. સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ વિશે ટૂંક નોંધ લખો.
5. સતત આવૃત્તિ-વિતરણની રચના માટેના મુદ્દાઓ ચર્ચો.
6. કોષ્ટક-રચના એટલે શું ? તેના ઉપયોગ લખો.
7. કોષ્ટક-રચનાના માર્ગદર્શક નિયમ જણાવો.
8. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો :

મધ્યકિંમત	250	350	450	550	650	750	કુલ
આવૃત્તિ	20	80	80	40	60	20	300

9. એક ઑફિસમાં કામ કરતા 40 કર્મચારીઓમાં 60 % સ્ત્રીઓ હતી અને બાકીના 40 % પુરુષો હતા. 50 % પુરુષો પરિણીત હતા. જ્યારે પરિણીત અને અપરિણીત સ્ત્રીઓનું પ્રમાણ 5:3 હતું. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં દર્શાવો.
10. 100 કામદારોના માસિક આવક વિશે નીચે માહિતી આપેલી છે તે પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

માસિક વેતન 'થી ઓછું'	2400	2900	3400	3900	4400	4900	5400	5900	6400
કામદારોની સંખ્યા	0	3	12	30	55	78	88	95	100

11. કોઈ એક પરીક્ષામાં 200 વિદ્યાર્થીઓના ગુણની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે તેના પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

ગુણ	10 - 100	20 - 100	30 - 100	40 - 100	50 - 100	60 - 100	70 - 100	80 - 100	90 - 100
વિદ્યાર્થીઓ	200	180	140	90	55	30	8	2	1

12. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મૂળ આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

મધ્યકિંમત	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5
આવૃત્તિ	12	18	16	22	14	10	6	2

13. અમદાવાદ શહેરમાં વ્યક્તિઓના પરિવહન માટે કુલ 1000 બસો છે. તેમાંથી 350 બસ BRTS તરીકે ઉપયોગ થાય છે, જ્યારે બાકીની AMTS તરીકે ઉપયોગી થાય છે. કુલ 400 વાતાનુકૂલિત બસમાંથી 250 BRTS બસ છે, તો આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

14. એક કૉલેજના કુલ 1500 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 900 છોકરાઓ હતા. તેમાંથી 250 છોકરાઓ વિજ્ઞાનપ્રવાહના હતા જ્યારે 250 છોકરીઓ વાણિજ્ય પ્રવાહમાં હતી. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.
15. આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં આકૃતિનું મહત્ત્વ સમજાવો.
16. એકમાપી આકૃતિઓ વિશે ટૂંક નોંધ લખો.
17. દ્વિમાપી આકૃતિ વિશે ટૂંક નોંધ લખો.
18. ચિત્રાકૃતિ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
19. બે જુદાં જુદાં રાજ્ય માટે ખેતીવાડીના ઉત્પાદનનો સૂચકઆંક નીચે મુજબ છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
રાજ્ય A	139	147	152	162	170
રાજ્ય B	110	115	125	140	150

20. પાંચ જુદા જુદા વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ (વર્ગ મીટરમાં) નીચે મુજબ છે, તો તે પરથી વૃતાંશ આકૃતિ દોરો.

વિસ્તાર	A	B	C	D	E
ક્ષેત્રફળ	5	8	29	44	71

21. જુદી જુદી ફેક્ટરીમાં થતા ઉત્પાદનની વિગત નીચે મુજબ છે. તેને યોગ્ય આકૃતિમાં રજૂ કરો.

ફેક્ટરી	P	Q	R
ઉત્પાદન (લાખ ₹)	256	576	1024

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. મોસમ દરમિયાન એક આંબાવાડીમાં જુદા-જુદા આંબાનાં ઝાડ પરથી 30 દિવસ દરમિયાન મળેલ કેરીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે, તો વર્ગોત્તર 5 લઈ આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો :

94	96	100	104	122	107	108	106	119	120
98	123	102	125	95	125	115	104	114	109
128	112	103	92	114	101	113	118	124	118

2. કોઈ એક દિવસ દરમિયાન એક શહેરના 40 રિક્ષાચાલકોએ કરેલ કમાણી (₹)માં આંકડા નીચે મુજબ છે. તેના પરથી એક વર્ગ 220–239 આવે તેમજ વર્ગલંબાઈ 20 હોય તેવું આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

285	215	200	225	255	250	235	242	298	312
328	294	266	335	330	270	315	275	245	265
210	235	275	305	332	355	307	230	348	350
310	290	264	228	236	336	356	322	215	345

3. શહેરના એક વિસ્તારમાં 50 રહેણાંકના એક મહિના દરમિયાન પાણીના વપરાશના એકમની માહિતી નીચે મુજબ છે, તો કોઈ એક વર્ગ 25 - 30 હોય તેવા નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.

24	34	41	55	45	25	40	38	40	44
28	35	40	48	35	44	27	57	42	30
28	26	42	49	47	33	52	52	28	34
36	30	44	33	31	30	39	25	24	47
28	36	32	57	25	29	35	44	50	56

4. કોઈ એક કંપનીમાં કામ કરતા 50 કર્મચારીઓના વજન (કિગ્રા)માં નીચે પ્રમાણે મળે છે. અંતિમ વર્ગ 85–90 હોય તેવું નિવારક આવૃત્તિ તૈયાર કરો.

82	75	73	70	84	79	79	77	80	66
70	70	72	62	64	80	85	64	75	65
66	75	71	82	69	70	72	80	66	70
79	69	80	63	66	75	68	78	86	66
85	66	69	85	70	60	70	75	79	86

5. નીચે જણાવેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી "થી ઓછું" અને "થી વધુ" પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો.

વર્ગ	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54	55 - 59	કુલ
આવૃત્તિ	3	8	10	5	15	8	1	50

6. એક કારખાનામાં કામ કરતા 30 કામદારોની 30 દિવસ દરમિયાન ગેરહાજરીની સંખ્યા નીચે મુજબ છે, તો યોગ્ય આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો અને તે પરથી "થી ઓછા" પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો.

0	1	4	5	4	0	0	2	3	4	1	2	6	4	0
3	2	3	2	1	1	0	2	1	1	3	3	5	1	3

7. એક શાળામાં કુલ 850 વિદ્યાર્થીઓ હતા જેમાં ધોરણ 10, 11 અને 12માં વિદ્યાર્થીઓનું પ્રમાણ 8:5:4 હતું. ધોરણ 10માં શાળામાં કુલ વિદ્યાર્થીઓનાં 30 % છોકરાઓ હતા. ધોરણ 11માં છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા સમાન હતી. જ્યારે ધોરણ 12માં છોકરાઓની સંખ્યા છોકરીઓની સંખ્યા કરતાં ત્રણ ગણી હતી. આ માહિતીને કોષ્ટકમાં દર્શાવો.

8. એક શાળામાં 2013ના વર્ષમાં કુલ 1200 વિદ્યાર્થીઓ ભણતા હતા. તેમાં કુલ 400 છોકરીઓ હતી અને તેમાંથી 50 છોકરીઓ હોસ્ટેલમાં રહેતી ન હતી. શાળાના કુલ 600 છોકરાઓ હોસ્ટેલમાં રહેતા હતા. 2014ના વર્ષમાં તે શાળામાં છોકરાઓની સંખ્યામાં 20 ટકાનો તેમજ છોકરીઓની સંખ્યામાં 30 ટકાનો વધારો થયો. આ વર્ષે 260 છોકરાઓ અને 100 છોકરીઓ હોસ્ટેલમાં રહેતા ન હતા. વર્ષ 2015માં તે શાળામાં 140 છોકરાઓ તેમજ 100 છોકરીઓનો ઉમેરો થયો અને આ તમામ નવા વિદ્યાર્થીઓ હોસ્ટેલમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓની સાથે જ રહેતા હતા. આ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

9. નીચેની માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો :

કોઈ એક બૅન્કમાં નોકરીની જાહેરાતના જવાબમાં કુલ 2000 અરજીઓ આવી હતી. તે પૈકી 50 % ઉમેદવારો સ્નાતક હતા, 40 % ઉમેદવારો અનુસ્નાતક હતા. જ્યારે બાકીના 10 % ઉમેદવારો અન્ય વ્યાવસાયિક લાયકાત ધરાવતા હતા. સ્નાતક ઉમેદવારો પૈકી 60 % પુરુષો હતા અને તેમાંથી 25 % પરિણીત હતા. 40 % સ્નાતક સ્ત્રી ઉમેદવાર પરિણીત હતી. અનુસ્નાતક ઉમેદવારો પૈકી 60 % પુરુષો હતા. તે પૈકી 40 % પરણેલા હતા, જ્યારે અનુસ્નાતક સ્ત્રીઓ પૈકી 50 % સ્ત્રીઓ પરણેલી હતી. વ્યાવસાયિક લાયકાત ધરાવતી 30 % સ્ત્રીઓ પૈકી 60 % સ્ત્રીઓ પરણેલી હતી. વ્યવસાયિક લાયકાત ધરાવતાં પરિણીત અને અપરિણીત પુરુષોની સંખ્યા સમાન હતી.

10. એક કારખાનામાં કામ કરતા કારીગરોનું વર્ષ, જાતિ અને રહેઠાણ અનુસાર સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

	સ્થાનિક			બિનસ્થાનિક			કુલ		
વર્ષ	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**	**પુરુષ**	**સ્ત્રી**	**કુલ**
2010	1200	300	1500	300	200	500	1500	500	2000
2015	2000	600	2600	300	100	400	2300	700	3000

કોષ્ટકને આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(1) પાંચ વર્ષના સમયગાળા દરમિયાન કારીગરોની સંખ્યામાં કેટલા ટકાનો વધારો થયો ?

(2) 2015ના વર્ષમાં બિનસ્થાનિક કારીગરોમાં કેટલા ટકાનો ઘટાડો થયો ?

(3) પાંચ વર્ષના સમયગાળામાં પુરુષ અને સ્ત્રીઓની સંખ્યામાં અનુક્રમે કેટલા ટકાનો વધારો થયો ?

11. એક મોબાઇલ કંપની બે પ્રકારના મોબાઇલનું ઉત્પાદન અને વેચાણ કરે છે. તેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે, તો તેને યોગ્ય આકૃતિમાં રજૂ કરો :

વિગત	મોબાઇલ A	મોબાઇલ B
કાચા માલનો ખર્ચ	5000	6000
છૂટા ભાગ જોડવાનો ખર્ચ	3000	3000
અન્ય ખર્ચ	4000	4500
કુલ ખર્ચ	12,000	13,500
વેચાણકિંમત	13,000	15,000

12. બે કુટુંબોના સરેરાશ માસિક ખર્ચની વિગતો (₹માં) નીચે મુજબ છે, તો તેને વૃત્તાંશ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

વિગતો	કુટુંબ A	કુટુંબ B
ખોરાક	20,000	16,000
બળતણ	5000	4000
પરિવહન	10,000	8800
મકાનભાડું	15,000	18,000
અન્ય	22,000	18,000

[redacted]

નીચેના ઉકેલ મેળવો :

1. આંખ માટેના લેન્સ બનાવતા એક ઉત્પાદન એકમમાં એક દિવસ દરમિયાન ઉત્પાદન થયેલ જથ્થામાંથી 25 લેન્સનો એક નિદર્શમાં લેન્સની જાડાઈ મિલીમિટરમાં નીચે પ્રમાણે મળે છે, તો આ માહિતીને સમાન વર્ગલંબાઈવાળા પાંચ વર્ગોમાં વિતરીત કરો.

1.518 1.509 1.527 1.505 1.520 1.511 1.518 1.522 1.528 1.528 1.520

1.520 1.514 1.508 1.525 1.506 1.519 1.523 1.521 1.517 1.514 1.515

1.516 1.521 1.507

જો ઉત્પાદન એકમના અધિકારી એવું નક્કી કરે કે 1.510 મિમિથી ઓછી તેમજ 1.525 મિમિ કે તેથી વધુ જાડાઈ ધરાવતા લેન્સને ખામીવાળા ગણવા તો તમે કરેલ વર્ગીકરણ પરથી નિદર્શમાં કેટલા ટકા ખામીવાળા એકમો હશે તે જણાવો.

2. શૅરબજારમાં એક શૅરના બંધભાવ 30 દિવસ માટે નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી એક વર્ગની વર્ગસીમા 18.5 - 20.5 હોય તેવું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો :

10.50	14.70	17.20	15.20	14.50	19.20	15.80	19.30
18.40	20.50	18.70	14.90	18.50	16.90	10.50	12.50
13.60	12.50	18.50	18.60	14.00	16.20	13.30	13.30
18.60	17.60	20.20	14.50	20.80	14.90		

આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(1) ચોથા વર્ગની મધ્યકિંમત લખો.

(2) શૅરનો બંધ ભાવ વધુમાં વધુ ₹ 16.50 હોય તેવા દિવસોની સંખ્યા કેટલી ?

(3) શૅરનો બંધ ભાવ ઓછામાં ઓછો ₹ 19.50 હોય તેવા દિવસોની સંખ્યા કેટલી ?

3. એક કારખાનાના માલિક દરરોજ ઘરવપરાશમાં ઉપયોગી હોય તેવા 50 મિક્સરનું ઉત્પાદન કરવાનું નક્કી કર્યું હતું. પરંતુ કારીગરોની સંખ્યામાં બદલાવને કારણે દરરોજ જુદી જુદી સંખ્યામાં મિક્સરનું ઉત્પાદન થતું હતું. 40 દિવસ દરમિયાન ઉત્પાદનમાં થતા ફેરફારો નિશ્ચિત સંખ્યા (100)ની સાપેક્ષમાં નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવ્યા હતા. તે પરથી કોઈ એક વર્ગની મધ્યકિંમત 3 હોય અને દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ 6 હોય તેવું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો તેમજ તેના પરથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ પણ બનાવો.

7	6	12	16	12	18	11	–5	10	3	10	7	8	
14	–10	16	–7	20	9	12	–2	0	5	–4	23	6	
–3	4	4	3	4	2	0	22	1	5	–1	5	19	6

4. એક શાળાના 30 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) માપતા નીચેની માહિતી મળે છે. તેના પરથી 6 વર્ગોમાં વર્ગીકૃત થયેલ અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો અને તે પરથી 'થી ઓછા' અને 'થી વધુ' પ્રકારનું આવૃત્તિ-વિતરણ પણ તૈયાર કરો.

141	145	152	150	150	159	148	163	162	151	155	148
145	162	161	152	168	153	149	148	162	158	157	160
153	149	154	165	141	149						

આ વિતરણનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(1) જો એન.સી.સી.ની પ્રવૃત્તિમાં ભાગ લેવા માટે 160 સેમી ઊંચાઈ જરૂરી હોય તો આમાંથી કેટલા વિદ્યાર્થીઓ તે પ્રવૃત્તિમાં ભાગ લઈ શકશે ?

(2) વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ 153 સેમીથી 163 સેમીની વચ્ચે હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(3) સૌથી ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતા ત્રીજા ભાગના વિદ્યાર્થીઓની મહત્તમ ઊંચાઈ શોધો.

5. એક યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓનું વિદ્યાશાખા અને જાતિ અનુસાર વર્ગીકરણ કરવામાં આવ્યું ત્યારે કુલ 40,000 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 60 % છોકરાઓ હતા. ઇજનેરી શાખામાં છોકરીઓની સંખ્યા વાણિજ્ય વિદ્યાશાખાની છોકરીઓ કરતાં ત્રણ ગણી હતી. દાક્તરી શાખામાં યુનિવર્સિટીની કુલ સંખ્યા 10 % છોકરીઓ અને 15 % છોકરાઓ હતાં. વિજ્ઞાનશાખામાં યુનિવર્સિટીની કુલ સંખ્યાનાં 20 % પૈકી છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યાના સાતમા ભાગની હતી જ્યારે વિનયન શાખામાં કુલ સંખ્યાના 7 % છોકરાઓ અને 17 % છોકરીઓ હતી. વાણિજ્ય શાખામાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા યુનિવર્સિટીની કુલ સંખ્યાના 3.75 % હતી. જેમાં છોકરાઓ અને છોકરીઓનું પ્રમાણ 3:7 હતું. ઉપર જણાવેલ માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં રજૂ કરો.

Prof. C. R. Rao
(1920)

Prof. C.R. Rao an Indian born, naturalized American, mathematician and statistician. He is currently professor emeritus at Penn State University and Research Professor at the University of Buffalo. Rao has been honoured by numerous colloquia, honorary degrees and festschrifts and was awarded the US National Medal of Science in 2002. The American Statistical Association has described him as "a living legend whose work has influenced not just statistics, but has had far reaching implications for fields as varied as economics, genetics, anthropology, geology, national planning, demography, biometry and medicine." The Times of India listed Rao as one of the top 10 Indian scientists of all time.

•

Statistics may rightly be called as a science of averages.

– Sir A. L. Bowley

3

મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ

(Measures of Central Tendency)

વિષયવસ્તુ :

3.1 અર્થ

3.2 સારી સરેરાશનાં લક્ષણો

3.3 મધ્યક

3.3.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.3.2 મિશ્ર મધ્યક અને ભારિત મધ્યક

3.3.3 ગુણોત્તર મધ્યક : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.4 સ્થાનીય સરેરાશનાં માપ : મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકો

3.4.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.5 બહુલક

3.5.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.5.2 આલેખની રીત

3.6 મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

3.1 અર્થ (Meaning)

ખૂબ જ વિસ્તૃત આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીને વર્ગીકરણ અથવા કોષ્ટક-રચના દ્વારા સુગઠિત કરી શકાય છે. તે આપેલ માહિતીનાં કેટલાંક લક્ષણો દર્શાવે છે. આપેલ માહિતી માટે દોરેલ આકૃતિઓ તથા આલેખો તેના વલણ તેમજ તરાહ (pattern) દર્શાવે છે. તે દૃશ્ય સ્વરૂપમાં માહિતીનું અર્થઘટન અને તુલના કરવા માટે મદદરૂપ થાય છે. વિશેષ આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ માટે આપણને વધુ સંક્ષિપ્ત અને સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિત્વની જરૂર પડે છે. આ બાબતને આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ધારો કે એક વ્યક્તિ તેના માસિક અંદાજપત્ર (budget)નું આયોજન કરે છે. દરેક વસ્તુ માટેનો ખર્ચ એવો ચલ છે જે વસ્તુના વપરાશનો જથ્થો અને તેની બજારકિંમત સાથે બદલાય છે. ધારો કે તેને દૂધ માટે ફાળવવાની રકમ નિશ્ચિત કરવાની છે. તેની પાસે પાછલા 10 મહિનાના દૂધના ખર્ચના આંકડા છે. તેના અંદાજપત્રમાં દૂધ પરના ખર્ચની રકમની જોગવાઈ કરવા માટે તેને આ માહિતી પરથી પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે એક કિંમત મેળવવી છે.

માહિતીના એકથી વધુ સમૂહો માટે પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતી કિંમતો તે સમૂહોની સરખામણી કરવા માટે અને આગળ જતાં ભવિષ્યના નિર્ણયો લેવા માટે ઉપયોગી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ તરીકે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ જોઈએ :

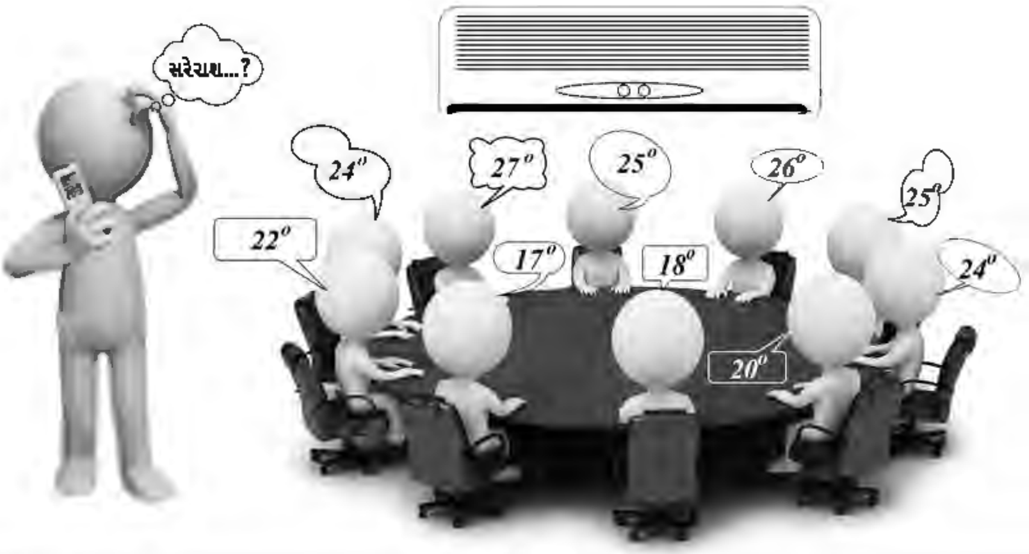
ધારો કે એક કંપનીને તેમણે ઉત્પાદિત કરેલી બે વસ્તુઓના વેચાણની સરખામણી કરવાની છે. વેચાણના આંકડા રોજબરોજ બદલાતા રહે છે. કંપની પાસે છેલ્લા 50 દિવસના વેચાણની માહિતી છે. આ માહિતીમાંથી મેળવેલ આવૃત્તિ-વિતરણો પરથી તે બે વસ્તુઓના વેચાણના તરાહની સરખામણી કરી શકાય છે પણ વિશેષ તારણો અને તુલના માટે તે કંપનીને તેમનાં બે ઉત્પાદનોના વેચાણની માહિતીનું વર્ણન કરતાં કોઈ ચોક્કસ માપોની જરૂર પડે છે.

જુદાં જુદાં આવૃત્તિ-વિતરણો માટે દોરેલા મોટા ભાગના આલેખોમાં આપણે એક સામાન્ય તરાહ જોઈ શકીએ કે ચલની કિંમતો કોઈ વિશિષ્ટ કેન્દ્રીય કિંમતની આસપાસ સંકલિત થાય છે. માહિતીના આ લક્ષણને મધ્યવર્તી સ્થિતિ (Central Tendency) કહેવાય છે. જે કેન્દ્રીય કિંમતની આસપાસ ચલની કિંમતો સંકલિત થાય છે તે કિંમતને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ (Measure of Central Tendency) અથવા સરેરાશ (Average) કહેવાય છે. આમ, સરેરાશને સમગ્ર માહિતી સમૂહના પ્રતિનિધિ તરીકે લઈ શકાય છે. આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ, અર્થઘટન તથા તુલના કરવા માટે તેનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

આ રીતે કોઈ એક સરેરાશ

- આપેલ માહિતીને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં રજૂ કરે છે.
- માહિતીનાં વિશિષ્ટ લક્ષણો દર્શાવે છે.
- બે અથવા તેથી વધુ માહિતી સમૂહોની તુલના કરવામાં મદદરૂપ થાય છે.

એકઠી કરેલ માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં જુદાં જુદાં માપ મેળવી શકાય છે. માહિતીનો પ્રકાર, સરેરાશનો હેતુ અને આગળ તેના ઉપયોગો પર સરેરાશની પસંદગી આધારિત હોય છે.



3.2 સારા મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપનાં લક્ષણો (Characteristics of Good Measure of Central Tendency)

નીચેનાં લક્ષણો ધરાવતી સરેરાશને આદર્શ સરેરાશ કહી શકાય છે :

(1) તે સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.

(2) તે સમજવા માટે તેમજ ગણતરી કરવા માટે સરળ હોવી જોઈએ.

(3) તે માહિતીનાં બધાં જ અવલોકનો પર આધારિત હોવી જોઈએ.

(4) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ હોવી જોઈએ.

(5) તે સ્થિર માપ હોવું જોઈએ. એટલે કે એક જ સમષ્ટિમાંથી સમાન કદના જુદા જુદા નિદર્શો લેવામાં આવે, તો દરેક નિદર્શમાંથી મળતી સરેરાશની કિંમત લગભગ સમાન હોવી જોઈએ.

(6) કેટલાક અતિ મોટાં અથવા અતિ નાનાં અવલોકનોની તેના પર વધુપડતી અસર ન થવી જોઈએ.

આપણે નીચેના મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોની ચર્ચા કરીશું જેનો માહિતીના પૃથક્કરણમાં વ્યાપક રીતે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(1) મધ્યક (2) મધ્યસ્થ અને અન્ય સ્થાનીય સરેરાશો (3) બહુલક.

3.3 સમાંતર મધ્યક (Arithmetic Mean) અથવા મધ્યક (Mean)

આ સૌથી વધુ પ્રચલિત સરેરાશ છે.

3.3.1 અર્થ (Meaning)

બધાં અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતી કિંમતને સમાંતર મધ્યક અથવા મધ્યક તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ચલ x ના સમાંતર મધ્યકને $\bar{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

મધ્યકની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :

ધારો કે માહિતીમાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે, તો સમાંતર મધ્યક $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n}$$

જ્યાં $\Sigma x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$ = અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ નો સરવાળો

અને n = અવલોકનોની સંખ્યા

નોંધ : દાખલાઓની ગણતરી કરતી વખતે સરળતા ખાતર આપણે અનુગ (Suffix) i ને મૂકીશું નહિ. જેમકે x_i ને બદલે x, d_i ને બદલે d અને f_i ને બદલે f મૂકીશું.

ઉદાહરણ 1 : નીચેની માહિતી એક ગેરેજમાં દરરોજ સમારકામ કરેલા સ્કૂટરોની સંખ્યા દર્શાવે છે. રોજના સમારકામ કરેલાં સ્કૂટરોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો :

7, 13, 4, 8, 6, 9, 10, 4

અહીં $n = 8$

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_8}{8}$$

$$= \frac{7 + 13 + 4 + 8 + 6 + 9 + 10 + 4}{8}$$

$$= \frac{61}{8}$$

$$= 7.625$$

$$\approx 7.63$$

આમ, આ ગેરેજમાં દરરોજના સમારકામ કરેલાં સ્કૂટરોનો મધ્યક 7.63 છે.

ટૂંકી રીત :

જો અવલોકનોની કિંમતો ખૂબ મોટી હોય તો ધારેલ મધ્યક (Assumed mean) A નો ઉપયોગ કરીને ગણતરી સરળ બનાવી શકાય છે. A કોઈ એક એવો અચલ છે જે બધાં અવલોકનોના મધ્યની આસપાસ હોય તેવું ઇચ્છનીય છે. અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માંથી ધારેલ મધ્યક A બાદ કરવામાં આવે છે અને તેવા તફાવતોને $d_1, d_2, ..., d_n$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ ...,\ d_n = x_n - A$$

મધ્યક $\bar{x}$ નીચે પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_i}{n}$$

જ્યાં A = ધારેલ મધ્યક

$\Sigma d_i = d_1 + d_2 + ... + d_n$

અને n = અવલોકનોની સંખ્યા

નોંધ : Aની કિંમતની જુદી જુદી પસંદગીથી મધ્યકની કિંમત બદલાતી નથી.

ઉદાહરણ 2 : એક જિલ્લાનાં 10 જુદાં જુદાં સ્થળો પર થયેલો વરસાદ (મિમિમાં) નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવેલ છે :

126, 110, 91, 115, 112, 80, 101, 93, 97, 113

વરસાદનો મધ્યક શોધો.

અહીં અવલોકનોની કિંમતો મોટી હોવાથી આપણે મધ્યકની ગણતરી ટૂંકી રીતે કરીશું. તેમાં ધારેલ મધ્યક A = 100 લઈશું. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો x અને તફાવતો $d = x - A$ દર્શાવેલ છે.

વરસાદ (મિમિ) x	126	110	91	115	112	80	101	93	97	113	કુલ
$d = x - A$, A=100	26	10	–9	15	12	–20	1	–7	–3	13	**38**

અહીં $n = 10$

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$

$= 100 + \frac{38}{10}$

$= 100 + 3.8$

$= 103.8$

આમ, વરસાદનો મધ્યક 103.8 મિમિ છે.

ઉદાહરણ 3 : 20 વ્યક્તિઓના જૂથમાં તેમના વજનનો મધ્યક 55 કિગ્રા મેળવવામાં આવ્યો હતો. ત્યાર બાદ માલૂમ પડ્યું કે તે પૈકી એકે તેણીનું વજન 45 કિગ્રા નોંધાવ્યું હતું, જે ખરેખર 54 કિગ્રા હતું. તેમના વજનનો સાચો મધ્યક શોધો.

અહીં $\bar{x} = 55$ અને $n = 20$

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 55$

$\therefore \quad \frac{\Sigma x}{20} = 55$

$\therefore \quad \Sigma x = 55 \times 20 = 1100$

આમ, અવલોકનોનો સરવાળો 1100 છે, જેમાં સાચી કિંમત 54 ને બદલે ખોટી કિંમત 45 નો સમાવેશ થયેલ છે.

અવલોકનોનો સાચો સરવાળો શોધવા માટે આપણે સરવાળાની ઉપર મેળવેલ કિંમતમાંથી ખોટું અવલોકન બાદ કરીશું અને સાચું અવલોકન ઉમેરીશું.

$\therefore$ સુધારેલ $\Sigma x = 1100 - 45 + 54$

$= 1109$

$\therefore$ સાચો મધ્યક $= \frac{\text{સુધારેલ } \Sigma x}{n}$

$= \frac{1109}{20}$

$= 55.45$

આમ, વજનનો સાચો મધ્યક 55.45 કિગ્રા છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે :

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે આપેલ માહિતીમાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ માટેની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે.

અહીં n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

x_1ની આવૃત્તિ f_1 છે એટલે કે અવલોકન x_1નું પુનરાવર્તન f_1 વખત થાય છે. બધાં x_1 અવલોકનોનો સરવાળો $f_1 \times x_1$ એટલે કે $f_1 x_1$ થશે. તે જ રીતે બધાં x_2 અવલોકનોનો સરવાળો $f_2 x_2$ થશે અને આ રીતે આગળ વધી શકાય.

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\text{બધાંઅવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$

$= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k}{n}$

$= \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$

જ્યાં $\Sigma f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_k x_k$

ઉદાહરણ 4 : એક વિસ્તારમાં કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

બાળકોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
કુટુંબોની સંખ્યા	4	8	23	8	6	3

અહીં આપણી પાસે ચલ x ની $k = 6$ કિંમતો છે.

મધ્યક શોધવાની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

બાળકોની સંખ્યા x	**કુટુંબોની સંખ્યા** f	fx
0	4	0
1	8	8
2	23	46
3	8	24
4	6	24
5	3	15
કુલ	$n = 52$	**117**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{117}{52}$

$= 2.25$

આમ, કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યાનો મધ્યક 2.25 છે.

ટૂંકી રીત :

અગાઉ અવર્ગીકૃત માહિતી માટે દર્શાવેલ પદ્ધતિ મુજબ ગણતરી સરળ બનાવવા માટે ધારેલ મધ્યક A ની અનુકૂળ કિંમત પસંદ કરી શકાય છે અને અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ના Aમાંથી તફાવતો મેળવી શકાય. ઉપરાંત, જો આ તફાવતોમાં કોઈ સામાન્ય અવયવ c હોય, તો બધા તફાવતોને c વડે ભાગવાથી આપણે ગણતરીને વધુ સરળ બનાવી શકીએ છીએ.

આમ, આપણને $d_1 = \frac{x_1 - A}{c}$, $d_2 = \frac{x_2 - A}{c}$, ..., $d_k = \frac{x_k - A}{c}$ ની કિંમતો મળશે.

હવે મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે :

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{n} \times c$

જ્યાં $\Sigma f_i d_i = f_1 d_1 + f_2 d_2 + ... + f_k d_k$

અને n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

નોંધ : A અને c ની કિંમતોની જુદી જુદી પસંદગીથી મધ્યકની કિંમત બદલાતી નથી.

ઉદાહરણ 5 : એક બસનો બે શહેરો વચ્ચેનો જુદા જુદા દિવસ લેવાયેલ પ્રવાસનો સમય (મિનિટોમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

સમય (મિનિટ)	110	113	120	122	126
દિવસોની સંખ્યા	7	17	11	10	5

પ્રવાસના સમયનો મધ્યક શોધો.

અહીં અવલોકનોની કિંમતો મોટી છે. આપણે ધારેલ મધ્યક $A = 120$ લઈશું.

Aમાંથી લીધેલ તફાવતો $110 - 120 = -10$, $113 - 120 = -7$, $120 - 120 = 0$, $122 - 120 = 2$, $126 - 120 = 6$ હશે.

તેમાં 1 સિવાય કોઈ અન્ય સામાન્ય અવયવ નથી. તેથી $c = 1$ લઈશું.

આમ, આપણે $d = \frac{x - A}{c} = \frac{x - 120}{1} = x - 120$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે થશે :

સમય (મિનિટ) x	**દિવસોની સંખ્યા** f	$d = x - A$, $A = 120$	fd
110	7	– 10	– 70
113	17	– 7	– 119
120	11	0	0
122	10	2	20
126	5	6	30
કુલ	$n = 50$		**– 139**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 120 + \frac{(-139)}{50} \times 1$

$= 120 - 2.78$

$= 117.22$

આમ, બસના પ્રવાસ માટેના સમયનો મધ્યક 117.22 મિનિટ છે.

ઉદાહરણ 6 : શહેરના એક વિસ્તારમાં એક વસ્તુની કિંમત દુકાને દુકાને બદલાય છે. તેની નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે. તે વિસ્તારમાં વસ્તુની કિંમતનો મધ્યક શોધો.

કિંમત (₹)	206	212	218	220	224	230
દુકાનોની સંખ્યા	5	8	9	14	3	1

અવલોકનોની કિંમતો મોટી હોવાથી આપણે મધ્યકની ગણતરી ટૂંકી રીતે કરીશું, તેમાં $A = 220$ પસંદ કરીશું. બધાં અવલોકનોના A માંથી લીધેલા તફાવતો –14, –8, –2, 0, 4, 10 હશે. આ તફાવતોમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 2$ છે.

તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-220}{2}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી :

કિંમત (₹) x	**દુકાનોની સંખ્યા** f	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 220, c = 2$	fd
206	5	–7	–35
212	8	–4	–32
218	9	–1	–9
220	14	0	0
224	3	2	6
230	1	5	5
કુલ	$n = 40$		**–65**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 220 + \frac{(-65)}{40} \times 2$

$= 220 + \frac{(-130)}{40}$

$= 220 - 3.25$

$= 216.75$

આમ, વસ્તુની કિંમતનો મધ્યક ₹ 216.75 છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જ્યારે આપણે માહિતીનું રૂપાંતર સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં કરીએ છીએ, ત્યારે દરેક આવૃત્તિ તે વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોની સંખ્યા દર્શાવે છે. પરંતુ તે વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોની કિંમતો આપણે જાણતા નથી. તેથી તે વર્ગની દરેક કિંમત માટે પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે તે વર્ગની મધ્યકિંમત લેવાય છે.

દાખલા તરીકે, ધારો કે અનિવારક વર્ગ 0 – 5 ની આવૃત્તિ 7 છે. આ 7 અવલોકનોની સાચી કિંમત આપણે જાણતા નથી તેથી તે વર્ગનાં બધાં જ 7 અવલોકનો માટે મધ્યકિંમત 2.5 ધારવામાં આવે છે, જ્યાં તેમની સાચી કિંમત 0 થી 5 સુધીની કોઈ પણ સંખ્યા હોઈ શકે છે.

દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતને ચલ xની કિંમતો તરીકે લઈને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે અગાઉ વર્ણન કરેલ રીતના ઉપયોગથી મધ્યક મેળવી શકાય.

આમ, મધ્યકની ગણતરી નીચે મુજબ થશે :

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{n} \times c$

જ્યાં A = ધારેલ મધ્યક

c = તફાવતો $x_i - A$ નો સામાન્ય અવયવ

$d_i = \frac{x_i - A}{c}$

f_i = મધ્યકિંમત x_i ધરાવતા વર્ગની આવૃત્તિ

$\Sigma f_i d_i = f_1 d_1 + f_2 d_2 + ... + f_k d_k$

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

ઉદાહરણ 7 : નીચેની માહિતી એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતા મજૂરોની માસિક આવક (₹ માં) દર્શાવે છે. તેમની આવકનો મધ્યક શોધો.

આવક (₹)	2000 - 3000	3000 - 4000	4000 - 5000	5000 - 6000	6000 - 7000	7000 - 8000	8000 - 9000
મજૂરોની સંખ્યા	2	3	7	15	25	16	12

આપણે સૌપ્રથમ દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત મેળવીએ.

મધ્યકિંમત = $\frac{\text{વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા + વર્ગની અધઃ સીમા}}{2}$

આ મધ્યકિંમતો 2500, 3500, 4500, 5500, 6500, 7500, 8500 છે. આપણે A = 5500 લઈશું.

તફાવતો $x - A$ અનુક્રમે –3000, –2000, –1000, 0,1000, 2000, 3000 થશે. આ તફાવતોમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ c = 1000 હોવાથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-5500}{1000}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

આવક (₹)	મજૂરોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 5500, c = 1000$	fd
2000 - 3000	2	2500	–3	–6
3000 - 4000	3	3500	–2	–6
4000 - 5000	7	4500	–1	–7
5000 - 6000	15	5500	0	0
6000 - 7000	25	6500	1	25
7000 - 8000	16	7500	2	32
8000 - 9000	12	8500	3	36
કુલ	$n = 80$			74

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$$= 5500 + \frac{74}{80} \times 1000$$

$$= 5500 + \frac{74000}{80}$$

$$= 5500 + 925$$

$$= 6425$$

આમ, આ મજૂરોની માસિક આવકનો મધ્યક ₹ 6425 છે.

ઉદાહરણ 8 : એક ઝાડ પરથી મળેલી કેરીઓનું વજન (ગ્રામમાં) નીચે પ્રમાણે છે. ઉપરાંત આ કેરીઓમાં ન્યૂનતમ વજન 410 ગ્રામ છે. કેરીઓના વજનનો મધ્યક શોધો.

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	420થી ઓછું	430થી ઓછું	440થી ઓછું	450થી ઓછું	460થી ઓછું	470થી ઓછું
કેરીઓની સંખ્યા	14	34	76	130	165	180

આ કોષ્ટકમાં 'થી ઓછી' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ દર્શાવેલ છે. ક્રમાનુસાર વર્ગોની આવૃત્તિઓ બાદ કરતા આપણે આ સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી દરેક વર્ગની આવૃત્તિ મેળવીશું. પ્રથમ વર્ગની અધઃસીમા 410 ગ્રામ આપેલ છે.

આમ, નીચે મુજબનું આવૃત્તિ-વિતરણ મળશે :

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	410 - 420	420 - 430	430 - 440	440 - 450	450 - 460	460 - 470
કેરીઓની સંખ્યા	14	20	42	54	35	15

વર્ગોની મધ્યકિંમતો 415, 425, ..., 465 છે.

જો આપણે $A = 435$ લઈએ તો મળતા તફાવતોની કિંમતો –20, –10, ..., 30માં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 10$ છે.

તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-435}{10}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે છે :

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	કેરીઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 435, c = 10$	fd
410 - 420	14	415	–2	–28
420 - 430	20	425	–1	–20
430 - 440	42	435	0	0
440 - 450	54	445	1	54
450 - 460	35	455	2	70
460 - 470	15	465	3	45
કુલ	$n = 180$			**121**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 435 + \frac{121}{180} \times 10$

$= 435 + \frac{1210}{180}$

$= 435 + 6.7222$

$= 441.7222$

≈ 441.72

આમ, આ કેરીઓના વજનનો મધ્યક 441.72 ગ્રામ છે.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર આપેલ દાખલા માટે $A = 415$ લો અને c ની યોગ્ય કિંમત લઈને મધ્યક શોધો.

હવે, $A = 440$ લો અને તફાવતો મેળવો. મહત્તમ સામાન્ય અવયવ c કેટલો છે ? A અને c ની આ કિંમતો લઈને ફરીથી મધ્યક મેળવો.

જુઓ કે મધ્યકના બધા જવાબો સમાન છે.

ઉદાહરણ 9 : કોઈ એક ઝોનમાં આવેલી જુદી જુદી કંપનીઓના વાર્ષિક વેચાણવેરાનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. કંપનીઓના વેચાણવેરાનો મધ્યક શોધો :

વેચાણવેરો (હજાર ₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 50	50 - 70
કંપનીઓની સંખ્યા	3	14	32	40	21

આ વિતરણમાં વર્ગલંબાઈ સમાન નથી. વર્ગોની મધ્યકિંમતો 5, 15, 25, 40, 60 છે. $A = 25$ લેતાં વિચલનોની કિંમતો –20, –10, 0, 15, 35 આવશે, જેમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 5$ છે. તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-25}{5}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વેચાણવેરો (હજાર ₹)	**કંપનીઓની સંખ્યા** f	**મધ્યકિંમત** x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 25, c = 5$	fd
0 - 10	3	5	–4	–12
10 - 20	14	15	–2	–28
20 - 30	32	25	0	0
30 - 50	40	40	3	120
50 - 70	21	60	7	147
	$n = 110$			**227**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 25 + \frac{227}{110} \times 5$

$= 25 + \frac{1135}{110}$

$= 25 + 10.3182$

$= 35.3182$

≈ 35.32

આમ, વેચાણવેરાનો મધ્યક ₹ 35.32 હજાર છે.

મધ્યકના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

નીચેના લાભોને કારણે મધ્યક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું સૌથી વધુ પ્રચલિત માપ છે.

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. તેનું એક નિશ્ચિત ગાણિતિક સૂત્ર છે.

(2) તે સમજવા માટે તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.

(3) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત છે.

(4) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ છે.

(5) તે પ્રમાણમાં વધુ સ્થિર માપ છે. આનો અર્થ એ કે એક જ સમષ્ટિમાંથી લીધેલા સમાન કદના નિદર્શોનાં મધ્યકોમાં પ્રમાણમાં ઓછું વિચલન હોય છે.

(6) મધ્યકની ગણતરીમાં બધાં અવલોકનોને સરખું મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે.

ગેરલાભ :

મધ્યકને મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે ઉપયોગમાં લેતા પહેલાં તેના નીચેના ગેરલાભ પણ જાણવા જોઈએ.

(1) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની અસર વધુ પડતી થાય છે.

(2) ખુલ્લા છેડાના વર્ગો (open ended classes) ધરાવતી માહિતીમાં તેની ગણતરી કરી શકાતી નથી.

(3) આલેખ વડે અથવા નિરીક્ષણ વડે તેની ચોક્કસ કિંમત મેળવી શકાતી નથી.

(4) જો અમુક અવલોકનો ખૂટતાં હોય તો મધ્યકની ચોક્કસ કિંમત શોધી શકાતી નથી.

(5) સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયેલી માહિતી માટે મધ્યક આપેલ માહિતીનું એટલું સારું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો નથી.

(6) જો અવલોકનોનું મહત્ત્વ જુદું જુદું હોય તો સરેરાશ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી.

મધ્યક માટેના કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) અવલોકનોના મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનોનો સરવાળો હંમેશાં શૂન્ય હોય છે. સાંકેતિક રીતે વિચલનોને $x_i - \bar{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેથી $\Sigma (x_i - \bar{x}) = 0$

દાખલા તરીકે 4 કિંમતો 1, 7, 5, 3 લઈએ.

તેમનો મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+7+5+3}{4} = \frac{16}{4} = 4$

નીચેના કોષ્ટકમાં મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનો દર્શાવેલ છે :

x	1	7	5	3	કુલ
$(x - \bar{x})$	–3	3	1	–1	$\Sigma (x - \bar{x}) = 0$

અન્ય કોઈપણ કિંમતમાંથી લીધેલ વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થશે નહિ.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર આપેલ અવલોકનોના 5 માંથી લીધેલાં વિચલનો શોધો. તેનો સરવાળો કેટલો છે ? શું તે શૂન્ય છે ?
હવે, મધ્યક સિવાયની તમારી પસંદગીની કોઈ પણ કિંમત લો અને ચકાસો કે આ કિંમતમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય નથી.

(2) જો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ માંથી દરેક અવલોકનને કોઈ શૂન્યેતર અચલ b વડે ગુણવામાં આવે અને તે ગુણાકારમાં અન્ય કોઈ અચલ a ઉમેરવામાં આવે તો આપણને અવલોકનોનો નવો સમૂહ મળશે. આપણે આ કિંમતોને $y_1, y_2, \ldots, y_n$ વડે દર્શાવીશું, જ્યાં $y_1 = bx_1 + a$, $y_2 = bx_2 + a$, ..., $y_n = bx_n + a$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ નો મધ્યક $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$

જો આપણને ચલ x નો મધ્યક $\bar{x}$ જ્ઞાત હોય, તો y નો મધ્યક $\bar{y}$ શોધવા માટે $\bar{y} = b\bar{x} + a$ આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

પ્રવૃત્તિ

તમારા ઘરના આજુબાજુના 10 પડોશીઓની ઉંમર x નોંધો અને તેનો મધ્યક $\bar{x}$ શોધો. તે બધાની બે વર્ષ પછી ઉંમર કેટલી હશે ? તમે ગણેલા આંકડા y નો મધ્યક $\bar{y}$ શોધો. અહીં દરેક વ્યક્તિની 2 વર્ષ પછીની ઉંમર $y = x + 2$ થશે. જુઓ કે $\bar{y} = \bar{x} + 2$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. એક નર્સરીમાં વાવેલા છોડની સપ્તાહદીઠ વૃદ્ધિ (સેમીમાં) નીચે પ્રમાણે છે :
   1.0, 3.2, 1.4, 1.9, 2.4, 1.6, 1.4, 2.1, 1.3, 1.5
   છોડની વૃદ્ધિનો મધ્યક શોધો.
2. એક રીલે રેસમાં 4 સ્પર્ધકોની ઉંમરનો મધ્યક 24 વર્ષ ગણવામાં આવ્યો હતો. પાછળથી માલૂમ પડ્યું હતું કે એક સ્પર્ધકની ઉંમર ખરેખર 27 વર્ષ હતી તે 25 વર્ષ એમ ખોટી નોંધવામાં આવી હતી. જો ઉંમરનો મધ્યક 25 વર્ષથી વધારે હોય તો સ્પર્ધામાં ભાગ લઈ શકે નહિ એવો નિયમ હોય તો તેઓ ઉંમરનો સુધારો કર્યા પછી પણ સ્પર્ધામાં ભાગ લઈ શકશે ?
3. એક મોટા જથ્થામાંથી પસંદ કરેલ વિવિધ સ્ક્રૂના વ્યાસ (મિમિમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. સ્ક્રૂના વ્યાસનો મધ્યક શોધો.

સ્ક્રૂનો વ્યાસ (મિમિ)	30	35	40	45	50	55
સ્ક્રૂની સંખ્યા	4	10	15	8	5	3

4. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહના એક કસોટીના ગુણ નીચે મુજબ છે. વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	5	12	16	11	5	4

5. એક મોબાઇલ ધારકના નોંધાયેલા 254 કૉલની વાતચીતના સમય (Talk time)ની માહિતી નીચે પ્રમાણે મળે છે. તેના વાતચીતના સમયનો મધ્યક શોધો.

વાતચીતનો સમય (મિનિટ)	4થી ઓછી	8થી ઓછી	12થી ઓછી	16થી ઓછી	20થી ઓછી
કૉલની સંખ્યા	20	42	57	65	70

6. 50 પેઢીના છેલ્લા વર્ષમાં થયેલા નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત નીચે આપેલી છે. નફાનો મધ્યક શોધો.

નફો (લાખ ₹)	0–7	7–14	14–21	21–28	28–35
પેઢીની સંખ્યા	4	9	18	12	7

7. એક વસ્તુની વિવિધ દિવસોની માંગનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. માંગનો મધ્યક શોધો.

માંગ (એકમો)	5–14	15–24	25–34	35–49	50–64	65–79
દિવસોની સંખ્યા	4	17	19	22	18	10

*

3.3.2 મિશ્ર મધ્યક અને ભારિત મધ્યક :

મિશ્ર મધ્યક (Combined Mean) :

જો આપણને બે કે તેથી વધુ સમૂહોનાં મધ્યકો જ્ઞાત હોય તો આપણે તેના સંયુક્ત સમૂહનો મધ્યક મેળવી શકીએ છીએ. આવી કિંમતને મિશ્ર મધ્યક કહેવાય છે. તેને ($\bar{x}_c$) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ધારો કે n_1, n_2,.....n_k અવલોકનો ધરાવતા k સમૂહોના મધ્યકો અનુક્રમે, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ છે.

મિશ્ર મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$$

ઉદાહરણ **10. એક ફેક્ટરી માલિકને ખબર છે કે જાન્યુઆરીથી માર્ચ સુધીના માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક 350 એકમો છે. એપ્રિલ થી ઑગસ્ટ માટે તે 254 એકમો છે અને સપ્ટેમ્બરથી ડિસેમ્બર માટે તે 315 એકમો છે. તે વર્ષ માટે માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક શોધો.**

અહીં n_1 = 3 માસ, n_2 = 5 માસ, n_3 = 4 માસ,

$\bar{x}_1 = 350$, $\bar{x}_2 = 254$ $\bar{x}_3 = 315$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

$$= \frac{3(350) + 5(254) + 4(315)}{3 + 5 + 4}$$

$$= \frac{1050 + 1270 + 1260}{12}$$

$$= \frac{3580}{12}$$

$$= 298.3333$$

$$\approx 298.33$$

આમ, તે વર્ષ માટે માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક 298.33 એકમો છે.

ઉદાહરણ 11. એક ઑફિસમાં સ્ત્રીઓ અને પુરુષ કર્મચારીઓનું પ્રમાણ 1:2 છે. સ્ત્રીઓ અને પુરુષોની ઉંમરના મધ્યકો અનુક્રમે 34 વર્ષ અને 37 વર્ષ હોય, તો ઑફિસના બધા કર્મચારીઓની ઉંમરનો મધ્યક શોધો.

ધારો કે, સ્ત્રીઓની સંખ્યા = a છે. સ્ત્રી અને પુરુષ કર્મચારીઓની સંખ્યાનું પ્રમાણ 1:2 હોવાથી પુરુષોની સંખ્યા = $2a$ થશે. $\bar{x}_1 = 34$ અને $\bar{x}_2 = 37$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{a(34) + 2a(37)}{a + 2a}$$

$$= \frac{34a + 74a}{3a}$$

$$= \frac{108a}{3a}$$

$$= 36$$

આમ, ઑફિસના બધા કર્મચારીઓની ઉંમરનો મધ્યક 36 વર્ષ છે.

ઉદાહરણ 12 : એક ક્રિકેટ મૅચમાં એક ટીમને મૅચ જીતવા માટે 20 ઓવરમાં 5.25 રનરેટથી સ્કોર કરવો પડે તેમ છે. 13 ઓવરના અંતે રનરેટ 5.1 છે. મેચ જીતવા માટે બાકીની ઓવરોમાં ઓછામાં ઓછો રનરેટ કેટલો હોવો જોઈએ ?

આપણે જાણીએ છીએ કે રનરેટ $= \frac{\text{કુલ રનની સંખ્યા}}{\text{કુલ ઓવરની સંખ્યા}}$

= રનનો મધ્યક

આમ, રનરેટને રનના મધ્યક તરીકે લઈશું.

અહીં $n_1 = 13$, $n_2 = 7$ $\quad \bar{x}_c$ = કુલ 20 ઓવરનો રનરેટ

$= 5.25$

$\bar{x}_1$ = પ્રથમ તેર ઓવરનો રનરેટ = 5.1

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$\therefore \quad 5.25 = \frac{13(5.1) + 7\bar{x}_2}{13 + 7}$$

$$\therefore \quad 5.25 = \frac{66.3 + 7\bar{x}_2}{20}$$

$$\therefore \quad 5.25 \times 20 = 66.3 + 7\bar{x}_2$$

$$\therefore \quad 105 = 66.3 + 7\bar{x}_2$$

$$\therefore \quad 7\bar{x}_2 = 105 - 66.3 = 38.7$$

$$\therefore \quad \bar{x}_2 = \frac{38.7}{7}$$

$$= 5.5286$$

$$\approx 5.53$$

આમ, મેચ જીતવા માટે તે ટીમનો છેલ્લી 7 ઓવરોમાં ઓછામાં ઓછો 5.53 રનરેટ હોવો જોઈએ.

ભારિત મધ્યક (Weighted Mean) :

આપણે કહ્યું કે માહિતીનાં બધાં અવલોકનોનું મહત્ત્વ સરખું ન હોય તો સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી. આવી પરિસ્થિતિમાં એક વિશેષ મધ્યક શોધવામાં આવે છે જેને ભારિત મધ્યક કહેવાય છે. ભારિત મધ્યકને $\bar{x}_w$ વડે દર્શાવાય છે. દરેક અવલોકનને તેના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં એક સંખ્યાત્મક કિંમત આપવામાં આવે છે જેને ભાર (Weight) કહેવાય છે. સૌથી વધુ મહત્ત્વ ધરાવતા અવલોકનને મહત્તમ ભાર અપાય છે.

ધારો કે અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ ને આપવામાં આવેલા ભાર અનુક્રમે $w_1, w_2, ... , w_n$ છે.

તો ભારિત મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે થશે :

ભારિત મધ્યક $\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$

$= \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$

અહીં $\Sigma w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n$

અને $\Sigma w_i = w_1 + w_2 + ... + w_n$

= ભારનો સરવાળો

ઉદાહરણ 13 : એક વિદ્યાર્થીને થિયરી પેપરમાં 35 ગુણ, પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષામાં 15 ગુણ અને મૌખિક પરીક્ષામાં 5 ગુણ મળ્યા છે. તે શાળામાં આ પ્રકારની પરીક્ષાઓને અનુક્રમે 4, 2 અને 1 ભાર આપવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીના ગુણનો ભારિત મધ્યક શોધો.

અહીં $x_1 = 35,\quad x_2 = 15,\quad x_3 = 5$ અને

$w_1 = 4,\quad w_2 = 2,\quad w_3 = 1$

ભારિત મધ્યક $\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3}{w_1 + w_2 + w_3}$

$= \frac{4(35) + 2(15) + 1(5)}{4 + 2 + 1}$

$= \frac{140 + 30 + 5}{7}$

$= \frac{175}{7}$

$= 25$

આમ, વિદ્યાર્થીના ગુણનો ભારિત મધ્યક 25 ગુણ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. એક ફેક્ટરીના 75 કુશળ કારીગરોને આપવામાં આવતા દૈનિક વેતનનો મધ્યક ₹ 280 છે, જ્યારે 125 બિનકુશળ કારીગરોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક ₹ 150 છે. બધા કારીગરોના વેતનનો મધ્યક શોધો.

2. નીચેની માહિતી પરથી ભાવ આધારિત ટકાવારી ફેરફારોનો ભારિત મધ્યક શોધો :

ખોરાકની વસ્તુ	ચોખા	ઘઉં	ચા	ખાંડ	કઠોળ
ભાર	7	10	5	8	2
ભાવનો ટકાવારી ફેરફાર	134	125	115	97	120

3. એક ઑફિસમાં કામ કરતા 2 ઑફિસર, 10 ક્લાર્ક અને 3 પટાવાળા સ્ટાફ પિકનિક માટે ફાળો આપે છે. દરેક વ્યક્તિનો ફાળો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઑફિસર	ક્લાર્ક	પટાવાળા
₹ 1000	₹ 500	₹ 200

ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને વ્યક્તિદીઠ ફાળાનો મધ્યક શોધો.

4. એક વિદ્યાર્થીને 7 થિયરી પેપરમાં મળતા ગુણનો મધ્યક 62 છે. 3 પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષાઓમાં તેના ગુણનો મધ્યક કેટલો હોવો જોઈએ કે જેથી સંપૂર્ણ પરીક્ષામાં તેના ગુણનો મધ્યક 68 થાય ?
(પ્રત્યેક થિયરી પેપર અને પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષાના ગુણ સરખા છે.)

*

3.3.3 ગુણોત્તર મધ્યક (Geometric Mean) :

ધારો કે આપણે સમય સાથે બદલાતા કોઈ ચલનો અભ્યાસ કરીએ છીએ. જો આપણે ચલના ફેરફારોનો સરેરાશ દર શોધવો હોય, તો સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી.

આપણે એક ઉદાહરણ વડે આ બાબત સમજીએ.

ધારો કે એક વસ્તુની કિંમત ₹ 200 છે. જો એક મહિના પછી ભાવમાં 50 % વધારો અને બીજા મહિના પછી 25 % વધારો થયો હોય, તો ક્રમાનુસાર આવતા મહિનાઓમાં તેનો ભાવ $200 \times \frac{150}{100} = 300$ અને $300 \times \frac{125}{100} = 375$ ₹ થશે.

જો આપણે બે મહિનાના ટકાવારી ભાવની સરેરાશ સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને મેળવીએ તો તે $\frac{150+125}{2} = 137.5$ થશે.

આ સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને આપણે 2 મહિના પછીનો ભાવ શોધીએ તો તે $200 \times \frac{137.5}{100} \times \frac{137.5}{100} = 378.18$ ₹ થશે જેની કિંમત અગાઉ ગણેલ ₹ 375 જેટલી નથી.

અહીં એક બીજી સરેરાશ વધુ યોગ્ય નીવડે છે જેને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે.

n ધન અવલોકનોના ગુણાકારના n મા મૂળને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે અને તેને G વડે દર્શાવાય છે.

આમ, n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માટે

ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times ... \times x_n}$

ઉપરના ઉદાહરણ માટે આપણે ગુણોત્તર મધ્યક શોધીશું. 150 અને 125 આ બે સંખ્યા જે ટકાવારી ભાવ દર્શાવે છે તેનો $G = \sqrt{150 \times 125} = 136.93$ થાય છે.

હવે આ સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને બે મહિના પછીની વસ્તુની કિંમત $200 \times \frac{136.93}{100} \times \frac{136.93}{100} = 375$ ₹ થશે જે આપણે અગાઉ ગણેલ કિંમત જેટલી છે.

નોંધ : જો આપેલ ચલમાં p % વધારો થયો હોય તો વધેલી કિંમત ટકાવારીમાં $(100 + p)$ લખીશું જ્યારે આપેલ કિંમત p % ઘટતી હોય તો ઘટેલી કિંમત ટકાવારીમાં $(100 - p)$ લખીશું.

દાખલા તરીકે જો કોઈ મહિનામાં વસ્તુની કિંમત 20 % ઘટી હોય તો તે માસને અંતે તેની કિંમત ટકાવારીમાં $(100 - 20) = 80$ લેવાશે.

નોંધ : આપેલ અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માટે સમાંતર મધ્યકની કિંમત હંમેશાં ગુણોત્તર મધ્યક જેટલી અથવા તેનાથી વધુ હોય છે. એટલે કે $\bar{x} \geq G$

જો બધાં અવલોકનોની કિંમત સરખી હોય તો જ $\bar{x} = G$ થાય છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વિસ્તારની વસ્તીમાં ચાર વર્ષોમાં અનુક્રમે 15 %, 18 %, 13 %, 20 % વધારો થયો છે. વસ્તીના વધારાની સરેરાશ મેળવો.

અહીં, વસ્તીના વધારાની કિંમતો ટકાવારીમાં આપી હોવાથી આપણે સરેરાશ માટે ગુણોત્તર મધ્યક વાપરીશું.

વસ્તીના વધારાની ટકાવારી ધ્યાનમાં લેતા આપણને અવલોકનો નીચે મુજબ મળશે.

$x_1 = 100 + 15 = 115$ $\quad x_2 = 100 + 18 = 118,$

$x_3 = 100 + 13 = 113$ $\quad x_4 = 100 + 20 = 120$

$$G = \sqrt[4]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4}$$

$$= \sqrt[4]{115 \times 118 \times 113 \times 120}$$

$$= \sqrt[4]{184009200}$$

$$= \sqrt{13564.9991}$$

$$= 116.4689$$

$$\approx 116.47$$

આમ, આ ચાર વર્ષમાં થયેલ વસ્તીવધારાની સરેરાશ 16.47 % છે.

નોંધ : અહીં 4 થું મૂળ શોધવા માટે 184009200 નું વર્ગમૂળ મેળવેલ છે અને તેનું ફરી વર્ગમૂળ લીધેલ છે. આ જ રીતે 8 મું મૂળ શોધવા માટે વર્ગમૂળની પ્રક્રિયા ત્રણ વખત કરવી પડે.

ઉદાહરણ 15 : બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર મધ્યક 2 છે. જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાની 4 ગણી હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ધારો કે નાની સંખ્યા $x_1 = a$ છે.

તો તેનાથી 4 ગણી હોય તેવી બીજી સંખ્યા $x_2 = 4a$ થશે.

$$G = 2$$

$$G = \sqrt{x_1 \times x_2}$$

$$\therefore \quad 2 = \sqrt{a \times 4a}$$

$$\therefore \quad 2 = \sqrt{4a^2}$$

$$\therefore \quad 2 = 2a$$

$$\therefore \quad a = 1$$

આમ, પ્રથમ સંખ્યા $x_1 = a = 1$ અને બીજી સંખ્યા $x_2 = 4a = 4$ મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : બે સંખ્યાઓ 9 અને 16 ના સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક શોધો અને ચકાસો કે $\bar{x} > G$.

અહીં $x_1 = 9$, $x_2 = 16$ અને $n = 2$

સમાંતર મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$

ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{x_1 \times x_2} = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$

$\bar{x} = 12.5$ અને $G = 12$ હોવાથી $\bar{x} > G$

ગુણોત્તર મધ્યકના લાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

(2) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત છે.

(3) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે સુયોગ્ય છે.

(4) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની અસર પ્રમાણમાં ઓછી થાય છે.

ગુણોત્તર મધ્યકના ગેરલાભ :

(1) જો બધાં અવલોકનોની કિંમત ધન હોય તો જ ગુણોત્તર મધ્યક શોધી શકાય છે.

(2) તેની ગણતરી અઘરી છે.

(3) જો અવલોકનોની સંખ્યા વધારે હોય તો તેની ગણતરી વધુ અઘરી થાય છે.

પ્રવૃત્તિ

1, 7, 5, 100 કિંમતોનો સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક શોધો.
કઈ સરેરાશ વધુ યોગ્ય ગણાય ? કેમ ?

સ્વાધ્યાય 3.3

(1) નીચેની માહિતી એક વર્ગના 8 વિદ્યાર્થીઓએ પાછલા મહિનામાં વાંચેલાં પુસ્તકોની સંખ્યા દર્શાવે છે.
2, 1, 5, 9, 1, 3, 2, 4
ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને વાંચેલાં પુસ્તકોની સંખ્યાની સરેરાશ મેળવો.

(2) એક મશીનની કિંમતમાં તેના પહેલા ચાર વર્ષોમાં અનુક્રમે 10 % , 7 %, 5 % અને 2 %ના દરે ઘસારો થાય છે. ઘસારાની સરેરાશ યોગ્ય રીતે શોધો.

(3) એક ટેક્સીએ સોમવારે 15 કિમી અને મંગળવારે 254 કિમીનો પ્રવાસ કર્યો છે. આ બે દિવસોમાં પ્રવાસ કરેલા અંતરની સરેરાશ ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

3.4 સ્થાનીય સરેરાશનાં માપ (Measures of Positional Average)

મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકો :

આપણે જોયું કે જો અવલોકનો સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયા હોય અને તેમાં અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનો ન હોય તો મધ્યક યોગ્ય સરેરાશ ગણાય. જો આ શરતો લાગુ ન પડતી હોય તો મધ્યક વડે આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોનું એટલું સારું પ્રતિનિધિત્વ થતું નથી તેમ કહેવાય છે. આવી પરિસ્થિતિમાં એક અન્ય સરેરાશ વધુ યોગ્ય માપ છે જેને મધ્યસ્થ કહેવાય છે. આ એક સ્થાનીય માપ છે. મધ્યસ્થ ઉપરાંત ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો પણ સ્થાનીય માપ છે.

3.4.1 અર્થ

આપેલ ચલની કિંમતોને ક્રમમાં ગોઠવતાં કોઈ એક ચોક્કસ સ્થાન પર આવતા અવલોકનનો ઉપયોગ કરીને મધ્યસ્થ, ચર્તુથકો, દશાંશકો અને શતાંશકોની કિંમત શોધવામાં આવતી હોવાથી આ સરેરાશોને સ્થાનીય સરેરાશો કહેવાય છે.

મધ્યસ્થ (Median) :

આપેલ માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવતાં તેના મધ્યમાં આવેલ અવલોકનની કિંમતને મધ્યસ્થ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. તેને M વડે દર્શાવાય છે. બીજી રીતે કહીએ તો માહિતીમાંથી 50 % અવલોકનોની કિંમત મધ્યસ્થથી વધુ હોય છે અને 50 % અવલોકનો મધ્યસ્થથી ઓછી કિંમત ધરાવતાં હોય છે.

મધ્યસ્થની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :

આપણે મધ્યમાં આવેલી કિંમત શોધવાની હોવાથી અવલોકનોને ચઢતા અથવા ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવવાં પડે છે.

n અવલોકનો $x_1, x_2, \dots, x_n$ નો મધ્યસ્થ નીચે મુજબ શોધવામાં આવે છે :

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત

દાખલા તરીકે, આપેલ માહિતીમાં 15 અવલોકનો હોય તો $\left(\frac{15+1}{2}\right)$ એટલે કે 8 મું અવલોકન કેન્દ્રમાં આવશે જેને મધ્યસ્થ કહેવાય છે.

ધારો કે આપેલ માહિતીમાં 20 અવલોકનો છે તો $\frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10.5$ થવાથી 10 મું અને 11 મું આ બંને અવલોકનો કેન્દ્રમાં છે એમ કહેવાય. આ કિસ્સામાં આ બે કેન્દ્રીય કિંમતોના મધ્યકને મધ્યસ્થ તરીકે લેવાય છે.

ઉદાહરણ 17 : જુદા જુદા સપ્તાહમાં એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદન થયેલ એકમોની સંખ્યા 80, 85, 90, 92, 68, 80, 72, 63, 55 છે. ઉત્પાદનનો મધ્યસ્થ મેળવો.

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલ અવલોકનો નીચે પ્રમાણે છે :

55, 63, 68, 72, 80, 80, 85, 90, 92

અહીં $n = 9$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 5મા અવલોકનની કિંમત

$= 80$

આમ, આ ફેક્ટરીના ઉત્પાદનનો મધ્યસ્થ 80 એકમો છે.

ઉદાહરણ 18 : એક ફેરિયાના છેલ્લા 10 દિવસનો નફો (₹માં) નીચે આપેલ છે. નફાનો મધ્યસ્થ શોધો.

261.5, 257, 258.5, 260, 265, 249, 255.5, 262.5, 264, 267

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં આ અવલોકનો નીચે પ્રમાણે આવશે :

249, 255.5, 257, 258.5, 260, 261.5, 262.5, 264, 265, 267

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{10+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 5.5મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{\text{5મા અવલોકનની કિંમત + 6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત}}{2}$

$= \frac{260+261.5}{2}$

$= 260.75$

આમ, ફેરિયાના દૈનિક નફાનો મધ્યસ્થ ₹ 260.75 છે.

ઉદાહરણ 19 : એક ઑફિસમાં 11 કર્મચારીઓ છે. આમાંથી સૌથી ઓછો પગાર ધરાવતા 7 કર્મચારીઓના માસિક પગાર (₹ માં) 4500, 2100, 3400, 3600, 2500, 4200, 1500 છે. બધા કર્મચારીઓના માસિક પગારનો મધ્યસ્થ કેટલો છે ?

આપેલ માહિતીમાં કેટલાંક અવલોકનો અજ્ઞાત છે. આપણને સૌથી વધુ પગાર ધરાવતાં 4 કર્મચારીઓના પગારની કિંમતો આપેલી નથી.

ધારો કે, તેની કિંમતો ચઢતા ક્રમમાં અનુક્રમે a, b, c, d છે. આ ચાર કિંમતો આપેલ અવલોકનો કરતાં મોટી છે કારણ કે તે સૌથી વધુ પગાર ધરાવતા કર્મચારીઓના પગારની કિંમતો છે.

હવે આપણે આ માહિતીને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીશું. 1500, 2100, 2500, 3400, 3600, 4200, 4500, a, b, c, d.

અહીં, $n = 11$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત

$= 4200$

આમ, આ કર્મચારીઓમાં પગારનો મધ્યસ્થ ₹ 4200 છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે :

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે એક ચલની કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ માટે આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે.

આવૃત્તિ-વિતરણમાં અવલોકનો સામાન્ય રીતે ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં હોય છે. ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોના આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિનો ઉપયોગ કરીશું.

અહીં મધ્યસ્થ નીચે પ્રમાણે શોધવામાં આવે છે :

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

જ્યાં $n = f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i =$ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ઉદાહરણ 20 : એક મહિનામાં એક વર્ગમાં ગેરહાજર રહેલા વિદ્યાર્થીઓની નોંધ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. વિદ્યાર્થીદીઠ ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

વિદ્યાર્થીના ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	12	18	9	5	1

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા x	0	1	2	3	4	5	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f	8	12	18	9	5	1	53
સંચયી આવૃત્તિ cf	8	20	38	47	52	53	–

અહીં $n = \Sigma f = 53$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 27$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 21માથી 38મા અવલોકનોની કિંમત 2 છે.

તેથી 27 મા અવલોકનની કિંમત 2 છે. $\therefore$ મધ્યસ્થ $M = 2$ દિવસો

આમ, વિદ્યાર્થીદીઠ ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ 2 દિવસ છે.

ઉદાહરણ 21 : જુદા જુદા ટાઇપિસ્ટોને એક રિપોર્ટ ટાઇપ કરવા માટે લાગેલો સમય નીચેની માહિતીમાં આપેલ છે તે પરથી ટાઇપિંગના સમયનો મધ્યસ્થ શોધો :

ટાઇપિંગનો સમય (મિનિટ)	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
ટાઇપિસ્ટોની સંખ્યા	5	7	8	15	5

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ટાઇપિંગનો સમય x	10	11	12	13	14
ટાઇપિસ્ટોની સંખ્યા f	5	7	8	15	5
સંચયી આવૃત્તિ cf	5	12	20	35	40

અહીં $n = \Sigma f = 40$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{40+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 20.5$મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{20\text{મા અવલોકનની કિંમત} + 21\text{મા અવલોકનની કિંમત}}{2}$

> આ અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અવલોકનો ચઢતા ક્રમમાં નીચે મુજબ છે. 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11,11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, ... ઉપર્યુક્ત અવલોકનોનું નિરીક્ષણ કરતાં જોઈ શકાય કે 20.5મું અવલોકન 12 અને 13ની સરેરાશ છે.

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 13મા થી 20મા અવલોકનોની કિંમતો 12 છે અને 21મા અવલોકનથી 35મા અવલોકનોની કિંમત 13 છે.

તેથી 20મા અને 21મા અવલોકનોની કિંમતો અનુક્રમે 12 અને 13 છે.

$\therefore \quad M = \frac{12+13}{2}$

$= 12.5$

આમ, ટાઈપિંગના સમયનો મધ્યસ્થ 12.5 મિનિટ છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ચલની કિંમતો વર્ગોના સ્વરૂપમાં આપેલી હોય છે અને તે સામાન્ય રીતે ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલી હોય છે. આવા કિસ્સાઓમાં મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિઓનો ઉપયોગ કરીશું. આ સંચયી આવૃત્તિઓ તે ચલનો મધ્યસ્થ કયા વર્ગમાં આવે છે તે દર્શાવશે. તે માટે આપણે મધ્યસ્થનો વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ લઈશું.

જ્યાં $n = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

અહીં મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે :

$$\text{મધ્યસ્થ } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

જ્યાં L = મધ્યસ્થના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ

cf = મધ્યસ્થ વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

c = મધ્યસ્થ વર્ગની વર્ગલંબાઈ

ઉદાહરણ 22 : એક બૅન્કમાં દર દિવસે ભરાયેલા ચેકની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ચેકની સંખ્યા	0 - 39	40 - 79	80 - 119	120 - 159	160 - 199
દિવસોની સંખ્યા	2	14	23	7	4

ભરાયેલા ચેકની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ચેકની સંખ્યા	0 - 39	40 - 79	80 - 119	120 - 159	160 - 199
દિવસોની સંખ્યા	2	14	23	7	4
સંચયી આવૃતિ	2	16	39	46	50

અહીં $n = \Sigma f = 50$

મધ્યસ્થનો વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{50}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 25$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 17મા અવલોકનથી 39મા અવલોકન સુધી બધાં જ અવલોકનો વર્ગ 80 - 119માં છે માટે તે મધ્યસ્થ વર્ગ થશે.

આ અનિવારક પ્રકારનું વર્ગીકરણ હોવાથી આપણે વર્ગસીમા પરથી વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ મેળવીશું. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 79.5 - 119.5 લેવાશે.

હવે, $L = 79.5,\ cf = 16,\ f = 23,\ c = 40$ લેતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ } M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 79.5 + \frac{25-16}{23} \times 40$$

$$= 79.5 + \frac{9}{23} \times 40$$

$$= 79.5 + \frac{360}{23}$$

$$= 79.5 + 15.6522$$

$$= 95.1522$$

$$= 95.15$$

આમ, દર દિવસે બૅન્કમાં ભરાયેલા ચેકનો મધ્યસ્થ 95.15 છે.

ઉદાહરણ 23 : 75 કુટુંબોના પેટ્રોલના માસિક ખર્ચની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આ કુટુંબોમાં પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ શોધો.

પેટ્રોલનો ખર્ચ (₹)	**200 સુધી**	**400 સુધી**	**600 સુધી**	**800 સુધી**	**1000 સુધી**	**1200 સુધી**
કુટુંબોની સંખ્યા	2	8	17	32	57	75

અહીં સંચયી આવૃત્તિઓ આપેલ છે. આપણે આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું.

ખર્ચ (₹)	**200 સુધી**	**200 - 400**	**400 - 600**	**600 - 800**	**800 - 1000**	**1000 - 1200**
કુટુંબોની સંખ્યા	2	6	9	15	25	18
સંચયી આવૃત્તિ cf	2	8	17	32	57	75

અહીં $n = \Sigma f = 75$

મધ્યસ્થ વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{75}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 37.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે, 37મું અને 38મું એવાં બંને અવલોકનો વર્ગ 800 - 1000માં સમાયેલા છે. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 800 - 1000 થશે.

હવે, $L = 800$, $cf = 32$, $f = 25$, $c = 200$ લેતાં

મધ્યસ્થ $$M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{37.5 - 32}{25} \times 200$$

$$= 800 + \frac{5.5}{25} \times 200$$

$$= 800 + \frac{1100}{25}$$

$$= 800 + 44$$

$$= 844$$

આમ, આ કુટુંબોના માસિક પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ ₹ 844 છે.

ઉદાહરણ 24 : એક શહેરમાં જુદા જુદા દિવસે માપેલું હવાના પ્રદૂષણનું સ્તર (*ppm*માં) નીચે પ્રમાણે છે. પ્રદૂષણના સ્તરનો મધ્યસ્થ શોધો :

પ્રદૂષણનું સ્તર (*ppm*)	**250 કે તેથી વધુ**	**270 કે તેથી વધુ**	**290 કે તેથી વધુ**	**310 કે તેથી વધુ**	**320 કે તેથી વધુ**	**330 કે તેથી વધુ**	**340 કે તેથી વધુ**
દિવસોની સંખ્યા	150	133	108	76	41	20	7

અહીં 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે. આપણે તે પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ તેમજ 'થી ઓછા' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિઓ પણ મેળવીશું.

પ્રદૂષણનું સ્તર	**250 - 270**	**270 - 290**	**290 - 310**	**310 - 320**	**320 - 330**	**330 - 340**	**340 કે તેથી વધુ**
દિવસોની સંખ્યા	17	25	32	35	21	13	7
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	17	42	74	109	130	143	150

$n = \Sigma f = 150$. અહીં, અસમાન વર્ગલંબાઈ છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{150}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 75મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 75મું અવલોકન વર્ગ 310 - 320 માં સમાયેલ છે.

તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 310 - 320 થશે.

હવે, $L = 310$, $cf = 74$, $f = 35$, $c = 10$ લેતાં

મધ્યસ્થ $$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 310 + \frac{75 - 74}{35} \times 10$$

$$= 310 + \frac{1}{35} \times 10$$

$$= 310 + \frac{10}{35}$$

$$= 310 + 0.2857$$

$$= 310.2857$$

$$\approx 310.\ 29$$

આમ, પ્રદૂષણના સ્તરનો મધ્યસ્થ 310.29 *ppm* છે.

મધ્યસ્થના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

(1) તે ગણતરી કરવામાં અને સમજવામાં સરળ છે.

(2) તે નિરીક્ષણથી મેળવી શકાય છે.

(3) તે આલેખ પરથી શોધી શકાય છે.

(4) જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણમાં ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય ત્યારે તે એકમાત્ર સરેરાશ શક્ય બને છે.

(5) અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની તેના પર ઓછી અસર થાય છે.

(6) કેટલીક માહિતી ખૂટતી હોય તોપણ તે શોધી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી.

(2) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત હોતું નથી.

(3) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ નથી.

(4) મધ્યકના પ્રમાણમાં તે ઓછું સ્થિર છે.

અન્ય સ્થાનીય માપ :

આપણે જોયું કે મધ્યસ્થ આપેલ માહિતીને બે સરખા વિભાગોમાં વહેંચે છે. કોઈ વખત આપણને એવી કિંમતોની જરૂર પડે છે કે જે આપેલ માહિતીને 2 થી વધુ વિભાગોમાં વહેંચતી હોય. હવે આપણે કેટલીક આવી સ્થાનીય સરેરાશોનો અભ્યાસ કરીશું.

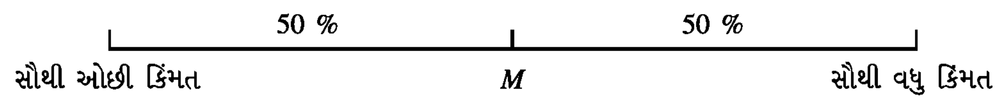
ચતુર્થકો (Quartiles) :

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલા આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને જે ત્રણ કિંમતો ચાર સરખા ભાગમાં વહેંચે છે તે કિંમતોને ચતુર્થકો કહેવાય છે. આ ત્રણ ચતુર્થકોને અનુક્રમે Q_1, Q_2, Q_3 વડે દર્શાવાય છે.

આપેલ માહિતીની પ્રથમ 25 % કિંમતો Q_1 તેથી ઓછી હોય છે, ત્યાર પછીની 25 % કિંમતો Q_1 અને Q_2 ની વચ્ચે હોય છે. 25 % કિંમતો Q_2 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે. તેથી 50% કિંમતો Q_1 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે અને 25 % કિંમતો Q_3 થી વધુ હોય છે.

આપણે કહી શકીએ કે j મા ચતુર્થક Q_j વડે માહિતીના એવા ભાગ પડે છે કે જેમાં 25 j % અવલોકનો Q_j જેટલાં કે તેથી ઓછાં હોય છે. ($j = 1, 2, 3$) આમ, Q_2 થી ઓછા (25 × 2) % એટલે કે 50 % અવલોકનો હશે. તેથી Q_2 = મધ્યસ્થ = M

મધ્યસ્થ માટે :



ચતુર્થકો માટે :

સૌથી ઓછી કિંમત	25 %	Q_1	25 %	Q_2	25 %	Q_3	25 %	સૌથી વધુ કિંમત

દશાંશકો (Deciles) :

ધારો કે અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. માહિતીના એકસરખા 10 ભાગ પાડતી 9 કિંમતોને દશાંશકો કહેવાય છે જેને અનુક્રમે D_1, D_2, ..., D_9 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. 10 % અવલોકનો D_1 થી ઓછી કિંમત ધરાવે છે, 20 % અવલોકનો D_2 થી ઓછી કિંમતો ધરાવે છે અને આમ આગળ વધી શકાય.

આમ, 10 j % અવલોકનોની કિંમતો jમા દશાંશક D_j થી ઓછી હશે (j = 1, 2, ….9). આપણે જોઈ શકીએ કે $D_5 = M = Q_2$

શતાંશકો (Percentiles) :

ધારો કે અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. માહિતીના એકસરખા 100 ભાગ પાડતી 99 કિંમતોને શતાંશકો કહેવાય છે જેને અનુક્રમે P_1, P_2 …, P_{99} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં 100 j % અવલોકનોની કિંમતો jમા શતાંશક P_j થી ઓછી કિંમત ધરાવશે (j = 1, 2, …,99). આપણે જોઈ શકીએ કે $D_1 = P_{10}$, $D_2 = P_{20}$, ..., $D_9 = P_{90}$ તેમજ $Q_1 = P_{25}$ અને $Q_3 = P_{75}$

ઉપરાંત $M = Q_2 = D_5 = P_{50}$

મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો બધી જ સ્થાનીય સરેરાશો હોવાથી તેમની ગણતરીની રીત સમાન હોય છે. jમો ચતુર્થક, jમો દશાંશક અને jમો શતાંશક શોધવાનાં સૂત્રો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

માહિતીનો પ્રકાર	**jમો ચતુર્થક j = 1, 2, 3**	**jમો દશાંશક j = 1, 2,...9**	**jમો શતાંશક j = 1, 2,..., 99**
અવર્ગીકૃત માહિતી અથવા અસતત આવૃત્તિ વિતરણ	$Q_j = j\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત	$D_j = j\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત	$P_j = j\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત
સતત આવૃત્તિ-વિતરણ	Q_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $Q_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં $L = Q_j$ ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = Q_j$ ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = Q_j$ ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = Q_j$ ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ	D_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $D_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં L = D_j ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = D_j$ ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = D_j$ ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = D_j$ ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ	P_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $P_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં $L = P_j$ ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = P_j$ ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = P_j$ ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = P_j$ ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ

ઉદાહરણ 25 : એક બેટ્સમૅને તેની 20 ઈનિંગમાં સ્કોર કરેલા રન દર્શાવતી નીચેની માહિતી માટે Q_1, D_7, P_{40} શોધો.

32, 28, 47, 63, 71, 9, 60, 10, 96, 14, 31, 148, 53, 67, 29, 10, 62, 40, 80, 54

અવલોકનોની ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે થશે :

9, 10, 10, 14, 28, 29, 31, 32, 40, 47,

53, 54, 60, 62, 63, 67, 71, 80, 96, 148

અહીં, $n = 20$

> સ્થાનીય સરેરાશ શોધવા માટે તેના સ્થાનની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે તો તે સ્થાનીય સરેરાશની કિંમત શોધવા માટે સુરેખ આસાદનનો (Linear approximation) ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. દા.ત., 5.25મી કિંમત શોધવા માટે 5મા અવલોકનની કિંમતમાં તે અવલોકન અને ત્યાર બાદનું એટલે કે 6ઠ્ઠા અવલોકનના અંતરના 25 % ઉમેરવામાં આવે છે.

ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{20+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 5.25મા અવલોકનની કિંમત

= 5મા અવલોકનની કિંમત + 0.25(6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત – 5મા અવલોકનની કિંમત)

= 28 + 0.25(29 – 28)

= 28 + 0.25

= 28.25

દશાંશક $D_7 = 7\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 7\left(\frac{20+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 14.7મા અવલોકનની કિંમત

= 14મા અવલોકનની કિંમત + 0.7(15મા અવલોકનની કિંમત – 14મા અવલોકનની કિંમત)

= 62 + 0.7(63 – 62)

= 62 + 0.7

= 62.7

શતાંશક $P_{40} = 40\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 40\left(\frac{20+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 8.4મા અવલોકનની કિંમત

= 8મા અવલોકનની કિંમત + 0.4(9મા અવલોકનની કિંમત – 8મા અવલોકનની કિંમત)

= 32 + 0.4(40 – 32)

= 32 + 3.2

= 35.2

આમ, Q_1, D_7, P_{40}ની કિંમતો અનુક્રમે 28.25 રન, 62.7 રન અને 35.2 રન છે.

ઉદાહરણ 26 : નીચેની માહિતી એક ડેરીમાં મશીનથી ભરેલી દૂધની 90 કોથળીઓના સંદર્ભમાં છે.

ભરેલ દૂધ (મિલિ)	485 - 490	490 - 495	495 - 500	500 - 505	505 - 510
કોથળીઓની સંખ્યા	5	21	33	23	8

Q_3, D_2, P_{55} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો.

આ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું.

ભરેલ દૂધ (મિલિ)	485 - 490	490 - 495	495 - 500	500 - 505	505 - 510
કોથળીઓની સંખ્યા	5	21	33	23	8
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	5	26	59	82	90

અહીં $n = 90$

ચતુર્થક Q_3 માટે :

Q_3 નો વર્ગ $= 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 3\left(\frac{90}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 67.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 67મા અને 68મા અવલોકનોનો વર્ગ 500 - 505 છે.

હવે $L = 500$, $cf = 59$, $f = 23$, $c = 5$ લેતાં

ચતુર્થક $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

$= 500 + \frac{67.5 - 59}{23} \times 5$

$= 500 + \frac{8.5}{23} \times 5$

$= 500 + \frac{42.5}{23}$

$= 500 + 1.8478$

$= 501.8478$

≈ 501.85

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતી 75 % કોથળીઓમાં દૂધનો મહત્તમ જથ્થો 501.85 મિલિ હશે.

દશાંશક D_2 માટે :

D_2 નો વર્ગ $= 2\left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 2\left(\frac{90}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 18$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 18મા અવલોકનનો વર્ગ 490 - 495 હશે.

હવે $L = 490,\ cf = 5,\ f = 21,\ c = 5$ લેતાં

$$D_2 = L + \frac{2\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 490 + \frac{18-5}{21} \times 5$$

$$= 490 + \frac{13}{21} \times 5$$

$$= 490 + \frac{65}{21}$$

$$= 490 + 3.0952$$

$$= 493.0952$$

$$\approx 493.1$$

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતા 20 % કોથળીઓમાં દૂધનો મહત્તમ જથ્થો 493.1 મિલિ હશે.

શતાંશક P_{55} માટે

P_{55} નો વર્ગ $= 55\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 55\left(\frac{90}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 49.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 49મા અને 50મા અવલોકનોનો વર્ગ 495 - 500 હશે.

હવે $L = 495,\ cf = 26,\ f = 33,\ c = 5$ લેતાં

$$P_{55} = L + \frac{55\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 495 + \frac{49.5-26}{33} \times 5$$

$$= 495 + \frac{23.5}{33} \times 5$$

$$= 495 + \frac{117.5}{33}$$

$$= 495 + 3.5606$$

$$= 498.5606$$

$$\approx 498.56$$

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતી 55 % કોથળીઓમાં દૂધનો જથ્થો વધુમાં વધુ 498.56 મિલિ હશે.

ઉદાહરણ 27 : એક બૅન્કના 100 ગ્રાહકોની તેમની એક મહિનાની બૅન્કની મુલાકાતની સંખ્યાની તપાસ પરથી આપણને નીચેની માહિતી મળે છે :

મુલાકાતોની સંખ્યા	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ગ્રાહકોની સંખ્યા	12	22	40	15	6	4	1

પ્રથમ ચતુર્થક, 4થો દશાંશક અને 95મો શતાંશક શોધો.

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે સંચયી આવૃત્તિઓ મેળવીશું.

મુલાકાતોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6
ગ્રાહકોની સંખ્યા	12	22	40	15	6	4	1
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	12	34	74	89	95	99	100

અહીં, $n = 100$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{100+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 25.25$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 25મા અને 26મા અવલોકનની કિંમતો 1 છે. $\therefore\ Q_1 = 1$

આમ, સૌથી ઓછી મુલાકાત લેતા 25 % ગ્રાહકોમાં મહત્તમ મુલાકાતોની સંખ્યા 1 છે.

4 થો દશાંશક $D_4 = 4\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 4\left(\frac{100+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 40.4$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 40મા અને 41મા અવલોકનની કિંમતો 2 છે. $\therefore\ D_4 = 2$

આમ, સૌથી ઓછી મુલાકાત લેતા 40 % ગ્રાહકો બૅન્કની 2 દિવસ સુધી મુલાકાત લે છે.

95 મો શતાંશક $P_{95} = 95\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 95\left(\frac{100+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 95.95$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 95મા અવલોકનની કિંમત 4 અને 96મા અવલોકનની કિંમત 5 છે.

P_{95} = 95મા અવલોકનની કિંમત + 0.95(96મા અવલોકનની કિંમત – 95મા અવલોકનની કિંમત)

$= 4 + 0.95(5 - 4)$

$= 4 + 0.95$

$= 4.95$

આમ, સૌથી ઓછી વખત મુલાકાત લેતા 95 % ગ્રાહકોમાં મુલાકાતોની મહત્તમ સંખ્યા 4.95 કે 5 હશે.

ઉદાહરણ 28 : લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતા 50 મુસાફરોના માસિક પ્રવાસખર્ચ (₹ માં)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ	**350 - 500**	**500 - 650**	**650 - 800**	**800 - 950**	**950 અને વધુ**
મુસાફરોની સંખ્યા	7	13	16	9	5

(1) વચ્ચેના 50 % મુસાફરોના પ્રવાસ-ખર્ચની સીમાઓ મેળવો.

(2) સૌથી વધુ ખર્ચ કરતા 15 % મુસાફરોમાં ન્યૂનતમ ખર્ચ કેટલો હશે ?

(3) સૌથી ઓછો ખર્ચ કરતા 10 % મુસાફરોમાં મહત્તમ ખર્ચ કેટલો હશે ?

ઉપરના પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા માટે આપણે સ્થાનીય સરેરાશોના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરીશું. તે માટે આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિઓ મેળવીશું.

પ્રવાસ-ખર્ચ (₹)	**350 - 500**	**500 - 650**	**650 - 800**	**800 - 950**	**950 અને વધુ**
મુસાફરોની સંખ્યા	7	13	16	9	5
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	7	20	36	45	50

અહીં $n = 50$

(1) કોઈ પણ ચલ માટે કેન્દ્રનાં 50 % અવલોકનો Q_1 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે. તેથી Q_1 અને Q_3 શોધીશું.

Q_1 નો વર્ગ $= \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{50}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 12.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 12મા અને 13મા અવલોકનનો વર્ગ 500 - 650 છે.

હવે $L = 500,\ cf = 7,\ f = 13,\ c = 150$ લેતાં

$$Q_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 500 + \frac{12.5 - 7}{13} \times 150$$

$$= 500 + \frac{5.5}{13} \times 150$$

$$= 500 + \frac{825}{13}$$

$$= 500 + 63.4615$$

$$= 563.4615$$

$$\approx 563.46$$

Q_3 નો વર્ગ $= 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 3\left(\frac{50}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 37.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 37મા અને 38મા અવલોકનનો વર્ગ 800 - 950 છે.

હવે $L = 800,\ cf = 36,\ f = 9,\ c = 150$ લેતાં

$$Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{37.5 - 36}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{1.5}{9} \times 150$$

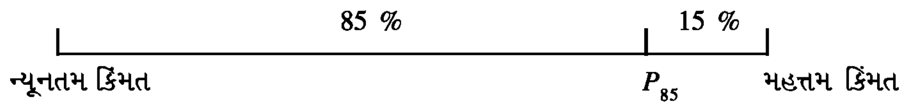
$$= 800 + \frac{225}{9}$$

$$= 800 + 25$$

$$= 825$$

આમ, કેન્દ્રના 50 % મુસાફરોનો માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ ₹ 563.46 અને ₹ 825 ની વચ્ચે હશે.

(2) અહીં આપણને એવી કિંમત જોઈએ છે કે જેનાથી 15 % અવલોકનો વધુ કિંમત ધરાવતા હોય એટલે કે 85 % અવલોકનોની કિંમત તેનાથી ઓછી હોવી જોઈએ. તેથી આપણે P_{85} શોધીશું.



P_{85} નો વર્ગ $= 85\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 85\left(\frac{50}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 42.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 42મા અને 43મા અવલોકનોનો વર્ગ 800 - 950 છે.

હવે $L = 800,\ cf = 36,\ f = 9,\ c = 150$ લેતાં

$$P_{85} = L + \frac{85\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{42.5 - 36}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{6.5}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{975}{9}$$

$$= 800 + 108.3333$$

$$= 908.3333$$

$$\approx 908.33$$

આમ, સૌથી વધુ પ્રવાસખર્ચ ધરાવતા 15 % મુસાફરોમાં ન્યૂનતમ પ્રવાસ-ખર્ચ ₹ 908.33 છે.

(3) જે કિંમતથી ઓછાં 10 % અવલોકનો હોય તે કિંમત શોધવા માટે આપણે D_1 શોધીશું.

| 10 % | 90 % |

ન્યૂનતમ કિંમત D_1 મહત્તમ કિંમત

D_1 નો વર્ગ $= \left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{50}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$=$ 5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 5 મા અવલોકનનો વર્ગ 350 – 500 છે.

હવે $L = 350,\ cf = 0,\ f = 7,\ c = 150$

$$D_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 350 + \frac{5-0}{7} \times 150$$

$$= 350 + \frac{5}{7} \times 150$$

$$= 350 + \frac{750}{7}$$

$$= 350 + 107.1429$$

$$= 457.1429$$

$$\approx 457.14$$

આમ, સૌથી ઓછો પ્રવાસ-ખર્ચ ધરાવનાર 10 % મુસાફરોમાં મહત્તમ ખર્ચ ₹ 457.14 છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. કોઈ એક વર્ગની કસોટીમાં 15 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણની નીચે આપેલી માહિતી પરથી બધા ચતુર્થકો શોધો.

8, 6, 7, 0, 2, 4, 6, 5, 5, 4, 8, 9, 3, 6, 7

2. એક સેલ્સમેને છેલ્લા વર્ષમાં જુદા જુદા દિવસોમાં કરેલ મુસાફરી (કિમીમાં)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. મધ્યસ્થ, Q_3, D_8, P_{62} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો :

મુસાફરી (કિમી)	**0–100**	**100–200**	**200–300**	**300–400**	**400–500**	**500–600**
દિવસોની સંખ્યા	5	18	24	7	5	1

3. એક કૉલેજમાંથી પસંદ કરેલા 80 વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઉંમર (વર્ષ)	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	11	14	22	15	8	6	4

વિદ્યાર્થીઓની ઉંમરનો મધ્યસ્થ શોધો. ઉપરાંત ઉંમર માટે Q_1, D_4, P_{32} પણ શોધી, તેમનું અર્થઘટન કરો.

4. એક પેઢીના કર્મચારીઓના વેતનનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરો. સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 20 % કર્મચારીઓના વેતનની ન્યૂનતમ સીમા પણ મેળવો.

વેતન (હજાર ₹)	5 કે તેથી વધુ	10 કે તેથી વધુ	15 કે તેથી વધુ	20 કે તેથી વધુ	25 કે તેથી વધુ	30 કે તેથી વધુ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	120	117	106	76	31	12

5. 100 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહમાં મનોરંજન પાછળના માસિક ખર્ચની વિગત નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ ખર્ચનો મધ્યસ્થ શોધો.

ખર્ચ (₹માં)	200 થી ઓછો	200 - 400	400 - 600	600 - 700	700 - 800	800 અને વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	23	40	17	7	5

6. નીચેની માહિતી એક હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા 30 દર્દીઓના હૉસ્પિટલમાં રોકાણના દિવસોની નોંધ છે :

1, 10, 2, 6, 3, 4, 15, 1, 5, 9, 2, 4, 3, 1, 10,
7, 3, 5, 4, 2, 4, 8, 5, 3, 1, 9, 6, 2, 3, 7

રોકાણના દિવસોનો મધ્યસ્થ શોધો. ઉપરાંત આ માહિતીને પ્રથમ વર્ગ 1–3 હોય તેવા સમાન લંબાઈના વર્ગો ધરાવતા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ (અનિવારક પ્રકાર)માં ફેરવો. આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મધ્યસ્થ શોધો અને તમારા અગાઉના જવાબ સાથે સરખાવો.

*

3.5 બહુલક (Mode)

મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે આપણે મધ્યક અને મધ્યસ્થનો અભ્યાસ અગાઉ કર્યો છે. એક અન્ય માપ તરીકે હવે આપણે બહુલકનો અભ્યાસ કરીશું જેનો વેપાર અને વાણિજ્યના ક્ષેત્રમાં વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

3.5.1 અર્થ :

આપેલ માહિતીમાં ચલની સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તિત થતી એટલે કે મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમતને **બહુલક** કહેવામાં આવે છે. તેને M_o વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

વ્યવહારુ પ્રશ્નોમાં ઘણી વાર આ માપનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે નીચેનાં વિધાનો જુઓ :

(1) આ શાળાના વિદ્યાર્થીઓને સરેરાશ 3 ભાષાઓ આવડે છે.

(2) આપણા દેશમાં પુરુષોની સરેરાશ ઊંચાઈ 1.7 મીટર છે.

(3) અમારી કંપનીનું સરેરાશ દૈનિક ઉત્પાદન 50 એકમો છે.

(4) કારખાનાના કારીગરો સરેરાશ 3 કલાક ઓવરટાઈમ કરે છે.

અહીં સરેરાશની ગણતરીમાં સૌથી વધુ વખત આવતી કિંમતને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે, જેમકે પ્રથમ વિધાનમાં શાળાના મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓને 3 ભાષાઓ આવડે છે તેવું સૂચિત થાય છે. તેથી ત્યાં સરેરાશ તરીકે બહુલકનો ઉપયોગ થયો છે તેમ કહી શકાય.

બહુલકની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી અને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

આવા કિસ્સામાં બહુલકની કિંમત માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવવામાં આવે છે. આપેલાં અવલોકનોમાંથી મહત્તમ વખત પુનરાવર્તન પામતી અથવા મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમતને બહુલક તરીકે લેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 29 : એક બુક સ્ટોરમાંથી 15 વ્યક્તિઓએ ખરીદેલાં પુસ્તકોની સંખ્યાઓ નીચે આપેલ છે :

1, 0, 2, 2, 3, 4, 2, 7, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 2.

ખરીદેલ પુસ્તકોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આપેલ અવલોકનોની કિંમતોમાં કિંમત 2નું 7 વાર પુનરાવર્તન થાય છે, જે અન્ય કોઈ પણ કિંમતની પુનરાવર્તનની સંખ્યા કરતાં વધુ છે. તેથી બહુલક $M_o = 2$.

આમ, વ્યક્તિએ ખરીદેલાં પુસ્તકોનો બહુલક 2 છે.

ઉદાહરણ 30 : ટી.વી. બનાવતી એક કંપનીએ એક મહિનામાં એસેમ્બલ કરેલા ટી.વી.ની તપાસ કરવામાં આવી. નીચેનું કોષ્ટક દરેક ટી.વી.માં રહેલ ખામીઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. ખામીઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

ખામીઓની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
ટી.વી.ની સંખ્યા	45	22	18	10	6	4

આવૃત્તિઓનું નિરીક્ષણ કરતા એવું જણાય છે કે, અવલોકન 0ની મહત્તમ આવૃત્તિ 45 છે. તેથી બહુલક $M_o = 0$

આમ, ટી. વી.ની ખામીઓની સંખ્યાનો બહુલક 0 છે.

નોંધ : આ દાખલામાં બહુલકનું મૂલ્ય બહુલકની વ્યાખ્યા મુજબ 0 મળે છે. પણ તે માહિતીના મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે લઈ શકાય નહિ, કારણ કે આ બહુલકનું મૂલ્ય માહિતીની શરૂઆતમાં આવે છે.

આવી માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે મધ્યક અથવા મધ્યસ્થની પસંદગી કરવી જોઈએ. અન્યથા બહુલકની કિંમત શોધવા માટે મધ્યક અને મધ્યસ્થ પર આધારિત આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ જેની ચર્ચા આ પ્રકરણમાં પાછળ કરવામાં આવી છે.

ઉદાહરણ 31 : 24 ટૅક્સી ડ્રાઈવરોએ એક દિવસમાં કરેલા ફેરાઓની સંખ્યા નીચેની માહિતીમાં દર્શાવેલ છે. ફેરાઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

ફેરાઓની સંખ્યા	1	2	4	5	6	7
ડ્રાઈવરોની સંખ્યા	3	7	4	7	2	1

મહત્તમ આવૃત્તિ 7 એ અવલોકનો 2 અને 5 ની આવૃત્તિ છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે આ વિતરણમાં બે બહુલક $M_o = 2$ અને $M_o = 5$.

આમ, ટૅક્સી ડ્રાઈવરના ફેરાઓના બહુલક 2 અને 5 છે.

નોંધ : આ પ્રકારના વિતરણને દ્વિ-બહુલકીય વિતરણ કહેવાય છે. તે જ રીતે એવાં પણ વિતરણો હોઈ શકે કે જેમાં બેથી વધુ બહુલકો હોય.

ઉદાહરણ 32 : એક ક્લિનિકમાં તેના કામના કલાકોમાં દર કલાકે આવતા દર્દીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવી છે :

3, 5, 4, 2, 7, 8

દર્દીઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

અહીં દરેક કિંમત એક જ વખત આવે છે તેથી આપણે મહત્તમ પુનરાવર્તન થાય તેવું અવલોકન શોધી શકતા નથી.

અહીં વ્યાખ્યાની મદદથી દર્દીઓની સંખ્યાનો બહુલક આપેલ માહિતી પરથી શોધી શકાતો નથી.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જ્યારે આપેલ માહિતીને વર્ગો ધરાવતા સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવામાં આવે છે ત્યારે અવલોકનોની મૂળ કિંમત પ્રાપ્ય હોતી નથી.

મધ્યસ્થની જેમ બહુલક માટે પણ સૌપ્રથમ બહુલકનો વર્ગ શોધવામાં આવે છે અને તેના આધારે બહુલકની કિંમત શોધવામાં આવે છે.

આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગને બહુલક વર્ગ કહેવાય છે. ત્યાર બાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને બહુલક મેળવવામાં આવે છે.

$$\text{બહુલક } M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$$

જ્યાં L = બહુલક વર્ગનું અધઃસીમાબિંદુ

f_m = બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

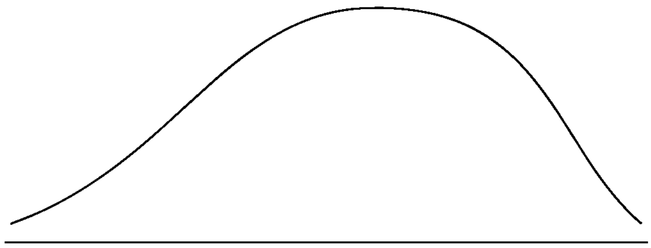
f_1 = બહુલક વર્ગના અગાઉના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગના પછીના વર્ગની આવૃત્તિ

c = બહુલક વર્ગની વર્ગલંબાઈ

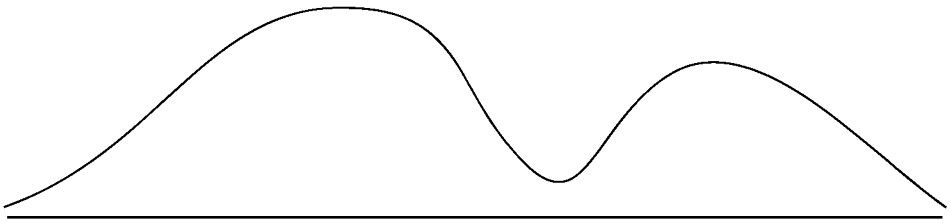
નોંધ : ઉપર દર્શાવેલ સૂત્રનો ઉપયોગ સમાન વર્ગલંબાઈ હોય તેવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે જ કરી શકાય તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ કોઈ એક જ વર્ગ માટે હોય તેવા કિસ્સામાં જ આ સૂત્ર વાપરી શકાય છે.

જે આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિઓ શરૂઆતમાં વધે છે અને મહત્તમની આવૃત્તિ સુધી પહોંચીને પછી ઘટતી જાય છે તેવા આવૃત્તિ-વિતરણને નિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવાય છે. આવાં વિતરણોમાં એક જ બહુલક હોવાથી તેમને એક-બહુલકીય વિતરણ પણ કહી શકાય છે, જેનો આવૃત્તિ વક્ર નીચે પ્રમાણે હોય છે :



નિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિ વક્ર

દ્વિ-બહુલકીય આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિઓ વધે અને ઘટે પણ ત્યાર બાદ ફરીથી વધીને ઘટે છે. આવા આવૃત્તિ-વિતરણને અનિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવાય છે, જેનો આવૃત્તિ વક્ર નીચે પ્રમાણે હોય છે.



અનિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિ વક્ર

ઉદાહરણ 33 : એક ફેક્ટરીના કારીગરોનું ઉત્પાદન નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ઉત્પાદનનો બહુલક શોધો.

ઉત્પાદન (એકમો)	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210	210 - 220	220 - 230
કારીગરોની સંખ્યા	4	5	19	33	48	22	12	6

વર્ગ 190 - 200 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 48 છે. તેથી બહુલકનો વર્ગ 190 - 200 છે.

હવે, $L = 190, f_m = 48, f_1 = 33, f_2 = 22, c = 10$ લેતાં,

બહુલક $M_0 = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

$= 190 + \frac{48-33}{2(48)-33-22} \times 10$

$= 190 + \frac{15}{96-33-22} \times 10$

$= 190 + \frac{150}{41}$

$= 190 + 3.6585$

$= 193.6585$

≈ 193.66

આમ, ઉત્પાદનનો બહુલક 193.66 એકમો છે.

ઉદાહરણ 34 : એક દુકાનદારે જુદા જુદા દિવસે વેચેલી ઠંડાં પીણાંની બોટલોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપી છે. ઠંડાં પીણાંની બોટલોના વેચાણનો બહુલક શોધો.

બોટલોની સંખ્યા	0 - 3	4 - 7	8 - 11	12 - 15	16 - 19	20 - 23
દિવસોની સંખ્યા	3	11	16	20	18	12

વર્ગ 12 - 15 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 20 છે, તેથી બહુલકનો વર્ગ 12 - 15 છે. આ અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ હોવાથી આપણે તે વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ 11.5 - 15.5 લઈશું.

હવે, $L = 11.5, f_m = 20, f_1 = 16, f_2 = 18, c = 4$ લેતાં,

બહુલક $M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

$= 11.5 + \frac{20-16}{2(20)-16-18} \times 4$

$= 11.5 + \frac{4}{40-16-18} \times 4$

$= 11.5 + \frac{16}{6}$

$= 11.5 + 2.6666$

$= 14.1666$

≈ 14.17

આમ, ઠંડાં પીણાંની બોટલોના વેચાણનો બહુલક 14.17 છે.

બહુલક માટે આસાદિત સૂત્ર (Empirical Formula):

આપણે જોયું કે ઘણી વાર બહુલક સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થતું નથી. પ્રસિદ્ધ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને માહિતીના જુદા જુદા સમૂહો માટેના અભ્યાસ પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરેલ છે. તેમના નિરીક્ષણ મુજબ સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયેલી માહિતી માટે મધ્યક અને બહુલક વચ્ચેનો તફાવત એ મધ્યક અને મધ્યસ્થના તફાવત કરતાં લગભગ 3 ગણો હોય છે.

એટલે કે (મધ્યક – બહુલક) = 3 (મધ્યક – મધ્યસ્થ)

આ સંબંધનો ઉપયોગ કરીને બહુલકની કિંમત શોધવા માટે નીચેનું સૂત્ર તારવવામાં આવે છે :

બહુલક = 3 (મધ્યસ્થ) – 2 (મધ્યક)

સંકેતોમાં તેને $M_o = 3M - 2\overline{x}$ વડે લખવામાં આવે છે.

બહુલક શોધવાના આ સૂત્રને આસાદિત સૂત્ર કહેવાય છે; કારણ કે તેમાંથી મળતી કિંમત આશરા પડતી હોય છે, જે આવૃત્તિ-વિતરણ સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયું હોય તેમાં આ સૂત્ર વડે મળતી બહુલકની કિંમત ઋણ હોઈ શકે છે.

બહુલકના આ સૂત્રનો ઉપયોગ નીચેની પરિસ્થિતિમાં કરવામાં આવે છે :

- અવર્ગીકૃત માહિતીમાં દરેક અવલોકન એક જ વખત આવતું હોય.
- વર્ગીકૃત માહિતી માટે મહત્તમ આવૃત્તિ એક કરતાં વધુ વખત આવતી હોય.
- સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન વર્ગલંબાઈ હોય.
- ચલ માટે મિશ્ર આવૃત્તિ-વિતરણ હોય કે જે આંશિક અસતત હોય અને બાકીનું વિતરણ સતત હોય.
- આવૃત્તિ-વિતરણના વક્રનો ડાબી અથવા જમણી તરફનો છેડો ખૂબ જ ખેંચાયેલો હોય.

પ્રવૃત્તિ

ઉદાહરણ 34 માં આપેલ માહિતી પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ શોધો અને આસાદિત સૂત્ર ચકાસો.

ઉદાહરણ 35 : એક જથ્થાબંધના વેપારી માટે તેણે મૂકેલ ઑર્ડર અને તેની પ્રાપ્તિ વચ્ચેનો સમય નીચે પ્રમાણે છે. આ સમયનો બહુલક શોધો.

સમય (કલાક)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
ઑર્ડરની સંખ્યા	2	5	7	5	6	7	3

આપણે જોઈ શકીએ કે મહત્તમ આવૃત્તિ 7 છે જે બે વર્ગો માટે છે તેથી, આપણે બહુલક શોધવા માટે આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

મધ્યક અને મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેની ગણતરી કરવામાં આવી છે :

સમય (કલાકમાં)	ઑર્ડરની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 37.5$ $c = 5$	fd	સંચયી આવૃત્તિ cf
20 - 25	2	22.5	– 3	– 6	2
25 - 30	5	27.5	– 2	– 10	7
30 - 35	7	32.5	– 1	– 7	14
35 - 40	5	37.5	0	0	19
40 - 45	6	42.5	1	6	25
45 - 50	7	47.5	2	14	32
50 - 55	3	52.5	3	9	35
કુલ	$n = 35$			6	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 37.5 + \frac{6}{35} \times 5$

$= 37.5 + \frac{30}{35}$

$= 37.5 + 0.8571$

$= 38.3571$

≈ 38.36

મધ્યસ્થનો વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{35}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 17.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 17મા અને 18મા અવલોકનનો વર્ગ 35 - 40 છે.

હવે $L = 35$, $cf = 14$, $f = 5$, $c = 5$ લેતાં,

મધ્યસ્થ $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

$= 35 + \frac{17.5 - 14}{5} \times 5$

$= 35 + 3.5$

$= 38.5$

આસાદિત સૂત્ર પરથી, $M_o = 3M - 2\bar{x}$

$= 3(38.5) - 2(38.36)$

$= 115.5 - 76.72$

$= 38.78$

આમ, ઑર્ડરના અને તેના પ્રાપ્તિ વચ્ચેના સમયનો બહુલક 38.78 કલાક છે.

ઉદાહરણ 36 : દાંતની તકલીફથી દાંતના ડૉક્ટર પાસે જનાર વ્યક્તિઓની મુલાકાતોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. મુલાકાતોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

મુલાકાતોની સંખ્યા	1	2	3	4 - 7	7 - 10	10 - 15
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	17	11	18	9	4	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ મિશ્ર વિતરણ છે અને વર્ગોની લંબાઈ અસમાન છે. તેથી આપણે બહુલક શોધવા માટે આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું. મધ્યક અને મધ્યસ્થ શોધવા માટેની ગણતરી પાછળના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

મુલાકાતોની સંખ્યા	વ્યક્તિઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	fx	સંચયી આવૃત્તિ cf
1	7	1	7	7
2	11	2	22	18
3	18	3	54	36
4–7	9	5.5	49.5	45
7–10	4	8.5	34	49
10–15	1	12.5	12.5	50
કુલ	**$n = 50$**		**179**	

નોંધ : મધ્યકિંમત x ની કિંમતો મોટી ન હોવાથી આપણે ટૂંકી રીત વાપરવાની જરૂર નથી.

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{179}{50} = 3.58$ મુલાકાતો

મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{50}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 25 મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 25મા અવલોકનની કિંમત 3 છે.

$\therefore M = 3$ મુલાકાતો

આસાદિત સૂત્ર પરથી, $M_o = 3M - 2\bar{x}$

$= 3(3) - 2(3.58)$

$= 9 - 7.16$

$= 1.84$

આમ, દાંતના ડૉક્ટરની મુલાકાતોની સંખ્યાનો બહુલક 1.84 છે.

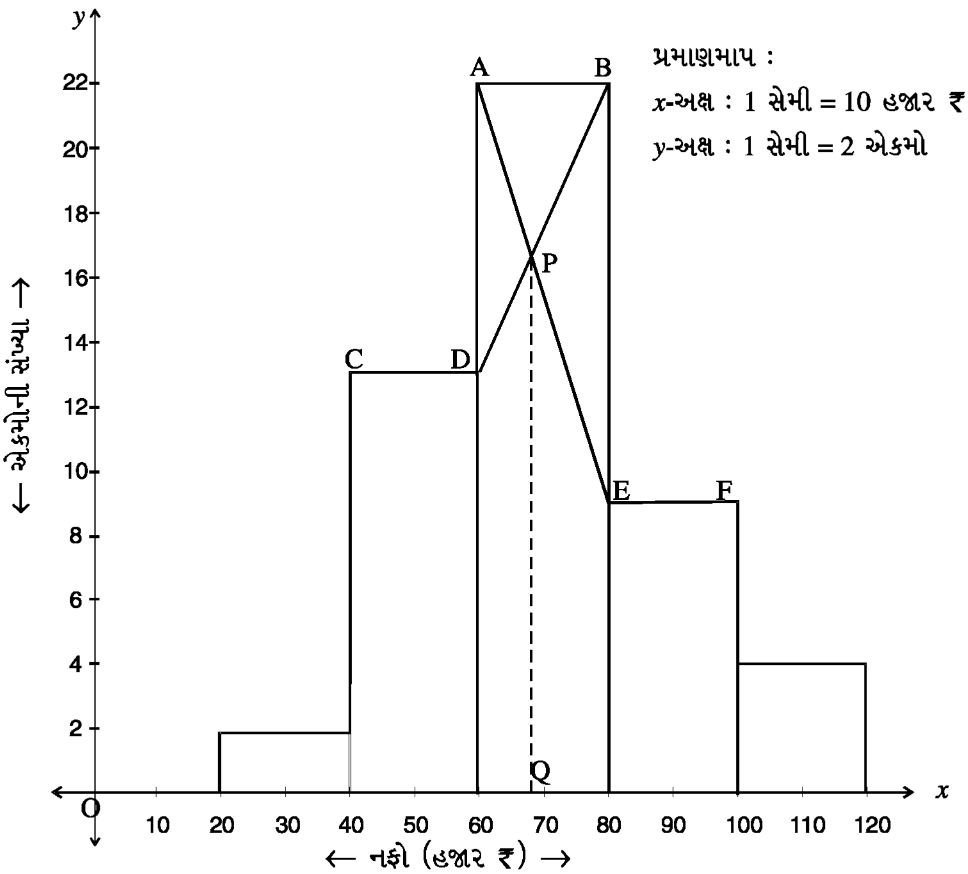
3.5.2 બહુલક માટે આલેખની રીત (Graphical Method)

જો સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન લંબાઈવાળા વર્ગો હોય તો સામાન્ય સંજોગોમાં વપરાતા બહુલકના સૂત્ર (પાના નં.101)નો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી. સમાન કે અસમાન લંબાઈવાળા વર્ગો હોય એવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં આલેખની રીતે બહુલક શોધી શકાય છે, જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણના સ્તંભાલેખનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત ફક્ત એક-બહુલકીય વિતરણો માટે જ વાપરી શકાય છે.

આ રીત સમજવા માટે આપણે નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરીશું જે લઘુઉદ્યોગ એકમોના નફાની (હજાર ₹માં) છે.

નફો (હજાર ₹)	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
એકમોની સંખ્યા	2	13	22	9	4

આ આવૃત્તિ-વિતરણનો સ્તંભાલેખ નીચે પ્રમાણે છે :



બહુલક શોધવા માટે આપણે સૌપ્રથમ સૌથી વધુ લંબાઈ ધરાવતા લંબચોરસને લઈશું જે મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગ માટેનો હશે. અહીં તે વર્ગ 60 - 80 છે. આપણે આ લંબચોરસની ઉપરની બાજુને AB વડે દર્શાવીશું. હવે આપણે આ લંબચોરસની આજુબાજુના બે લંબચોરસો લઈશું. આ લંબચોરસો અનુક્રમે વર્ગો 40–60 અને 80–100 માટેના છે. આ બે લંબચોરસોની ઉપરની બાજુઓને આપણે અનુક્રમે CD અને EF વડે દર્શાવીશું. હવે આપણે બિંદુઓ A અને Eને જોડતો રેખાખંડ AE તેમ જ બીજો રેખાખંડ BD દોરીશું. AE અને BDના છેદનબિંદુને P વડે દર્શાવીશું. બિંદુ P થી x–અક્ષ પર લંબ દોરતાં તે લંબ x–અક્ષને જ્યાં મળે છે તે બિંદુને Q વડે દર્શાવીશું. ઊગમબિંદુ O અને બિંદુ Q વચ્ચેનુ અંતર આપણને બહુલકની કિંમત આપશે. ઉપરના સ્તંભાલેખ પરથી જોઈ શકાય કે OQ = 68 (હજાર ₹). આમ, આ લઘુઉદ્યોગ એકમોના નફાનો બહુલક ₹68 (હજાર) છે.

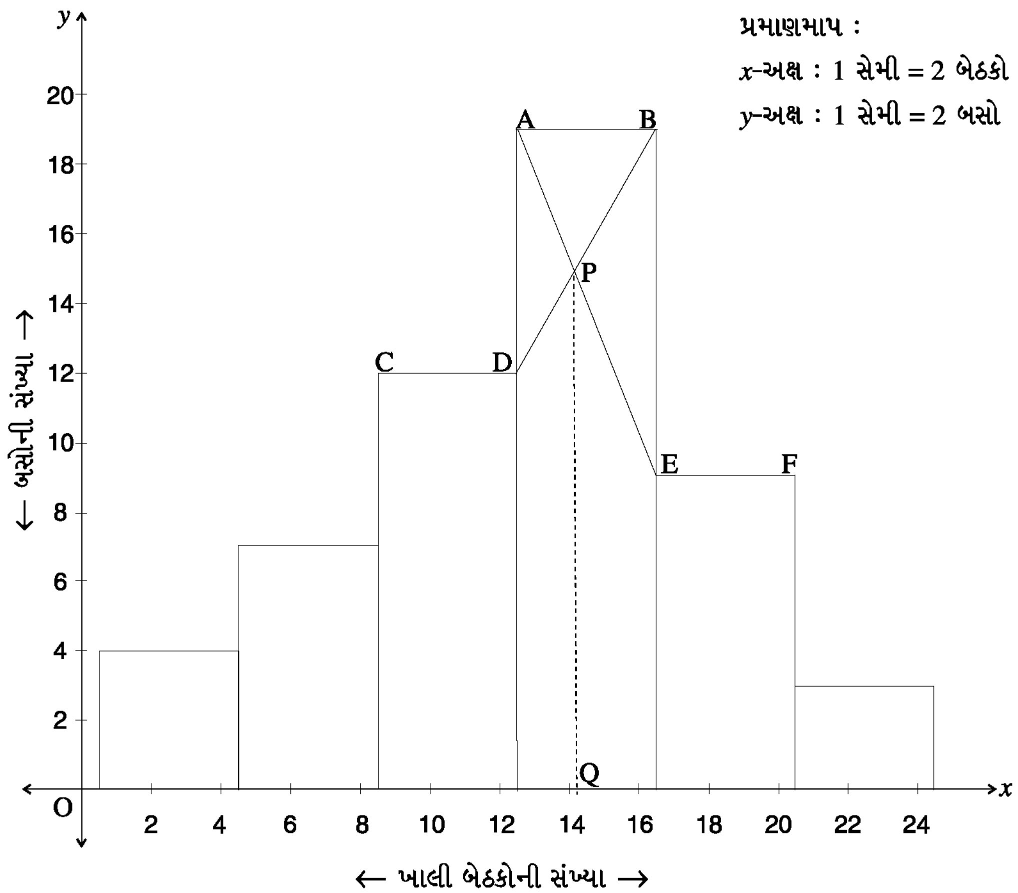
ઉદાહરણ 37 : એક ડેપોમાંથી નીકળતી બસોમાં બસદીઠ ખાલી બેઠકોની સંખ્યા નીચેની માહિતીમાં દર્શાવેલ છે. આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને બહુલક શોધો.

ખાલી બેઠકોની સંખ્યા	1 - 4	5 - 8	9 - 12	13 - 16	17 - 20	21 - 24
બસોની સંખ્યા	4	7	12	19	9	3

આ અનિવારક પ્રકારનું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ છે. તેથી આપણે સ્તંભાલેખ દોરવા માટે દરેક વર્ગનાં સીમાબિંદુ મેળવીશું.

ખાલી બેઠકોની સંખ્યા x	0.5–4.5	4.5–8.5	8.5–12.5	12.5–16.5	16.5–20.5	20.5–24.5
બસોની સંખ્યા	4	7	12	19	9	3

આ વિતરણનો સ્તંભાલેખ નીચે દોરેલ છે :



આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરતાં OQ = 14.2 મળે છે. આમ, બસોમાં ખાલી બેઠકોની સંખ્યાનો બહુલક 14.2 છે.

ઉદાહરણ 38 : એક કંપનીના શૅરના ભાવનું જુદા જુદા દિવસોનું વિતરણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. શૅરના ભાવનો બહુલક આલેખની રીતે મેળવો.

શૅરના ભાવ (₹)	**200 - 210**	**210 - 220**	**220 - 240**	**240 - 260**	**260 - 300**
દિવસોની સંખ્યા	4	13	36	16	8

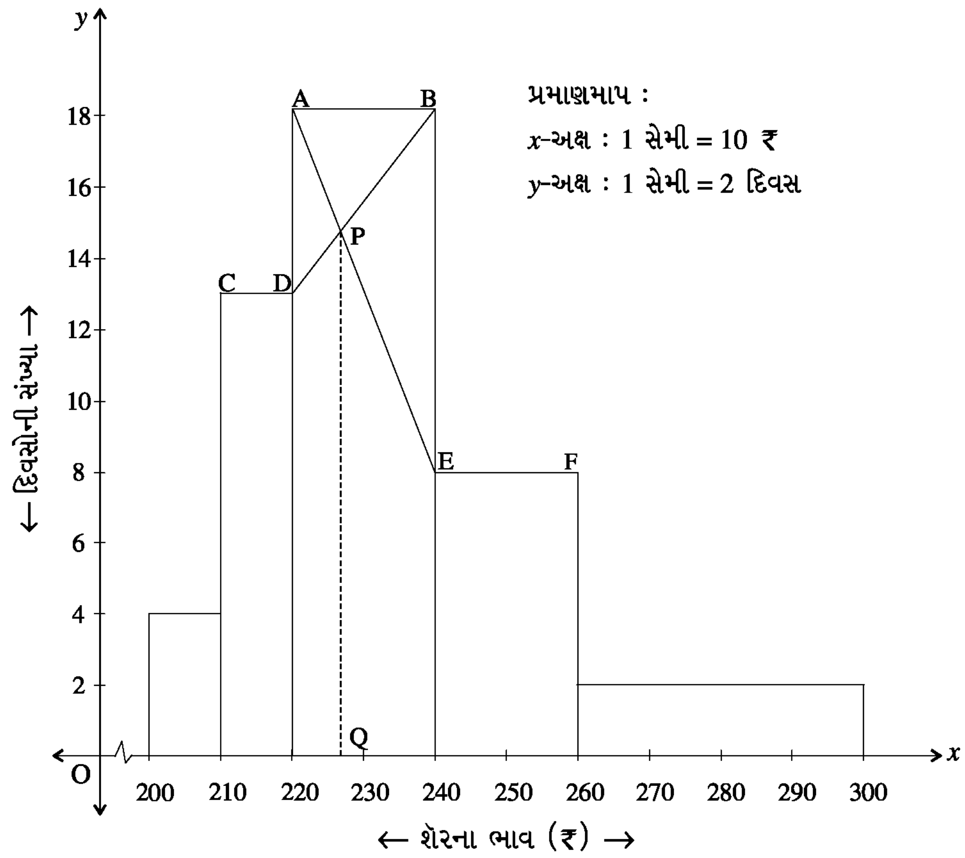
આલેખની રીતે બહુલક મેળવવા માટે સ્તંભાલેખ દોરવાનો છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગલંબાઈ સમાન નથી, તેથી સૌપ્રથમ આપણે ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈના સાપેક્ષમાં સપ્રમાણ આવૃત્તિઓ મેળવીશું જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

શૅરનો ભાવ	**વર્ગલંબાઈ**	**આવૃત્તિ**	**સપ્રમાણ આવૃત્તિ**
200 - 210	10	4	$\frac{4}{10} \times 10 = 4$
210 - 220	10	13	$\frac{13}{10} \times 10 = 13$
220 - 240	20	36	$\frac{36}{20} \times 10 = 18$
240 - 260	20	16	$\frac{16}{20} \times 10 = 8$
260 - 300	40	8	$\frac{8}{40} \times 10 = 2$

દરેક વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ = $\frac{\text{વર્ગની આવૃત્તિ}}{\text{વર્ગલંબાઈ}}$ × ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈ

અહીં ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈ 10 છે.

સપ્રમાણ આવૃત્તિ વડે દોરેલ સ્તંભાલેખ નીચે પ્રમાણે હશે :



હવે, આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને OQ = 227 ₹

આમ, શૅરોના ભાવનો બહુલક ₹ 227 છે.

બહુલકના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

(1) તે સમજવામાં તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.

(2) તે માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવી શકાય.

(3) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની વધુ પડતી અસર થતી નથી.

(4) તેની કિંમત આલેખ વડે મેળવી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી.

(2) આપેલ ચલ માટે એકથી વધુ બહુલકો હોઈ શકે છે. જ્યારે કેટલીક વખત બહુલક શોધી શકાતો નથી.

(3) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત હોતો નથી.

(4) મધ્યકની સરખામણીમાં તેમાં નિદર્શનની સ્થિરતા ઓછી હોય છે.

(5) તે વિશેષ બૈજિક ક્રિયા માટે અનુકૂળ નથી.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના બુદ્ધિઆંક (IQ) નીચે આપેલા છે. વિદ્યાર્થીના બુદ્ધિઆંકનો બહુલક શોધો.

146, 134, 143, 144, 138, 145, 153, 138, 138, 146, 140, 135.

2. નીચેનું કોષ્ટક એક બેકરીમાંથી દર દિવસે વેચાયેલ કેકની સંખ્યા દર્શાવે છે. કેકના વેચાણનો બહુલક શોધો.

કેકની સંખ્યા	10	12	13	16	17	18
દિવસોની સંખ્યા	5	9	25	16	10	7

3. એક વૃદ્ધાશ્રમની 48 વ્યક્તિઓની ઉંમરનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. બહુલક શોધવા માટે કયું સૂત્ર યોગ્ય થશે ? કેમ ? તમે પસંદ કરેલા સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને વૃદ્ધાશ્રમની વ્યક્તિઓની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	50 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 85	85 - 100
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	6	10	19	9	4

4. દોડવાની સ્પર્ધામાં 8 સ્પર્ધકોએ લીધેલા સમય (સેકન્ડમાં) દર્શાવતી નીચેની માહિતી પરથી તેના બહુલક વિશે તમારું મંતવ્ય જણાવો.

25.2, 26.5, 28.6, 32.1, 29.0, 29.3, 31.3, 27.8

5. નીચેનું કોષ્ટક એક બાગમાંથી એકત્રિત કરેલા 86 સફરજનોના વજનની માહિતી આપે છે. સફરજનોના વજનનો બહુલક શોધો :

સફરજનનું વજન (ગ્રામ)	120 - 130	130 - 140	140 - 150	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
સફરજનોની સંખ્યા	8	13	19	23	10	8	5

આ માહિતી પરથી આલેખની રીતે પણ બહુલક મેળવો.

6. 50 કુટુંબોના માસિક ઘરભાડાની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઘરભાડું (હજાર ₹)	0–5	5–10	10–20	20–30	30–50
કુટુંબોની સંખ્યા	1	7	14	16	12

આલેખની રીતે ઘરભાડાનો બહુલક મેળવો.

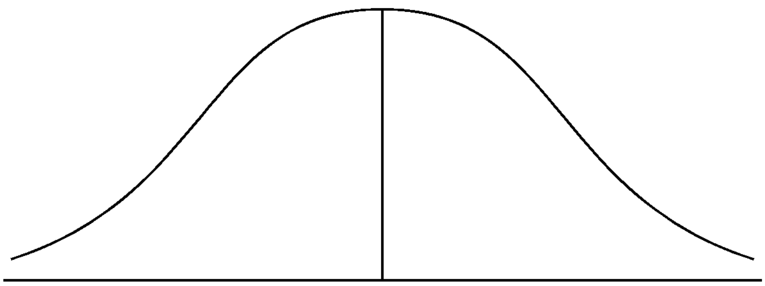
મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો માટેનાં કેટલાંક પરિણામો :

(1) જો આપેલ માહિતીમાં બધાં અવલોકનોની કિંમત સમાન હોય તો મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બધાં માપોની કિંમત સરખી હોય છે.

દાખલા તરીકે, એક વર્ગમાંથી પસંદ કરેલા 5 વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર (વર્ષમાં) 15, 15, 15, 15, 15 હોય, તો મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બધાં માપની કિંમત 15 થાય છે.

એટલે કે, $\bar{x} = M = M_o = G = \bar{x}_w = 15$

(2) સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ માહિતી માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો સમાન હોય છે.



(3) ચલ x ને કોઈ શૂન્યેતર અચલ b વડે ગુણવામાં આવે અને તેમાં અચલ a ઉમેરવામાં આવે તો ચલ $y = bx + a$ મળે છે.

મધ્યક વિશે આપણે જોયું છે કે x ના મધ્યક $\bar{x}$ નો ઉપયોગ કરીને આપણે ચલ y નો મધ્યક $\bar{y} = b\bar{x} + a$ મેળવી શકીએ છીએ. તે જ રીતે x નો મધ્યસ્થ અથવા બહુલક પ્રાપ્ત હોય તો ચલ y નો અનુક્રમે મધ્યસ્થ અથવા બહુલક શોધી શકાય છે.

y નો મધ્યસ્થ $= b$ (x નો મધ્યસ્થ) $+ a$

y નો બહુલક $= b$ (x નો બહુલક) $+ a$

ઉદાહરણ 39 :

(1) એક ચલ x નો મધ્યક 25 છે. x માંથી 3 બાદ કરવામાં આવે અને ત્યાર બાદ તેને 2 વડે ભાગવામાં આવે તો મળતા ચલનો મધ્યક શોધો.

(2) વસ્તુનો ભાવ (p) અને તેની માંગ (d) વચ્ચેનો સંબંધ $d = 50 - 2p$ છે. જો ભાવનો મધ્યસ્થ ₹ 11 હોય, તો માંગનો મધ્યસ્થ શોધો.

(3) એક કંપનીમાં કામ કરતા કર્મચારીઓના વેતનનો બહુલક ₹8500 છે. કંપનીએ કર્મચારીઓના રાહતફાળા માટે દરેક કર્મચારીના વેતનમાંથી 2 % રકમ કાપવાનો નિર્ણય લીધો છે. તે ફાળાની રકમનો બહુલક શોધો.

(1) અહીં $y = \frac{x-3}{2}$. $\bar{x} = 25$ હોવાથી

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}-3}{2}$$

$$= \frac{25-3}{2}$$

$$= \frac{22}{2} = 11$$

આમ, y નો મધ્યક 11 છે.

(2) $d = 50 - 2p$ અને ભાવ (p) નો મધ્યસ્થ 11 છે.

$\therefore$ માંગ (d)નો મધ્યસ્થ $= 50 - 2$ (p નો મધ્યસ્થ)

$= 50 - 2 (11)$

$= 50 - 22$

$= 28$

આમ, માંગનો મધ્યસ્થ 28 એકમો થશે.

(3) કર્મચારીઓના વેતનનો (x) બહુલક ₹8500 છે.

રાહતફાળાની રકમ (y) $= 2\ \% \times x$

$= 0.02\ x$

$\therefore$ રાહતફાળાની રકમનો (y) બહુલક $= 0.02$ (x નો બહુલક)

$= 0.02 \times 8500$

$= 170$

આમ, રાહતફાળા માટે કપાયેલ રકમનો બહુલક ₹170 છે.

મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની સામાન્ય સરખામણી માટે નીચેના ચિત્રનો અભ્યાસ કરો :

$x =$ બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા

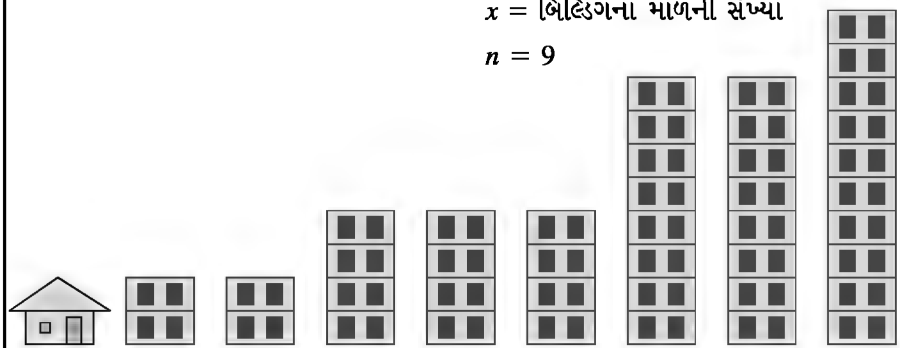
$x = 2$ $\quad x = 10$ $\quad x = 4$ $\quad x = 1$ $\quad x = 4$ $\quad x = 8$ $\quad x = 4$ $\quad x = 2$ $\quad x = 8$

$$\bar{x} = \frac{2+10+4+1+4+8+4+2+8}{9} = \frac{43}{9} = 4.78$$

મધ્યક શોધવા માટે અવલોકનોને ક્રમમાં ગોઠવવા જરૂરી નથી.

$x =$ બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા

$n = 9$

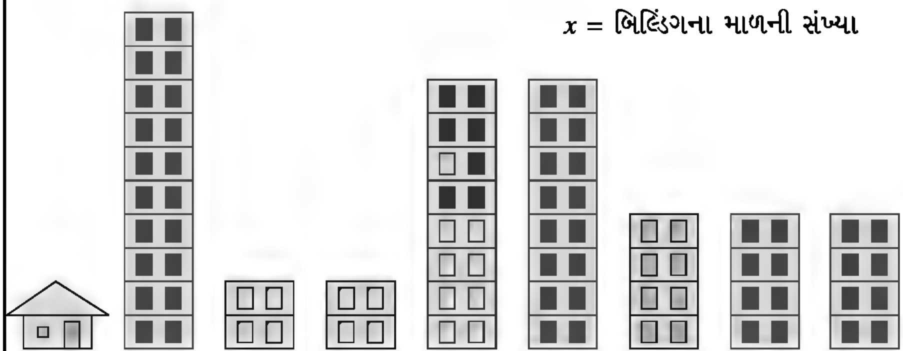


$x = 1$ $\quad x = 2$ $\quad x = 2$ $\quad x = 4$ $\quad x = 4$ $\quad x = 4$ $\quad x = 8$ $\quad x = 8$ $\quad x = 10$

$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત = 5 મી કિંમત = 4

મધ્યસ્થ શોધવા માટે અવલોકનોને તેઓની કિંમતના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે.

$x =$ બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા



$x = 1$, $f = 1$; $\quad x = 10$, $f = 1$; $\quad x = 2$, $x = 2$, $f = 2$; $\quad x = 8$, $x = 8$, $f = 2$; $\quad x = 4$, $x = 4$, $x = 4$, $f = 3$

M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમત = 4

બહુલક શોધવા માટે સમાન કિંમત ધરાવતાં અવલોકનોને એક સાથે ગોઠવવામાં આવે છે.

3.6 મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલકનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં વિવિધ માપોના લાભ અને ગેરલાભની ચર્ચા કરી છે. તેનાથી સ્પષ્ટ થાય છે કે કોઈ એક જ સરેરાશ બધા પ્રકારની વ્યવહારુ સમસ્યાઓમાં ઉપયોગી થઈ શકે તેમ નથી. દરેક સરેરાશના કોઈ વિશિષ્ટ ઉપયોગો હોય છે તેમજ તેની કેટલીક મર્યાદાઓ હોય છે.

તમામ સરેરાશોમાં મધ્યક સારી સરેરાશની લગભગ બધી જ જરૂરિયાતોને સંતોષે છે, તેથી માહિતીના વિશ્લેષણ માટે મહત્તમ પરિસ્થિતિઓમાં તેનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ હોવું તે મધ્યકનું સૌથી અગત્યનું લક્ષણ છે. આપેલ સમષ્ટિના વિવિધ ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે અથવા બે સમષ્ટિઓની તુલના કરવા માટે વપરાતી ઉચ્ચતર આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓમાં અભ્યાસ માટે લીધેલ ચલના પ્રતિનિધિ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ બાબતો મધ્યકને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું એક ઇષ્ટતમ (optimum) માપ બનાવે છે.

પણ જો માહિતી સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થઈ હોય તો મધ્યક વડે સમગ્ર માહિતીનું સાચું પ્રતિનિધિત્વ યોગ્ય રીતે થઈ શકતું નથી. સમાજશાસ્ત્ર, ખેતીવિષયક અભ્યાસ કે ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓમાં આવતા ઘણા ચલો સમાન રીતે વિતરિત થયેલા મળતા નથી. આવી પરિસ્થિતિઓમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિનું વધુ સારું માપ મધ્યસ્થ હોય છે. શિક્ષણ, કુશળતા, ગ્રાહકનો સંતોષ જેવી ગુણાત્મક માહિતી માટે મધ્યસ્થનો સરેરાશ તરીકે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

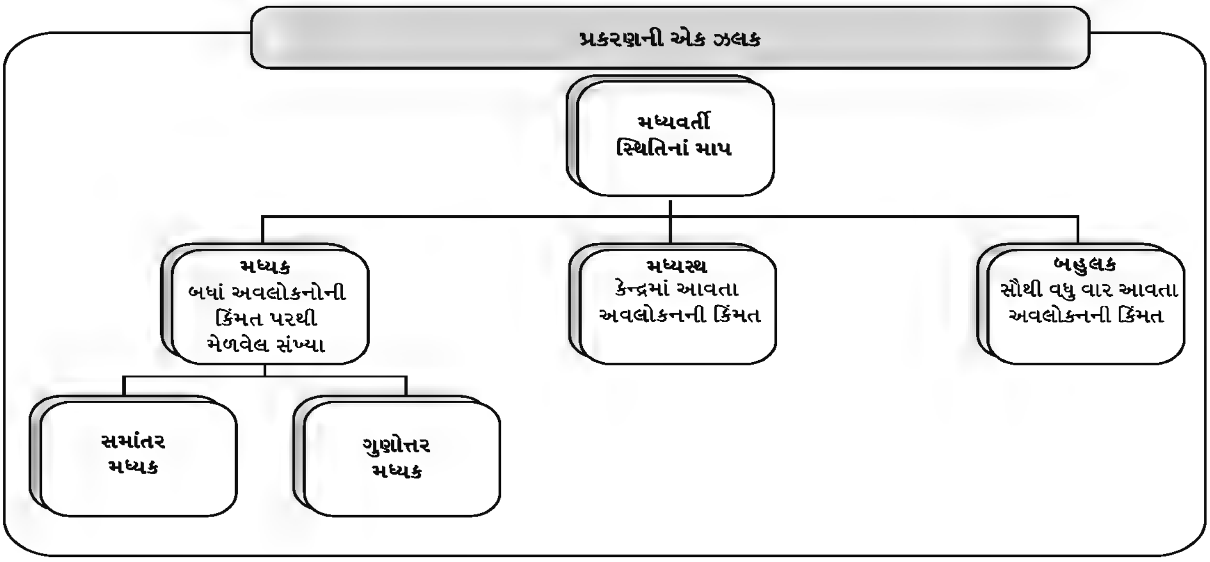
વેપાર અને વાણિજ્ય ક્ષેત્રોમાં બહુલકનો વિશેષ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ગુણાત્મક માહિતી માટે પણ બહુલક ઉપયોગી નીવડે છે. રેસ્ટોરન્ટમાં પિરસાતી વાનગીઓ અને તેનો સ્વાદ નક્કી કરતી વખતે મહત્તમ ગ્રાહકોની પસંદગી અને રુચિ ધ્યાનમાં લેવાય છે તે બહુલકનું ઉદાહરણ છે. તૈયાર કપડાંની કંપનીઓ તેમજ પગરખાં બનાવતી કંપનીઓ સરેરાશ મેળવવા માટે બહુલકનો મોટા પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરે છે.

આમ, સરેરાશની પસંદગી નીચેની બાબતો પર આધારિત હોય છે :

(1) માહિતીનું સ્વરૂપ (2) અભ્યાસ હેઠળના ચલનાં લક્ષણો (3) અભ્યાસનો હેતુ (4) માહિતીના વર્ગીકરણનો પ્રકાર (5) ઉચ્ચતર આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ માટે સરેરાશની જરૂરિયાત

સારાંશ

- કોઈ પણ ચલનાં અવલોકનો જે કેન્દ્રીય કિંમત આસપાસ સંકલિત થાય છે તેને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ અથવા સરેરાશ કહેવાય છે.
- મધ્યક સૌથી વધુ પ્રચલિત સરેરાશ છે.
- ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકોને સ્થાનીય સરેરાશો કહેવાય છે.
- અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી મધ્યક મળે છે.
- જો બે કે તેથી વધુ સમૂહોના મધ્યકો જ્ઞાત હોય તો સમગ્ર માહિતી માટે મિશ્ર મધ્યક શોધવામાં આવે છે.
- અવલોકનોને તેમના મહત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપીને ભારિત મધ્યક શોધવામાં આવે છે.
- n ધન અવલોકનોના ગુણાકારના n મા મૂળને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે.
- માહિતીને ક્રમમાં ગોઠવતાં તેના મધ્યસ્થાને આવતી કિંમતને મધ્યસ્થ કહેવાય છે.
- ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને અનુક્રમે 4, 10 અને 100 ભાગમાં વહેંચે છે.
- સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા અવલોકનને બહુલક કહેવાય છે.
- મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેના સૂત્ર $M_o = 3M - 2\bar{x}$ ને આસાદિત સૂત્ર કહેવાય છે.



સૂત્રોની યાદી :

(1) મધ્યક :

માહિતીનો પ્રકાર		ટૂંકી રીત
અવર્ગીકૃત માહિતી	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$
વર્ગીકૃત માહિતી	$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

(2) મિશ્ર મધ્યક : $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$

(3) ભારિત મધ્યક : $\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$

(4) ગુણોત્તર મધ્યક : $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}$

મધ્યસ્થ અને અન્ય સ્થાનીય સરેરાશો :

	સ્થાનીય માપ	અવર્ગીકૃત માહિતી અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ	સતત આવૃત્તિ-વિતરણ
(5)	મધ્યસ્થ	$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$
(6)	j મો ચતુર્થક	$Q_j = j\left(\frac{n+1}{4}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$Q_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$
(7)	j મો દશાંશક	$D_j = j\left(\frac{n+1}{10}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$D_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$
(8)	j મો શતાંશક	$P_j = j\left(\frac{n+1}{100}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$P_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$

9. બહુલક :

અવર્ગીકૃત માહિતી	અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ	સતત આવૃત્તિ-વિતરણ
M_o = સૌથી વધુ વાર આવતા અવલોકનની કિંમત	M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા અવલોકનની કિંમત	$M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

10. આસાદિત સૂત્ર : $M_o = 3M - 2\overline{x}$

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. કઈ સરેરાશ પર અતિ મોટા અથવા અતિ નાના કિંમતોની સૌથી વધુ અસર થાય છે ?

(a) સમાંતર મધ્યક (b) મધ્યસ્થ (c) બહુલક (d) ગુણોત્તર મધ્યક

2. નીચેનામાંથી કઈ કિંમત આપણને મધ્યસ્થ આપશે ?

(a) D_7 (b) Q_1 (c) P_{45} (d) P_{50}

3. નીચેનામાંથી કયા સંજોગોમાં મધ્યક શોધી શકાતો નથી ?

(a) વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય, (b) ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય,

(c) વર્ગોની સંખ્યા 5થી વધુ હોય, (d) અનિવારક પ્રકારના વર્ગો હોય

4. કોઈ પણ માહિતી માટે નીચેનામાંથી સાચો સંબંધ કયો ?

(a) $\overline{x} \le G$ (b) $\overline{x} = G$ (c) $\overline{x} \ge G$ (d) $\overline{x} > G$

5. સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયેલી માહિતી માટે નીચેનામાંથી કયું પરિણામ સાચું છે ?

(a) $\overline{x} = M = M_o$ (b) $\overline{x} > M > M_o$

(c) $\overline{x} < M < M_o$ (d) $\overline{x} < M > M_o$

6. જો 10 અવલોકનોનો મધ્યક 15 હોય, તો અવલોકનોનો સરવાળો કેટલો હશે ?

(a) 25 (b) 150 (c) 5 (d) 1.5

7. 5 અવલોકનોની માહિતી માટે $\Sigma(x-9)=0$ હોય તો મધ્યકની કિંમત કેટલી હોય ?

(a) $\overline{x}=0$ (b) $\overline{x}=5$ (c) $\overline{x}=9$ (d) $\overline{x}=45$

8. અવલોકનો 7, 9, 9, 1, 7, 9, 4, 9, 1નો બહુલક કેટલો છે ?

(a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 9

9. 50 અવલોકનોના સમૂહમાં મધ્યસ્થ એટલે શું ?

(a) 25મા અવલોકનની કિંમત, (b) 26મા અવલોકનની કિંમત

(c) 25.5મા અવલોકનની કિંમત (d) 26.5મા અવલોકનની કિંમત

10. 4 અને 9નો ગુણોત્તર મધ્યક કેટલો થશે ?

(a) 4 (b) 6 (c) 6.5 (d) 36

11. એક ચલનો મધ્યક 15 અને મધ્યસ્થ 20 હોય, તો આસાદિત સૂત્રથી બહુલક કેટલો થશે ?

(a) 30 (b) 5 (c) 35 (d) 17.5

12. 10 અવલોકનોનો મધ્યસ્થ 14 છે. જો દરેક અવલોકન બમણું થાય તો મળતાં અવલોકનોનો મધ્યસ્થ કેટલો હશે ?

(a) 10 (b) 28 (c) 7 (d) 1.4

13. એક માહિતીનાં બધાં અવલોકનોની સમાન કિંમત 16 છે, તો તેનો બહુલક કેટલો હશે ?

(a) 8 (b) 2 (c) 16 (d) 4

14. નીચેનામાંથી કયું વિધાન અસત્ય છે ?

(a) ચતુર્થકો વડે માહિતીનાં અવલોકનો 4 ભાગમાં વહેંચાય છે.

(b) મધ્યક આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 2 ભાગમાં વહેંચે છે.

(c) શતાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 100 ભાગમાં વહેંચે છે.

(d) દશાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 10 ભાગમાં વહેંચે છે.

15. સ્ટીલના પાઇપ બનાવતી એક કંપનીના 6 પાઇપોની લંબાઈ (મીટરમાં) નીચે પ્રમાણે છે :

1.05, 1.15, 0.98, 1.12, 0.89, 0.95

નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(a) બહુલક = 1 મી (b) બહુલક = 1.15 મી (c) બહુલક = 0.98 મી (d) બહુલક પ્રાપ્ય નથી.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. મધ્યકનો કોઈ પણ એક લાભ જણાવો.

2. જો અવલોકનોનું મહત્ત્વ જુદું જુદું હોય તો કઈ સરેરાશ વાપરવી જોઈએ ?

3. ગમે તે બે સ્થાનીય સરેરાશોનાં નામ આપો.

4. મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેનું આસાદિત સૂત્ર લખો.

5. કઈ પરિસ્થિતિમાં ગુણોત્તર મધ્યક શોધી શકાતો નથી ?

6. બહુલકની વ્યાખ્યા આપો.

7. મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક વચ્ચેનું આસાદિત સૂત્ર આપનાર આંકડાશાસ્ત્રીનું નામ આપો.

8. 10 અવલોકનોનો મધ્યસ્થ 55 છે. જો મહત્તમ અવલોકનની કિંમત 100થી વધીને 110 થાય, તો મધ્યસ્થની નવી કિંમત શોધો.

9. એક ચલ x નો મધ્યક 9 છે. ચલ $y = x + 4$નો મધ્યક કેટલો હશે ?

10. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ ધરાવતા ચલનો બહુલક શોધો :

x	5	10	15	20	25
f	12	48	23	10	2

11. બે સંખ્યાઓનો મધ્યક 5 છે. જો એક સંખ્યા 6 હોય તો બીજી સંખ્યા શોધો.

12. અવલોકનો 15, 4, 7, 20, 2, 7, 13 માટે પ્રથમ ચતુર્થક મેળવો.

13. ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય તેવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે કઈ સરેરાશ મેળવી શકાય ?

14. એક ચલ માટે $Q_3 = 25.75$ હોય તો P_{75} શોધો.

15. એક ફેરિયાની દૈનિક માંગનો મધ્યસ્થ 15 મેળવેલ છે. જો તે દરેક વસ્તુ ₹10ના ભાવે વેચતો હોય તો તેના વકરાનો મધ્યસ્થ કેટલો હશે ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ભારિત મધ્યકની વ્યાખ્યા આપો.

2. મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપનો અર્થ સમજાવો.

3. બહુલકના લાભ જણાવો.

4. મિશ્ર મધ્યક સમજાવો.

5. કયા પ્રકારની માહિતીમાં મધ્યક કરતાં મધ્યસ્થ ચઢિયાતું માપ હોય છે ?

6. યોગ્ય સરેરાશની પસંદગી કરવા માટે કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?

7. એક ચલના મધ્યક અને બહુલક અનુક્રમે 5.5 અને 6.4 છે. મધ્યસ્થની કિંમત શોધો.

8. બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર મધ્યક 8 છે. જો પ્રથમ સંખ્યા 4 હોય તો બીજી સંખ્યા શોધો.

9. એક ફેક્ટરીના સાપ્તાહિક ઉત્પાદન (x)નો મધ્યક 81 એકમો છે. જો ઉત્પાદન-ખર્ચ $y = 3x + 50$ હોય, તો ખર્ચનો મધ્યક શોધો.

10. અવલોકનો $a - 5$, $a + 1$, $a + 2$, $a - 3$ અને a નો મધ્યસ્થ 10 છે. a ની કિંમત શોધો.

11. એક વર્ગના 40 વિદ્યાર્થીઓના ગણિત વિષયમાં ગુણનો મધ્યક 76 છે. જ્યારે બીજા વર્ગના 50 વિદ્યાર્થીઓ માટે તે 85 છે. બંને વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના ગણિત વિષયના ગુણનો મધ્યક મેળવો.

12. એક વિસ્તારમાં રહેતાં કુટુંબોમાં કુટુંબદીઠ વાહનોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપી છે. વાહનોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

વાહનોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા	2	4	9	7	3	25

13. નીચેની માહિતી પરથી ચલ x નો ભારિત મધ્યક શોધો :

ચલ x	1500	800	200
ભાર w	5	4	1

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આદર્શ સરેરાશનાં લક્ષણો જણાવો.

2. ગુણોત્તર મધ્યકની વ્યાખ્યા આપો અને તેના લાભ તથા ગેરલાભ જણાવો.

3. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે બહુલકનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

4. સ્થાનીય સરેરાશો સમજાવો.

5. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે મધ્યસ્થ અને મધ્યકને સરખાવો.

6. કઈ સરેરાશને ઇષ્ટતમ સરેરાશ કહેવાય છે ? શા માટે ?

7. એક રાજ્યનાં ચાર વર્ષોના આર્થિક વિકાસના દર અનુક્રમે 2 %, 2.5 %, 4 %, 3 % છે. યોગ્ય સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને સરેરાશ વિકાસદર શોધો.

8. મોબાઇલ ફોનની એક દુકાનના દૈનિક વેચાણની નીચેની માહિતી પરથી D_7 અને P_{15} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો.

મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા	4	6	7	8	10	12
દિવસોની સંખ્યા	3	9	15	23	8	2

9. એક પરફ્યુમ ઉત્પાદકના મશીનથી ભરેલ બોટલોમાં પરફ્યુમના જથ્થાનો મધ્યક 29.6 મિલિ અને 30.4 મિલિની વચ્ચે હોવો જોઈએ. તપાસ માટે લીધેલ 7 બોટલોમાં પરફ્યુમનો જથ્થો (મિલિમાં) નીચે પ્રમાણે છે :

30.2, 28.9, 29.2, 30.1, 29.4, 31.3, 31.4

શું આ મશીન યોગ્ય રીતે કામ કરે છે ?

10. એક વર્ગના 34 છોકરાઓને મળેલા ગુણનો મધ્યક 57 છે. તે વર્ગના બધા 60 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક 59 છે. છોકરીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

11. એક માહિતીમાં 50 અવલોકનોના મધ્યકની કિંમત 35 હતી. પાછળથી માલૂમ પડ્યું કે એક અવલોકનની કિંમત 50 લેવામાં આવી હતી જે ખોટી હતી. આ અવલોકનને બાદ કરતા બાકીનાં અવલોકનોનો મધ્યક શોધો.

12. અર્થશાસ્ત્ર વિષયની પરીક્ષામાં એક સમૂહના 18 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 3 વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા. પાસ થયેલ 15 વિદ્યાર્થીઓના ગુણ નીચે પ્રમાણે છે :

42, 65, 53, 75, 43, 50, 68, 57, 79, 48, 51, 61, 55, 70, 64. બધા 18 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યસ્થ શોધો.

13. એક કંપનીના દૈનિક વેચાણનો મધ્યક 126.2 છે. એક નવી જાહેરાતનીતિ અપનાવ્યા બાદ 10 દિવસના વેચાણના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે :

156, 125, 162, 153, 130, 124, 127, 142, 149, 121. શું નવી જાહેરાતનીતિથી વેચાણનો મધ્યક વધ્યો છે તેમ કહેવાય ?

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. જુદાં જુદાં કુટુંબોના વીજળીનાં બિલોમાં વપરાશના યુનિટોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

યુનિટની સંખ્યા	200થી ઓછી	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 કે તેથી વધુ
કુટુંબોની સંખ્યા	7	13	24	16	10

વપરાશના યુનિટોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

2. એક વેપારીના સપ્તાહદીઠ નફા-નુકસાનની પ્રાપ્ય માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. નફાનો બહુલક શોધો.

નફો (હજાર ₹)	–2 - 0	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10
સપ્તાહની સંખ્યા	4	8	14	6	2	1

3. એક કરિયાણાની દુકાનમાંથી દરરોજ વેચાયેલ ઘઉંની ગૂણોની સંખ્યા નીચે આપેલ છે :

ગૂણોની સંખ્યા	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54	55 અને વધુ
દિવસોની સંખ્યા	9	17	32	24	10	5	3

વેચાયેલ ગૂણોની સંખ્યા માટે Q_1 અને D_4 શોધો.

4. એક કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનો મધ્યક શોધો.

ઊંચાઈ (સેમી)	150 - 155	155 - 160	160 - 165	165 - 170	170 - 175	175 - 180	180 - 185
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	10	20	17	15	4	1

5. એક વિસ્તારમાં રહેતી 130 વ્યક્તિઓની માસિક આવક (હજાર ₹માં) નીચે પ્રમાણે છે :

આવક (હજાર ₹)	4થી ઓછી	4 - 8	8 - 12	12 - 20	20 - 28	28 - 36
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	6	14	31	35	28	16

આવકનો મધ્યસ્થ શોધો.

6. એક જિલ્લાના 70 ગામડાઓની વસ્તી (હજારમાં) વિશેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

વસ્તી (હજાર)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ગામડાઓની સંખ્યા	6	18	22	15	9

આલેખની રીતે વસ્તીનો બહુલક શોધો.

7. એક પરીક્ષામાં 60 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	8	20	16	9	4

8. એક ઑફિસના 50 કર્મચારીઓની તેમના કમ્પ્યૂટરના વપરાશના સમયની તપાસ કરવામાં આવી. નીચેના કોષ્ટકમાં તેની વિગતો આપી છે :

સમય (કલાક)	5 - 5.5	5.5 - 6	6 - 6.5	6.5 - 7	7 - 7.5	7.5 - 8	8 - 8.5	8.5 - 9
કર્મચારીઓની સંખ્યા	1	3	5	11	15	9	4	2

કમ્પ્યૂટર વપરાશના સમય માટે ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3 શોધો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક શાળાના 55 વિદ્યાર્થીઓના ગુણની માહિતી નીચે આપેલ છે.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	7	11	14	9	7	3

(i) જો 30 % વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા હોય તો પાસ થવા માટેના જરૂરી ગુણ મેળવો.

(ii) જો સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા 5 % વિદ્યાર્થીઓને શિષ્યવૃત્તિ આપવાની હોય તો તેમાં ન્યૂનતમ ગુણ કેટલા હશે ?

2. બે બ્રાન્ડના ટાયરોની તેમના આયુષ્ય વિશેની સરખામણી કરવાની છે. નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે :

આયુષ્ય (હજાર કિમી)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
A બ્રાન્ડના ટાયરોની સંખ્યા	4	7	10	5	3	1
B બ્રાન્ડના ટાયરોની સંખ્યા	5	8	15	9	6	2

મધ્યકના આધારે કયા બ્રાન્ડના ટાયર વધુ સારાં છે ?

3. એક કંપનીની જુદા જુદા દિવસે વેચાયેલ મોટરોની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. તે પરથી વેચાયલ મોટરોની સંખ્યાનો બહુલક યોગ્ય સૂત્રથી શોધો.

મોટરોની સંખ્યા	0 - 10	10 - 15	15 - 20	24	26	28
દિવસોની સંખ્યા	8	14	16	11	4	2

4. એક રાજ્યના જુદા જુદા ભાગના ખેડૂતોએ મેળવેલા એકરદીઠ ઘઉંના પાક વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે :

એકરદીઠ પાક (ક્વિંટલ)	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ખેડૂતોની સંખ્યા	12	23	45	29	7

ઘઉંના એકરદીઠ પાકના મધ્યક અને મધ્યસ્થ મેળવો.

5. એક નાટ્યગૃહના 150 પ્રેક્ષકોની ઉંમરનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ઉંમર (વર્ષ)	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 80
પ્રેક્ષકોની સંખ્યા	6	13	19	52	34	18	8

પ્રેક્ષકોની ઉંમરનો બહુલક આલેખની રીતે શોધો.

6. એક ઉત્પાદક એવું માને છે કે તેના દૈનિક ઉત્પાદનનો બહુલક 70 છે. આ ઉત્પાદિત એકમની ડિઝાઇનમાં થોડા ફેરફાર કર્યા પછી લીધેલ માહિતીમાં ઉત્પાદનનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળે છે :

એકમોની સંખ્યા	60 - 64	65 - 69	70 - 74	75 - 79	80 - 84	85 - 89	90 - 94
દિવસોની સંખ્યા	5	7	10	8	5	3	2

શું તેના ઉત્પાદનની સંખ્યાના બહુલકમાં કોઈ ફેરફાર થયો છે ?

7. એક દુકાનમાંથી દરરોજ વેચાતા બે કંપનીઓના તેલના ડબાના વેચાણના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે, જે 40 દિવસનું વેચાણ દર્શાવે છે.

તેલના ડબાની સંખ્યા		2 - 5	6 - 9	10 - 13	14 - 17	18 - 21	22 - 25
દિવસોની સંખ્યા	**કંપની X**	1	3	17	9	6	4
	કંપની Y	5	9	20	3	2	1

વેચાણની સરખામણી કરવા માટે મધ્યસ્થનો ઉપયોગ કરવામાં આવે, તો કઈ કંપનીનું વેચાણ વધારે છે તેમ કહી શકાય ?

8. 50 વિવાહિત પુરુષોની તેમનાં લગ્ન-સમયની ઉંમરનું (પૂરા વર્ષમાં) વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ઉંમર (વર્ષ)	21 - 23	24 - 26	27 - 29	30 - 32	33 - 35
પુરુષોની સંખ્યા	6	21	15	6	2

આલેખની રીતે તેમની લગ્ન-સમયની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

C. G. Khatri
(1931 - 1989)

Prof. C.G. Khatri obtained his Phd degree (1960) in Statistics from the MS University of Baroda. He was a Professor and head of the department of Statistics, Gujarat University, Ahmedabad.

Dr. Khatri did original work on multivariate distribution theory, matrix algebra, especially on g-inverses, linear models, in the estimation of variance components and location parameters in linear models, design of experiments, characterization of distributions and optimality of certain functions of matrix arguments.

He has authored or co–authored several books and about two hundred research publications in prestigious journals.

•

" Uncontrolled variation is the enemy of quality."

– Edward Deming

4

પ્રસારમાન

(Measures of Dispersion)

વિષયવસ્તુ :

4.1 પ્રસારમાનનો અર્થ અને તેનાં લક્ષણો

4.2 નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો ખ્યાલ

4.3 પ્રસારમાન : નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપો

4.3.1 વિસ્તાર : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.2 ચતુર્થક વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.3 સરેરાશ વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.3.4 પ્રમાણિત વિચલન : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

4.4 મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન : અર્થ

4.1 પ્રસારમાનનો અર્થ (Meaning of Dispersion)

આપણે અગાઉનાં ત્રણ પ્રકરણોમાં માહિતી એકત્ર કર્યા બાદ, તેનું વર્ગીકરણ, કોષ્ટક-રચના અને તેના મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ અથવા સરેરાશ જેવી બાબતોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, મધ્યવર્તી સ્થિતિ અથવા સરેરાશનું કોઈ પણ માપ માહિતીનો સારાંશ અથવા કેન્દ્રવર્તી કિંમત રજૂ કરતું માપ છે, પણ એવું બની શકે કે કેટલાંક અવલોકનો સરેરાશના માપની કિંમતની ખૂબ નજીક હોય અને કેટલાંક અવલોકનો આ માપની કિંમતથી ખૂબ દૂર હોય. આમ સમષ્ટિમાંના એકમોના મધ્યવર્તી માપથી અવલોકનો કેવી રીતે ફેલાયેલાં છે તે જાણવાનું પણ ઉપયોગી છે. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો આંકડાશાસ્ત્રીય પૃથક્કરણમાં ખૂબ જ ઉપયોગી હોવા છતાં, ફક્ત આ જ માપો પૂરતા છે તેવું નથી. એક ઉદાહરણ લઈ આ બાબત નીચેની આકૃતિ અને તેની વિગત દ્વારા સમજીએ.

એક વ્યક્તિ તેના કુટુંબ સાથે એકવાર જંગલમાં ફરવા ગયો હતો. તેઓને આગળની મુસાફરી માટે જંગલમાં એક નદી પાર કરવાની હતી અને હોડી પ્રાપ્ય ન હતી. તે વ્યક્તિ જાણતો હતો કે નદીની સરેરાશ ઊંડાઈ 100 સેમી છે અને તેના કુટુંબના બધા સભ્યોની સરેરાશ ઊંચાઈ 125 સેમી છે. તેથી તેણે વિચાર્યું કે તેઓ બધા કોઈ જોખમ વગર નદી પાર કરી શકશે. પરંતુ નદીની મહત્તમ ઊંડાઈ 150 સેમી હતી અને તે વ્યક્તિની એક પુત્રીની ઊંચાઈ 90 સેમી હતી. આપણે સમજી શકીએ છીએ કે તેઓ બધા નદી પાર કરવા જાય તો શું થઈ શકે.

આમ, સ્પષ્ટ છે કે ફક્ત 'સરેરાશ' જાણવાથી અને 'અવલોકનોના ફેલાવા'ની માહિતી જાણ્યા વગર, દર વખતે હેતુ પાર ન પડે.

તે જ રીતે બીજું ઉદાહરણ દેશની વ્યક્તિઓની સરેરાશ આવક એટલે કે દેશની માથાદીઠ આવક (Percapita Income)નું લઈએ. સરેરાશ આવક એટલે કે માથાદીઠ આવક દેશના લોકોની આર્થિક સ્થિતિ સૂચવતું સરેરાશનું એક ખૂબ જ અગત્યનું માપ છે; પરંતુ આ માપ પરથી દેશના લોકોના વિવિધ વર્ગોમાં આવક કેવી રીતે વહેંચાયેલી છે અથવા વિતરિત છે તેના વિશે કોઈ નિર્દેશ મળતો નથી. વધુમાં, ફક્ત આ માપ પરથી દેશના ગરીબ લોકો અને તવંગર લોકો વચ્ચે આવકની અસમાનતાનું પ્રમાણ કેટલું છે તેનો કોઈ ખ્યાલ આવતો નથી.

આમ, કોઈ પણ માહિતીના અભ્યાસ માટે તેનાં જુદાં જુદાં લક્ષણો આપણે જાણવા જોઈએ. આપણે જે જાણવું છે તેમાંથી ફક્ત કેટલાંક લક્ષણો વિશે જ મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો પરથી જાણી શકાય છે, પરંતુ માહિતીની વધુ સારી ગહન સમજ માટે તેના **પ્રસાર** એટલે કે અવલોકનોના ફેલાવાને પણ માપવું જોઈએ. સરેરાશના માપની સાથે સાથે અવલોકનોમાં ચલન (Variation) દર્શાવતું માપ આવી માહિતી પૂરી પાડે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે માહિતીનાં અવલોકનોમાં રહેલું ચલન અને સરેરાશના માપથી અવલોકનો કેટલાં દૂર વિસ્તરેલા છે તે વિશેના અન્ય વિવિધ માપોનો અભ્યાસ કરીશું.

આપણો અનુભવ છે કે બે કે તેથી વધુ સમૂહોનાં અવલોકનોના સરેરાશના માપ સમાન હોવા છતાં આ સમૂહો કેટલીક બાબતોમાં એકબીજાથી ભિન્ન હોઈ શકે. જેમકે, આ સમૂહોનાં અવલોકનોનો તેમની સરેરાશના માપથી ફેલાવો (Scatter or spread) તથા અવલોકનોમાં રહેલ આંતરિક ચલન ભિન્ન હોઈ શકે. તેથી સમૂહોની સરખામણી ફક્ત સરેરાશના માપના આધારે કરવાને બદલે તેમના અવલોકનોના ચલનને પણ ધ્યાનમાં લેવું સલાહભર્યું છે. આ બાબત સમજવા માટે આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે કોઈ નાણાકીય વિશ્લેષક ત્રણ કંપનીઓ A, B અને C ના ધંધાકીય ક્ષેત્રે દેખાવ વિશે અભ્યાસ કરવા માગે છે. તેને ત્રણ કંપનીઓનાં છેલ્લાં પાંચ વર્ષના નફાની વિગત નીચે મુજબ મળે છે :

વર્ષ	1	2	3	4	5	કુલ
કંપની A નો નફો (લાખ ₹)	30	30	30	30	30	150
કંપની B નો નફો (લાખ ₹)	15	30	30	30	45	150
કંપની C નો નફો (લાખ ₹)	–5	30	70	30	25	150

હવે, સૌપ્રથમ સ્વાભાવિક છે કે નાણાકીય વિશ્લેષક ત્રણેય કંપનીઓના સરેરાશ વાર્ષિક નફા વિશે અને ત્યાર બાદ નફામાં થયેલા ફેરફારો વિશે જાણવા માંગશે. ઉપર જણાવેલી ત્રણેય કંપનીના નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ત્રણેય કંપની A, B અને C માટે નફાનો મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = 30 (લાખ ₹) થાય છે. હવે ત્રણેય કંપની A, B અને C ના વ્યક્તિગત વાર્ષિક નફાની વિગત જોતા માલૂમ પડે છે કે કંપની A નો નફો છેલ્લાં 5 વર્ષમાં એકસમાન 30 (લાખ ₹) છે, તેથી નફામાં ચલનનો ગાળો 30 – 30 = 0 છે, કંપની Bના નફામાં ચલનનો ગાળો 45 – 15 = 30 (લાખ ₹) છે, જ્યારે કંપની C ના નફામાં ચલનનો ગાળો 70 – (–5) = 75 (લાખ ₹) છે. અહીં કંપની A નાં બધાં જ વર્ષોમાં થતો નફો એકસમાન છે એટલે તેમાં ચલન બિલકુલ નથી, જ્યારે કંપની B ના વાર્ષિક નફા સરેરાશ માપ 30 (લાખ ₹)ની નજીક છે પરંતુ કંપની C ના વાર્ષિક નફા તેના સરેરાશ માપ 30 (લાખ ₹) કરતાં ઘણાં દૂર સુધી વિસ્તરેલા છે. આમ, ત્રણેય કંપનીઓના નફાનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક સમાન હોવા છતાં આ ત્રણેય કંપનીઓના વાર્ષિક નફા તેના ફેલાવા (Scatter or spread)ના સંદર્ભમાં એકબીજાથી ખૂબ જ જુદા પડે છે. તેથી ત્રણેય કંપનીઓના નફાના માત્ર સરેરાશના માપને આધારે આંકડાશાસ્ત્રીય પૃથક્કરણ કરી ત્રણેય કંપની નફાના સંદર્ભમાં સરખી છે તેવું તારણ કાઢીએ, તો તે ભૂલભરેલું અને ગેરમાર્ગે દોરનારું છે.

આમ, માત્ર એક સમષ્ટિનાં લક્ષણોના અભ્યાસ માટે નહિ પરંતુ બે કે તેથી વધુ સમષ્ટિના તુલનાત્મક આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસ માટે પણ સમષ્ટિનાં અવલોકનોના પ્રસાર કે ફેલાવાની જાણકારી મેળવવી જરૂરી થઈ પડે છે.

માહિતીનાં અવલોકનો સરેરાશના માપથી કેટલે અંતરે ફેલાયેલા કે વિસ્તરેલા છે તેના માપને પ્રસારમાન (Dispersion) કહે છે.

'પ્રસારમાન' એ માત્ર સમષ્ટિનાં અવલોકનોના ચલન વિશેનો સામાન્ય ખ્યાલ જણાવે છે એવું નથી પરંતુ તે ચલન વિશેનું ચોક્કસ માપ પણ દર્શાવે છે. જુદા જુદા આંકડાશાસ્ત્રીઓએ પ્રસારમાનની વ્યાખ્યાઓ જણાવી છે તેમાંથી સ્પિગલ (Spiegel)એ આપેલી વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

"માહિતીના સરેરાશ માપની આસપાસ તેનાં અવલોકનો કેટલા પ્રમાણમાં ફેલાયેલા છે તે દર્શાવતું મૂલ્ય એટલે ચલન અથવા પ્રસારમાન."

પ્રસારને જાણવાથી માહિતી વિશે જે વધારાની વિગતો મળે છે, તેનાથી મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોની વિશ્વસનીયતા આંકી શકાય છે. જો માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય તો મધ્યવર્તીના માપ સમગ્ર માહિતીનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું માપ ન હોઈ, ફક્ત સરેરાશની નજીકનાં અવલોકનો માટેનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું માપ હોય છે.

પ્રસારમાનનાં ઇચ્છનીય લક્ષણો :

પ્રસારમાનનાં કેટલાંક ઇચ્છનીય લક્ષણો નીચે મુજબ છે :

(1) પ્રસારમાનની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.

(2) તેની ગણતરી સહેલી અને સમજવામાં સરળ હોવી જોઈએ.

(3) તેની ગણતરીમાં માહિતીનાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થવો જોઈએ.

(4) તે બૈજિક ક્રિયાઓ તથા આંકડાશાસ્ત્રીય ગણતરીઓ માટે અનુકૂળ હોવું જોઈએ.

(5) તે નિદર્શનના સાપેક્ષમાં સ્થિર માપ હોવું જોઈએ. એટલે કે એક જ સમષ્ટિમાંથી સમાન કદનાં જુદાં જુદાં નિદર્શો લેવામાં આવે તો તેમાંથી મળતું પ્રસારનું માપ લગભગ સરખું મળવું જોઈએ.

(6) તેની કિંમત પર માહિતીનાં અતિ નાનાં અને અતિ મોટાં અવલોકનોની અસર ઓછી હોવી જોઈએ.

4.2 પ્રસારમાનના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો ખ્યાલ

નિરપેક્ષ માપ (Absolute Measure) :

જે પ્રસારના માપને માહિતીનાં અવલોકનોના એકમ વડે દર્શાવવામાં આવે તે માપને પ્રસારનું **નિરપેક્ષ માપ** કહેવામાં આવે છે. દા.ત. જો માહિતીનાં અવલોકનોનો એકમ કિગ્રા હોય તો પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ પણ કિગ્રા થશે.

બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોના અવલોકનો જુદા જુદા એકમો ધરાવતા હોય અને તેઓના પ્રસારની સરખામણી કરવી હોય તો નિરપેક્ષ માપ ઉપયોગી ન બને. આ બાબત નીચેના ઉદાહરણથી સમજીએ :

ધારો કે કોઈ એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં) અને તેમની ઊંચાઈ (સેમીમાં) આપેલા છે. હવે વિદ્યાર્થીઓના વજન અને ઊંચાઈની માહિતીમાંથી શેમાં વધુ પ્રસાર છે તે જાણવા માટે તેના નિરપેક્ષ માપ મેળવીએ તો વજનની માહિતીમાં રહેલ પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ કિગ્રા થશે, જ્યારે ઊંચાઈની માહિતીમાં રહેલ પ્રસારના નિરપેક્ષ માપનો એકમ સેમી થશે. આમ, બંને નિરપેક્ષ માપોનાં મૂલ્યોના એકમ જુદા જુદા છે, તેથી તેમની સરખામણી કરવી હોય તો નિરપેક્ષ માપ પરથી તે શક્ય ન બને.

સાપેક્ષ માપ (Relative Measure) :

પ્રસારનું જે માપ એકમથી મુક્ત હોય તેને પ્રસારનું **સાપેક્ષ માપ** કહે છે. બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહનાં અવલોકનોના એકમો ભિન્ન હોય ત્યારે તેમના પ્રસારની સરખામણી સાપેક્ષ માપથી જ થઈ શકે છે.

સામાન્ય રીતે સમૂહનાં અવલોકનોમાં રહેલાં પ્રસારના નિરપેક્ષ માપ અને સમૂહનાં અવલોકનોની યોગ્ય સરેરાશના ગુણોત્તરને પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ કહે છે. પ્રસારના સાપેક્ષ માપને પ્રસારાંક (Co-efficient of Dispersion) કહે છે અને આ માપ માહિતીનાં અવલોકનોના એકમથી મુક્ત હોય છે.

4.3 પ્રસારનાં માપ (Measures of Dispersion)

આપણે પ્રસારના નીચે દર્શાવેલ વિવિધ નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો અભ્યાસ કરીશું :

(1) વિસ્તાર (Range)

(2) ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviation)

(3) સરેરાશ વિચલન (Mean Deviation)

(4) પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

ઉપર્યુક્ત માપોમાંથી વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનને આપણે પ્રસારનાં સ્થાનીય માપ કહીશું, કારણ કે આ માપ માહિતીના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોના સ્થાન પર આધાર રાખે છે, જ્યારે સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનને આપણે વિચલનોના સારાંશ દર્શાવતા માપ કહીશું, કારણ કે આ બંને માપ અવલોકનોના મધ્યવર્તી માપથી લીધેલ વિચલનો પર આધાર રાખે છે.

4.3.1 વિસ્તાર (Range)

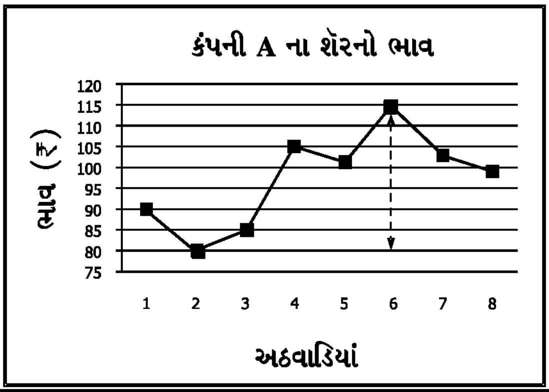
માહિતીના સૌથી મોટાં અને સૌથી નાનાં અવલોકનોના તફાવતને વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેત R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$\therefore$ વિસ્તાર $= R = x_H - x_L$

જ્યાં x_H = સૌથી મોટું અવલોકન

x_L = સૌથી નાનું અવલોકન

વિસ્તાર R એ પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ છે અને R નો એકમ એ જ હોય છે જે અવલોકનોનો એકમ હોય.



આઠ અઠવાડિયા માટે કંપની Aના શૅરના અઠવાડિક બંધભાવ આપેલા છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે મહત્તમ ભાવ ₹ 115 અને ન્યૂનતમ ભાવ ₹ 80 છે. તેથી, વિસ્તાર = 115 – 80 = ₹ 35 થશે.

વિસ્તારની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, વર્ગીકૃત માહિતી હોય તોપણ વિસ્તાર શોધવા માટે અવલોકનોની આવૃત્તિની જરૂર પડતી નથી. કોઈ પણ વર્ગીકૃત માહિતી માટે સૌથી મોટી કિંમતોના વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને સૌથી નાની કિંમતોના વર્ગની અધઃસીમાનો તફાવત લેવાથી તે માહિતીનો વિસ્તાર મેળવી શકાય છે.

માહિતીના વિસ્તાર R ને $x_H + x_L$ વડે ભાગવાથી સાપેક્ષ વિસ્તાર મળે છે.

$\therefore$ સાપેક્ષ વિસ્તાર $= \dfrac{R}{x_H + x_L} = \dfrac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$

સાપેક્ષ વિસ્તારને વિસ્તારાંક (Co-efficient of Range) પણ કહેવામાં આવે છે. વિસ્તારાંક એ એકમથી મુક્ત છે.

જો કોઈ સમષ્ટિની માહિતી માટે વિસ્તારાંક નાનો હોય તો એમ કહી શકાય કે સમષ્ટિના એકમોમાં ચલન ઓછું છે, અર્થાત્ એકમોની કિંમતો એકબીજાથી બહુ અલગ નથી, પરંતુ જો વિસ્તારાંક મોટો હોય તો સમષ્ટિના એકમોમાં ચલન વધુ છે તેમ કહી શકાય. અર્થાત્ એકમોની કિંમતો એકબીજાથી ઘણી અલગ છે તેમ કહી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : એક બૅટ્સમૅનના ક્રિકેટની છેલ્લી દસ મૅચમાં અનુક્રમે 48, 75, 37, 52, 93, 81, 25, 72, 18 અને 60 રન થાય છે. આ માહિતી પરથી તેના રનનો વિસ્તાર તથા વિસ્તારાંક શોધો.

અહીં $x_H = 93$, $x_L = 18$

તેથી વિસ્તાર $= x_H - x_L = 93 - 18 = 75$

$\therefore$ $R = 75$ રન

આમ, બૅટ્સમૅને છેલ્લી દસ મૅચમાં કરેલા રનનો વિસ્તાર 75 રન છે.

વિસ્તારાંક અથવા સાપેક્ષ વિસ્તાર $= \dfrac{R}{x_H + x_L}$

$$= \frac{75}{93+18} = \frac{75}{111} = 0.6757$$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.68

આમ, બૅટ્સમૅનના રનનો વિસ્તારાંક 0.68 છે.

ઉદાહરણ 2 : એક કારખાનાના કામદારોના માસિક વેતનની નીચેની માહિતી પરથી આપેલા કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

માસિક વેતન (₹)	3500	4000	5000	7500	10,000	12,000
કામદારોની સંખ્યા	3	21	30	19	6	5

અહીં આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ અસતત છે અને ચલ કિંમત (વેતન) પરથી સ્પષ્ટ છે કે $x_H = 12{,}000$ અને $x_L = 3500$

વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 12{,}000 - 3500$

$= 8500$

$\therefore \quad R =$ ₹ 8500

આમ, કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તાર ₹ 8500 છે.

વિસ્તારાંક $= \dfrac{R}{x_H + x_L}$

$= \dfrac{8500}{12000+3500}$

$= \dfrac{8500}{15500}$

$= 0.5484$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.55

આમ, કામદારોના માસિક વેતનનો વિસ્તારાંક 0.55 છે.

ઉદાહરણ 3 : કોઈ એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓને તેમના વજન મુજબ જુદાં જુદાં ખોખામાં મૂકવામાં આવે છે. નીચે આપેલી માહિતી પરથી ખોખાના વજનનો વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો :

વજન (કિગ્રા)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
ખોખાંની સંખ્યા	8	15	26	47	4

અહીં આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ સતત છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણની પ્રથમ વર્ગની અધઃસીમા અને અંતિમ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અનુક્રમે માહિતીના સૌથી નાના અને સૌથી મોટાં અવલોકનો દર્શાવશે.

અર્થાત્ $x_H = 35$ અને $x_L = 10$

વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 35 - 10$

$= 25$

$\therefore \quad R = 25$ કિગ્રા

તેથી ખોખાંમાં રહેલા વજનનો વિસ્તાર 25 કિગ્રા છે.

સાપેક્ષ વિસ્તાર $= \dfrac{R}{x_H + x_L}$

$= \dfrac{25}{35+10}$

$= \dfrac{25}{45}$

$= 0.5556$

$\therefore$ સાપેક્ષ વિસ્તાર ≈ 0.56

તેથી ખોખાંમાં રહેલ વજનનો વિસ્તારાંક 0.56 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક શાળાના 50 વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ એક પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણના નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

ગુણ	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	15	23	6	4

ઉપરના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે સૌથી મોટા વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા 99 અને સૌથી નાના વર્ગની અધઃસીમા 50 છે.

અર્થાત્, $x_H = 99$ અને $x_L = 50$

વિસ્તાર = $x_H - x_L = 99 - 50 = 49$

$\therefore$ $R = 49$ ગુણ

તેથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનો વિસ્તાર 49 ગુણ છે.

$$\text{વિસ્તારાંક} = \frac{R}{x_H + x_L}$$

$$= \frac{49}{99+50}$$

$$= \frac{49}{149}$$

$$= 0.3289$$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.33

આમ, વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનો વિસ્તારાંક 0.33 છે.

વિસ્તારના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) વિસ્તાર સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત છે.

(2) તેની ગણતરી સરળ છે.

(3) જો માહિતીનાં અવલોકનોમાં ચલન ઓછું હોય, તો વિસ્તાર ઉપયોગી માપ છે.

ગેરલાભ :

(1) તેની ગણતરીમાં માહિતીનાં બધાં અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી.

(2) વિસ્તાર પર નિદર્શનની અસર વધુ હોય છે.

(3) તે બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ નથી.

(4) ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ માટે તેની ગણતરી થઈ શકતી નથી.

નોંધ :

ઉત્પાદન પ્રક્રિયામાંથી લીધેલાં નિદર્શોની અંદરના ચલન વિશેની જાણકારી માટે સાંખ્યિકીય ગુણવત્તા નિયંત્રણમાં દોરવામાં આવતા નિયંત્રણ આલેખોમાં વિસ્તારનો ઉપયોગ થાય છે. જો ચલન વધુ ન હોય તો નાણાંના દર, વિનિમય દર, શૅરના ભાવમાં થતા ચલન માપવા વિસ્તારનો ઉપયોગ થાય છે. તેમજ રોજબરોજના પ્રશ્નો જેવા કે, 'સુપર માર્કેટમાં થતું દૈનિક વેચાણ', 'શહેરનું તાપમાન', 'સ્કૂટર અથવા કારમાં થતા પેટ્રોલના વપરાશનો ખર્ચ' વગેરેને સામાન્ય રીતે તે કયા અંતરાલમાં સમાયેલા છે તે સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. એના પરથી માહિતીનો વિસ્તાર જાણી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ

તમે તમારી આસપાસ રહેતા 15થી 25 વર્ષની વચ્ચે વય ધરાવતા 20 યુવક તથા યુવતીઓની ઊંચાઈ અને વજન વિશે માહિતી એકઠી કરો અને તે પરથી તેમના ઊંચાઈ અને વજન કયા અંતરાલમાં સમાયેલા છે તે માહિતી મેળવો અને વિસ્તાર શોધો. ઊંચાઈ અને વજનના સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો અને સરખામણી કરો.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. એક વર્ગના 10 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) નીચે આપેલ છે :

   162, 145, 170, 181, 167, 151, 175, 185, 169, 156

   આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

2. એક બસ કંપનીની 77 બસ શહેરમાં મુસાફરી માટે પ્રાપ્ય છે. કોઈ એક દિવસે કોઈ એક સમયે બસમાં બેઠેલા મુસાફરોની સંખ્યાના નીચે આપેલા વિતરણ પરથી એક બસમાં મુસાફરી કરતા મુસાફરોની સંખ્યાનો વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.

મુસાફરોની સંખ્યા	2	7	10	18	25	30	37
બસની સંખ્યા	1	4	11	17	23	16	5

3. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના નીચે આપેલ ગુણના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી વિદ્યાર્થીના ગુણનો વિસ્તાર અને સાપેક્ષ વિસ્તાર શોધો.

ગુણ	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	20	25	60	45	10

4. એક વિસ્તારમાં આવેલી 80 દુકાનોના દૈનિક વકરા(હજાર ₹માં)નું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી દૈનિક વકરાના વિસ્તારનું નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવો.

દૈનિક વકરો(હજાર₹)	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24	55 - 29	30 - 34
દુકાનોની સંખ્યા	11	20	17	13	12	7

*

4.3.2 ચતુર્થક વિચલન (Quartile Deviation)

આપણે જાણીએ છીએ કે વિસ્તારની ગણતરીમાં ફક્ત અંતિમ અવલોકનો એટલે કે સૌથી મોટા અવલોકન અને સૌથી નાના અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે, તેવી જ રીતે સ્થાનીય સરેરાશનાં માપો પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 અને તૃતીય ચતુર્થક Q_3 નો ઉપયોગ કરીને પણ પ્રસારમાનનું માપ મેળવવામાં આવે છે, જેને ચતુર્થક વિચલન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. માહિતીના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોમાં વચ્ચેના 50 % અવલોકનોના ચલન કે પ્રસારનો ઉપયોગ કરી વ્યાખ્યાયિત કરેલા માપને **ચતુર્થક વિચલન** (Quartile Deviation) કહે છે.

માહિતીના તૃતીય ચતુર્થક Q_3 અને પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 વચ્ચેના તફાવતને 2 વડે ભાગવાથી મળતા માપને ચતુર્થક વિચલન કહે છે અને તેને સંકેતમાં Q_d વડે દર્શાવાય છે. સંકેત અનુસાર માહિતીના ચતુર્થક વિચલનના સૂત્રને નીચે મુજબ લખાય :

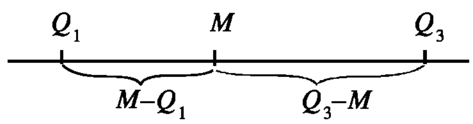
$$Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ચતુર્થક વિચલનને **અર્ધ આંતર ચતુર્થક વિસ્તાર** (Semi–Inter–Quartile Range) પણ કહેવામાં આવે છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

$(Q_3 - Q_1)$ને આંતર ચતુર્થક વિસ્તાર (Inter Quartile Range) કહે છે, પરંતુ મોટે ભાગે તેને અર્ધ આંતરચતુર્થક વિસ્તારમાં ફેરવવામાં આવે છે, જે આંતરચતુર્થક વિસ્તારનું મધ્યબિંદુ દર્શાવે છે.

ચતુર્થક વિચલન એ બે ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3ના મધ્યસ્થ (M)થી અંતરની સરેરાશ દર્શાવે છે, જે નીચેની આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે.



$$\text{ચતુર્થક વિચલન} = \frac{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ચતુર્થક વિચલન Q_dને Q_1 અને Q_3ની સરેરાશ વડે ભાગવાથી આપણને ચતુર્થક વિચલનનું સાપેક્ષ માપ મળે છે.

$\therefore$ સાપેક્ષ ચતુર્થક વિચલન $= \frac{(Q_3 - Q_1)/2}{(Q_3 + Q_1)/2} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

આ સાપેક્ષ ચતુર્થક વિચલનને ચતુર્થક વિચલનાંક (Co-efficient of Quartile Deviation) પણ કહેવામાં આવે છે. અત્રે નોંધવું જરૂરી છે કે Q_dને અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવાય છે. પરંતુ ચતુર્થક વિચલનાંક એકમથી મુક્ત માપ છે, એટલે કે તે એકમરહિત માપ છે.

ઉદાહરણ 5 : કોઈ એક દિવસે કરેલા 10 ફેરામાં એક બસ-ઓપરેટરને નીચે મુજબ મુસાફરો મળી રહે છે. આ માહિતી પરથી મુસાફરોની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

19, 25, 35, 10, 24, 8, 12, 5, 20, 30

માહિતીમાં આપેલાં અવલોકનોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવતાં

5, 8, 10, 12, 19, 20, 24, 25, 30, 35

અહીં $n = 10$, $\frac{n+1}{4} = 2.75$ અને $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 8.25$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 2.75$મા અવલોકનની કિંમત

તેથી, $Q_1 = 8 + 0.75(10 - 8)$

$= 8 + 1.5$

$\therefore$ $Q_1 = 9.5$ મુસાફરો

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 8.25$ મા અવલોકનની કિંમત

તેથી, $Q_3 = 25 + 0.25(30 - 25)$

$= 25 + 1.25$

$\therefore$ $Q_3 = 26.25$ મુસાફરો

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{26.25 - 9.5}{2}$

$= 8.38$

$\therefore$ $Q_d = 8.38$

આમ, મુસાફરોની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન 8.38 મુસાફરો છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{16.75}{26.25 + 9.5}$

$= \frac{16.75}{35.75}$

$= 0.4685$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.47

આમ, મુસાફરોની સંખ્યાનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.47 છે.

ઉદાહરણ 6 : 50 બાળકોને એક કોયડો ઉકેલતા લાગતાં સમય (મિનિટમાં)ની માહિતી નીચે આપેલ છે. તે પરથી બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

સમય (મિનિટ)	2	4	6	8	10
બાળકોની સંખ્યા	3	12	18	12	5

સમય (મિનિટ) x	બાળકોની સંખ્યા f	સંચયી આવૃત્તિ cf
2	3	3
4	12	15
6	18	33
8	12	45
10	5	50
કુલ	$n = 50$	

અહીં, $n = 50$, $\frac{n+1}{4} = 12.75$, $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 38.25$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 12.75$મા અવલોકનની કિંમત

$\therefore \quad Q_1 = 4$ મિનિટ

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 38.25$ મા અવલોકનની કિંમત

$\therefore \quad Q_3 = 8$ મિનિટ

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{8-4}{2}$

$= 2$

$\therefore \quad Q_d = 2$ મિનિટ

આમ, બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું ચતુર્થક વિચલન 2 મિનિટ છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{4}{8+4}$

$= \frac{4}{12}$

$= 0.3333$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.33

આમ, બાળકોને કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.33 છે.

ઉદાહરણ 7 : નીચે આપેલ એક શહેરની 1000 વ્યક્તિઓની આવકના વિતરણ પરથી વ્યક્તિઓની આવકનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંકની ગણતરી કરો :

આવક (હજાર ₹)	50થી ઓછી	50 - 70	70 - 90	90 - 110	110 - 130	130 - 150	150થી વધુ
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	54	100	140	300	230	125	51

આવક (હજાર ₹)	**વ્યક્તિઓની સંખ્યા** f	**સંચયી આવૃત્તિ** cf
50થી ઓછી	54	54
50 - 70	100	154
70 - 90	140	294
90 - 110	300	594
110 - 130	230	824
130 - 150	125	949
150થી વધુ	51	1000
કુલ	n = **1000**	–

અહીં, $n = 1000$, $\frac{n}{4} = 250$ અને $3\left(\frac{n}{4}\right) = 750$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 250મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે, 250મા અવલોકનની કિંમત 70 - 90ના વર્ગમાં સમાયેલી છે. તેથી 70 - 90 એ Q_1 વર્ગ થશે.

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 70$, $\frac{n}{4} = 250$, $cf = 154$, $f = 140$, $c = 20$

તેથી $Q_1 = 70 + \frac{250-154}{140} \times 20$

$= 70 + \frac{1920}{140}$

$= 70 + 13.7143$

$= 83.7143$

$\therefore \quad Q_1 \approx 83.71$ (હજાર ₹)

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 750$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે 750મા અવલોકનની કિંમત 110 - 130 વર્ગમાં સમાયેલી છે. તેથી 110 - 130 એ Q_3 વર્ગ થશે.

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 110,\ 3\left(\frac{n}{4}\right) = 750,\ cf = 594,\ f = 230,\ c = 20$

તેથી $Q_3 = 110 + \frac{750 - 594}{230} \times 20$

$= 110 + \frac{3120}{230}$

$= 110 + 13.5652$

$= 123.5652$

$\therefore \quad Q_3 \approx 123.56$ (હજાર ₹)

ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{123.56 - 83.71}{2}$

$= \frac{39.85}{2}$

$= 19.925$

$\therefore\ Q_d \approx 19.93$

આમ, વ્યક્તિઓની આવકનું ચતુર્થક વિચલન 19.93 (હજાર ₹) છે.

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{123.56 - 83.71}{123.56 + 83.71}$

$= \frac{39.85}{207.27}$

$= 0.1923$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક ≈ 0.19

આમ, વ્યક્તિઓની આવકનો ચતુર્થક વિચલનાંક 0.19 છે.

ચતુર્થક વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ :

લાભ :

(1) ચતુર્થક વિચલનએ સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ પ્રસારનું માપ છે.

(2) તેની ગણતરી સરળ છે.

(3) ચતુર્થક વિચલન પર અતિ નાનાં અને અતિ મોટાં અવલોકનોની અસર થતી નથી, કેમકે ચતુર્થક વિચલનનું માપ વચ્ચેનાં 50 % અવલોકનોની કિંમતોને ધ્યાનમાં લઈ મેળવવામાં આવે છે.

(4) જો આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગો ખુલ્લાં છેડાવાળા હોય તો પ્રસારનું આ એક જ માપ મેળવી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) ચતુર્થક વિચલન મેળવવા માટે પ્રથમ 25 % અને અંતિમ 25 % અવલોકનોને અવગણવામાં આવે છે. આમ, આ માપની ગણતરીમાં બધાં અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી.

(2) તે બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ નથી.

(3) નિદર્શનના સાપેક્ષમાં આ માપ સ્થિર નથી.

(4) આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં આ માપનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. એક નિશાનબાજ એક સ્પર્ધાની પૂર્વતૈયારી કરતી વખતે છેલ્લા દસ પ્રયત્નોમાં તેનું નિશાન નીચે જણાવેલ અંતર (મિમિ)થી ચૂકી જાય છે.

20, 32, 24, 41, 18, 27, 15, 36, 35, 25

આ માહિતી પરથી નિશાનચૂકના માપનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

2. એક શાળાના 43 વિદ્યાર્થીઓને મેળવેલા ગુણના નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ગુણનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

ગુણ	10	20	30	40	50	60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	7	15	8	7	2

3. એક રેસ્ટોરન્ટમાં કોઈ એક દિવસે આવતા 200 ગ્રાહકોએ નાસ્તાના બિલ તરીકે ચૂકવેલ રકમનું વિતરણ નીચે મુજબ છે :

ચૂકવેલ રકમ (₹)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250
ગ્રાહકોની સંખ્યા	25	40	80	30	25

આ માહિતી પરથી ગ્રાહક દ્વારા એક દિવસમાં ચૂકવાયેલ રકમનું ચતુર્થક વિચલન અને ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

*

4.3.3 સરેરાશ વિચલન (Average Deviation)

પ્રસારમાનનાં બે માપ વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થતો નથી અને આ બંને માપ અવલોકનોનું કોઈ પણ સરેરાશની સાપેક્ષ ચલન દર્શાવતાં નથી. પ્રસારમાનનું એવું માપ કે જેમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય અને અવલોકનોનું તેની સરેરાશને સાપેક્ષ ચલન પણ ધ્યાનમાં લેવાય તેવા માપથી આ ખામી દૂર કરી શકાય છે. સરેરાશ વિચલન (Average Deviation or Mean Deviation)માં આ બાબતોની પૂર્તિ થાય છે. અવલોકનની કિંમત અને તેના મધ્યક વચ્ચેના તફાવતને વિચલન (Deviation) કહે છે. આ વિચલનો ઋણ, શૂન્ય અથવા ધન હોઈ શકે અને આવાં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે તે બાબત આપણે પ્રકરણ 3માં જોઈ ગયાં. આ પરિસ્થિતિ નિવારવા આ વિચલનોના માનાંક (Absolute Value) લેવામાં આવે છે. એટલે કે ઋણ વિચલનોનાં ઋણ ચિહ્નની અવગણના કરવામાં આવે છે. આ વિચલનોના માનાંકોને આધારે માહિતીના પ્રસારનું માપ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આમ, સરેરાશ વિચલન એટલે માહિતીનાં અવલોકનોના તેમના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના માનાંકોની સરેરાશ કિંમત. તેને સંકેતમાં *MD* (Mean Deviation) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

MD ને મધ્યક $\bar{x}$ વડે ભાગવાથી મળતા સાપેક્ષ માપ $\frac{MD}{\bar{x}}$ ને માહિતીનો સરેરાશ વિચલનાંક (Co-efficient of Mean Deviation) કહેવામાં આવે છે.

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક = $\frac{MD}{\bar{x}}$

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

આંકડાશાસ્ત્રમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ ખૂબ જ બહોળા પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. તેથી સરેરાશ વિચલનની ગણતરીમાં આપણે અવલોકનોના વિચલનો ફક્ત મધ્યકમાંથી જ લઈશું. પરંતુ કેટલાક કિસ્સાઓમાં માહિતીને અનુરૂપ સરેરાશ વિચલન મેળવવા માટે અવલોકનોના વિચલનો તેના મધ્યસ્થ કે બહુલકમાંથી પણ લેવામાં આવે છે.

સરેરાશ વિચલનની ગણતરીની રીત

આપણે અવર્ગીકૃત અને વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરવાની રીત અને તેનાં સૂત્રો વિશે ચર્ચા કરીશું.

અવર્ગીકૃત માહિતી

ધારો કે અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે અને અવલોકનોનો મધ્યક $\bar{x}$ છે. સૌપ્રથમ માહિતીના પ્રત્યેક અવલોકન x_iના મધ્યક $\bar{x}$ સાપેક્ષ તફાવતના માનાંક (એટલે કે $|x_i - \bar{x}|$) મેળવવામાં આવે છે. હવે આવાં બધાં જ માનાંક વિચલનોનો સરવાળો કરી તેને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી સરેરાશ વિચલન મળે છે. આમ, અવર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન *MD* નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$MD = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$|x_i - \bar{x}|$ = મધ્યકમાંથી અવલોકન x_i ના વિચલન $x_i - \bar{x}$ નો માનાંક

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : દાખલાઓમાં ગણતરી કરતી વખતે સરળતા ખાતર આપણે અનુગ (suffix)ને મૂકીશું નહિ, જેમકે x_iને બદલે x, d_i ને બદલે d અને f_iને બદલે f મૂકીશું.

વર્ગીકૃત માહિતી

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ :

ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અસતત ચલ xની ચલ કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2 ...., f_k$ છે, તો અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$MD = \frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં x_i = ચલ xની i મી કિંમત

$f_i = x_i$ ની આવૃત્તિ

$n = \Sigma f_i$ = કુલ આવૃત્તિ અથવા આવૃત્તિઓનો સરવાળો

$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$ = મધ્યક

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમતો અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને આ મધ્યકિંમતોને અનુરૂપ વર્ગોની આવૃત્તિ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે :

$$MD = \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં $x_i = i$ મા વર્ગની મધ્યકિંમત

$f_i = i$ મા વર્ગની આવૃત્તિ

$n = \Sigma f_i =$ કુલ આવૃત્તિ અથવા તમામ આવૃત્તિઓનો સરવાળો

$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} =$ મધ્યક

ઉપર્યુક્ત જણાવેલા કોઈ પણ સૂત્ર દ્વારા સરેરાશ વિચલન (MD) મેળવ્યા બાદ, સરેરાશ વિચલનાંક નીચે મુજબ મેળવાય છે :

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક શાળાના એક વર્ગના આઠ વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં) નીચે પ્રમાણે છે :

46, 58, 60, 43, 75, 66, 51, 81

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના વજનનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

	વજન (કિગ્રા) x	વિચલન $x-\bar{x}$ $\bar{x}=60$	વિચલનનો માનાંક $\lvert x-\bar{x}\rvert$
	46	–14	14
	58	– 2	2
	60	0	0
	43	– 17	17
	75	15	15
	66	6	6
	51	– 9	9
	81	21	21
કુલ	**480**	**0**	**84**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{480}{8} = 60$ કિગ્રા

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{84}{8}$

$= 10.5$

$\therefore$ $MD = 10.5$ કિગ્રા

આમ, વિદ્યાર્થીઓના વજનનું સરેરાશ વિચલન 10.5 કિગ્રા છે.

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

$= \frac{10.5}{60}$

$= 0.175$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.18

આમ, વિદ્યાર્થીઓના વજનનો સરેરાશ વિચલનાંક 0.18 છે.

ઉદાહરણ 9 : 32 ટાઈપિસ્ટને એક રિપોર્ટ ટાઈપ કરતાં લાગતા સમય (મિનિટમાં)ની નીચે આપેલ માહિતી પરથી ટાઈપ કરતા લાગતા સમયનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક ગણો.

ટાઈપ કરતા લાગતો સમય (મિનિટ)	10	11	12	13	14
ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા	2	8	12	8	2

ટાઈપ કરતાં લાગતો સમય (મિનિટ) x	ટાઈપિસ્ટની સંખ્યા f	fx	વિચલન $x-\bar{x}$ $\bar{x}=12$	વિચલનનો માનાંક $\|x-\bar{x}\|$	$f\|x-\bar{x}\|$
10	2	20	– 2	2	4
11	8	88	– 1	1	8
12	12	144	0	0	0
13	8	104	1	1	8
14	2	28	2	2	4
કુલ	**32**	**384**	**–**	**–**	**24**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{384}{32}$

$= 12$

$\therefore$ $\bar{x} = 12$ મિનિટ

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{24}{32}$

$= 0.75$

$\therefore \quad MD = 0.75$ મિનિટ

આમ, રિપોર્ટ ટાઈપ કરતા લાગતા સમયનું સરેરાશ વિચલન 0.75 મિનિટ છે.

સરેરાશ વિચલનાંક $= \frac{MD}{\bar{x}}$

$= \frac{0.75}{12}$

$= 0.0625$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.06

આમ, રિપોર્ટ ટાઈપ કરતા લાગતા સમયનો સરેરાશ વિચલનાંક 0.06 છે.

ઉદાહરણ 10 : જિલ્લા કક્ષાએ લેવાતી ઈંગ્લિશ શબ્દોની એક જોડણી કસોટીમાં પસંદગી પામેલાં વીસ બાળકોએ 50 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

ગુણ	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49
બાળકોની સંખ્યા	1	3	8	6	2

આ માહિતી પરથી બાળકોના ગુણનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગુણ	બાળકોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	fx	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=27$	$\|x-\bar{x}\|$	$f\|x-\bar{x}\|$
0 - 9	1	4.5	4.5	– 22.5	22.5	22.5
10 - 19	3	14.5	43.5	– 12.5	12.5	37.5
20 - 29	8	24.5	196	– 2.5	2.5	20
30 - 39	6	34.5	207	7.5	7.5	45
40 - 49	2	44.5	89	17.5	17.5	35
કુલ	**20**	–	**540**	–	–	**160**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{540}{20} = 27$

$\therefore \quad \bar{x} = 27$ ગુણ

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{160}{20}$

$= 8$

$\therefore$ $MD = 8$ ગુણ

આમ, બાળકોએ મેળવેલા ગુણનું સરેરાશ વિચલન 8 ગુણ છે.

ઉદાહરણ 11 : એક શહેરનાં દ્વિચક્રી વાહનોના 30 વિક્રેતાના એક પખવાડિયાના વેચાણના આંકડાની નીચેની માહિતી પરથી 'વેચાયેલા દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા'નું સરેરાશ વિચલન શોધો :

દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા	12 - 16	17 - 21	22 - 26	27 - 31	32 - 36
વિક્રેતાની સંખ્યા	2	3	14	8	3

દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા	**વિક્રેતાની સંખ્યા f**	**મધ્યકિંમત x**	fx	$x-\bar{x}$ $\bar{x} = 25.17$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
12 - 16	2	14	28	− 11.17	11.17	22.34
17 - 21	3	19	57	− 6.17	6.17	18.51
22 - 26	14	24	336	− 1.17	1.17	16.38
27 - 31	8	29	232	3.83	3.83	30.64
32 - 36	3	34	102	8.83	8.83	26.49
કુલ	**30**	–	**755**	–	–	**114.36**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{755}{30}$

$= 25.1667$

$\therefore$ $\bar{x} \approx 25.17$ દ્વિચક્રી વાહનો

સરેરાશ વિચલન $MD = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{n}$

$= \frac{114.36}{30}$

$= 3.812$

$\therefore$ $MD \approx 3.81$ દ્વિચક્રી વાહનો

આમ, વેચાયેલા દ્વિચક્રી વાહનોનું સરેરાશ વિચલન 3.81 દ્વિચક્રી વાહનો છે.

સરેરાશ વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) સરેરાશ વિચલન એ સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ પ્રસારનું માપ છે.

(2) તેની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે. તેથી વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલન કરતાં તે ચઢિયાતું માપ છે.

(3) તેની કિંમત પર અંતિમ અવલોકનો (એટલે કે અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનો)ની અસર પ્રસારનાં અન્ય કેટલાંક માપની સરખામણીએ ઓછી હોય છે.

(4) અવલોકનનું મધ્યકથી અંતર માપવા માટે અવલોકન અને મધ્યકના તફાવતના માનાંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે, જે અંતર માટેનું યોગ્ય માપ છે.

ગેરલાભ :

(1) વિસ્તાર અને ચતુર્થક વિચલનની ગણતરી કરતાં સરેરાશ વિચલનની ગણતરી અઘરી છે.

(2) આ માપ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ નથી.

(3) આ માપ માનાંક પર આધારિત હોવાથી આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તેનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે.

(4) ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ માટે તેની ગણતરી થઈ શકતી નથી.

નોંધ : સામાજિકશાસ્ત્રોના અભ્યાસમાં તે વિશેષ ઉપયોગી માપ છે અને ખાસ કરીને અર્થશાસ્ત્રમાં આર્થિક અસમાનતા નક્કી કરવામાં, સમુદાય અથવા દેશની વ્યક્તિગત સંપત્તિના વિતરણની ગણતરીમાં, હવામાન અને વેપારચક્રોના પૂર્વાનુમાન વગેરેમાં તે ઉપયોગી છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. દસ સૈનિકોની ઊંચાઈ (સેમીમાં) નીચે મુજબ છે :

160, 175, 158, 165, 170, 166, 173, 176, 163, 168

આ માહિતી પરથી સૈનિકોની ઊંચાઈના માપનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

2. એક કારખાનામાં રહેલાં યંત્રોમાં વપરાતી બૉલબેરિંગની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે મુજબ છે :

બૉલબેરિંગની સંખ્યા	2	4	6	8	10	12	14	16
યંત્રોની સંખ્યા	2	2	4	5	3	2	1	1

આ માહિતી પરથી યંત્રમાં વપરાતી બૉલબેરિંગની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

3. નીચે આપેલા કૉલદીઠ વાતચીતના સમય (પૂરી મિનિટમાં)ના વિતરણ પરથી કૉલદીઠ વાતચીતના સમયનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો :

વાતચીતનો સમય (મિનિટ)	3	5	10	12	15
કૉલની સંખ્યા	4	7	6	2	1

4. છેલ્લા 16 મહિનામાં થયેલા ટી.વી. સેટના વેચાણના નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ટી.વી.ના માસિક વેચાણનું સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

ટી.વી. સેટની સંખ્યા	10 - 30	30 - 50	50 - 70	70 - 90	90 - 110
મહિનાની સંખ્યા	1	4	6	4	1

5. એક ફેક્ટરીમાં બૉક્સદીઠ જુદી જુદી સંખ્યામાં કોઈ વસ્તુના એકમો મૂકેલા છે. 50 બૉક્સમાં મૂકેલા કોઈ વસ્તુના એકમોનું વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો તે પરથી બૉક્સદીઠ એકમોની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

એકમોની સંખ્યા	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
બૉક્સની સંખ્યા	6	5	8	15	7	6	3

*

4.3.4 પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)

સરેરાશ વિચલનની વ્યાખ્યા, માહિતીનાં અવલોકનોના મધ્યકથી મેળવેલ વિચલનોના માનાંકને આધારે આપવામાં આવે છે તે આપણે જોયું. તેમાં વિચલનોનાં બૈજિક ચિહ્નો અવગણવામાં આવે છે તેથી આંકડાશાસ્ત્રના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તેનો ઉપયોગ ઓછો થાય છે. પ્રસારના એક અગત્યના માપ 'પ્રમાણિત વિચલન'માં આ મર્યાદા દૂર કરવામાં આવે છે. માહિતીના પ્રત્યેક અવલોકનના મધ્યકથી લીધેલા વિચલનના માનાંકને બદલે વિચલનનો વર્ગ લઈ બધાં વિચલનોના વર્ગોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં આપણને પ્રસારનું એક અગત્યનું માપ મળે છે. પ્રસારના આ માપને વિચરણ (Variance) કહે છે. તેને સંકેતમાં s^2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. વિચરણના ધન વર્ગમૂળને પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation) કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં s વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

કાર્લ પિયર્સન (Karl Pearson) નામના પ્રસિદ્ધ આંકડાશાસ્ત્રીએ પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી છે : ''માહિતીનાં અવલોકનોના તેના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશનું ધન વર્ગમૂળ એટલે પ્રમાણિત વિચલન.''

સમષ્ટિમાંના એકમોની કિંમતો વિશે માહિતી આપતાં માપોમાં મધ્યક પછી પ્રમાણિત વિચલન સૌથી વિશેષ ઉપયોગી માપ છે.

પ્રમાણિત વિચલનએ પ્રસારનું નિરપેક્ષ માપ છે. જો પ્રમાણિત વિચલનને માહિતીના મધ્યક વડે ભાગવામાં આવે તો, આપણને પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ મળે છે. તેને પ્રમાણિત વિચલનાંક (Co-efficient of Standard Deviation) કહેવામાં આવે છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}}$

નોંધ : પ્રમાણિત વિચલન પ્રસારનાં બધાં માપોમાં સૌથી અગત્યનું અને બહોળો ઉપયોગ ધરાવતું માપ છે. ભૌતિકશાસ્ત્ર, કૃષિવિજ્ઞાન, મેડિકલ જેવાં પ્રયોજિત ક્ષેત્રોમાં થતાં પ્રયોગાત્મક સંશોધનમાં વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ વ્યાપક પ્રમાણમાં થાય છે. તદ્ઉપરાંત આંકડાશાસ્ત્રીય અનુમાન, સહસંબંધ, નિદર્શન અને અન્ય ક્ષેત્રોના અભ્યાસ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન ખૂબ જ ઉપયોગી માપ છે.

"જેમ કઠિયારાને તેના કામ માટે કુહાડી અને કરવત એ પાયાનાં સાધનો છે તેમ આંકડાશાસ્ત્રી માટે 'મધ્યક' અને 'પ્રમાણિત વિચલન' છે."

– M. M. Blair

પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી :

જો અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ હોય અને $\bar{x}$ તેનો મધ્યક હોય તો પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યામાં આપણે ચર્ચા કરી તે પ્રમાણે અવલોકનના i માં અવલોકન x_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$)નું મધ્યકથી વિચલન $x_i - \bar{x}$ મેળવવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ વિચલનોના વર્ગો લઈ વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ મેળવવામાં આવે છે. આ સરવાળાને અવલોકનની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી વિચરણ s^2 મળે છે.

$\therefore$ વિચરણ $s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$

આ વિચરણનું ધન વર્ગમૂળ લેવાથી પ્રમાણિત વિચલન મળે છે અને તેનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

ઉદાહરણ 12 : એક બૅટ્સમૅનના છેલ્લી સાત મૅચમાં નીચે મુજબ રન થાય છે :

52, 58, 40, 60, 54, 38, 48

આ માહિતી પરથી બૅટ્સમૅનના રનનું વિચરણ શોધો તથા પ્રમાણિત વિચરણ પણ શોધો.

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=50$	$(x-\bar{x})^2$
	52	2	4
	58	8	64
	40	– 10	100
	60	10	100
	54	4	16
	38	– 12	144
	48	– 2	4
કુલ	**350**	**0**	**432**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{350}{7}$

$= 50$ રન

વિચરણ $s^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$

$= \frac{432}{7}$

$= 61.7143$

$\therefore \quad s^2 \approx 61.71$ (રન)^2

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{61.7143}$

$= 7.8558$

$\therefore \quad s \approx 7.86$ રન

આમ, બૅટ્સમૅનના રનનું પ્રમાણિત વિચલન 7.86 રન છે.

નોંધ : પ્રમાણિત વિચલનને અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવવામાં આવે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે વિચરણ એ પ્રમાણિત વિચલનનો વર્ગ છે, તેથી વિચરણનો એકમ પ્રમાણિત વિચલનના ‘એકમનો વર્ગ’ થાય છે.

દા.ત., અવલોકનનો એકમ કિગ્રા હોય તો પ્રમાણિત વિચલનનો એકમ પણ કિગ્રા થાય છે. જ્યારે વિચરણનો એકમ (કિગ્રા)^2 થાય છે.

નોંધ : જ્યારે મધ્યક $\bar{x}$ની કિંમત અપૂર્ણાંક સંખ્યા હોય અને અવલોકનોની કિંમત બહુ મોટી ન હોય, તો પ્રમાણિત વિચલન sની ગણતરી નીચેના સૂત્રથી થોડી સરળ બનાવી શકાય :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ઉદાહરણ 13 : પાંચ વિદ્યાર્થીઓને એક કોયડો ઉકેલતાં લાગતો સમય (મિનિટમાં) અનુક્રમે 5, 8, 3, 6, 10 છે. આ માહિતી પરથી કોયડો ઉકેલતા લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન ગણો.

	સમય (મિનિટ) x	x^2
	5	25
	8	64
	3	9
	6	36
	10	100
કુલ	**32**	**234**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{32}{5}$

$= 6.4$ મિનિટ

અહીં, મધ્યક $\bar{x}$ની કિંમત અપૂર્ણાંક હોવાથી આપણે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરવા નીચે આપેલ વૈકલ્પિક સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{234}{5} - (6.4)^2}$$

$$= \sqrt{46.8 - 40.96}$$

$$= \sqrt{5.84}$$

$$= 2.4166$$

$\therefore \quad s \approx 2.42$ મિનિટ

આમ, વિદ્યાર્થીને કોયડો ઉકેલતાં લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન 2.42 મિનિટ છે.

ટૂંકી રીત :

પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી સરળ બનાવવા માટે નીચે મુજબ ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં, $d_i = x_i - A$

A = ધારેલો મધ્યક

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ઉદાહરણ 14 : નીચે એક કંપનીના શૅરના છેલ્લા પાંચ દિવસના બંધભાવ (₹ માં) આપેલા છે :

132, 147, 120, 152, 125

ટૂંકી રીતે શૅરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં આપણે ધારેલો મધ્યક $A = 135$ લઈશું.

શૅરનો ભાવ (₹) x	$d = x-A$ $A = 135$	d^2
132	− 3	9
147	12	144
120	− 15	225
152	17	289
125	− 10	100
કુલ	**1**	**767**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{767}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{153.4 - 0.04}$$

$$= \sqrt{153.36}$$

$$= 12.3839$$

$\therefore \quad s \approx$ ₹ 12.38

આમ, શૅરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 12.38 છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના ચલ xની કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રથી કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

જ્યાં f_i = ચલ x ની i મી ચલકિંમત x_iની આવૃત્તિ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$$

$x_i - \bar{x}$ = ચલકિંમત x_iનું મધ્યક $\bar{x}$થી વિચલન

$n = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ટૂંકી રીત :

ટૂંકી રીતમાં, અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવવામાં આવે છે.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં, f_i = ચલની i મી કિંમત x_iની આવૃત્તિ

A = ધારેલો મધ્યક

$d_i = x_i - A$ = ચલકિંમત x_iનું ધારેલ મધ્યક A થી વિચલન

$n = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : ધારેલા મધ્યક A ની કિંમત અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ પૈકીની એક અથવા અનુકૂળતા પ્રમાણે ગમે તે લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 15 : એક વર્ગના 15 વિદ્યાર્થીઓની જાન્યુઆરી મહિનામાં ગેરહાજરીના દિવસોની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે મુજબ છે તે પરથી વિદ્યાર્થીના ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો.

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0	1	2	3	4
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	3	7	3	1

x	f	fx	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f(x - \bar{x})^2$	fx^2
0	1	0	– 2	4	4	0
1	3	3	– 1	1	3	3
2	7	14	0	0	0	28
3	3	9	1	1	3	27
4	1	4	2	4	4	16
કુલ	**n = 15**	**30**	**0**	**–**	**14**	**74**

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{30}{15} = 2$ દિવસો

$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n}}$

$s = \sqrt{\frac{14}{15}}$

$s = \sqrt{0.9333}$

$= 0.9661$

$\therefore \quad s \approx 0.97$ દિવસો

પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત નીચે મુજબ વૈકલ્પિક સૂત્ર દ્વારા મેળવી શકાય છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{74}{15} - (2)^2}$$

$$= \sqrt{4.9333 - 4}$$

$$= \sqrt{0.9333}$$

$$= 0.9661$$

$\therefore \quad s \approx 0.97$ દિવસો

આમ, વિદ્યાર્થીના ગેરહાજરીના દિવસોનું પ્રમાણિત વિચલન 0.97 છે.

પ્રમાણિત વિચલનાંક $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{0.97}{2}$

$$= 0.485$$

$$\approx 0.49$$

આમ, ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક 0.49 છે.

ઉદાહરણ 16 : મોબાઈલની એક દુકાનમાં છેલ્લા 35 દિવસમાં વેચાયેલા મોબાઈલની વિગત નીચે આપી છે. તે પરથી વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો. (ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરો.)

વેચાયેલ મોબાઈલની સંખ્યા	5	6	7	8	9	10
દિવસોની સંખ્યા	2	5	8	12	7	1

ધારેલો મધ્યક A = 8

x	f	$d = x - A$ $A = 8$	fd	fd^2
5	2	– 3	– 6	18
6	5	– 2	– 10	20
7	8	– 1	– 8	8
8	12	0	0	0
9	7	1	7	7
10	1	2	2	4
કુલ	$n = 35$	–	**– 15**	**57**

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

$$= 8 + \frac{(-15)}{35}$$

$$= 8 - 0.4286$$

$$= 7.5714$$

$\therefore \quad \bar{x} \approx 7.57$ મોબાઈલ

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{57}{35} - \left(\frac{-15}{35}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6286 - 0.1837}$$

$$= \sqrt{1.4449}$$

$$= 1.2020$$

$\therefore \quad s \approx 1.20$ મોબાઈલ

આમ, વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન 1.20 મોબાઈલ છે.

પ્રમાણિત વિચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}}$

$$= \frac{1.20}{7.57}$$

$$= 0.1585$$

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલનાંક ≈ 0.16

આમ, વેચાયેલાં મોબાઈલની સંખ્યાનો પ્રમાણિત વિચલનાંક 0.16 છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમત અનુક્રમે x_1 x_2, ..., x_k છે અને k વર્ગોની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

જ્યાં $f_i = i$ માં વર્ગની આવૃત્તિ

$x_i = i$ માં વર્ગની મધ્યકિંમત

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$$

$x_i - \bar{x} = i$ મી મધ્યકિંમત x_iનું મધ્યક $\bar{x}$થી વિચલન

$n = \Sigma f_i =$ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ટૂંકી રીત :

ટૂંકી રીતમાં સમાન વર્ગલંબાઈવાળા સતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{n}\right)^2} \times c$$

જ્યાં x_i = i માં વર્ગની મધ્યકિંમત

A = ધારેલો મધ્યક

f_i = i માં વર્ગની આવૃત્તિ

c = વર્ગલંબાઈ

$$d_i = \frac{x_i - A}{c}$$

$n = \Sigma f_i$ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

નોંધ : ● ધારેલા મધ્યક Aની કિંમત વર્ગની મધ્યકિંમતો પૈકીની એક અથવા અનુકૂળતા પ્રમાણે ગમે તે લઈ શકાય.

● માહિતીને અનુરૂપ પ્રમાણિત વિચલનના કોઈ પણ સ્વરૂપના સૂત્રથી પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત સમાન મળે છે.

ઉદાહરણ 17 : એક શાળાના 200 વિદ્યાર્થીઓના એક પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણના નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન ગણો.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	12	30	45	50	37	21

અહીં ફક્ત પ્રમાણિત વિચલન મેળવવાનું છે તેથી મધ્યકની કિંમતની જરૂર પડે નહિ. આ સંજોગોમાં ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય.

અહીં ધારેલો મધ્યક $A = 35$ અને વર્ગલંબાઈ $c = 10$

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 35, c = 10$	fd	fd^2
0 - 10	5	5	– 3	– 15	45
10 - 20	12	15	– 2	– 24	48
20 - 30	30	25	– 1	– 30	30
30 - 40	45	35	0	0	0
40 - 50	50	45	1	50	50
50 - 60	37	55	2	74	148
60 - 70	21	65	3	63	189
કુલ	$n = 200$	–	–	**118**	**510**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{510}{200} - \left(\frac{118}{200}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.55 - 0.3481} \times 10$$

$$= \sqrt{2.2019} \times 10$$

$$= 14.8388$$

$\therefore \quad s \approx 14.84$ ગુણ

આમ, વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન 14.84 ગુણ છે.

ઉદાહરણ 18 : એક ફેક્ટરીના કામદારોના દૈનિક વેતન (₹માં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી કામદારોના દૈનિક વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

દૈનિક વેતન (₹)	130થી વધુ	150થી વધુ	170થી વધુ	190થી વધુ	210થી વધુ	230થી વધુ
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	150	142	116	57	14	0

અહીં "થી વધુ" પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલું છે. તેને સામાન્ય આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવતા, નીચે મુજબનું આવૃત્તિ-વિતરણ મળે :

દૈનિક વેતન (₹)	130 - 150	150 - 170	170 - 190	190 - 210	210 - 230
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	150 – 142 = 8	142 – 116 = 26	116 – 57 = 59	57 – 14 = 43	14 – 0 = 14

દૈનિક વેતન(₹)	**વ્યક્તિઓની સંખ્યા** f	**મધ્યકિંમત** x	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 180,\ c = 20$	fd	fd^2
130 - 150	8	140	– 2	– 16	32
150 - 170	26	160	– 1	– 26	26
170 - 190	59	180	0	0	0
190 - 210	43	200	1	43	43
210 - 230	14	220	2	28	56
કુલ	$n = 150$	–	–	**29**	**157**

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{157}{150} - \left(\frac{29}{150}\right)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0467 - (0.1933)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0467 - 0.0374} \times 20$$

$$= \sqrt{1.0093} \times 20$$

$$= 20.0928$$

$\therefore \quad s \approx 20.09$ ₹

આમ, ફેક્ટરીના કામદારોના દૈનિક વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન 20.09 ₹ છે.

નોંધ : અભ્યાસ હેઠળના ચલનાં બધાં જ અવલોકનો સમાન હોય એટલે કે, $x_1 = x_2 = x_3 = ... x_n = k$; જ્યાં k કોઈ અચલ સંખ્યા હોય, તો પ્રસારનાં બધાં જ માપની કિંમત શૂન્ય થાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. ગણિતની 100 ગુણની કસોટીમાં નવ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે :

64, 63, 72, 65, 68, 69, 66, 67, 69

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

2. એક વિસ્તારનાં પાંચ સર્વિસ સ્ટેશનમાં કોઈ એક દિવસે સર્વિસ માટે આવેલી કારની સંખ્યા અનુક્રમે 7, 3, 11, 8, 9 છે. આ માહિતી પરથી એક દિવસમાં સર્વિસ માટે આવતી કારની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

3. એક બૅન્કમાં થાપણની રકમ (હજાર ₹માં) અને થાપણદારોની સંખ્યા દર્શાવતી માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી થાપણની રકમનો પ્રમાણિત વિચલનાંક શોધો.

થાપણની રકમ (હજાર ₹)	5	10	15	20	25	30	35
થાપણદારોની સંખ્યા	2	7	11	15	10	4	1

4. 50 પેઢીના છેલ્લા વર્ષમાં થયેલા નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત નીચે આપેલ છે. આ માહિતી પરથી પેઢીઓના નફાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

નફો (લાખ ₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
પેઢીઓની સંખ્યા	7	6	15	12	10

5. એક સોસાયટીમાં રહેતા 125 વ્યક્તિઓની ઉંમર (વર્ષમાં)નું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી વ્યક્તિની ઉંમરનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો અને પ્રમાણિત વિચલનાંક પણ શોધો.

વ્યક્તિની ઉંમર (વર્ષ)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	15	15	23	22	25	10	5	10

*

ચલનાંક (Co-efficient of Variation) :

આપણે અગાઉ જોઈ ગયાં કે પ્રમાણિત વિચલન એ નિરપેક્ષ માપ છે અને તે અવલોકનોના એકમમાં દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી બે કે વધુ જુદા જુદા એકમો ધરાવતા માહિતી સમૂહોના પ્રસારમાનની સરખામણી કરવા માટે નિરપેક્ષ માપનો ઉપયોગ કરી શકાય નહિ. આવી સરખામણી કરવા માટે સાપેક્ષ માપ પ્રમાણિત વિચલનાંક $\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)$નો ઉપયોગ કરવો પડે. મોટે ભાગે પ્રમાણિત વિચલનાંક $\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)$નું મૂલ્ય અપૂર્ણાંક સ્વરૂપમાં મળે છે, તેથી સામાન્ય સમજ ધરાવતા લોકોને પણ સમજ પડે તેવા યોગ્ય સાપેક્ષ માપ તરીકે કાલ પિયર્સને 'ચલનાંક (Co-efficient of Variation)' સૂચવેલ છે, જે પ્રમાણિત વિચલનાંકને 100 વડે ગુણવાથી મળે છે.

$\therefore$ ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

અહીં ચલનાંકને ટકાવારીમાં દર્શાવાય છે. એટલે કે ચલનાંક એ મધ્યકની સાપેક્ષમાં પ્રમાણિત વિચલનને ટકાવારીમાં દર્શાવતું માપ છે.

બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોના પ્રસારમાનની સરખામણી માટે ચલનાંક ખૂબ જ ઉપયોગી સાપેક્ષ માપ છે. જે શ્રેણી માટે ચલનાંક ઓછો હોય તે શ્રેણી વધુ સ્થિર (Stable) અને તેમાં પ્રસારમાન ઓછું છે તેમ કહેવાય. આવી શ્રેણી પ્રસારમાનના સંદર્ભમાં વધુ સુસંગત (Consistent) છે તેમ પણ કહેવાય. જે શ્રેણી માટે ચલનાંક વધુ હોય તે શ્રેણી ઓછી સ્થિર અને તેમાં પ્રસારમાન વધુ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 19 : નીચે બે બૅટ્સમૅન A અને B એ છેલ્લા દસ દાવમાં કરેલા રનની માહિતી આપેલી છે. તે પરથી કયો બૅટ્સમૅન વધુ સુસંગત રમત રમે છે, તે નક્કી કરો :

બૅટ્સમૅન A ના રન	25	50	45	30	70	42	36	48	34	60
બૅટ્સમૅન B ના રન	10	70	50	20	95	55	42	60	48	80

કયા બૅટ્સમૅનની રમત સુસંગત છે તે જાણવા આપણે બંને બેટ્સમૅનના રનના ચલનાંક મેળવીશું.

બૅટ્સમૅન A

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=44$	$(x-\bar{x})^2$
	25	− 19	361
	50	6	36
	45	1	1
	30	− 14	196
	70	26	676
	42	− 2	4
	36	− 8	64
	48	4	16
	34	− 10	100
	60	16	256
કુલ	**440**	**0**	**1710**

બૅટ્સમૅન B

	રન x	$x-\bar{x}$ $\bar{x}=53$	$(x-\bar{x})^2$
	10	− 43	1849
	70	17	289
	50	− 3	9
	20	− 33	1089
	95	42	1764
	55	2	4
	42	− 11	121
	60	7	49
	48	− 5	25
	80	27	729
કુલ	**530**	**0**	**5928**

બૅટ્સમૅન A

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{440}{10} = 44$

$\therefore \bar{x} = 44$ રન

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{1710}{10}}$

$= \sqrt{171}$

$= 13.0767$

$\therefore s \approx 13.08$ રન

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{13.08}{44} \times 100$

$= \frac{1308}{44}$

$= 29.7272$ %

$\therefore$ ચલનાંક ≈ 29.73 %

બૅટ્સમૅન B

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{530}{10} = 53$

$\therefore \bar{x} = 53$ રન

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{5928}{10}}$

$= \sqrt{592.8}$

$= 24.3475$

$\therefore s \approx 24.35$ રન

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{24.35}{53} \times 100$

$= \frac{2435}{53}$

$= 45.9434$ %

$\therefore$ ચલનાંક ≈ 45.94 %

બૅટ્સમૅન Aનો ચલનાંક ઓછો હોવાથી તેની રમત વધુ સુસંગત છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

બૅટ્સમૅનના રનનો મધ્યક સમાન કે લગભગ સમાન હોય ત્યારે વધુ સુસંગત એટલે બૅટ્સમૅન રમતમાં વધુ સારો છે એમ કહી શકાય. પરંતુ બંને બૅટ્સમૅનના મધ્યક અલગ હોય તો આવું કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 20 : નીચે એક ફેક્ટરીના બે કામદારો વિશે માહિતી આપેલી છે :

વિગત	કામદાર A	કામદાર B
કાર્ય પૂરું કરવા લાગતો સરેરાશ સમય (મિનિટ)	30	25
પ્રમાણિત વિચલન (મિનિટ)	6	4

કયા કામદારના કાર્ય પૂરું કરવા લાગતા સમયમાં વધુ સાપેક્ષ પ્રસાર છે ?

બંને કામદારોના ચલનાંક સરખાવી ઉપર્યુક્ત બાબતનો નિર્ણય લઈશું.

કામદાર A

$\bar{x}$ = 30 મિનિટ, s = 6 મિનિટ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{6}{30} \times 100$

= 20 %

કામદાર B

$\bar{x}$ = 25 મિનિટ, s = 4 મિનિટ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{4}{25} \times 100$

= 16 %

કામદાર Aનો ચલનાંક વધુ હોવાથી તેના સમયમાં પ્રસાર વધુ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 21 : એક વર્ગના 50 વિદ્યાર્થીઓના વજન અને ઊંચાઈના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે મુજબ છે :

વિગત	વજન	ઊંચાઈ
મધ્યક	56.2 કિગ્રા	62.5 ઇંચ
પ્રમાણિત વિચલન	4.8 કિગ્રા	9.3 ઇંચ

ઊંચાઈ અને વજનમાંથી શેમાં પ્રસાર વધુ જણાય છે ?

અહીં વજન અને ઊંચાઈના એકમો જુદા જુદા છે તેથી સરખામણી કરવા માટે પ્રસારનું સાપેક્ષ માપ જ ઉપયોગમાં લેવું પડે અને માહિતી જોતાં માલૂમ પડે છે કે ચલનાંક એ સૌથી યોગ્ય માપ છે.

વજન

$\bar{x}$ = 56.2 કિગ્રા s = 4.8 કિગ્રા

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{4.8}{56.2} \times 100$

= 8.54 %

ઊંચાઈ

$\bar{x}$ = 62.5 ઇંચ, s = 9.3 ઇંચ

ચલનાંક $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{9.3}{62.5} \times 100$

= 14.88 %

ઊંચાઈ માટે ચલનાંક વધુ હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈમાં પ્રસાર વધુ છે.

પ્રમાણિત વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ

લાભ :

(1) તેની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ચોક્કસ છે.

(2) તેની ગણતરીમાં બધાં જ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.

(3) પ્રસારના અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલન વધારે સક્ષમ માપ છે.

(4) પ્રમાણિત વિચલન અન્ય બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ માપ છે. દા.ત., જો બે માહિતી સમૂહોના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન આપેલા હોય તો બે માહિતી સમૂહોને ભેગાં કરવાથી મળતા નવા સમૂહનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન મેળવી શકાય છે. આ પ્રકારની બૈજિક ક્રિયા કરી પ્રસારના અન્ય માપ માટે મિશ્ર માપ મેળવી શકાતું નથી.

(5) પ્રસારનાં અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ વિશેષ થાય છે.

ગેરલાભ :

(1) પ્રસારનાં અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી અઘરી છે.

(2) આ માપમાં અંતિમ અવલોકનોને વધુ મહત્ત્વ મળે છે.

(3) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ખુલ્લા છેડાવાળું હોય તો પ્રમાણિત વિચલન શોધી ન શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.5

1. બે શૅર A અને Bના ભાવની વધઘટ નીચે દર્શાવી છે : કયા શૅરના ભાવમાં સાપેક્ષ ચલન વધારે છે ?

શૅર Aનો ભાવ (₹)	321	322	325	322	324	320	323	316	319	318
શૅર Bનો ભાવ (₹)	141	146	130	146	142	145	132	134	132	152

2. બે કંપનીના વહીવટી કર્મચારીઓના દૈનિક પગાર વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

વિગત	**કંપની A**	**કંપની B**
સરેરાશ પગાર (₹)	600	2100
પ્રમાણિત વિચલન (₹)	30	84

કઈ કંપનીમાં પગાર વધુ સ્થિર છે ?

3. બે શ્રેણીઓ માટે ચલનાંક 30 % અને 25 % છે અને તેમના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 15 અને 9 છે, તો બંને શ્રેણીના મધ્યક શોધો.

*

4.4 મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન (Combined Standard Deviation)

ધારો કે સમષ્ટિમાંથી મેળવેલા બે માહિતી સમૂહો G_1 અને G_2માંથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

વિગત	**સમૂહ G_1 માટે**	**સમૂહ G_2 માટે**
અવલોકનોની સંખ્યા	n_1	n_2
મધ્યક	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
પ્રમાણિત વિચલન	s_1	s_2

હવે માહિતી સમૂહો G_1 અને G_2નાં અવલોકનો ભેગાં કરી એક નવો સમૂહ G મેળવવામાં આવે છે. આ નવા સમૂહના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c$ અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન s_c તરીકે ઓળખાય છે અને તેનાં સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \dfrac{n_1\bar{x}_2 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન $s_c = \sqrt{\dfrac{n_1({s_1}^2 + {d_1}^2) + n_2({s_2}^2 + {d_2}^2)}{n_1 + n_2}}$

જ્યાં, n_1 = સમૂહ G_1નાં અવલોકનોની સંખ્યા

n_2 = સમૂહ G_2નાં અવલોકનોની સંખ્યા

s_1 = સમૂહ G_1નું પ્રમાણિત વિચલન

s_2 = સમૂહ G_2નું પ્રમાણિત વિચલન

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c$

ઉદાહરણ 22 : બે માહિતી સમૂહ G_1 અને G_2 પ્રત્યેકમાં પાંચ અવલોકનો નીચે મુજબ છે :

સમૂહ G_1 : 1, 3, 5, 7, 9

સમૂહ G_2 : 2, 4, 6, 8, 10

બંને સમૂહના મધ્યક તથા વિચરણ શોધો અને તે પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

સમૂહ G_1 માટે

	x	$(x - \bar{x})$ $\bar{x} = 5$	$(x - \bar{x})^2$
	1	– 4	16
	3	– 2	4
	5	0	0
	7	2	4
	9	4	16
કુલ	**25**	**0**	**40**

સમૂહ G_2 માટે

	x	$(x - \bar{x})$ $\bar{x} = 6$	$(x - \bar{x})^2$
	2	– 4	16
	4	– 2	4
	6	0	0
	8	2	4
	10	4	16
કુલ	**30**	**0**	**40**

સમૂહ G_1નો મધ્યક

$$\bar{x}_1 = \frac{\Sigma x}{n_1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\therefore \quad \bar{x}_1 = 5$$

સમૂહ G_2નો મધ્યક

$$\bar{x}_2 = \frac{\Sigma x}{n_2} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\therefore \quad \bar{x}_2 = 6$$

સમૂહ G_1નું વિચરણ

$$s_1^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x}_1)^2}{n_1} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\therefore \quad s_1^2 = 8$$

સમૂહ G_2નું વિચરણ

$$s_2^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x}_2)^2}{n_2} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\therefore \quad s_2^2 = 8$$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{5\,(5)+5\,(6)}{5+5}$$

$$= \frac{25+30}{10}$$

$$= \frac{55}{10}$$

$$= 5.5$$

$$\therefore \quad \bar{x}_c = 5.5$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 5 - 5.5 = -0.5$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 6 - 5.5 = 0.5$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\,(8 + (-0.5)^2) + 5\,(8 + (0.5)^2)}{5+5}}$$

$$= \sqrt{\frac{5(8.25) + 5(8.25)}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{41.25 + 41.25}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{82.5}{10}}$$

$$= \sqrt{8.25}$$

$$= 2.8712$$

$\therefore \quad s_c \approx 2.87$

પ્રવૃત્તિ

ઉદાહરણ 22 માંથી બંને સમૂહ G_1 અને G_2નાં બધાં જ અવલોકનો ભેગાં કરો. આમ કરવાથી તમને દસ અવલોકનો 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10 મળશે. આ દસ અવલોકનોનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. તમે જોઈ શકશો કે તેના જવાબો ઉદાહરણ 22માં મેળવેલા મિશ્ર મધ્યક અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન જેટલા જ આવશે.

ઉદાહરણ 23 : એક ફેક્ટરીમાં બે પાળીમાં કોઈ વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય છે. કારીગરો દ્વારા લાગતા ઉત્પાદન સમયની વિગત નીચે મુજબ છે. નીચેની માહિતી પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	**પાળી I**	**પાળી II**
કારીગરોની સંખ્યા	60	40
સરેરાશ ઉત્પાદન સમય (મિનિટ)	25	20
પ્રમાણિત વિચલન (મિનિટ)	5	3

સૌપ્રથમ આપણે મિશ્ર મધ્યક શોધીએ.

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{60(25) + 40(20)}{60 + 40}$$

$$= \frac{1500 + 800}{100}$$

$$= \frac{2300}{100}$$

= 23 મિનિટ

આમ, બંને પાળીના બધા જ કારીગરો દ્વારા વસ્તુનું ઉત્પાદન કરવા સરેરાશ 23 મિનિટ લાગે છે તેમ કહેવાય.

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 25 - 23 = 2$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 20 - 23 = -3$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(5^2 + 2^2) + 40(3^2 + (-3)^2)}{60 + 40}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(25 + 4) + 40(9 + 9)}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{60(29) + 40(18)}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1740 + 720}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{2460}{100}}$$

$$= \sqrt{24.6}$$

$$= 4.9598$$

$\therefore \quad s_c \approx 4.96$ મિનિટ

આમ, બંને પાળીના બધા જ કારીગરોને વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતાં લાગતા સમયનું પ્રમાણિત વિચલન 4.96 મિનિટ છે.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકને ''પ્રથમ ક્રમની સરેરાશનાં માપો'' કહેવાય છે. જ્યારે પ્રસારના મોટા ભાગનાં માપ "બીજા ક્રમની સરેરાશ"નાં માપો તરીકે ઓળખાય છે.

સ્વાધ્યાય 4.6

1. એક શાળાના બે વર્ગોના વિદ્યાર્થીઓના ગુણ વિશે નીચે મુજબ વિગત આપેલી છે. આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	વર્ગ A	વર્ગ B
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	50	60
સરેરાશ ગુણ	60	48
પ્રમાણિત વિચલન	10	12

2. એક ફેક્ટરીમાં બે ઉત્પાદન વિભાગો વિશે નીચે મુજબ વિગત આપેલી છે. તે પરથી બંને વિભાગોમાં ઉત્પાદિત થતા એકમોના ઉત્પાદન સમયનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વિગત	વિભાગ A	વિભાગ B
કારીગરોની સંખ્યા	10	40
એકમદીઠ સરેરાશ ઉત્પાદન-સમય (મિનિટ)	25	20
વિચરણ	16	25

*

ઉદાહરણ 24 : એક રસ્તા પર 10 દિવસમાં થતાં અકસ્માતની માહિતી નીચે મુજબ છે, તે પરથી તે રસ્તા પર એક દિવસમાં થતા અકસ્માતનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. કેટલા ટકા દિવસોમાં અકસ્માતની સંખ્યા $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં સમાયેલી છે ?

અકસ્માતની સંખ્યા	1	2	3	4	5
દિવસોની સંખ્યા	2	3	3	1	1

અકસ્માતની સંખ્યા x	દિવસોની સંખ્યા f	fx	fx^2
1	2	2	2
2	3	6	12
3	3	9	27
4	1	4	16
5	1	5	25
કુલ	n **= 10**	**26**	**82**

મધ્યક

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$= \frac{26}{10}$$

$$= 2.6$$

$\therefore\ \bar{x} = 2.6$ અકસ્માત

પ્રમાણિત વિચલન

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{82}{10} - (2.6)^2}$$

$$= \sqrt{8.2 - 6.76}$$

$$= \sqrt{1.44}$$

$$= 1.2$$

$\therefore\ s = 1.2$ અકસ્માત

હવે, $\bar{x} - s = 2.6 - 1.2 = 1.4$ અકસ્માત

$\bar{x} + s = 2.6 + 1.2 = 3.8$ અકસ્માત

આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી જોઈ શકાશે કે 1.4 અને 3.8ની વચ્ચે આવતા દિવસોની સંખ્યા 2 અને 3 છે અને તેને અનુરૂપ અકસ્માતની સંખ્યા અનુક્રમે 3 અને 3 છે. તેથી $\bar{x} - s = 1.4$ અને $\bar{x} + s = 3.8$ ની મર્યાદામાં આવતા દિવસોની સંખ્યા 3 + 3 = 6 છે. કુલ દિવસો 10 હોવાથી $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં આવતા દિવસોની ટકાવારી $\frac{6}{10} \times 100 = 60$ છે.

ઉદાહરણ 25 : 100 કારીગરો દ્વારા એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થતી કોઈ વસ્તુના એકમોની સંખ્યાનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 60 અને 10 છે. પાછળથી માલૂમ પડ્યું કે બે કારીગરો દ્વારા ખરેખર અનુક્રમે 30 અને 20 એકમો બનાવવામાં આવ્યા હતા પરંતુ ભૂલથી તે અનુક્રમે 5 અને 45 છે તેમ નોંધવામાં આવેલા હતા. આ બાબત ધ્યાનમાં લેતાં 100 કારીગરો દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલ વસ્તુના એકમોનો સુધારેલો મધ્યક અને સુધારેલું પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?

આપણને $n = 100$, $\bar{x} = 60$, $s = 10$ આપેલા છે.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \qquad s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$60 = \frac{\Sigma x}{100} \qquad 10 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{100} - (60)^2}$$

$$\therefore \quad \Sigma x = 6000 \qquad 100 = \frac{\Sigma x^2}{100} - 3600$$

$$3700 = \frac{\Sigma x^2}{100}$$

$$\therefore \quad \Sigma x^2 = 3,70,000$$

પરંતુ, Σx અને Σx^2 ની મળેલી આ કિંમતો સાચી નથી. હવે, કારીગરોના ઉત્પાદિત એકમોની સાચી સંખ્યા તેમની ખોટી સંખ્યાના સ્થાને મૂકતા,

$$\text{સુધારેલ } \Sigma x = 6000 - 5 - 45 + 30 + 20 = 6000$$

$$\text{સુધારેલ } \Sigma x^2 = 3,70,000 - (5)^2 - (45)^2 + (30)^2 + (20)^2$$

$$= 3,70,000 - 25 - 2025 + 900 + 400$$

$$= 3,69,250$$

$$\therefore \text{ સુધારેલ મધ્યક } \bar{x} = \frac{\text{સુધારેલ } \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{6000}{100}$$

$$= 60 \text{ એકમો}$$

$$\text{સુધારેલ પ્રમાણિત વિચલન} \quad s = \sqrt{\frac{\text{સુધારેલ } \Sigma x^2}{n} - (\text{સુધારેલ } \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{369250}{100} - (60)^2}$$

$$= \sqrt{3692.5 - 3600}$$

$$= \sqrt{92.5}$$

$$= 9.6177$$

$$\approx 9.62 \text{ એકમો}$$

ઉદાહરણ 26 : બે પેઢી A અને Bના કામદારોના દૈનિક વેતન (₹ માં)ને લગતાં પરિણામો નીચે મુજબ છે :

વિગત	પેઢી A	પેઢી B
કામદારોની સંખ્યા	20	30
સરેરાશ વેતન (₹)	250	400
વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન (₹)	10	12

ઉપરની માહિતીનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કઈ પેઢી તેના કામદારોને કુલ વેતન વધુ ચૂકવે છે ?

2. કઈ પેઢીના કામદારોના વ્યક્તિગત વેતનમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે ?

3. A અને B પેઢીના મિશ્ર મધ્યક અને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

(1) **પેઢી A**

($n_1 = 20,\ \bar{x}_1 = 250$)

કુલ દૈનિક વેતન $= n_1\bar{x}_1$

$= 20\ (250)$

$= 5000$

પેઢી B

($n_2 = 30,\ \bar{x}_2 = 400$)

કુલ દૈનિક વેતન $= n_2\bar{x}_2$

$= 30\ (400)$

$= 12000$

તેથી પેઢી B વધારે વેતન ચૂકવે છે.

(2) **પેઢી A**

ચલનાંક $= \frac{s_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$= \frac{10}{250} \times 100$

$= 4\ \%$

પેઢી B

ચલનાંક $= \frac{s_2}{\bar{x}_2} \times 100$

$= \frac{12}{400} \times 100$

$= 3\ \%$

પેઢી A માટે ચલનાંક વધુ છે, તેથી પેઢી Aના દૈનિક વેતનમાં ચલન વધુ છે તેમ કહેવાય.

(3) **મિશ્ર મધ્યક** $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{20(250)+30(400)}{20+30}$$

$$= \frac{5000+12000}{50}$$

$$\therefore\ \bar{x}_c = \frac{17000}{50} = ₹\ 340$$

આમ, બંને પેઢીના કામદારો સંયુક્ત લઈએ તો બધા જ કામદારો માટે સરેરાશ દૈનિક વેતન ₹ 340 થાય..

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c = 250 - 340 = -90$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c = 400 - 340 = 60$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન

$$s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{20\left((10)^2 + (-90)^2\right) + \left(30(12)^2 + (60)^2\right)}{20+30}}$$

$$= \sqrt{\frac{20(100+8100)+30(144+3600)}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{164000+112320}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{276320}{50}}$$

$$= \sqrt{55264}$$

$$= 74.3398$$

$\therefore\ s_c \approx ₹\ 74.34$

આમ, બંને પેઢીના કામદારો સંયુક્ત લઈએ તો બધા જ કામદારોના વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 74.34 થાય.

ઉદાહરણ 27 : કોઈ એક નર્સરીમાં ગુલાબના 30 છોડ પર ગુલાબની સંખ્યાની વિગત નીચે મુજબ છે. તે પરથી છોડદીઠ ગુલાબની સંખ્યાનો વિસ્તાર, વિસ્તારાંક, ચતુર્થક વિચલન, ચતુર્થક વિચલનાંક, સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

ગુલાબની સંખ્યા	1	3	5	6 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 22
છોડની સંખ્યા	1	2	5	10	8	3	1

ગુલાબની સંખ્યા	છોડની સંખ્યા f	cf	મધ્યકિંમત x	fx	$\|x - \bar{x}\|$ $\bar{x} = 8.1$	$f\|x - \bar{x}\|$
1	1	1	1	1	7.1	7.1
3	2	3	3	6	5.1	10.2
5	5	8	5	25	3.1	15.5
6-8	10	18	7	70	1.1	11
8-12	8	26	10	80	1.9	15.2
12-16	3	29	14	42	5.9	17.7
16-22	1	30	19	19	10.9	10.9
કુલ	$n = 30$	–	–	**243**	**35.1**	**87.6**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{243}{30}$

$= 8.1$ ગુલાબ

અહીં $x_H = 22$ અને $x_L = 1$

$\therefore$ વિસ્તાર $= x_H - x_L$

$= 22 - 1$

$= 21$ ગુલાબ

વિસ્તારાંક $= \frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$

$= \frac{21}{22+1}$

$= \frac{21}{23}$

$= 0.9130$

$\therefore$ વિસ્તારાંક ≈ 0.91

$Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{30}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 7.5$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે, કે 7.5મું અવલોકન 5 છે.

$\therefore$ $Q_1 = 5$ ગુલાબ

$Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3(7.5)$ મા અવલોકનની કિંમત

$= 22.5$ મા અવલોકનોની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ (cf)ના સ્તંભ પરથી માલૂમ પડે છે કે, 22.5 મું અવલોકન 8-12ના વર્ગમાં સમાયેલ છે. તેથી 8–12 એ Q_3 વર્ગ થશે.

હવે, $Q_3 = L + \dfrac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

અહીં $L = 8$, $3\left(\frac{n}{4}\right) = 22.5$, $cf = 18$, $f = 8$, $c = 4$

$\therefore \quad Q_3 = 8 + \frac{22.5 - 18}{8} \times 4$

$= 8 + \frac{4.5}{2}$

$= 8 + 2.25$

$= 10.25$ ગુલાબ

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલન $Q_d = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \dfrac{10.25 - 5}{2}$

$= \dfrac{5.25}{2}$

$= 2.625$

$\therefore \quad Q_d \approx 2.63$ ગુલાબ

ચતુર્થક વિચલનાંક $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \dfrac{5.25}{10.25 + 5}$

$= \dfrac{5.25}{15.25}$

$= 0.3443$

$\therefore$ ચતુર્થક વિચલનાંક $= 0.34$

હવે, સરેરાશ વિચલન $= \dfrac{\Sigma f|x - \bar{x}|}{n}$

$= \dfrac{87.6}{30}$

$= 2.92$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલન $MD = 2.92$ ગુલાબ

સરેરાશ વિચલનાંક $= \dfrac{MD}{\bar{x}}$

$= \dfrac{2.92}{8.1}$

$= 0.3605$

$\therefore$ સરેરાશ વિચલનાંક ≈ 0.36

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો

ધારો કે અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$નો વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે R_x, Q_{dx}, MD_x અને s_x છે. હવે, જો પ્રત્યેક અવલોકન x_i (જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$)ને વાસ્તવિક શૂન્યેતર અચલ 'b' વડે ગુણી તેમાં અચલ 'a' ઉમેરવામાં આવે, તો આમ કરવાથી બનતાં અવલોકનો $y_1, y_2, ..., y_n$ મળે કે જેથી -

$$y_i = bx_i + a$$

હવે y ના વિસ્તાર ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન, પ્રમાણિત વિચલન અને વિચરણના માપ આપેલ અવલોકનો x ના માપ પરથી નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

માપ	x માટે	y માટે
વિસ્તાર	R_x	$R_y = \|b\|.R_x$
ચતુર્થક વિચલન	Q_{dx}	$Q_{dy} = \|b\|.Q_{dx}$
સરેરાશ વિચલન	MD_x	$MD_y = \|b\|.MD_x$
પ્રમાણિત વિચલન	s_x	$s_y = \|b\|.s_x$
વિચરણ	s^2_x	$s^2_y = b^2.s^2_x$

નોંધ : $|b| = b$ જો $b \geq 0$

$|b| = -b$ જો $b < 0$

ઉદાહરણ 28 : ચલ x નાં અવલોકનોના વિસ્તાર ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10, 2, 3 અને 5 છે. જો $y = 5x + 3$ હોય, તો ચલ y ના વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલન, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં ચલ x માટે વિસ્તાર $R_x = 10$, ચતુર્થક વિચલન $Q_{dx} = 2$, સરેરાશ વિચલન $MD_x = 3$, પ્રમાણિત વિચલન $s_x = 5$ છે. હવે $y = 5x + 3$ આપેલ છે તેથી આગળ ચર્ચા કરેલાં પરિણામો પરથી ચલના પ્રસારનાં માપો નીચે મુજબ મળે :

વિસ્તાર $R_y = |5| \cdot R_x = 5(10) = 50$

ચતુર્થક વિચલન $Q_{dy} = |5| \cdot Q_{dx} = 5(2) = 10$

સરેરાશ વિચલન $MD_y = |5| \cdot MD_x = 5(3) = 15$

પ્રમાણિત વિચલન $s_y = |5| \cdot s_x = 5(5) = 25$

ઉદાહરણ 29 : એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $d = 15 - 2p$ છે. જ્યાં p = વસ્તુનો એકમદીઠ ભાવ (₹માં) અને d = વસ્તુની માંગ (એકમોમાં) છે. જો છેલ્લા એક વર્ષના દર મહિનાના અંતે રહેલા ભાવનો વિસ્તાર ₹ 5, સરેરાશ વિચલન ₹ 2 અને વિચરણ 9 (₹)^2 હોય, તો તે પરથી તે વસ્તુની માંગનો વિસ્તાર, સરેરાશ વિચલન અને વિચરણ મેળવો.

અહીં ભાવનો વિસ્તાર $Rp = 5$ ₹, સરેરાશ વિચલન $MDp = 2$ ₹ અને વિચરણ $s_p^2 = 9$ (₹)^2 છે. હવે માંગનું વિધેય $d = 15 - 2p$ આપેલ છે. તેથી અગાઉ ચર્ચા કરેલાં પરિણામો પરથી વસ્તુની માંગ માટે

વિસ્તાર $R_d = |-2| \cdot R_p = 2(5) = 10$ એકમો

સરેરાશ વિચલન $MD_d = |-2| \cdot MD_p = 2(2) = 4$ એકમો

વિચરણ $s_d^2 = (-2)^2 \cdot s_p^2 = 4(9) = 36$ (એકમો)^2

ઉદાહરણ 30 : એક શાળાના કોઈ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની 100 ગુણની પ્રથમ કસોટીમાં મેળવેલા ગુણનો વિસ્તાર 80 ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન 20 ગુણ મળે છે. આંતરિક ગુણની ગણતરી કરવા માટે પ્રથમ કસોટીમાં મળેલા ગુણનો 4 વડે ભાગાકાર કરી તેને ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે, તો આમ કરવાથી પ્રથમ કસોટીના બનતા ગુણનો વિસ્તાર અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અહીં 100માંથી મેળવેલ ગુણને x વડે દર્શાવીએ તો વિસ્તાર $R_x = 80$ ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન $s_x = 20$ ગુણ છે. હવે આંતરિક ગુણની ગણતરી માટે 100માંથી મેળવેલા ગુણને 4 વડે ભાગવામાં આવે છે. આમ કરવાથી મળતા ગુણને y વડે દર્શાવીએ તો $y = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\ x$ થાય.

તેથી અગાઉ ચર્ચા કરેલ પરિણામો પરથી y નો વિસ્તાર અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે મુજબ મળે :

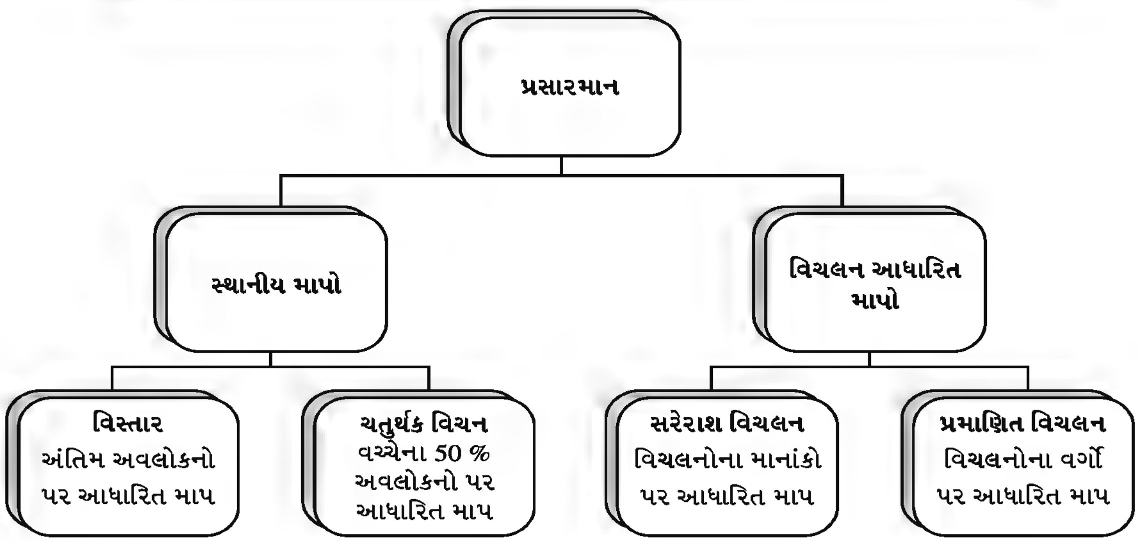
વિસ્તાર $R_y = \left|\frac{1}{4}\right|\ R_x = \frac{1}{4}\ (80) = 20$ ગુણ

પ્રમાણિત વિચલન $s_y = \left|\frac{1}{4}\right|\ s_x = \frac{1}{4}\ (20) = 5$ ગુણ

સારાંશ

- **પ્રસારમાન અથવા ચલન :** માહિતીના અવલોકનોનો પ્રસાર કે ફેલાવો દર્શાવતું મૂલ્ય.
- **વિસ્તાર :** માહિતીનાં સૌથી મોટાં અને સૌથી નાનાં અવલોકનોનો તફાવત લેવાથી પ્રસારનું આ સ્થાનીય માપ મળે છે.
- **ચતુર્થક વિચલન :** આ પણ પ્રસારનું એક સ્થાનીય માપ છે. તેમાં માહિતીના ફક્ત વચ્ચેનાં 50 % અવલોકનોને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. તેને અર્ધઆંતરચતુર્થક વિસ્તાર પણ કહેવામાં આવે છે.
- **સરેરાશ વિચલન :** તે માહિતીનાં અવલોકનો અને તેના મધ્યકના તફાવતો (વિચલનો)ના માનાંકોની સરેરાશ છે.
- **વિચરણ :** માહિતીનાં અવલોકનોના તેના મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો મધ્યક.
- **પ્રમાણિત વિચલન :** આ પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ છે. તે વિચરણ s^2નું ધન વર્ગમૂળ લેવાથી મળે છે.
- **સાપેક્ષ માપો :** પ્રસારના અભ્યાસ હેઠળના ચલના એકમથી મુક્ત માપને સાપેક્ષ માપ કહે છે. બે કે તેથી વધુ માહિતી સમૂહોમાં રહેલા પ્રસાર કે ચલનની સરખામણી કરવા માટે પ્રસારના સાપેક્ષ માપનો ઉપયોગ થાય છે.
- **ચલનાંક :** ચલનાંક એ પ્રમાણિત વિચલન પર આધારિત સાપેક્ષ પ્રસારનું ટકાવારી માપ છે. ચલનાંકની કિંમત જેમ ઓછી તેમ માહિતીમાં સ્થિરતા વધુ છે તેમ કહેવાય.

પ્રકરણની એક ઝલક



સૂત્રોની યાદી :

	પ્રસારનું માપ	નિરપેક્ષ માપ	સાપેક્ષ માપ
1.	**વિસ્તાર**	$R = x_H - x_L$	વિસ્તારાંક = $\frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$
2.	**ચતુર્થક વિચલન**	$Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	ચતુર્થક વિચલનાંક = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3.	**સરેરાશ વિચલન**	$MD = \frac{\Sigma \lvert x - \bar{x} \rvert}{n}$ (અવર્ગીકૃત માહિતી માટે) $MD = \frac{\Sigma f \lvert x - \bar{x} \rvert}{n}$ (વર્ગીકૃત માહિતી માટે)	સરેરાશ વિચલનાંક = $\frac{MD}{\bar{x}}$
4.	**પ્રમાણિત વિચલન :**	**અવર્ગીકૃત માહિતી માટે** $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$ અથવા $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$ **ટૂંકી રીત :** $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$ **વર્ગીકૃત માહિતી માટે :** $s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{n}}$ અથવા $\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$ **ટૂંકી રીત :** જ્યારે $d = x - A$ હોય, $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$ જ્યારે $d = \frac{x - A}{c}$ હોય, $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$	પ્રમાણિત વિચલનાંક = $\frac{s}{\bar{x}}$ ચલનાંક = $\frac{s}{\bar{x}} \times 100$
5.	**મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન** $s_c = \sqrt{\frac{n_1(s_1^2 + d_1^2) + n_2(s_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$		

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલા બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી કયું સૂત્ર વિસ્તારાંકનું છે ?

(a) $x_H - x_L$ (b) $\frac{x_H - x_L}{x_H + x_L}$ (c) $\frac{x_L - x_H}{x_L + x_H}$ (d) $x_L - x_H$

2. પ્રસારના કયા માપમાં અવલોકનો અને તેના મધ્યકના તફાવતના માનાંક લેવામાં આવે છે ?

(a) સરેરાશ વિચલન (b) પ્રમાણિત વિચલન (c) વિસ્તાર (d) ચતુર્થક વિચલન

3. નીચેના પૈકી કયું માપ એકમથી મુક્ત છે ?

(a) સરેરાશ વિચલન (b) ચતુર્થક વિચલન (c) વિસ્તાર (d) ચલનાંક

4. અંતિમ અવલોકનોની ન્યૂનતમ અસર થતી હોય તેવું પ્રસારમાનનું કયું માપ છે ?

(a) વિસ્તાર (b) પ્રમાણિત વિચલન (c) ચતુર્થક વિચલન (d) સરેરાશ વિચલન

5. જો સમૂહ Aનો ચલનાંક એ સમૂહ Bના ચલનાંક કરતાં ઓછો હોય, તો કયો સમૂહ ચલનની દૃષ્ટિએ વધુ સ્થિર ગણાય ?

(a) A (b) B (c) બંને (d) કહી શકાય નહિ.

6. 10 વિદ્યાર્થીઓનાં વજન (કિગ્રામાં) નીચે મુજબ છે :

53, 47, 60, 55, 71, 65, 61, 68, 63, 70 આ માહિતીનો વિસ્તાર કેટલો છે ?

(a) 17 (b) 23 (c) 24 (d) 18

7. એક માહિતીના પ્રથમ અને તૃતીય ચતુર્થકો અનુક્રમે 30 અને 50 હોય, તો ચતુર્થક વિચલનાંકની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.25 (b) 50 (c) 4 (d) 20

8. અવલોકનો 5, 5, 5, 5, 5 માટે પ્રસારનું કોઈ પણ માપ શું થાય ?

(a) 1 (b) 5 (c) 0 (d) 25

9. એક ચલ માટે મધ્યક 10 અને ચલનાંક 60 % હોય, તો ચલનું વિચરણ કેટલું થાય ?

(a) 6 (b) 36 (c) 60 (d) 50

10. એક શ્રેણી $k_1, k_2, k_3, \ldots. k_n$ નું પ્રમાણિત વિચલન 5 છે, તો

(i) $k_1 + 2, k_2 + 2, k_3 + 2, \ldots, k_n + 2$

(ii) $3k_1, 3k_2, 3k_3, \ldots., 3k_n$ શ્રેણીના પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?

(a) (i) 7 (ii) 3 (b) (i) 5 (ii) 3 (c) (i) 5 (ii) 15 (d) (i) 7 (ii) 15

11. એક ચલ xનો મધ્યક 5 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે. જો $y = 3x + 4$ હોય તો ચલ yનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે કેટલા થાય ?

(a) 19 અને 6 (b) 15 અને 49 (c) 19 અને 10 (d) 15 અને 10

12. એક માહિતીનાં અવલોકનોનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 45 અને 5 છે. જો દરેક અવલોકનોમાં અચલ સંખ્યા 5 ઉમેરવામાં આવે, તો નવી માહિતી બને તેનાં અવલોકનોનો ચલનાંક કેટલો થાય ?

(a) 10 % (b) 50 % (c) 11.11 % (d) 900 %

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિસ્તારની વ્યાખ્યા આપો.
2. ચતુર્થક વિચલનની વ્યાખ્યા આપો.
3. બે કે તેથી વધુ સમૂહોની તેમના ચલનના સંદર્ભમાં સરખામણી કરવા માટે પ્રસારના કયા પ્રકારનાં માપોનો ઉપયોગ થાય છે ?
4. પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ કયું છે ?
5. જો દસ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ સેન્ટિમીટરમાં આપેલી હોય તો તેના વિચરણનો એકમ શું થાય ?
6. એક કંપની પાઈપનું ઉત્પાદન કરે છે. પાઈપના વ્યાસ અંગે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે, તે પરથી પાઈપના વ્યાસનો વિસ્તાર શોધો :

વ્યાસ (સેમીમાં)	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
પાઈપની સંખ્યા	15	40	75	20	11

7. એક આવૃત્તિ-વિતરણનો પચ્ચીસમો અને પંચોતેરમો શતાંશક અનુક્રમે 72.18 અને 103.99 છે. આ માહિતી પરથી ચતુર્થક વિચલન શોધો.
8. એક સમૂહના 7 વિદ્યાર્થીઓએ 25 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ અનુક્રમે 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20 છે, તો તેમના ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શું થશે ?
9. – 1, 0, 4 અવલોકનો પરથી સરેરાશ વિચલન શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નીચેનાની વ્યાખ્યા આપો :
   (i) સરેરાશ વિચલન (ii) પ્રમાણિત વિચલન (iii) ચલનાંક
2. પ્રસારના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો અર્થ જણાવો.
3. પ્રસારના નિરપેક્ષ માપોનાં નામ જણાવો.
4. અવલોકનો અને તેના મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનો પર આધારિત પ્રસારનાં કયાં માપો છે ?
5. 6, 11, – 3, 0, 8 અવલોકનો માટે વિસ્તાર અને વિસ્તારાંક શોધો.
6. નીચે આપેલાં અવલોકનો પરથી ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો :
   8, 15, 2, 11, 20, 3, 5
7. નીચે આપેલાં અવલોકનો પરથી સરેરાશ વિચલન શોધો :
   3, 8, 1, 7, 6
8. જો $\bar{x}$ = 25 અને ચલનાંક 20 % હોય તો વિચરણ શોધો.
9. 1, 2, 3, 4, 5 અવલોકનો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
10. નીચેનામાંથી કઈ ફેક્ટરી દૈનિક ઉત્પાદનના સંદર્ભમાં વધુ સ્થિર છે ?

	ફેક્ટરી A	**ફેક્ટરી B**
સરેરાશ દૈનિક ઉત્પાદન (એકમો)	50	48
પ્રમાણિત વિચલન (એકમો)	10	12

11. એક માહિતી સમૂહના 25મા અને 75મા શતાંશક અનુક્રમે 20 અને 36 છે, તો ચતુર્થક વિચલનાંક શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રસારમાનનો અર્થ સમજાવો અને તેનાં જુદાં જુદાં માપો જણાવો.
2. પ્રસારમાનનાં ઇચ્છનીય લક્ષણો જણાવો.
3. વિસ્તારના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
4. ચતુર્થક વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
5. સરેરાશ વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
6. પ્રમાણિત વિચલનના લાભ તથા ગેરલાભ લખો.
7. પ્રમાણિત વિચલન એટલે શું ? તે શા માટે પ્રસારનું શ્રેષ્ઠ માપ ગણાય છે ?
8. ચલનાંક વિશે ટૂંક નોંધ લખો.
9. એક નર્સરીમાં 100 છોડ પર રહેલ ફૂલની સંખ્યા વિશે નીચે આપેલી માહિતી પરથી છોડદીઠ ફૂલની સંખ્યાનું ચતુર્થક વિચલન શોધો.

ફૂલની સંખ્યા	11	13	15	17	19	21	23	25
છોડની સંખ્યા	5	8	13	20	22	18	10	4

10. હૉકીની એક ટુર્નામેન્ટમાં 16 મૅચમાં થયેલ ગોલની સંખ્યાનું વિતરણ આપેલું છે. આ માહિતી પરથી મૅચદીઠ ગોલની સંખ્યાનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગોલની સંખ્યા	1	2	3	4	5
મૅચની સંખ્યા	1	4	6	4	1

11. પ્રચલિત સંકેતોમાં $\Sigma d = 25$, $\Sigma d^2 = 272$, $n = 100$ અને ધારેલો મધ્યક 4 છે. આ માહિતી પરથી ચલનાંક શોધો.
12. નીચેની માહિતી પરથી મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

વિગત	**માહિતીસમૂહ A**	**માહિતીસમૂહ B**
અવલોકનોની સંખ્યા	50	60
મધ્યક	113	120
પ્રમાણિત વિચલન	6	7

13. દસ અવલોકનોનો સરવાળો 80 અને અવલોકનોના વર્ગોનો સરવાળો 800 છે. આ માહિતી પરથી ચલનાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. ભાષાની 50 ગુણની જોડણી-કસોટીમાં 30 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ગુણ	12 - 16	17 - 21	22 - 26	27 - 31	32 - 36
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	14	8	3

2. નીચેના 50 કંપનીઓના જાહેરાત-ખર્ચના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કંપનીદીઠ જાહેરાત-ખર્ચનું ચતુર્થક વિચલન શોધો :

જાહેરાતનું ખર્ચ (હજાર ₹)	0 - 5	5 - 15	15 - 30	30 - 40	40 - 60	60 - 100	કુલ
કંપનીની સંખ્યા	3	8	15	10	8	6	50

3. એક બૅટ્સમૅને રમેલી 100 ક્રિકેટની વન-ડે મૅચમાં કરેલા રનની વિગત નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બૅટ્સમૅને કરેલા રનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

રન	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
મૅચની સંખ્યા	10	15	25	25	10	10	5

4. એક કૉલેજના 220 વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણની વિગત નીચે મુજબ છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું ચતુર્થક વિચલન શોધો.

ગુણ	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 કે તેથી વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	30	50	64	42	29	5

5. ફૂટબૉલની રમતમાં બે ટુકડીએ નીચે મુજબ ગોલ કર્યા હતા. કઈ ટુકડી વધારે સુસંગત રમત રમે છે ?

ફૂટબૉલની મૅચમાં નોંધાયેલ ગોલની સંખ્યા	**ફૂટબૉલ મૅચની સંખ્યા**	
	ટુકડી A	**ટુકડી B**
0	15	20
1	10	10
2	7	5
3	5	4
4	3	2
5	2	1

6. 100 અવલોકનોની એક શ્રેણીના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 40 અને 10 મળે છે. ગણતરીમાં બે અવલોકનોની કિંમતો ભૂલથી 3 અને 27ને બદલે 30 અને 70 લેવામાં આવી હતી. સુધારેલ મધ્યક અને સુધારેલ પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

7. એક ફૅક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓનું કુલ ખર્ચ વિધેય $y = 10 + 3x$ છે, જ્યાં, x એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા અને y એ x એકમોનું કુલ ઉત્પાદન-ખર્ચ દર્શાવે છે. ફૅક્ટરીમાં દરરોજ ઉત્પાદિત થતી વસ્તુઓના એકમોની સંખ્યાનો વિસ્તાર 50, ચતુર્થક વિચલન 5, સરેરાશ વિચલન 8 અને પ્રમાણિત વિચલન 10 છે, તો આ માહિતી પરથી કુલ ખર્ચ y નો વિસ્તાર, ચતુર્થક વિચલના, સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક નગરમાં દર્દીઓ આકસ્મિક માંદગીમાં તેમના ફેમિલી ડૉક્ટરને ઘરે માંદગીની તપાસ માટે બોલાવે છે. તે નગરના 80 ડૉક્ટરની તેમના દર્દીઓની મુલાકાત (visit)ની માહિતી નીચે આપેલ છે. તે પરથી વિસ્તાર, વિસ્તારાંક, ચતુર્થક વિચલન, ચતુર્થક વિચલનાંક, સરેરાશ વિચલન અને સરેરાશ વિચલનાંક શોધો.

મુલાકાતોની સંખ્યા	3	5	8	12	17	20	24	30	35
ડૉક્ટરની સંખ્યા	1	3	7	15	20	13	10	7	4

2. નીચે આપેલ વેપારીઓના શાખ દિવસો (credit days)ના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કેટલા ટકા અવલોકનો $\bar{x} \pm s$ ની મર્યાદામાં સમાયેલા છે તે શોધો :

શાખના દિવસો	12	13	14	15	16	17	18	19
વેપારીઓની સંખ્યા	5	10	25	65	45	35	8	7

3. નીચેની માહિતી પરથી પ્રસારમાનનું યોગ્ય માપ શોધો તેમ જ તેનું સાપેક્ષ માપ પણ મેળવો :

ગુણ	10થી ઓછા	10 -20	20 - 30	30 - 40	40થી વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	4	10	3	1

4. એક કંપનીના 200 કર્મચારીઓના વેતનની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી કર્મચારીઓના વેતનનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વેતન (હજાર ₹)	10થી ઓછું	20થી ઓછું	30થી ઓછું	40થી ઓછું	50થી ઓછું	60થી ઓછું	70થી ઓછું
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	5	17	47	92	142	179	200

5. કોઈ એક દિવસે 100 લઘુઉદ્યોગોના શૅરના બંધભાવ (₹માં)નું વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો શૅરના બંધભાવનું સરેરાશ વિચલન શોધો.

ભાવ (₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
ઉદ્યોગોની સંખ્યા	3	8	15	20	25	10	9	6	4

6. કોઈ ફેક્ટરીના 230 કારીગરોને મળતી દૈનિક મજૂરી (₹માં)ની વિગત આપેલી છે. તે માહિતી પરથી કારીગરોની દૈનિક મજૂરીનો ચલનાંક શોધો.

દૈનિક મજૂરી (₹)	કારીગરોની સંખ્યા
100થી ઓછી	12
200થી ઓછી	30
300થી ઓછી	65
400થી ઓછી	107
500થી ઓછી	157
600થી ઓછી	202
700થી ઓછી	222
800થી ઓછી	230

7. બે વિદ્યાર્થીઓ A અને B એ 10 પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે :

પરીક્ષા	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
વિદ્યાર્થી Aના ગુણ	44	80	76	48	52	72	68	56	60	64
વિદ્યાર્થી Bના ગુણ	48	75	54	60	63	69	72	51	57	56

કયા વિદ્યાર્થીનો અભ્યાસમાં દેખાવ વધુ સુસંગત છે ?

8. બે સમૂહ A અને Bના વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં)ના વિતરણ નીચે આપેલા છે, તો બંને સમૂહના ચલનાંક શોધો. કયા સમૂહમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે ?

વજન (કિગ્રા)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
સમૂહ A	7	10	20	18	7
સમૂહ B	5	9	21	15	6

Karl Pearson
(1857 - 1936)

Karl Pearson was a major contributor to the early development of statistics. His most famous contribution is the Pearson's chi-square test.

In 1911 he founded the world's first university statistics department at University College, London. He applied statastics to biological problems of heredity and evolution. These papers contain contributions to regression analysis, the correlation coefficeint and include the chi-square test of statistical significane (1900). He coined the term 'standard deviation' in 1893. His work was influenced by the work of Edgeworth and in turn influenced the work of Yule. He was a co-founder of the statistical journal Biometrika.

•

'Measures of skewness indicates the tendency of the group to depart from symmetry'

– Connor

5

આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા (Skewness of Frequency Distribution)

વિષયવસ્તુ :

5.1 વિષમતાનો અર્થ

5.2 વિષમતાના પ્રકાર

5.3 વિષમતા માટે સાપેક્ષ અને નિરપેક્ષ માપોના ખ્યાલ

5.4 વિષમતાના માપ અને વિષમતાંક મેળવવાની પદ્ધતિઓ

5.4.1 કાર્લ પિયર્સનની રીત

5.4.2 બાઉલીની રીત

5.5 વિષમતાંક મેળવવાની બંને પદ્ધતિઓની તુલના

5.1 વિષમતાનો અર્થ (Meaning of Skewness)

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારમાન એ અભ્યાસ હેઠળની સમષ્ટિ વિશે અગત્યની માહિતી આપે છે. સમષ્ટિના એકમો કઈ કિંમતો ધારણ કરે છે તેની માહિતી આ માપો આપે છે. ઉપરાંત તે માપોની મદદથી જુદી જુદી બે કે તેથી વધારે સમષ્ટિની સરખામણી તથા અન્ય માહિતી મેળવવા માટે પૃથક્કરણ પણ કરી શકાય છે. આ માપો દ્વારા સમષ્ટિનાં અવલોકનોના બંધારણ વિશેનો અભ્યાસ આપણે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં કર્યો.

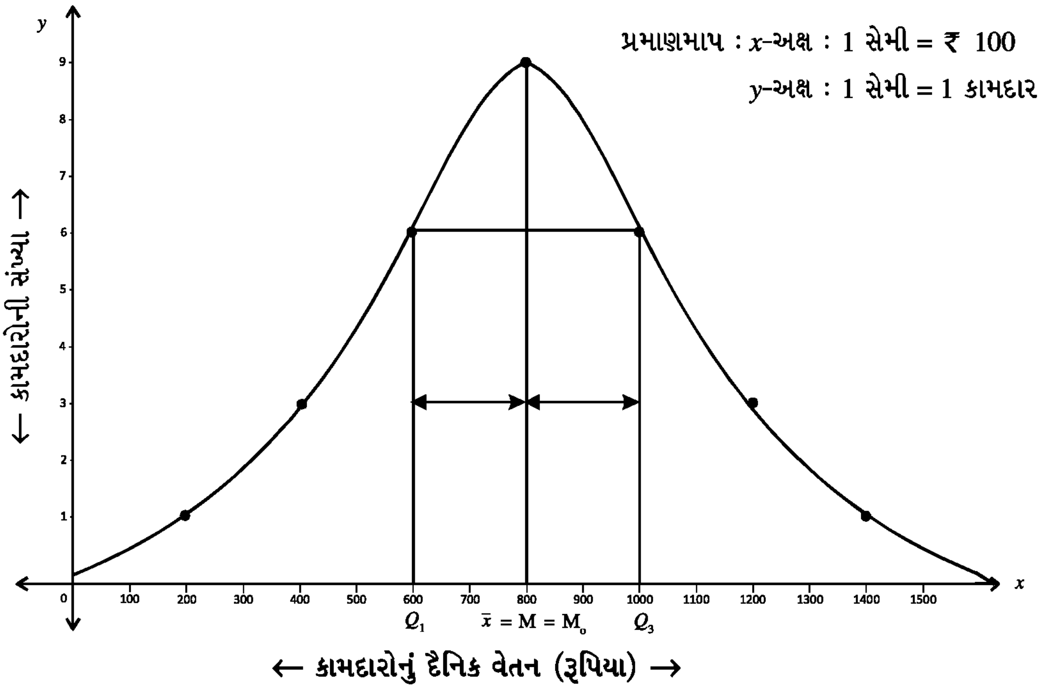
મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારમાનની મદદથી અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનોની મધ્યવર્તી સ્થિતિ અને અવલોકનો મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનની આસપાસ કેવી રીતે વિતરિત થયેલાં છે તેની આંશિક માહિતી મળે છે પરંતુ તેનો સંપૂર્ણ ખ્યાલ આવતો નથી. આ અંગે વધુ માહિતી મેળવવા માટે સમષ્ટિની રજૂઆત આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે. આમ, સમષ્ટિના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ર પરથી આવૃત્તિવક્રની દિશા, આકાર અને સ્વરૂપનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. સમષ્ટિ વિશે વધુ માહિતી મેળવવા ત્રીજા અગત્યના માપ-વિષમતાનો અભ્યાસ કરીશું. વિષમતાનો અર્થ સ્પષ્ટ કરતાં પહેલાં સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણનો ખ્યાલ મેળવીશું.

સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ (Symmetric Frequency Distribution)

જે સમષ્ટિનાં અવલોકનો બહુલકની કિંમતની બંને બાજુ સમાન રીતે વિતરિત થયેલાં હોય તેવા આવૃત્તિ-વિતરણને સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. આ પ્રકારના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રને સંમિત આવૃત્તિવક્ર કહે છે. આ પ્રકારના આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનો મળે છે. આપણે કામદારોના દૈનિક વેતન (રૂપિયામાં)ના આવૃત્તિ-વિતરણના ઉદાહરણથી આવૃત્તિવક્ર અને મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ મેળવી સંમિતતાનો અભ્યાસ કરીએ.

કામદારોનું દૈનિક વેતન (રૂપિયા)	200	400	600	800	1000	1200	1400
કામદારોની સંખ્યા	1	3	6	9	6	3	1

ઉપર આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરવા તેના આવૃત્તિવક્ર અને મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો મેળવીએ.



આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર ઘંટાકાર સ્વરૂપનો છે. અવલોકન રૂપિયા 800 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 9 છે. રૂપિયા 800ની બંને તરફ સમાન અંતરે આવેલાં અવલોકનોની આવૃત્તિઓ સમાન છે તેથી આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની બંને બાજુએ અવલોકનો સમાન રીતે વિતરિત થયેલાં છે.

હવે, આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ અને સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણની સમજ તેના આધારે મેળવીએ.

કામદારોનું દૈનિક વેતન (રૂપિયા) x	**200**	**400**	**600**	**800**	**1000**	**1200**	**1400**	કુલ
કામદારોની સંખ્યા f	1	3	6	9	6	3	1	n = 29
fx	200	1200	3600	7200	6000	3600	1400	23,200
cf	1	4	10	19	25	28	29	

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{23200}{29}$

$= 800$

$\therefore \quad \bar{x} = ₹\ 800$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{29+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{30}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 15$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, તેને અનુરૂપ અવલોકન 800 રૂપિયા છે.

$\therefore \quad M = 800$

$\therefore \quad M = ₹\ 800$

બહુલક M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ 9 ને અનુરૂપ અવલોકન 800 રૂપિયા છે.

$\therefore \quad M_o = ₹\ 800$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{29+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 7.5$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતા, તેને અનુરૂપ અવલોકન 600 રૂપિયા છે.

$\therefore \quad Q_1 = 600$

$\therefore \quad Q_1 = ₹\ 600$

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{29+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3(7.5)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 22.5$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, તેને અનુરૂપ અવલોકન 1000 રૂપિયા છે.

$\therefore \quad Q_3 = 1000$

$\therefore \quad Q_3 = ₹\ 1000$

આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની કિંમતો તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ર પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

(1) $\bar{x} = M = M_o = ₹\ 800$ થાય છે.

(2) $(Q_3 - M) = (M - Q_1)$

$\therefore \quad (1000 - 800) = (800 - 600)$

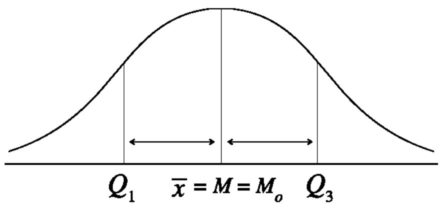
આમ, ચતુર્થકો મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે રહેલાં છે.

(3) આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર ઘંટાકાર સ્વરૂપનો મળે છે.

આમ, **સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણના સામાન્યતઃ નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે.**

(i) મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત સમાન હોય છે.
અર્થાત્ $\bar{x} = M = M_o$

(ii) પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 અને તૃતીય ચતુર્થક Q_3 એ મધ્યસ્થ M થી સમાન અંતરે હોય છે. અર્થાત્ $(Q_3 - M) = (M - Q_1)$



(4) આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનો હોય છે.

(5) બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ હોય છે.

જો આપેલા કોઈ આવૃત્તિ-વિતરણમાં ઉપરોક્ત લક્ષણોનો અભાવ જોવા મળે તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત નથી તેમ કહેવાય. **સંમિતતા કે સુડોળતાના અભાવવાળા આવૃત્તિ-વિતરણને વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવામાં આવે છે. આમ, આવૃત્તિ-વિતરણમાં સંમિતતાના અભાવને વિષમતા કહેવામાં આવે છે.** આવૃત્તિ-વિતરણમાં નીચેની પરિસ્થિતિઓ વિષમતા દર્શાવે છે :

(1) આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનાં મૂલ્યો સમાન ન હોય.

(2) આવૃત્તિ-વિતરણમાં ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3 એ મધ્યસ્થ M $(= Q_2)$ થી સમાન અંતરે ન હોય.

અર્થાત્ $(Q_3 - M) \neq (M - Q_1)$

(3) આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રનો જમણી તરફનો છેડો કે ડાબી તરફનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો હોય.

(4) બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ ન હોય.

ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિઓને વિષમતાની કસોટીઓ કહીશું, કારણ કે તેના પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ વિષમ છે કે કેમ તે ચકાસી શકાય છે. હવે વિષમતાના પ્રકારનો અભ્યાસ કરીએ.

5.2 વિષમતાના પ્રકાર (Types of Skewness)

આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (1) ધન વિષમતા અને (2) ઋણ વિષમતા. આ બંને પ્રકાર આકૃતિ અને ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

(1) ધન વિષમતા (Positive Skewness) :

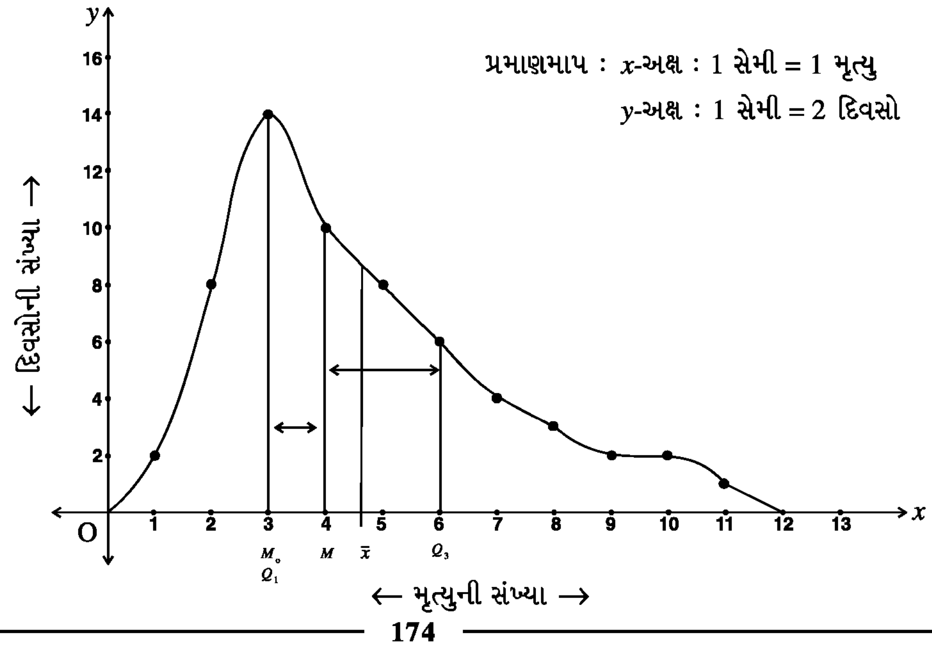
આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રનો જમણી બાજુનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો હોય તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ છે તેમ કહેવાય. આ લક્ષણને લીધે સમષ્ટિમાં ધન વિષમતા રહેલી છે તેમ કહેવાય.

હવે આપણે આવૃત્તિવક્ર અને સરેરાશનાં માપો દ્વારા ધન વિષમતાનો અભ્યાસ કરીએ તે માટે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ.

શહેરની એક હૉસ્પિટલમાં 60 દિવસ દરમિયાન થયેલ મૃત્યુની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

મૃત્યુની સંખ્યા	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
દિવસોની સંખ્યા	2	8	14	10	8	6	4	3	2	2	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર દોરીએ.



આવૃત્તિવક્રનો જમણી બાજુનો છેડો ખેંચાયેલો છે. મહત્તમ આવૃત્તિ 14 ને અનુરૂપ અવલોકન $x = 3$ ની ડાબી બાજુ ઓછા અવલોકન વિતરિત છે. જ્યારે જમણી બાજુ વધુ અવલોકનો વિતરિત છે અને તેમની આવૃત્તિઓ ક્રમશઃ ઘટતી જાય છે.

હવે આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ.

મૃત્યુની સંખ્યા x	દિવસોની સંખ્યા f	fx	cf
1	2	2	2
2	8	16	10
3	14	42	24
4	10	40	34
5	8	40	42
6	6	36	48
7	4	28	52
8	3	24	55
9	2	18	57
10	2	20	59
11	1	11	60
કુલ	$n = 60$	**277**	

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{277}{60}$

$= 4.6166$

$\therefore \quad \bar{x} \approx 4.62$ મૃત્યુ

બહુલક M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ 14 ને અનુરૂપ અવલોકન 3 છે.

$\therefore \quad M_o = 3$ મૃત્યુ

મધ્યસ્થ M = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{60+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{61}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 30.5મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 30.5મા અવલોકનની કિંમત 4 છે.

$\therefore \quad M = 4$ મૃત્યુ

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{60+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{61}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 15.25મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 15.25મા અવલોકનની કિંમત 3 છે.

$\therefore \quad Q_1 = 3$ મૃત્યુ

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{60+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3(15.25)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 45.75$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 45.75 મા અવલોકનની કિંમત 6 છે.

$\therefore \quad Q_3 = 6$ મૃત્યુ

આમ, આ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે નીચેનાં પરિણામો પ્રાપ્ત થાય છે :

(1) $\bar{x} = 4.62$, $M = 4$ અને $M_o = 3$ મળે છે. તેથી $\bar{x} > M > M_o$ છે.

(2) $Q_3 - M = 6 - 4 = 2$ અને $M - Q_1 = 4 - 3 = 1$ મળે છે તેથી $Q_3 - M > M - Q_1$

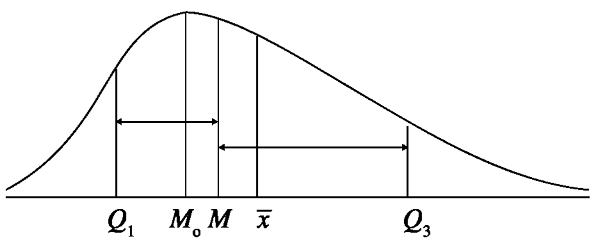
(3) આવૃત્તિવક્રમાં જમણી બાજુનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો છે.

આમ, ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં સામાન્યતઃ નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે :

(1) આવા આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો ઊતરતા ક્રમમાં હોય છે, અર્થાત્ $\bar{x} > M > M_o$

(2) તૃતીય ચતુર્થક Q_3 અને મધ્યસ્થ M વચ્ચેનું અંતર એ મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 વચ્ચેના અંતર કરતાં વધુ હોય છે. અર્થાત્ $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

(3) આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર બહુલકની જમણી તરફ છેડો વધુ ખેંચાયેલો હોય છે.



નોંધ : ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક કિંમતની જમણી બાજુનાં અવલોકનોમાં ચલન વધુ જોવા મળે છે. દા.ત., મૃત્યુની સંખ્યાના આવૃત્તિ-વિતરણમાં ધન વિષમતા જોવા મળે છે.

(2) ઋણ વિષમતા (Negative Skewness)

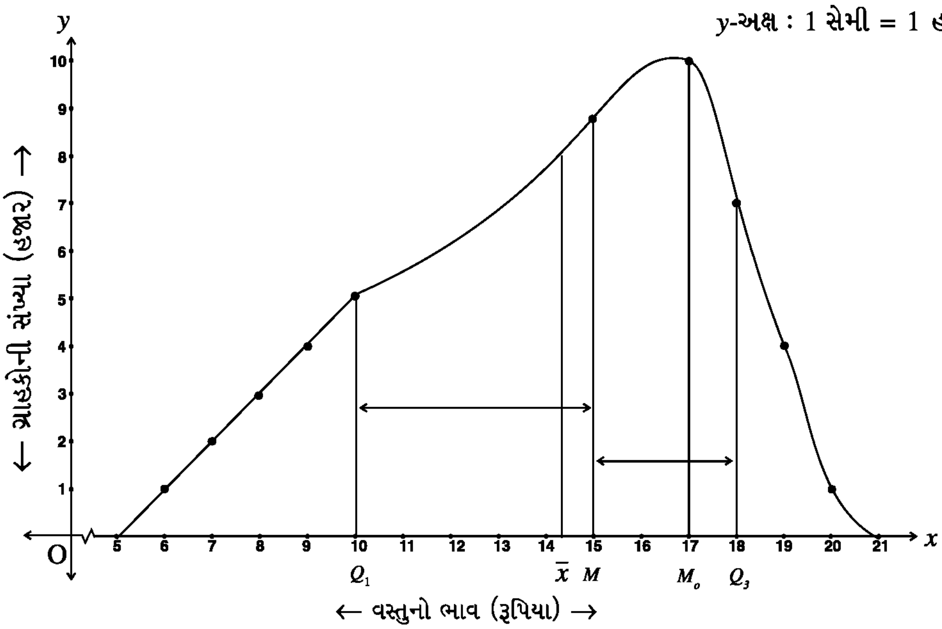
આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રનો ડાબી બાજુનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો હોય તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ છે તેમ કહેવાય. આવી સમષ્ટિમાં ઋણ વિષમતા રહેલી છે તેમ કહેવાય.

ઋણ વિષમતાનો અભ્યાસ નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ર અને સરેરાશનાં માપો મેળવીને કરીએ.

વસ્તુનો ભાવ (રૂપિયા)	6	7	8	9	10	15	17	18	19	20	કુલ
ગ્રાહકોની સંખ્યા (હજાર)	1	2	3	4	5	8	10	7	4	1	45

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર દોરીએ.

પ્રમાણમાપ : x-અક્ષ : 1 સેમી = ₹ 1
y-અક્ષ : 1 સેમી = 1 હજાર ગ્રાહક



આવૃત્તિવક્રનો ડાબી બાજુનો છેડો ખેંચાયેલો છે. તેમાં મહત્તમ આવૃત્તિ 10 ને અનુરૂપ અવલોકન $x = 17$ ની જમણી બાજુ ઓછા અવલોકન વિતરિત છે. જ્યારે ડાબી બાજુ વધારે અવલોકનો વિતરિત છે તથા તેમની આવૃત્તિઓ ક્રમશઃ ઘટતી જાય છે. હવે આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ.

વસ્તુનો ભાવ (રૂપિયા) x	**ગ્રાહકોની સંખ્યા f**	fx	cf
6	1	6	1
7	2	14	3
8	3	24	6
9	4	36	10
10	5	50	15
15	8	120	23
17	10	170	33
18	7	126	40
19	4	76	44
20	1	20	45
કુલ	$n = 45$	**642**	

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{642}{45}$

$= 14.27$

$\bar{x} =$ ₹ 14.27

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{45+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{46}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 23મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 23મા અવલોકનની કિંમત 15 છે.

$\therefore \quad M = ₹ 15$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{45+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{46}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 11.5મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 11.5મા અવલોકનની કિંમત 10 છે.

$\therefore \quad Q_1 = ₹ 10$

ત્રીજો ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{45+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{46}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 3(11.5)મા અવલોકનની કિંમત

= 34.5મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 34.5મા અવલોકનની કિંમત 18 છે.

$\therefore \quad Q_3 = ₹ 18$

બહુલક M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ 10 ને અનુરૂપ અવલોકન 17 છે.

$\therefore \quad M_o = ₹ 17$

અહીં, આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રમાં મધ્યક $\bar{x}$, મધ્યસ્થ M, બહુલક M_o અને ચતુર્થકોની કિંમતો દર્શાવતા આવૃત્તિવક્ર પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

(1) $\bar{x} = 14.27$, $M = 15$, $M_o = 17$ મળે છે તેથી $\bar{x} < M < M_o$ થાય.

(2) આવૃત્તિવક્રનો ડાબી બાજુનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો છે.

(3) $Q_3 - M = 18 - 15 = 3$ અને $M - Q_1 = 15 - 10 = 5$ મળે છે. તેથી $Q_3 - M < M - Q_1$ થાય.

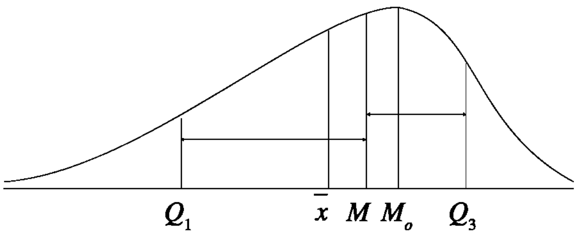
ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં સામાન્યતઃ નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે :

(1) મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો ચઢતા ક્રમમાં હોય છે.

અર્થાત્ $\bar{x} < M < M_o$

(2) તૃતીય ચતુર્થક Q_3 અને મધ્યસ્થ M વચ્ચેનું અંતર એ મધ્યસ્થ M અને પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 વચ્ચેના અંતર કરતા ઓછું હોય છે.

અર્થાત્ $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$



(3) આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્રનો બહુલકની ડાબી તરફનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો હોય છે.

નોંધ : ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અવલોકનોની મહત્તમ કિંમતની ડાબી તરફનાં અવલોકનોમાં ચલન વધુ જોવા મળે છે. ધંધાકીય અને નાણા સંબંધિત ઘટનાઓમાં ઘણા કિસ્સામાં આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમ હોઈ શકે છે. દા.ત., કોઈ એક વસ્તુનું કિંમતસંબંધી આવૃત્તિ-વિતરણ, બચતકર્તાની સંખ્યાસંબંધી આવૃત્તિ-વિતરણ વગેરેમાં ઋણ વિષમ આવૃત્તિવક્ર મળે છે.

5.3 વિષમતા માટે નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપનો ખ્યાલ (Concept of absolute and relative measure of skewness)

સમષ્ટિનાં અવલોકનોના આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર દોરવાથી તે આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા ધન છે કે ઋણ છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતાનું પ્રમાણ કેટલું છે તે આલેખની મદદથી શોધી શકાતું નથી.

વિષમતા માપવા માટે બે પ્રકારનાં માપ વપરાય છે : **(1) નિરપેક્ષ માપ (Absolute measure) (2) સાપેક્ષ માપ (Relative measure).** સમષ્ટિના ચલનું મૂલ્ય જે એકમમાં હોય, તે એકમમાં દર્શાવવામાં આવતા વિષમતાના માપને વિષમતાનું નિરપેક્ષ માપ કહે છે. તેને સંકેતમાં s_k વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાનું નિરપેક્ષ માપ સરેરાશના માપના તફાવતથી મેળવવામાં આવે છે અને બાઉલીની પદ્ધતિમાં તે ચતુર્થકોના અંતરના તફાવતથી મેળવવામાં આવે છે. બે અલગ એકમો ધરાવતી સમષ્ટિના તુલનાત્મક અભ્યાસ કરવા માટે આ માપ ઉપયોગી બનતાં નથી. તદુપરાંત બે સમષ્ટિના એક જ પ્રકારના એકમ ધરાવતાં અવલોકનો હોવા છતાં તે માટે નિરપેક્ષ માપનો ઉપયોગ કરવો કેટલીક વખતે હિતાવહ નથી કારણકે બંને સમષ્ટિના વિતરણમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારનાં માપોમાં ભિન્નતા હોઈ શકે.

આમ બે કે તેથી વધુ સમષ્ટિના તુલનાત્મક અભ્યાસ માટે વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આ સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સમષ્ટિની વિષમતાનું એકમથી મુક્ત માપ મેળવવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપને પ્રસારના યોગ્ય માપ વડે ભાગવામાં આવે છે. આમ, ટૂંકમાં કહીએ તો **વિષમતાના સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક** (Co–efficient of skewness) **કહે છે.** તેને સંકેતમાં j વડે દર્શાવામાં આવે છે.

5.4 વિષમતા અને વિષમતાંક મેળવવા માટેની પદ્ધતિઓ (Methods for determining skewness and Coefficient of skewness)

આવૃત્તિ-વિતરણના વિષમતા અને વિષમતાંક મેળવવા નીચેની બે પ્રચલિત પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે : (1) કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ (2) બાઉલીની પદ્ધતિ.

5.4.1 કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ (Karl Pearson's method)

વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક એ ત્રણેયનાં મૂલ્યો સરખાં હોતાં નથી તેમજ મધ્યસ્થનું મૂલ્ય, મધ્યક અને બહુલકની વચ્ચે હોય છે. તેથી સામાન્ય રીતે વિષમતાનું માપ મેળવવા મધ્યક અને બહુલકનાં મૂલ્યોનાં તફાવતનો ઉપયોગ થાય છે. અર્થાત્ વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$ લેવામાં આવે છે. વિષમતાના માપ S_k ને પ્રસારના માપ પ્રમાણિત વિચલન 's' વડે ભાગવાથી એક બહુલકીય આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક j મળે. વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક નીચેના સૂત્રથી મળે છે :

$$j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની કિંમત એક કરતાં વધુ હોય અથવા બહુલકની ચોક્કસ કિંમત મેળવી શકાય તેમ ન હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનના મતાનુસાર બહુલકની કિંમત નીચે જણાવેલ આસાદિત સૂત્ર (Empirical formula) $M_o = 3M - 2\bar{x}$ ની મદદથી મેળવી શકાય છે. આમ, વિષમતા અને વિષમતાંકનાં સૂત્રો નીચે મુજબ મળે :

વિષમતા S_k = મધ્યક – બહુલક = $\bar{x} - M_o = \bar{x} - (3M - 2\bar{x}) = 3\bar{x} - 3M$

$= 3(\bar{x} - M)$

અને વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$.

નોંધ : વિષમતાના બે પ્રકાર છે : (1) ધન વિષમતા (2) ઋણ વિષમતા.

(1) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવતું હોય, તો વિષમતા S_k નું મૂલ્ય 0 થી વધુ હોય એટલે કે $S_k > 0$ હોય. જો આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક વ્યાખ્યાયિત (સ્પષ્ટ) હોય તો વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$ ના સૂત્રથી મેળવવામાં આવે છે. જો $\bar{x} > M_o$ હોય તો $S_k = (\bar{x} - M_o) > 0$ થાય છે તેથી ધન વિષમતા છે એમ કહેવાય. તે જ રીતે $\bar{x} > M$ હોય, તો $S_k = 3(\bar{x} - M) > 0$ થાય તેથી ધન વિષમતા છે એમ કહેવાય.

(2) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવતું હોય તો વિષમતા S_k નું મૂલ્ય 0 થી ઓછું હોય એટલે કે $S_k < 0$ હોય. જો આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક વ્યાખ્યાયિત (સ્પષ્ટ) હોય તો વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$ ના સૂત્રથી મેળવવામાં આવે છે જો $\bar{x} < M_o$ હોય તો $S_k = (\bar{x} - M_o) < 0$ થાય છે તેથી ઋણ વિષમતા છે એમ કહેવાય. તે જ રીતે $\bar{x} < M$ હોય, તો $S_k = 3(\bar{x} - M) < 0$ થાય તેથી ઋણ વિષમતા છે એમ કહેવાય.

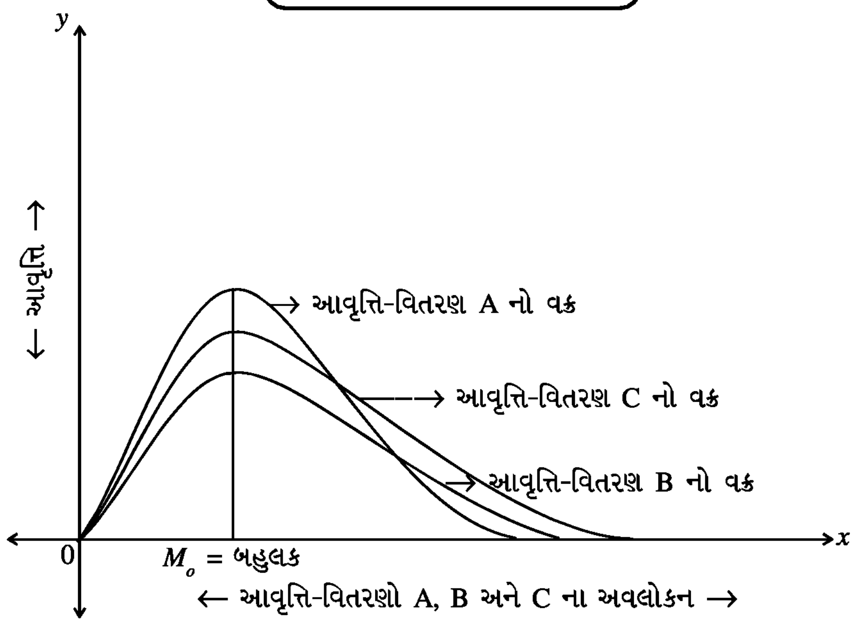
નોંધ :

(1) વ્યવહારમાં નિદર્શ આધારિત માહિતીના વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિષમતાંકની કિંમત –1 થી 1 સુધી મળે છે.

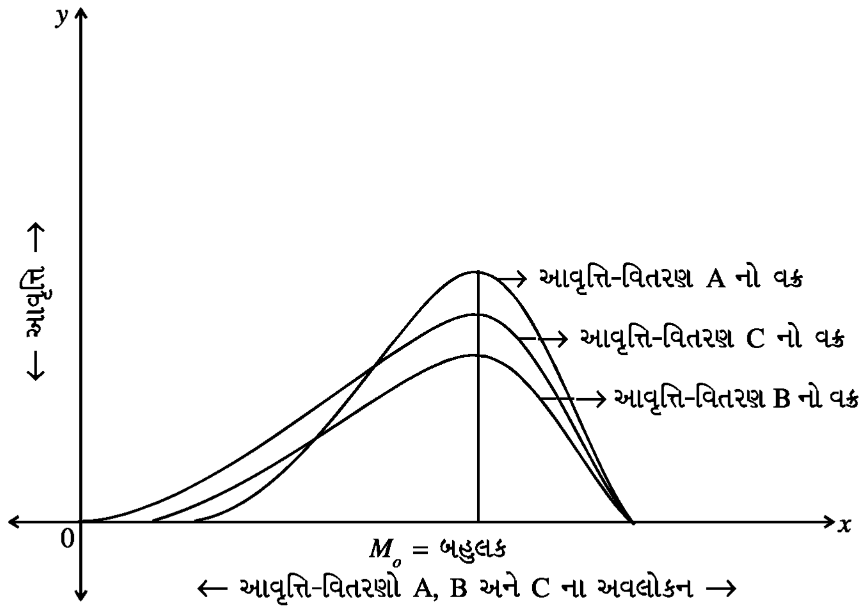
(2) જ્યારે સમષ્ટિના આવૃત્તિવક્રમાં એક કરતાં વધારે બહુલક હોય ત્યારે એમ સાબિત કરી શકાય કે વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$ ની કિંમત –3 થી 3 સુધી મળી શકે.

(3) આંકડાશાસ્ત્રી એન. એલ. જહોન્સને વર્ષ 1951 માં એક બહુલકીય વિષમ વિતરણ માટે સૂત્ર $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$ થી મળતી વિષમતાંકની કિંમત સૈદ્ધાંતિક દૃષ્ટિએ $-\sqrt{3}$ થી $\sqrt{3}$ એટલે કે – 1.73 થી 1.73 સુધી મળી રહે છે એમ સાબિત કર્યું.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી



ઉપર્યુક્ત ત્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા દર્શાવે છે. જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણ C ના આવૃત્તિવક્રનો જમણી બાજુનો છેડો સૌથી વધુ ખેંચાયેલો છે તેથી તે સૌથી વધુ ધન વિષમતા ધરાવે છે. જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણ Bનો આવૃત્તિવક્ર C ની સાપેક્ષમાં ઓછી ધન વિષમતા ધરાવે છે. તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણ A નો આવૃત્તિવક્રનો છેડો B અને C ની સાપેક્ષમાં સૌથી ઓછો ખેંચાયેલો હોવાથી સૌથી ઓછી ધન વિષમતા ધરાવે છે.



ઉપર્યુક્ત ત્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા દર્શાવે છે. જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણ C ના આવૃત્તિવક્રનો ડાબી બાજુનો છેડો સૌથી વધુ ખેંચાયેલો છે તેથી તે સૌથી વધુ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણ Bનો આવૃત્તિવક્રનો છેડો C ની સાપેક્ષમાં ઓછી ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણ A ના આવૃત્તિવક્રનો છેડો B અને C ની સાપેક્ષમાં સૌથી ઓછો ખેંચાયેલો હોવાથી સૌથી ઓછી ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેની માહિતી એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપનીની 50 ટ્રક દ્વારા રેલવે યાર્ડથી જુદી જુદી ફેક્ટરીઓને કોઈ એક દિવસે દૈનિક ધોરણે એકમોની હેરફેર કરવામાં આવતી સંખ્યાને લગતી છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

હેરફેરના એકમોની સંખ્યા	120	130	140	150	160	170	180	190	200
ટ્રકની સંખ્યા	2	3	4	5	11	9	9	6	1

અહીં, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલક ધરાવે છે તેથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, બહુલક અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

હેરફેર એકમોની સંખ્યા x	ટ્રકની સંખ્યા f	$d = x - A$ $A = 160$	fd	fd^2
120	2	–40	–80	3200
130	3	–30	–90	2700
140	4	–20	–80	1600
150	5	–10	–50	500
160	11	0	0	0
170	9	10	90	900
180	9	20	180	3600
190	6	30	180	5400
200	1	40	40	1600
કુલ	$n = 50$		190	19500

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$

$= 160 + \frac{190}{50}$

$= 160 + 3.8$

$= 163.8$

$\therefore \quad \bar{x} = 163.8$ એકમ

બહુલક M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ 11 ને અનુરૂપ અવલોકન 160 છે.

$\therefore \quad M_o = 160$ એકમ

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{19500}{50} - \left(\frac{190}{50}\right)^2}$

$= \sqrt{390 - 14.44}$

$= \sqrt{375.56}$

$= 19.3794$

$\therefore \quad s \approx 19.38$ એકમ

વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$

$= 163.8 - 160$

$= 3.8$

$S_k = 3.8$ એકમ

વિષમતાંક $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$

$= \frac{163.8 - 160}{19.38}$

$= \frac{3.8}{19.38}$

$= 0.1961$

$j \approx 0.20$

અહીં, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. અત્રે નોંધનીય છે કે $j = 0.20$ એકમથી મુક્ત છે.

ઉદાહરણ 2 : 100 કંપનીઓના વાર્ષિક કર અંગેની નીચેની માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

વાર્ષિક કર (લાખ ₹)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
કંપનીઓની સંખ્યા	5	20	40	25	6	4

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલકીય છે તેથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક $\bar{x}$, બહુલક M_o અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

વાર્ષિક કર (લાખ ₹)	કંપનીઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 50,\ c = 20$	fd	fd^2
0 - 20	5	10	– 2	– 10	20
20 - 40	20	30	– 1	– 20	20
40 - 60	40	50	0	0	0
60 - 80	25	70	1	25	25
80 - 100	6	90	2	12	24
100 - 120	4	110	3	12	36
કુલ	$n = 100$			**19**	**125**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 50 + \frac{19}{100} \times 20$

$= 50 + \frac{380}{100}$

$= 50 + 3.8$

$\therefore \bar{x} = 53.8$

$\bar{x} =$ ₹ 53.8 લાખ

પ્રમાણિત વિચલન s $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{125}{100} - \left(\frac{19}{100}\right)^2} \times 20$

$= \sqrt{1.25 - 0.0361} \times 20$

$= \sqrt{1.2139} \times 20$

$= 22.0354$

$s \approx$ ₹ 22.04 લાખ

બહુલક $M_o =$ મહત્તમ આવૃત્તિ 40 ને અનુરૂપ વર્ગ 40 - 60 છે તેથી બહુલકનો વર્ગ 40 - 60 છે.

હવે, $M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

અહીં, $L = 40,\ f_m = 40, f_1 = 20, f_2 = 25, c = 20$

$M_o = 40 + \frac{40-20}{2(40)-20-25} \times 20$

$= 40 + \frac{20 \times 20}{80-20-25}$

$= 40 + \frac{400}{35}$

$= 40 + 11.4285$

$= 51.\ 4285$

$M_o \approx$ ₹ 51.43 લાખ

વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$

$= 53.8 - 51.43$

$= 2.37$

$S_k =$ ₹ 2.37 લાખ

વિષમતાંક $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s} = \frac{53.8 - 51.43}{22.04}$

$= \frac{2.37}{22.04}$

$= 0.1075$

$j \approx 0.11$

તેથી કહી શકાય કે, આ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. વિષમતાંકનું મૂલ્ય ઓછું છે તેથી તે સૂચવે છે કે તે લગભગ સંમિત છે.

ઉદાહરણ 3 : એક કારખાનામાં 100 મશીનો દ્વારા ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમિયાન અસ્વીકૃત એકમો અંગે નીચે મુજબ માહિતી મળેલ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

અસ્વીકૃત એકમોની સંખ્યા	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50	51 - 60	61 - 70	71–80
મશીનોની સંખ્યા	2	12	25	39	12	9	1

આપેલું આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલકીય છે તેથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, બહુલક અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

અસ્વીકૃત એકમોની સંખ્યા	**મશીનોની સંખ્યા** f	**મધ્યકિંમત** x	$d = \frac{x - A}{c}$, $A = 45.5$, $c = 10$	fd	fd^2
11 - 20	2	15.5	– 3	– 6	18
21 - 30	12	25.5	– 2	– 24	48
31 - 40	25	35.5	– 1	– 25	25
41 - 50	39	45.5	0	0	0
51 - 60	12	55.5	1	12	12
61 - 70	9	65.5	2	18	36
71 - 80	1	75.5	3	3	9
કુલ	$n = 100$			**– 22**	**148**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 45.5 + \frac{(-22)}{100} \times 10$

$= 45.5 - 2.2$

$= 43.3$

$\therefore \quad \bar{x} = 43.3$ એકમ

બહુલક M_o : મહત્તમ આવૃત્તિ 39 ને અનુરૂપ વર્ગ 41 - 50 છે તેથી બહુલકનો અનિવારક વર્ગ 41 - 50 છે.

$\therefore$ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, બહુલકનો વર્ગ 40.5 - 50.5 મળે.

હવે, $M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

અહીં, $L = 40.5$, $f_m = 39$, $f_1 = 25$, $f_2 = 12$ અને $c = 10$ છે.

$M_o = 40.5 + \frac{39 - 25}{2(39) - 25 - 12} \times 10$

$= 40.5 + \frac{14 \times 10}{78 - 37}$

$= 40.5 + \frac{140}{41}$

$= 40.5 + 3.4146$

$= 43.9146$

$M_o \approx 43.91$ એકમ

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{148}{100} - \left(\frac{-22}{100}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{1.48 - 0.0484} \times 10$

$= \sqrt{1.4316} \times 10$

$= 11.96$ એકમ

વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$

$= 43.3 - 43.91$

$S_k = -0.61$ એકમ

વિષમતાંક $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$

$= \frac{43.3 - 43.91}{11.96}$

$= \frac{-0.61}{11.96}$

$= -0.0509$

$j \approx -0.05$

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતાંક ધરાવે છે, જે સંમિતતાની વધુ નજીક છે.

ઉદાહરણ 4 : એક શહેરના 200 કુટુંબનો વર્ષ 2014માં સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ નીચે મુજબ હતો. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ (₹ હજાર)	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 13	14 - 16	17 - 19
કુટુંબોની સંખ્યા	5	40	120	20	10	5

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન વર્ગલંબાઈ હોવાથી આપેલ વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ (₹ હજાર)	કુટુંબોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = x - A$ $A = 8$	fd	fd^2	cf
1–3	5	2	– 6	– 30	180	5
4–6	40	5	– 3	– 120	360	45
7–9	120	8	0	0	0	165
10–13	20	11.5	3.5	70	245	185
14–16	10	15	7	70	490	195
17–19	5	18	10	50	500	200
કુલ	$n = 200$			40	1775	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$

$= 8 + \frac{40}{200}$

$= 8 + 0.2$

$= 8.2$

$\therefore \quad \bar{x} =$ ₹ 8.2 હજાર

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{200}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 100મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 100મા અવલોકનની કિંમતનો વર્ગ 7 - 9માં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસ્થનો અનિવારક વર્ગ 7 - 9 છે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, મધ્યસ્થનો વર્ગ 6.5 - 9.5 મળે.

હવે, $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 6.5$, $\frac{n}{2} = 100$, $cf = 45$, $f = 120$ અને $c = 3$ છે.

$M = 6.5 + \frac{100-45}{120} \times 3$

$= 6.5 + \frac{55 \times 3}{120}$

$= 6.5 + 1.375$

$= 7.875$

$\therefore \quad M =$ ₹ 7.88 હજાર

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1775}{200} - \left(\frac{40}{200}\right)^2}$

$= \sqrt{8.875 - 0.04}$

$= \sqrt{8.835}$

$= 2.9724$

$\therefore \quad s \approx$ ₹ 2.97 હજાર

વિષમતા $S_k = 3(\bar{x} - M)$

$= 3(8.2 - 7.88)$

$= 3(0.32)$

$= 0.96$

$S_k =$ ₹ 0.96 હજાર

વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$

$= \frac{3(8.2-7.88)}{2.97}$

$= \frac{3(0.32)}{2.97}$

$= \frac{0.96}{2.97}$

$= 0.3232$

$= 0.32$

$\therefore \quad j \approx 0.32$

આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 5 : 400 ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાકમાં) અંગે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાક)	4000-4199	4200-4399	4400-4599	4600-4799	4800-4999	5000-5199	5200-5399	5400-5599
ઈલેક્ટ્રિક બલ્બની સંખ્યા	14	46	58	76	70	76	40	20

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ 76 બે વર્ગોમાં આવેલ છે તેથી બે બહુલક અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોવાથી વિષમતાંક શોધવા મધ્યક, મધ્યસ્થ અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાક)	ઈલેક્ટ્રિક બલ્બની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 4699.5$ $c = 200$	fd	fd^2	cf
4000 - 4199	14	4099.5	− 3	− 42	126	14
4200 - 4399	46	4299.5	− 2	− 92	184	60
4400 - 4599	58	4499.5	− 1	− 58	58	118
4600 - 4799	76	4699.5	0	0	0	194
4800 - 4999	70	4899.5	1	70	70	264
5000 - 5199	76	5099.5	2	152	304	340
5200 - 5399	40	5299.5	3	120	360	380
5400 - 5599	20	5499.5	4	80	320	400
કુલ	**$n = 400$**			**230**	**1422**	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 4699.5 + \frac{230}{400} \times 200$

$= 4699.5 + 115$

$= 4814.5$

$\therefore \quad \bar{x} = 4814.5$ કલાક

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{400}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 200મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 200મા અવલોકનની કિંમતનો વર્ગ 4800 - 4999માં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસ્થનો અનિવારક વર્ગ 4800 - 4999 છે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, મધ્યસ્થનો વર્ગ 4799.5 - 4999.5 મળે.

હવે, $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 4799.5$, $\frac{n}{2} = 200$, $cf = 194$, $f = 70$ અને $c = 200$ છે.

$M = 4799.5 + \frac{200-194}{70} \times 200$

$= 4799.5 + \frac{6 \times 200}{70}$

$= 4799.5 + \frac{120}{7}$

$= 4799.5 + 17.1429$

$= 4816.6429$

$\therefore \quad M \approx 4816.64$ કલાક

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{1422}{400} - \left(\frac{230}{400}\right)^2} \times 200$

$= \sqrt{3.555 - 0.3306} \times 200$

$= \sqrt{3.2244} \times 200$

$= 359.1323$

$\therefore \quad s = 359.13$ કલાક

વિષમતા $S_k = 3(\bar{x} - M)$

$= 3(4814.5 - 4816.64)$

$= 3\ (-2.14)$

$= -6.42$

$\therefore \quad S_k = -6.42$ કલાક

વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$

$= \frac{3(4814.5-4816.64)}{359.13}$

$= \frac{-6.42}{359.13}$

$= -0.0178$

$j \approx -0.02$

આમ, આપેલ વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચેની માહિતી 30 કંપનીએ કરેલ વાર્ષિક જાહેરાત ખર્ચ (લાખ ₹માં)ને લગતી છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

વાર્ષિક જાહેરાત-ખર્ચ (લાખ ₹)	0	3	5	8	10 - 20	20 - 30	30 - 40
કંપનીઓની સંખ્યા	3	4	5	10	5	2	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ મિશ્ર પ્રકાર (અસતત અને સતત પ્રકાર)નું છે. તેથી $\bar{x}$, M, S અને વિષમતાંકની ગણતરી કરીએ.

વાર્ષિક જાહેરાત-ખર્ચ (લાખ ₹)	કંપનીઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = x - A$ $A = 15$	fd	fd^2	cf
0	3	0	– 15	– 45	675	3
3	4	3	– 12	– 48	576	7
5	5	5	– 10	– 50	500	12
8	10	8	– 7	– 70	490	22
10 - 20	5	15	0	0	0	27
20 - 30	2	25	10	20	200	29
30 - 40	1	35	20	20	400	30
કુલ	$n = 30$			**–173**	**2841**	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$

$= 15 + \frac{-173}{30}$

$= 15 - 5.7667$

$= 9.2333$

$\therefore \quad \bar{x} \approx$ ₹ 9.23 લાખ

મધ્યસ્થ M = $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{30}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 15મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કોલમમાં જોતા, 15મા અવલોકનની કિંમત 8 છે.

$\therefore$ M = ₹ 8 લાખ

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{2841}{30} - \left(\frac{-173}{30}\right)^2}$

$= \sqrt{94.7 - 33.2544}$

$= \sqrt{61.4456}$

$= 7.8387$

$\therefore$ $s \approx$ ₹ 7.84 લાખ

વિષમતા $S_k = 3\ (\bar{x} - M)$

$= 3\ (9.23 - 8)$

$= 3(1.23)$

$= 3.69$

$\therefore$ $S_k =$ ₹ 3.69 લાખ

વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$

$= \frac{3(9.23 - 8)}{7.84}$

$= \frac{3.69}{7.84}$

$= 0.4707$

$j \approx 0.47$

આમ, આપેલ વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 7 : 600 કામદારોને ચૂકવાતા કલાકદીઠ વેતનને લગતું આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

કલાકદીઠ વેતન (₹)	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200	200 - 220	220 - 240
કામદારોની સંખ્યા (f)	10	12	16	20	50	60	72	100	120	140

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ 140 છે, જે મધ્યના વર્ગમાં ન આવતા આવૃત્તિ-વિતરણના અંતિમ વર્ગમાં આવેલ છે. જેથી બહુલક અસ્પષ્ટ (ill–defined) છે. આ સંજોગોમાં વિષમતાંકનું સૂત્ર $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$નો ઉપયોગ કરી વિષમતાંક શોધીશું.

કલાકદીઠ વેતન (₹)	કામદારોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 130$ $c = 20$	fd	fd^2	cf
40 - 60	10	50	– 4	– 40	160	10
60 - 80	12	70	– 3	– 36	108	22
80 - 100	16	90	– 2	– 32	64	38
100 - 120	20	110	– 1	– 20	20	58
120 - 140	50	130	0	0	0	108
140 - 160	60	150	1	60	60	168
160 - 180	72	170	2	144	288	240
180 - 200	100	190	3	300	900	340
200 - 220	120	210	4	480	1920	460
220 - 240	140	230	5	700	3500	600
કુલ	**$n = 600$**			**1556**	**7020**	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 130 + \frac{1556}{600} \times 20$

$= 130 + 51.8666$

$= 181.866$

$\therefore \bar{x} = ₹\ 181.87$

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{7020}{600} - \left(\frac{1556}{600}\right)^2} \times 20$

$= \sqrt{11.7 - 6.7254} \times 20$

$= \sqrt{4.9746} \times 20$

$= 44.6076$

$\therefore s = ₹\ 44.61$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{600}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 300મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કોલમમાં જોતા, 300મા અવલોકનની કિંમત 180 - 200 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસ્થનો વર્ગ 180–200 મળે.

હવે, $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 180$, $\frac{n}{2} = 300$, $cf = 240$, $f = 100$ અને $c = 20$ લેતાં,

$$M = 180 + \frac{300-240}{100} \times 20$$

$$= 180 + \frac{60 \times 20}{100}$$

$$= 180 + 12$$

$$= 192$$

$$\therefore \quad M = ₹\ 192$$

વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$

$$= \frac{3(181.87 - 192)}{44.61}$$

$$= \frac{-12.39}{44.61}$$

$$= -0.2777$$

$$j \approx -0.28$$

આમ, આપેલ વિતરણ ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ છે.

ઉદાહરણ 8 : **એક કંપનીના શૅરના બજારભાવની પરિસ્થિતિમાં સામાન્ય સભા પહેલાં અને પછી થયેલ ફેરફાર અંગેની હકીકતોનાં માપો આપવામાં આવેલાં છે. આ બાબત ધ્યાનમાં લઈ કંપનીની સામાન્ય સભા દરમિયાન થયેલ કાર્યવાહીની બજાર ભાવ પર અસર થઈ છે કે નહીં તે અંગે તમારું મંતવ્ય વિષમતાંકની ગણતરી કરીને આપો.**

વિગત	સામાન્ય સભા પહેલાં	સામાન્ય સભા પછી
શૅરના સોદાની સંખ્યા	6000	5800
શૅરના ભાવનો મધ્યક (₹)	440	460
શૅરના ભાવનો મધ્યસ્થ (₹)	500	480
શૅરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન (₹)	60	52

સામાન્ય સભા પહેલાં અને પછી શેરના બજારભાવમાં થયેલ ફેરફાર માટે વિષમતાંક ગણી આપણે બંને સમયના શેરના ભાવના વિતરણ વિશે મંતવ્ય આપી શકીએ. અહીં મધ્યક, મધ્યસ્થ આપેલા છે તેથી નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી બંને પરિસ્થિતિ માટે વિષમતાંક શોધીશું.

સામાન્ય સભા પહેલાં વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$$

$$= \frac{3(440-500)}{60}$$

$$= \frac{3(-60)}{60}$$

$$j = -3$$

સામાન્ય સભા પછી વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$$

$$= \frac{3(460-480)}{52}$$

$$= \frac{3(-20)}{52}$$

$$j = -1.15$$

(1) બંને પરિસ્થિતિ માટે શેરના ભાવનાં વિતરણો ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

(2) સામાન્ય સભા પછી વિષમતાંકમાં ઘટાડો થયો છે. તેથી સામાન્ય સભાની કાર્યવાહીની બજારભાવ પર અંશતઃ અસર પડી છે એમ કહી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : બે ક્રિકેટરો દ્વારા 10 મૅચોમાં કરેલા રન અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી કયા ક્રિકેટરની રમત વધુ વિષમ છે તે નક્કી કરો :

વિગત	ક્રિકેટર A	ક્રિકેટર B
મધ્યક $\bar{x}$	50	35
બહુલક M_o	56	31
પ્રમાણિત વિચલન s	14.4	5.2

આપેલી માહિતી પરથી બંને ક્રિકેટરની રમત માટે વિષમતાંકની ગણતરી નીચે મુજબ કરીએ :

ક્રિકેટર A વિષમતાંક :

$$j = \frac{\bar{x}-M_o}{s}$$

$$= \frac{50-56}{14.4}$$

$$= \frac{-6}{14.4}$$

$$j = -0.42$$

ક્રિકેટર B વિષમતાંક :

$$j = \frac{\bar{x}-M_o}{s}$$

$$= \frac{35-31}{5.2}$$

$$= \frac{4}{5.2}$$

$$j = 0.77$$

બંને ક્રિકેટરના રન માટે મળેલ વિષમતાંકનાં ચિહ્નો અવગણતાં ક્રિકેટર B માટેનું વિષમતાંક મૂલ્ય ક્રિકેટર A માટેના વિષમતાંકના મૂલ્યથી વધુ છે તેથી ક્રિકેટર Bની રમત વધુ વિષમ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 10 : નીચે જણાવેલ બે પેઢીના એક માસના બટાકાના વેચાણ (લાખ રૂપિયામાં) અંગે આવૃત્તિ-વિતરણનાં માપો પરથી કયું આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની વધુ નજીક છે તે નક્કી કરો.

પેઢી Aના બટાકાના વેચાણના વિતરણ માટેનાં માપો	પેઢીના Bના બટાકાના વેચાણના વિતરણ માટેનાં માપો
મધ્યક $\bar{x}$ = ₹ 40 મધ્યસ્થ M = ₹ 43 પ્ર. વિચલન s = ₹ 25	મધ્યક $\bar{x}$ = ₹ 45 મધ્યસ્થ M = ₹ 40 પ્ર. વિચલન s = ₹ 16

પેઢી Aના આવૃત્તિ-વિતરણ માટેનો વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$$

$$= \frac{3(40-43)}{25}$$

$$= \frac{3(-3)}{25}$$

$$= -0.36$$

$$j = -0.36$$

પેઢીના Bના આવૃત્તિ-વિતરણ માટેનો વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s}$$

$$= \frac{3(45-40)}{16}$$

$$= \frac{3(5)}{16}$$

$$= 0.9375$$

$$j = 0.94$$

આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક સંખ્યાત્મક રીતે (ચિહ્નો અવગણતાં) ઓછો હોય તે આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની વધુ નજીક છે એમ કહેવાય. અહીં, આવૃત્તિ-વિતરણ Aનો વિષમતાંક આવૃત્તિ-વિતરણ Bના વિષમતાંક કરતા સંખ્યાત્મક રીતે ઓછો છે તેથી આવૃત્તિ-વિતરણ B કરતાં આવૃત્તિ-વિતરણ A એ સંમિતતાની વધુ નજીક છે.

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના આંકડાશાસ્ત્રના વિષયના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણના આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ 72 છે અને મધ્યક 75 ગુણ છે. આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણની વિષમતા શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

અહીં, બહુલકની કિંમત આપેલ ન હોવાથી આપણે વિષમતા નીચેના સૂત્રથી મેળવીશું. મધ્યસ્થ M = 72 અને મધ્યક $\bar{x}$ = 75 આપેલ છે.

વિષમતા $S_k = 3(\bar{x} - M)$

$= 3(75 - 72)$

$= 3(3) = 9$ ગુણ

$\therefore S_k = 9$ ગુણ

અહીં, $S_k > 0$ હોવાથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓ એક મહિનામાં કેટલા દિવસ ગેરહાજર રહે છે તેની માહિતી એકઠી કરો. તે પરથી ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ રચો. તે પરથી વિષમતાનાં નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપો મેળવો.

તે જ રીતે બીજા વર્ગની આ જ પ્રમાણે માહિતી એકઠી કરી. આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરી વિષમતાના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવો. બંને વર્ગની માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ર, ચલનાંક અને વિષમતાંક મેળવી સરખામણી કરો.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ 59 ગ્રાહકો દ્વારા 500 મિલિ પેસ્ચ્યુરાઇઝ્ડ ટોન્ડ દૂધની કોથળીઓના જથ્થાની માંગને લગતું છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક શોધો.

દૂધની કોથળીઓની માંગ (એકમ)	1	2	3	4	5	6	7	8
ગ્રાહકોની સંખ્યા	2	7	10	15	12	7	4	2

2. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ 270 ગ્રાહક દ્વારા ટી-શર્ટના જુદી જુદી ખભાની લંબાઈ (ઈંચમાં)ના આધારે કરેલ ખરીદી અંગેનું છે. તે માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ટી-શર્ટના ખભાની લંબાઈ (ઈંચ)	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0
ગ્રાહકોની સંખ્યા	5	20	30	47	56	56	37	16	3

3. એક પ્રકારના કાર્યને પૂર્ણ કરવા માટે દરેક કામદારે લીધેલ સમયગાળા (પૂર્ણ મિનિટમાં) અંગેની માહિતી નીચે મુજબ જોવા મળી છે. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

લીધેલ સમયગાળો (પૂર્ણ મિનિટ)	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29
કામદારોની સંખ્યા	3	8	4	2	1

4. આંકડાશાસ્ત્રના ધોરણ 11ના અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓએ આઈ.ટી.ની કંપનીઓના નફા (કરોડ રૂપિયામાં) અંગેની માહિતી એકઠી કરી છે. આ પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

કંપનીનો નફો (કરોડ રૂપિયા)	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17
કંપનીઓની સંખ્યા	5	12	20	8	3	2

5. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ 38 કંપનીઓના વાર્ષિક ઘસારાની રકમ (લાખ રૂપિયામાં)ને લગતી છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વાર્ષિક ઘસારાની રકમ (લાખ ₹)	7	9	10	11 - 20	21 - 24	25 - 36
કંપનીઓની સંખ્યા	2	3	4	7	12	10

6. કાપડ બનાવતી 35 મિલોનો એક માસમાં રૂનો વપરાશ (હજાર ગાંસડીઓમાં) નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

રૂ નો વપરાશ (હજાર ગાંસડીઓ)	0 - 2	2 - 6	6 - 12	12 - 20	20 - 22
મિલોની સંખ્યા	3	10	7	12	3

7. પર્યટનના એક સ્થળનું વર્ષ 2014ના 60 દિવસનું તાપમાન સેલ્સિયસમાં નીચે મુજબ છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

તાપમાન સેલ્સિયસ	$-3°$ થી $-1°$	$-1°$ થી $5°$	$5°$ થી $11°$	$11°$ થી $19°$	$19°$ થી $23°$	$23°$ થી $27°$
દિવસોની સંખ્યા	4	14	20	14	5	3

*

5.4.2 બાઉલીની પદ્ધતિ (Bowley's Method)

પ્રોફેસર એ. એલ. બાઉલીએ ચતુર્થકો આધારિત વિષમતાનું માપ આપેલ છે. આ માપ ચતુર્થકોની સ્થિતિ પર આધારિત છે. તેમાં મુખ્ય ધારણા લેવામાં આવેલ છે કે "વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બંને ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3 એ મધ્યસ્થ M (= Q_2)થી સરખે અંતરે હોતા નથી.' અહીં વિષમતા S_kનું નિરપેક્ષ માપ મેળવવા ચતુર્થકોનાં અંતરો $Q_3 - M$ અને $M - Q_1$નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

અર્થાત્, વિષમતા = $S_k = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$

$\therefore \quad S_k = Q_3 + Q_1 - 2M$

આપણે વિષમતાના બે પ્રકારનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં જોયું કે જો આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવતું હોય, તો $Q_3 - M > M - Q_1$ થાય.

$\therefore \quad Q_3 + Q_1 > 2M$ થાય.

જો આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવતું હોય તો $Q_3 - M < M - Q_1$ થાય.

$\therefore \quad Q_3 + Q_1 < 2M$ થાય.

અને જો આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત હોય તો $Q_3 - M = M - Q_1$ થાય. $\therefore Q_3 + Q_1 = 2M$ હોય તો $S_k = 0$ થાય.

ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3 એ મધ્યસ્થ M થી મેળવેલ અંતરના તફાવતનાં મૂલ્યો $Q_3 - M$ અને $M - Q_1$ના તફાવતનાં મૂલ્યોને તે મૂલ્યોના સરવાળા વડે ભાગવાથી વિષમતાનું **સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક મળે** છે. આમ, વિષમતાંક j માટે બાઉલીનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે છે :

$$j = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

આ સૂત્રના ઉપયોગથી મળતા વિષમતાના માપને બાઉલીનો વિષમતાંક કહે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે $(Q_3 - M)$ અને $(M - Q_1)$ એમ બંને મૂલ્યો ધન હોય, તો બે વાસ્તવિક સંખ્યાના નિરપેક્ષ મૂલ્યોના તફાવત તેના સરવાળા કરતાં નાના કે સરખા હોઈ શકે. તેથી $\left|\frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}\right| \leq 1 \quad \therefore$ | બાઉલીનો વિષમતાંક j | ≤ 1,

$\therefore \quad -1 \leq j \leq 1$. આમ બાઉલીનો વિષમતાંકનો વિસ્તાર -1 થી 1 સુધી હોય.

નોંધ :

(1) જ્યારે ખુલ્લા છોડાવાળું આવૃત્તિ-વિતરણ હોય ત્યારે આ જ પદ્ધતિથી વિષમતાના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવી શકાય.

(2) સ્થાનીય સરેરાશના ઉપયોગ એટલે કે ચતુર્થકો અને મધ્યસ્થના ઉપયોગથી વિષમતા મેળવવાની હોય ત્યારે બાઉલી પદ્ધતિ ઉપયોગી છે.

ઉદાહરણ 12 : વર્ષા ઋતુ દરમિયાન એક સ્થળે એક માસમાં થયેલા વરસાદ (સેમી)ની માહિતી નીચે મુજબ મળેલ છે, તો તે માહિતી પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો :

વરસાદ (સેમી)	6	7	13	5	15	20
દિવસોની સંખ્યા	10	5	3	8	3	2

સૌપ્રથમ થયેલાં વરસાદ (સેમી) અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા બાદ ચતુર્થકો Q_1, Q_2 $(= M)$ અને Q_3 શોધીશું અને બાઉલીના સૂત્રની મદદથી વિષમતા અને વિષમતાંકની ગણતરી કરીશું.

વરસાદ (સેમી)	**દિવસોની સંખ્યા** f	cf
5	8	8
6	10	18
7	5	23
13	3	26
15	3	29
20	2	31
કુલ	$n = 31$	

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{31+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{32}{4}$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 8મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 8મા અવલોકનની કિંમત 5 છે.

$\therefore \quad Q_1 =$ 5 સેમી

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$M = \left(\frac{31+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{32}{2}$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 16 મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 16મા અવલોકનની કિંમત 6 છે.

$\therefore \quad M =$ 6 સેમી

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{31+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{32}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 3(8)મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 24મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 24મા અવલોકનની કિંમત 13 છે.

$\therefore \quad Q_3 =$ 13 સેમી

વિષમતા $S_k = Q_3 + Q_1 - 2M$

$= 13 + 5 - 2(6)$

$= 18 - 12$

$= 6$

$S_k =$ 6 સેમી

વિષમતાંક $j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{13+5-2(6)}{13-5}$

$= \frac{18-12}{8}$

$= \frac{6}{8}$

$j = 0.75$

ઉદાહરણ 13 : વર્ષ 2014ના 100 દિવસમાં એક જ બૅન્કની 5 શાખાઓમાં મળી દરેક દિવસે ક્લિયરિંગ માટે આવેલા ચેકની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

ચેકની સંખ્યા	0 - 199	200 - 399	400 - 599	600 - 799	800 - 999
દિવસોની સંખ્યા	10	13	17	42	18

બાઉલીનો વિષમતાંક શોધવા માટે પ્રથમ ચતુર્થક Q_1, મધ્યસ્થ M (= Q_2) અને તૃતીય ચતુર્થક Q_3ની ગણતરી કરીશું.

ચેકની સંખ્યા	**દિવસોની સંખ્યા** f	cf
0 - 199	10	10
200 - 399	13	23
400 - 599	17	40
600 - 799	42	82
800 - 999	18	100
કુલ	$n = 100$	

પ્રથમ ચતુર્થક Q_1 = $\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{100}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 25મા અવલોકનની કિંમત

cfના કૉલમમાં જોતાં, 25મા અવલોકનની કિંમત 400 - 599 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Q_1 નો વર્ગ 400 - 599 મળે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં, Q_1નો વર્ગ 399.5 - 599.5 મળે.

હવે, $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 399.5$, $\frac{n}{4} = 25$, $cf = 23$ $f = 17$ અને $c = 200$ છે.

$$Q_1 = 399.5 + \frac{25-23}{17} \times 200$$

$$= 399.5 + \frac{2 \times 200}{17}$$

$$= 399.5 + \frac{400}{17}$$

$$= 399.5 + 23.5294$$

$$= 423.0294$$

∴ Q_1 = 423.03 ચેક

મધ્યસ્થ M = $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{100}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 50 મા અવલોકનની કિંમત

cfના કૉલમમાં જોતાં, 50 મા અવલોકનની કિંમત 600 - 799 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Mનો અનિવારક વર્ગ 600–799 મળે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં, Mનો વર્ગ 599.5 - 799.5 થાય.

હવે, $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 599.5$, $\frac{n}{2} = 50$, $cf = 40$ $f = 42$ અને $c = 200$ છે.

$$M = 599.5 + \frac{50-40}{42} \times 200$$

$$= 599.5 + \frac{10 \times 200}{42}$$

$$= 599.5 + \frac{2000}{42}$$

$$= 599.5 + 47.619$$

$$= 647.119$$

$$M \approx 647.12 \text{ ચેક}$$

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{100}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3(25)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 75$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 75મા અવલોકનની કિંમતની 600 - 799ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Q_3 નો અનિવાક વર્ગ 600 - 799 મળે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં, Q_3 નો વર્ગ 599.5 - 799.5 મળે.

હવે, $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 599.5$, $3\left(\frac{n}{4}\right) = 75$, $cf = 40$, $f = 42$ અને $c = 200$ છે.

$$Q_3 = 599.5 + \frac{75-40}{42} \times 200$$

$$= 599.5 + \frac{35 \times 200}{42}$$

$$= 599.5 + 166.6667$$

$$= 766.1667$$

$$\therefore \quad Q_3 \approx 766.17 \text{ ચેક}$$

વિષમતાંક $j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$j = \frac{766.17 + 423.03 - 2(647.12)}{766.17 - 423.03}$$

$$= \frac{1189.20 - 1294.24}{343.14}$$

$$= \frac{-105.04}{343.14}$$

$$= -0.3061$$

$$j \approx -0.31$$

આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 14 : વર્ષ 2014–15માં 500 કંપનીઓના વેચાણ અંગેની માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી યોગ્ય પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વેચાણ (હજાર ટન)	**4 થી ઓછું**	**4 - 7**	**7 - 10**	**10 - 13**	**13 - 16**	**16 - 20**	**20 અને તેથી વધુ**
કંપનીઓની સંખ્યા	26	119	198	86	39	20	12

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ખુલ્લા છેડાવાળું છે તેથી વિષમતાનું માપ બાઉલીની પદ્ધતિથી જ મળે. આ માટે પ્રથમ ચતુર્થક, મધ્યસ્થ અને તૃતીય ચતુર્થકની ગણતરી કરીશું.

વેચાણ (હજાર ટન)	**કંપનીઓની સંખ્યા f**	**cf**
4 થી ઓછું	26	26
4–7	119	145
7–10	198	343
10–13	86	429
13–16	39	468
16–20	20	488
20 અને તેથી વધુ	12	500
કુલ	**$n = 500$**	

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{500}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 125મા અવલોકનની કિંમત

cfના કૉલમમાં જોતાં, 125મા અવલોકનની કિંમત 4 - 7ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Q_1નો વર્ગ 4 - 7 મળે.

હવે, $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 4$, $\frac{n}{4} = 125$, $cf = 26$, $f = 119$ અને $c = 3$ છે.

$$Q_1 = 4 + \frac{125 - 26}{119} \times 3$$

$$= 4 + \frac{297}{119}$$

$$= 4 + 2.4958$$

$$= 6.4958$$

$\therefore \quad Q_1 \approx 6.50$ હજાર ટન

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{500}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 250મા અવલોકનની કિંમત

cfના કૉલમમાં જોતાં, 250મા અવલોકનની કિંમત 7 - 10ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Mનો વર્ગ 7 - 10 મળે.

હવે, $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 7$, $\frac{n}{2} = 250$, $cf = 145$, $f = 198$ અને $c = 3$ છે.

$$M = 7 + \frac{250-145}{198} \times 3$$

$$= 7 + \frac{105 \times 3}{198}$$

$$= 7 + \frac{315}{198}$$

$$= 7 + 1.5909$$

$$= 8.5909$$

$\therefore \quad M \approx 8.59$ હજાર ટન

તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\left(\frac{500}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 3\ (125)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 375$મા અવલોકનની કિંમત

cf ના કૉલમમાં જોતાં, 375મા અવલોકનની કિંમત 10 - 13 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી Q_3નો વર્ગ 10 - 13 મળે.

હવે, $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

અહીં, $L = 10$, $3\left(\frac{n}{4}\right) = 375$, $cf = 343$, $f = 86$ અને $c = 3$ છે.

$$Q_3 = 10 + \frac{375-343}{86} \times 3$$

$$= 10 + \frac{32 \times 3}{86}$$

$$= 10 + \frac{96}{86}$$

$$= 10 + 1.1163$$

$$= 11.1163$$

$\therefore \quad Q_3 \approx 11.12$ હજાર ટન

વિષમતાંક $j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$j = \frac{11.12+6.5-2(8.59)}{11.12-6.5}$

$= \frac{17.62-17.18}{4.62}$

$= \frac{0.44}{4.62}$

$= 0.0952$

$\therefore \quad j \approx 0.10$

આમ, આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. વિષમતાંક શૂન્યની નજીક છે તેથી આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની નજીક છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 15 : એક કંપનીના કર્મચારીઓના માસિક ઓવરટાઈમના કલાકોને લગતા આવૃત્તિ-વિતરણમાં બે અંતિમ ચતુર્થકોનો સરવાળો 218 અને તેમના તફાવત 50 છે. જો વિતરણનો મધ્યસ્થ 112 હોય તો વિષમતાંક શોધો.

અહીં, $Q_3 + Q_1 = 218$, $Q_3 - Q_1 = 50$, $M = 112$

વિષમતાંક $j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{218-2(112)}{50}$

$= \frac{218-224}{50}$

$= \frac{-6}{50}$

$j = -0.12$

ઉદાહરણ 16 : એક સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક 84 છે. જો પ્રથમ ચતુર્થક 68 હોય તો ત્રીજો ચતુર્થક શોધો.

આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત છે તેથી વિષમતાંક $j = 0$ થાય. $\bar{x} = M = M_o$ છે તેથી $M = M_o = 84$, $M = 84$ અને $Q_1 = 68$ છે.

$j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$\therefore \quad 0 = \frac{Q_3+68-2(84)}{Q_3-68}$

$\therefore \quad 0\ (Q_3 - 68) = Q_3 + 68 - 168$

$\therefore \quad 0 = Q_3 - 100$

$\therefore \quad Q_3 = 100$

ઉદાહરણ 17 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વાર્ષિક પરીક્ષાના એક જ વિષયના પરિણામના ગુણની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ત થયેલ છે. જેમાં 25 % વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 28 ગુણ કરતાં ઓછા મળેલ છે. જ્યારે અન્ય 75 % વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 47 ઓછા મળેલ છે. જો વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો વિષમતાંક 0.4 હોય તો મધ્યસ્થ શોધો.

અહીં 25 % અવલોકનની કિંમત 28 ગુણ કરતાં ઓછા છે. $\therefore Q_1 = 28$

75 % અવલોકનની કિંમત 47 ગુણ કરતાં ઓછા છે. $\therefore Q_3 = 47, j = 0.4$

હવ $j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$\therefore \quad 0.4 = \frac{47+28-2M}{47-28}$

$\therefore \quad 0.4 = \frac{75-2M}{19}$

$\therefore \quad 0.4 \times 19 = 75 - 2M$

$7.6 = 75 - 2M$

$\therefore \quad 2M = 75 - 7.6$

$\therefore \quad 2M = 67.4$

$\therefore \quad M = 33.7$ ગુણ

5.5 વિષમતાંક મેળવવાની બંને પદ્ધતિઓની તુલના

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ અને બાઉલીની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શોધેલ વિષમતાંકની કિંમત સામાન્ય રીતે સરખી મળતી નથી કારણ કે બંને પદ્ધતિઓમાં સરેરાશનાં ભિન્ન માપોનો ઉપયોગ થાય છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં સરેરાશ માપ મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક તદુપરાંત પ્રમાણિત વિચલનનો પણ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે બાઉલીની પદ્ધતિમાં વિષમતાંક શોધવા સ્થાનીય માપો ચતુર્થકોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમ, બંને પદ્ધતિઓમાં વિષમતાંકની ગણતરી કરવામાં ભિન્ન માપોનો ઉપયોગ થાય છે.

બાઉલીની પદ્ધતિની રીતે વિષમતાંક મેળવવાની ગણતરી એ કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક મેળવવાની ગણતરી કરતા સરળ છે.

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંકની કિંમત બાઉલીની પદ્ધતિ દ્વારા શોધેલ વિષમતાંક કરતા વધુ વિશ્વસનીય છે કારણ કે બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધવામાં ચતુર્થકોનો ઉપયોગ થાય છે. ચતુર્થકો શોધવા માટે માહિતીના ફક્ત મધ્યનાં 50 % અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે. કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં વિષમતાંક શોધવામાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ થાય છે. જેમાં માહિતીનાં તમામ અવલોકનો ઉપયોગમાં લેવાય છે.

ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા અને વિષમતાંક બાઉલીની પદ્ધતિથી જ શોધી શકાય છે. ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં ઉપયોગી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનનાં માપ મેળવી શકાતા નથી. કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં વિષમતાંક શોધવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપ $\bar{x} - M_o$ ને પ્રમાણિત વિચલનનાં માપ વડે ભાગવામાં આવે છે જ્યારે બાઉલીની રીતથી વિષમતાંક શોધવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપ $(Q_3 - M) - (M - Q_1)$ ને $(Q_3 - Q_1)$ વડે ભાગવામાં આવે છે. આપણે એ બાબતને પણ સમજવી જોઈએ કે બાઉલીની પદ્ધતિના સૂત્ર અને કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિના સૂત્રથી મેળવેલ કિંમતોની તુલના યોગ્ય નથી. જો વિષમતાંક $j = 0$ હોય તો તે એવું સૂચવે છે કે વિષમતાનો અભાવ છે એટલે કે આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત છે. જોકે $j = 0$ હોય છતાં આવા કિસ્સામાં આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ર ધન કે ઋણ વિષમતા દર્શાવતો હોય તેવું બની શકે.

ઉદાહરણ 18 : બે શહેરમાં રહેતા લોકોની માસિક આવક અંગેની માહિતીનાં માપો નીચે મુજબ મળેલ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વિગતો	શહેર A	શહેર B
મધ્યક $\bar{x}$	300	280
મધ્યસ્થ M	284	310
પ્રમાણિત વિચલન s	60	110
પ્રથમ ચતુર્થક Q_1	124	160
તૃતીય ચતુર્થક Q_3	390	520

શહેર A :

કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s} = \frac{3(300-284)}{60} = \frac{3(16)}{60} = \frac{48}{60}$$

$$j = 0.8$$

બાઉલીની રીતે વિષમતાંક :

$$j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1} = \frac{390+124-2(284)}{390-124} = \frac{514-568}{266} = \frac{-54}{266} = -0.203$$

$$j = -0.2$$

શહેર B :

કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x}-M)}{s} = \frac{3(280-310)}{110} = \frac{3(-30)}{110} = \frac{-9}{11}$$

$$\therefore j \approx -0.82$$

બાઉલીની રીતે વિષમતાંક :

$$j = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1} = \frac{520+160-2\times 310}{520-160} = \frac{680-620}{360} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore j \approx 0.17$$

શહેર A માં કાર્લ પિયર્સનની રીતે ધન વિષમતાંક અને બાઉલીની રીતે ઋણ વિષમતાંક મળે છે. જ્યારે શહેર B માં કાર્લ પિયર્સનની રીતે ઋણ વિષમતાંક અને બાઉલીની રીતે ધન વિષમતાંક મળે છે. તેથી બંને પદ્ધતિથી મળેલા વિષમતાંકની તુલના યોગ્ય નથી. કોઈ એક જ પ્રકારની પદ્ધતિએ સરખામણી કરવી હિતાવહ છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. એક જીમખાનામાં કસરત કરતાં જુદાં-જુદાં યુવાનોની ઉંમર(વર્ષમાં)ના નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

ઉંમર(વર્ષમાં)	25	17	20	18	26	22	28	23
યુવાનોની સંખ્યા	22	4	19	11	7	9	3	8

2. 31 ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન કરતી કંપનીઓએ બહાર પાડેલ શૅરમૂડીમાંથી ભરપાઈ થયેલ મૂડી અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો અને તેનો પ્રકાર જણાવો.

ભરપાઈ થયેલ મૂડી (લાખ રૂપિયા)	100 થી ઓછી	300 થી ઓછી	500 થી ઓછી	700 થી ઓછી	900 થી ઓછી	1100 થી ઓછી	1300થી ઓછી
કંપનીઓની સંખ્યા	0	6	16	19	23	27	31

3. 2014 –15 ના વર્ષ દરમિયાન 400 કંપનીઓના વેચાણ (હજાર ટનમાં) અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વેચાણ (હજાર ટન)	20થી ઓછું	20–40	40–50	50–75	75–90	90–120	120 અને વધુ
કંપનીઓની સંખ્યા	30	70	125	100	40	20	15

4. વીમા કંપનીની એક બ્રાન્ચમાં તેના એજન્ટોને એક માસમાં વીમા પૉલિસીની રકમ પર ચૂકવેલ કમિશનનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિએ વિષમતાંક શોધો.

કમિશનની ચૂકવણી (હજાર રૂપિયા)	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30
એજન્ટોની સંખ્યા	4	10	16	29	52	80	32	23	17	1

*

સારાંશ

- આવૃત્તિ-વિતરણના સામાન્ય રીતે બે પ્રકારના જોવા મળે છે :
  (1) સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ અને (2) વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ
- સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો સમાન હોય છે તથા તેનાં આવૃત્તિવક્ર સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનાં જોવા મળે છે.
- વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં તેના આવૃત્તિવક્રનો ડાબી બાજુ અથવા જમણી બાજુના છેડો વધુ લંબાયેલો હોય છે.
- જે આવૃત્તિવક્રમાં ડાબી બાજુનો છેડો વધુ લંબાયેલો હોય તેને ઋણ વિષમ આવૃત્તિવક્ર કહીશું અને જમણી તરફનો છેડો વધુ લંબાયેલો હોય તેને ધન વિષમ આવૃત્તિવક્ર કહીશું.
- વિષમતા માપવા માટે બે પ્રકારનાં માપ વપરાય છે :
  (1) નિરપેક્ષ માપ (વિષમતા) (2) સાપેક્ષ માપ (વિષમતાંક)
- વિષમતાના માપની ગણતરી કરવા માટે કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ અથવા બાઉલીની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- વિષમતાના સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક કહેવામાં આવે છે.
- વિષમતાંકનો વિસ્તાર સામાન્ય રીતે – 1 થી + 1 સુધી હોય છે. વિશિષ્ટ સંજોગોમાં વિષમતાંકનું માપ – 3 થી + 3 સુધી હોય છે.

સૂત્રોની યાદી :

કાર્લ પિયર્સન રીતનાં સૂત્રો	બાઉલીની રીતનાં સૂત્રો
નિરપેક્ષ માપ (1) બહુલક સ્પષ્ટ (વ્યાખ્યાયિત) હોય ત્યારે વિષમતા $S_k = \bar{x} - M_o$ (2) બહુલક બે કે તેથી વધારે હોય અથવા બહુલક અસ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતા $S_k = 3\ (\bar{x} - M)$	**નિરપેક્ષ માપ** વિષમતા $S_k = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$ $= Q_3 + Q_1 - 2M$
સાપેક્ષ માપ (1) બહુલક સ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતાંક $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$ (2) બહુલક બે કે તેથી વધારે હોય અથવા બહુલક અસ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતાંક $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$.	**સાપેક્ષ માપ** વિષમતાંક $j = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$ $j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. જો માહિતીમાં બહુલક અવ્યાખ્યાયિત હોય, તો સામાન્ય સંજોગોમાં તેની વિષમતાંકનો વિસ્તાર કેટલો હોય ?

(a) 0 થી 1 સુધી (b) –1 થી +1 સુધી (c) –3 થી +3 સુધી (d) –1 થી 0

2. એક આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યકનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

(a) બહુલક કરતાં વધારે (b) બહુલક કરતાં ઓછું

(c) બહુલકની બરાબર (d) મધ્યક વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ.

3. બે વિતરણના માપ નીચે મુજબ છે. નીચેનામાંથી કયુ વિધાન સાચું છે ?

વિતરણ (i) મધ્યક = 44, મધ્યસ્થ = 48 અને પ્ર. વિચલન = 20

વિતરણ (ii) મધ્યક = 44, મધ્યસ્થ = 50 અને પ્ર. વિચલન = 24

(a) વિતરણ (i) અને (ii) બંને સરખા પ્રમાણમાં વિષમતા ધરાવે છે.

(b) વિતરણ (i) એ વિતરણ (ii) કરતાં વધારે વિષમતા ધરાવે છે.

(c) વિતરણ (i) એ (ii) કરતાં ઓછી વિષમતા ધરાવે છે.

(d) આપેલી માહિતી પરથી વિષમતા વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ.

4. નીચે મુજબ ત્રણ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બે માપ આપવામાં આવેલ છે. ત્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણો એક બહુલકીય છે. આ ત્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણો કેવા પ્રકારની વિષમતા ધરાવે છે તે જણાવો.

(i) આવૃત્તિ-વિતરણ A માં બહુલક = 100 અને મધ્યક = 116

(ii) આવૃત્તિ-વિતરણ B માં મધ્યસ્થ = 142.8 અને મધ્યક = 142.8

(iii) આવૃત્તિ-વિતરણ C માં મધ્યસ્થ = 208 અને મધ્યક = 192

(a) આવૃત્તિ-વિતરણ A સંમિત, આવૃત્તિ-વિતરણ B ઋણ વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C ધન વિષમ છે.

(b) આવૃત્તિ-વિતરણ A ઋણ વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B ધન વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C સંમિત છે.

(c) આવૃત્તિ-વિતરણ A ધન વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B સંમિત અને આવૃત્તિ-વિતરણ C ઋણ વિષમ છે.

(d) આવૃત્તિ-વિતરણ A ધન વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B ઋણ વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C સંમિત છે.

5. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક એ મધ્યક કરતાં 2 વધારે છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણ કેવા પ્રકારનું છે ?

(a) ઋણ વિષમ છે. (b) સંમિત છે. (c) ધન વિષમ છે. (d) કઈ કહી શકાય નહિ.

6. આવૃત્તિ-વિતરણમાં જો $Q_3 + Q_1 = 60$ અને $M = 30$ હોય, તો તેની વિષમતા માટે કયું વિધાન સાચું છે.

(a) આવૃત્તિ-વિતરણ વધુ વિષમ છે. (b) આવૃત્તિ-વિતરણ ઓછું વિષમ છે.

(c) આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાનો અભાવ છે. (d) આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતા ધરાવે છે.

7. એક સાધારણ અસંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં (મધ્યક - મધ્યસ્થ) એ(મધ્યક – બહુલક) થી કેટલા ગણો થાય ?

(a) 3 (b) –1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 0

8. ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કયું વિધાન ખોટું છે ?

(a) મધ્યકની કિંમત મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત કરતાં ઓછી હોય છે.

(b) ત્રીજો ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેના અંતરનું મૂલ્ય, મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક વચ્ચેના અંતરના મૂલ્ય કરતાં ઓછું હોય છે.

(c) આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિવક્રનો છેડો ડાબી બાજુ વધુ ખેંચાયેલો હોય છે.

(d) ત્રીજો ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વચ્ચેનાં અંતરનું મૂલ્ય, મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક વચ્ચેના અંતરના મૂલ્ય કરતાં વધારે હોય છે.

9. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) $Q_3 = 2M - Q_1$ (b) $Q_2 - Q_3 = Q_2 - Q_1$ (c) $Q_3 + Q_1 > 2M$ (d) $Q_3 + Q_1 < 2M$

10. જો $(M - \bar{x}) = -\frac{1}{2}s$ તો j ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) = –1.5 (d) 0.15

11. (i) ઋણવિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અને (ii) ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિના કયા માપની કિંમત સૌથી વધુ હોય છે ?

(a) (i) મધ્યક (ii) બહુલક (b) (i) મધ્યસ્થ (ii) બહુલક

(c) (i) બહુલક (ii) મધ્યક (d) મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલકની કિંમત વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ

12. વિતરણ X નો વિષમતાંક – 0.99 અને વિતરણ Y નો વિષમતાંક 0.90 હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) વિતરણ X વધુ વિષમ છે. (b) વિતરણ Y વધુ વિષમ છે.

(c) કંઈ કહી શકાય નહિ. (d) વિતરણ X અને વિતરણ Y ની વિષમતા સરખા પ્રમાણમાં છે.

13. નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન ખોટું છે તે જણાવો.

(a) $Q_3 + Q_1 > 2M$ હોય તો વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

(b) સ્થાનીય સરેરાશના ઉપયોગથી બાઉલીનો વિષમતાંક શોધવામાં આવે છે.

(c) કાર્લ પિયસનની રીતમાં ચલની એકમની અસર દૂર કરવા નિરપેક્ષ માપને પ્રમાણિત વિચલન વડે ભાગવામાં આવે છે. જ્યારે બાઉલીની પદ્ધતિમાં ચતુર્થકના તફાવત વડે નિરપેક્ષ માપને ભાગવામાં આવે છે.

(d) વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ હોય છે.

14. નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન સાચું છે તે જણાવો.

(a) જે સમષ્ટિના અવલોક્નો બહુલકની કિંમતથી બંને બાજુ સમાન રીતે વિતરિત હોય તેને વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.

(b) મધ્યસ્થથી અંતિમ ચતુર્થકોના અંતરના તફાવતનાં મૂલ્યો સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં સમાન હોય છે.

(c) જો $S_k > 0$, તો $\bar{x} > M$ અને $\bar{x} < M_o$ થાય.

(d) જો $S_k < 0$ હોય તો $\bar{x} < M$ અને $\bar{x} > M_o$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિષમતા એટલે શું ?

2. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કોને કહેવાય ?

3. આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા છે તેમ ક્યારે કહેવાય ?

4. વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યસ્થના સ્થાન વિશે શું કહેશો ?

5. આવૃત્તિવક્ર દ્વારા વિષમતા કેવી રીતે નક્કી થાય છે તે સમજાવો.

6. વિષમતાંક એટલે શું ? વિષમતાંકની કિંમતનો વિસ્તાર જણાવો.

7. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં વિષમતાનું માપ મેળવવા માટે કયાં કયાં માપોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ?

8. બાઉલીની પદ્ધતિમાં વિષમતાનું માપ મેળવવાનો આધાર જણાવો.

9. કઈ પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંકની કિંમત વધુ વિશ્વસનીય છે ?

10. વિષમતાંક સાપેક્ષ માપ છે કે નિરપેક્ષ માપ ? કારણ આપો.

11. જ્યારે ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ અને આવૃત્તિ-વિતરણમાં એક કરતાં વધુ બહુલક હોય ત્યારે વિષમતાંક કયા સૂત્રથી મેળવશો ?

12. અસમાન વર્ગલંબાઈવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં કાર્લ પિયર્સન પદ્ધતિથી વિષમતાંકના મૂલ્યનો વિસ્તાર જણાવો.

13. એક આવૃત્તિ-વિતરણના ત્રણ ચતુર્થકો 42, 36 અને 40 છે, તો તે આવૃત્તિ-વિતરણનો પ્રકાર જણાવો.

14. જો કોઈ આવૃત્તિ-વિતરણમાં $(Q_3 - Q_2) < (Q_2 - Q_1)$ હોય તો આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

15. એક માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક તેના મધ્યસ્થ કરતાં 2 જેટલો ઓછો છે, તો તે આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

16. એક માહિતી માટે $Q_3 + Q_1 = 125$ અને $M = 62.5$ છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા અંગે શું કહી શકાય ?

17. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં $\bar{x} = M = M_o = 48$ છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણના વિષમતાંક અંગે શું કહી શકાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિષમતાના પ્રકાર કેટલા છે અને કયા કયા છે તે જણાવો.
2. વિષમતાના પ્રકાર, સરેરાશનાં માપ તથા ચતુર્થકોનાં સ્થાન આકૃતિમાં દર્શાવો.
3. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણનાં કોઈ પણ બે લક્ષણો જણાવો.
4. વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનાં કોઈ પણ બે લક્ષણો જણાવો.
5. એક આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા $S_k = -2.8$ છે. જો તેનો બહુલક 48.8 હોય તો મધ્યક શોધો.
6. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં બે અંતિમ ચતુર્થકોનો સરવાળો 138 છે, તો તેનો મધ્યસ્થ કેટલો થાય ?
7. એક ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.75 છે. જો પ્ર.વિચલન 20 અને મધ્યક 37.50 હોય તો મધ્યસ્થ શોધો.
8. એક વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક તેના મધ્યસ્થથી 3 જેટલો વધુ છે. જો આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.75 હોય, તો પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
9. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં $Q_3 - Q_2 = 2\ (Q_2 - Q_1)$ હોય તો j શોધો.
10. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા $S_k = -6.6$ અને ચતુર્થક વિચલન = 22 હોય તો j શોધો.
11. એક વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યક = 40, બહુલક = 46, $Q_3 + Q_1 = 76$ અને $Q_3 - Q_1 = 20$ છે, તો બાઉલીનો વિષમતાંક શોધો.
12. 'બાઉલીની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંક, કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંક કરતાં વધુ વિશ્વસનીય નથી' તે વિધાન સમજાવો.
13. એક આવૃત્તિ-વિતરણના ત્રણ ચતુર્થકો 76, 98 અને 40 છે, તો j શોધો અને તે વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.
14. કોઈ એક આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.85 છે. જો તેનો મધ્યક બહુલકથી 3.4 જેટલો વધારે હોય તો તેનું વિચરણ શોધો.
15. કોઈ એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં $\bar{x} + M_o = 82$, $\bar{x} = 44$ અને $s = 12$ હોય તો વિષમતાંક શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કાર્લ પિયર્સનની વિષમતાંક શોધવાની રીત ટૂંકમાં સમજાવો.
2. વિષમતાંક શોધવાની બાઉલીની રીત પર ટૂંક નોંધ લખો.
3. કાર્લ પિયર્સનના સૂત્ર $j = 3\left(\frac{\bar{x}-M}{s}\right)$નો ઉપયોગ કયા સંજોગોમાં કરી વિષમતાંક શોધવામાં આવે છે તે જણાવો.
4. ધન વિષમતા અને ઋણ વિષમતાનો તફાવત મુદ્દાસર અને આકૃતિ સહિત આપો.
5. નીચેનામાંથી કઈ સમષ્ટિ સંમિતતાની વધુ નજીક છે ?

   સમષ્ટિ A : $\bar{x} = 56$, $M_o = 60$ અને $s = 24$

   સમષ્ટિ B : $\bar{x} = 56$, $M = 60$ અને $s = 30$
6. નીચેની માહિતી પરથી યોગ્ય પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી વિષમતાંક શોધો અને સમષ્ટિ A અને સમષ્ટિ B માંથી કઈ સમષ્ટિ વધારે વિષમ છે તે નક્કી કરો :

   સમષ્ટિ A : $4Q_1 = 3Q_2 = 2Q_3 = 144$

   સમષ્ટિ B : $Q_1 = 34.8$, $Q_2 = 45.5$ અને $Q_3 = 70$
7. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યસ્થથી તૃતીય ચતુર્થક 12.8 જેટલા અંતરે અને મધ્યસ્થથી પ્રથમ ચતુર્થક 11.2 જેટલા અંતરે છે, તો વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

8. એક માહિતી માટે ચલનાંક 25 %, $\bar{x}$ = 32 અને M_o = 32.2 છે, તો તેનો વિષમતાંક શોધો.

9. નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરી તેનો વિષમતાંક શોધો :

$n = 20, \Sigma x = 640, \Sigma x^2 = 20{,}800$ અને $M = 32.2$

10. એક માહિતી માટે કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક – 0.60 છે. જો મધ્યક = 60 અને s = 10 હોય, તો તે માહિતીનો મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

11. એક આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કાર્લ પિયર્સનની વિષમતા 8 અને વિષમતાંક = $\frac{2}{3}$ છે. જો તેનો મધ્યક 64 હોય, તો તેનો મધ્યસ્થ અને ચલનાંક શોધો.

12. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં $Q_3 + Q_1 = 1.5\ M$ અને $3\ (Q_3 - Q_1) = 2M$ હોય તો વિષમતાંક શોધો.

13. એક આવૃત્તિ-વિતરણ માટે $4\bar{x} = 6M_o = 144$, $s = 64$ અને $Q_3 + Q_1 = 6\ (Q_3 - Q_1) = 60$ હોય, તો કાર્લ પિયર્સનની અને બાઉલી પદ્ધતિથી વડે વિષમતાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેના આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં લક્ષણો જણાવો.
2. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં લક્ષણો આપો.
3. વિષમતાંક માટેની કાર્લ પિર્યસન અને બાઉલીની રીતનો તફાવત આપો.
4. વિષમતા અને વિષમતાંક સમજાવો.
5. વિષમતાના અભ્યાસના મુખ્ય હેતુઓ કયા કયા છે ?
6. બે ઉત્પાદક પેઢીઓના માસિક વેતનને લગતાં આવૃત્તિ-વિતરણનાં માપ નીચે પ્રમાણે છે. બાઉલી અને કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધી બંને પેઢીની તુલના કરી.

વિગતો	મધ્યક	મધ્યસ્થ	પ્રથમ ચતુર્થક	ત્રીજો ચતુર્થક	પ્રમાણિત વિચલન
પેઢી A	350	344	324	356	26
પેઢી B	360	340	330	370	38

7. સ્ટેશનરીની એક દુકાને વર્ષ 2014 ના જૂન માસ દરમિયાનનું થયેલ નોટબુકના વેચાણ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

નોટબુકનું વેચાણ (ડઝન)	30	25	21	20	18	16	15	12
દિવસોની સંખ્યા	2	2	7	3	4	7	2	3

8. 500 સ્ટેપલરનું એક એવાં 50 પેકેટનું નિરીક્ષણ કરતાં ખામીવાળાં સ્ટેપલરો વિશે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

ખામીવાળાં સ્ટેપલરની સંખ્યા	19	20	21	22	23	24	25	26
પેકેટની સંખ્યા	5	18	10	8	4	2	2	1

9. એક માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે જો $n = 200$, $\Sigma f\ (x - 240) = 0$, $\Sigma f\ (x - 240)^2 = 11{,}250$ અને મધ્યસ્થ = 246 હોય, તો વિષમતાંક શોધો અને તેનો પ્રકાર જણાવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલો મેળવો :

1. નિયત સમય કરતાં વધુ સમય ડ્રાઇવિંગ કરવાથી થયેલ અકસ્માતોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

નિયત સમય કરતાં વધુ સમય ડ્રાઇવિંગના કલાક	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0
અકસ્માતોની સંખ્યા	5	4	3	2	1	2	2	1

2. વર્ષ 2015 માં એક શહેરનું તાપમાન નીચે મુજબ નોંધવામાં આવેલ છે. એક દિવસનું તાપમાન -10^0 થી નીચે રહેલ નથી. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો. તેનો પ્રકાર જણાવો.

મધ્યકિંમત (સૅલ્સિયસમાં)	–5	5	12	18	25
દિવસની સંખ્યા	25	35	105	125	75

3. 60 ગુણની એક પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વિદ્યાર્થીઓના ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	12	38	38	20	7	120

4. વર્ષ 2015–16 માં 150 કંપનીઓએ કરેલ નફા અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. યોગ્ય પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

નફો (લાખ ₹)	10થી ઓછા	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 અને વધુ
કંપનીઓની સંખ્યા	15	30	50	40	15

5. કોઈ એક વસ્તુની માંગનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

માંગ (એકમ)	1	2	3	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
ગ્રાહકોની સંખ્યા	10	8	12	10	5	15	20

6. એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલાં સ્ક્રૂના જથ્થામાંથી 50 સ્ક્રૂનો નિદર્શ લઈ પ્રત્યેક સ્ક્રૂના મથાળાના વ્યાસના માપ (મિમિમાં) માપતાં તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તેના પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

સ્ક્રૂના વ્યાસનું માપ (મિમિ)	4 - 4.1	4 - 4.2	4 - 4.3	4 - 4.4	4 - 4.5	4–4.6	4–4.7	4–4.8
સ્ક્રૂની સંખ્યા	6	13	23	33	41	46	48	50

7. નીચે મુજબ એક ડિપાર્ટમેન્ટલ સ્ટોર્સમાં એક દિવસમાં વેચાયેલ બ્રેડના પૅકેટના વેચાણ અંગેના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

બ્રેડના પૅકેટની સંખ્યા	0 - 3	3 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 60
ગ્રાહકોની સંખ્યા	15	12	8	6	4	3	2	1

8. કાચનું વેચાણ કરતી એક દુકાનમાં થયેલ વેચાણ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો. તેનું અર્થઘટન કરો.

કાચનું કદ (ચોમી)	1 - 1.9	2 - 2.9	3 - 3.9	4 - 4.9	5 - 5.9	6 - 6.9	7 - 7.9
ગ્રાહકોની સંખ્યા	10	40	20	50	30	30	20

9. એક કન્સ્ટ્રક્શન કંપનીએ જુદાં જુદાં ક્ષેત્રફળનાં મકાન બનાવે છે. આ મકાનના વેચાણ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

મકાનનું ક્ષેત્રફળ (ચોમી)	100	140	180	220	260
મકાનોની સંખ્યા	10	25	50	25	10

10. ફેક્ટરીમાં એક ઉત્પાદન-પ્રક્રિયા દરમ્યાન એક કલાકમાં જુદાં જુદાં મશીનમાં વપરાતા પાવર યુનિટ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વપરાતા પાવર યુનિટ એકમો	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
મશીનની સંખ્યા	5	10	15	20	25	30

Arthur Lyon Bowley
(1869 - 1957)

Sir Arthur Lyon Bowley was a British Statistician and Mathematical Economist. Among the distinguished posts he held were those of Professor of Mathematics, Economics and Statistics at University College, Reading and London and Director of University of Oxford Institute of Statistics. His major works were "Three studies on the National Income", published in 1938 and "Wages and Income in the UK since 1860", published in 1937. He occupied, at various times, high positions in the Royal Statistical Society, The Royal Economic Society (elected fellow in 1893), the International Statistical Institute, the Econometric Society and the British Association for the Advancement of Science.

•

"The nature of the infant is not just a new permutation - and - combination of elements contained in the natures of the parents. There is in the nature of the infant that which is utterly unknown in the natures of the parents."

– David Herbert Lawrence

6

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ

(Permutations, Combinations and Binomial Expansion)

વિષયવસ્તુ :

6.1 ક્રમચય : અર્થ

6.2 સંચય : અર્થ

6.3 દ્વિપદી વિસ્તરણ : અર્થ અને લક્ષણો

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં ઘણી સમસ્યાઓ એવી છે કે, જેના ઉકેલ માટે ક્રમચય અને સંચય ઉપયોગી નીવડે છે. દા.ત. કોઈ એક વર્ગમાં એક પાટલી પર 4 વિદ્યાર્થીઓ ગોઠવવાના હોય તો શિક્ષક આ 4 વિદ્યાર્થીઓને કેટલી રીતે ગોઠવી શકે ? એક વ્યક્તિને 6 મિત્ર છે અને જો તે વ્યક્તિ પોતાના ઘરના પ્રસંગમાં માત્ર 2 મિત્રોને જ આમંત્રણ આપવા ઇચ્છતો હોય તો તેની પાસે કેટલા વિકલ્પો છે ? સામાન્ય રીતે આવી સમસ્યાઓનો ઉકેલ આપણે આપસૂઝથી ઉકેલીએ છીએ. પરંતુ આવી વિવિધ સમસ્યાઓના ગાણિતિક ઉકેલ માટે આપણે આ પ્રકરણમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંતો અને પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

સૌપ્રથમ આપણે ક્રમચય અને સંચયના સંદર્ભમાં સરવાળા અને ગુણાકારના એમ બે પ્રકારના ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતોનો અભ્યાસ કરીશું.

ગણતરીનો સરવાળાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંતને સમજવા આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરીએ. એક રેસ્ટોરન્ટમાં 4 પ્રકારના પિઝા (P_1, P_2, P_3, P_4 કહીએ) અને 3 પ્રકારનાં બર્ગર (B_1, B_2, B_3 કહીએ) મળે છે. જો કોઈ વ્યક્તિ તેમાંથી એક પિઝા **અથવા** બર્ગર ઑર્ડર કરવા માંગતો હોય, તો તેની પાસે કુલ $4 + 3 = 7$ $\{P_1, P_2, P_3, P_4, B_1, B_2, B_3\}$ વિકલ્પો છે. તે જ પ્રમાણે કોઈ એક

વર્ગમાં અભ્યાસ કરતા 40 છોકરાઓ અને 20 છોકરીઓમાંથી આ વર્ગના વર્ગશિક્ષક કોઈ એક છોકરા **અથવા** છોકરીને વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે નિયુક્ત કરવા ઇચ્છે તો તેમની પાસે કુલ $40 + 20 = 60$ વિકલ્પો છે. આમ, જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય તો બંને સમૂહોની કુલ વસ્તુઓમાંથી કોઈ પણ એક વસ્તુની પસંદગી $m + n$ પ્રકારે થઈ શકે. આ નિયમને ગણતરીનો સરવાળાનો નિયમ કહે છે.

પ્રથમ સમૂહની m ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી	અથવા	બીજા સમૂહની n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી
↓	↓	↓
m વિકલ્પો	+	**n વિકલ્પો**

'અથવા' શબ્દનો સૂચિત અર્થ સરવાળો કરી શકાય.

નોંધ : ગણતરીના સરવાળાના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને બેથી વધુ સમૂહો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

ગણતરીનો ગુણાકારનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો તે કુલ $m \times n$ પ્રકારે થઈ શકે. આ નિયમને સંયુક્ત ક્રિયાનો ગુણાકારનો સિદ્ધાંત કહે છે. અગાઉનાં ઉદાહરણો દ્વારા જ આ સિદ્ધાંતને સમજીએ. જો તે વ્યક્તિ એક પિઝા **અને** એક બર્ગર ઑર્ડર કરવા માંગતો હોય તો તેની પાસે કુલ $4 \times 3 = 12$ $\{P_1B_1, P_1B_2, P_1B_3, P_2B_1, P_2B_2, P_2B_3, P_3B_1, P_3B_2, P_3B_3, P_4B_1, P_4B_2, P_4B_3\}$ વિકલ્પો છે. તે જ પ્રમાણે જો વર્ગશિક્ષક એક છોકરાને **અને** એક છોકરીને વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે નિયુક્ત કરવા ઇચ્છે તો તેમની પાસે કુલ $40 \times 20 = 800$ વિકલ્પો થાય.

પ્રથમ સમૂહની m ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી	અને	બીજા સમૂહની n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી
↓	↓	↓
m વિકલ્પો	×	**n વિકલ્પો**

'અને' શબ્દનો સૂચિત અર્થ ગુણાકાર કરી શકાય.

નોંધ : ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને બેથી વધુ સમૂહો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

6.1 ક્રમચયનો અર્થ (Meaning of Permutation)

ક્રમચયનો અર્થ સમજવા સૌપ્રથમ કેટલાંક ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરીએ.

- ધારો કે ત્રણ અંક 2, 5 અને 8 નો ઉપયોગ કરીને અંકોના પુનરાવર્તન વગર બે અંકની સંખ્યા બનાવવી હોય તો જુદી જુદી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

આપેલ અંકો 2, 5, 8 નો ઉપયોગ કરીને બે અંકની સંખ્યાઓ આપસૂઝથી બનાવીએ તો તે 25, 28, 52, 58, 82, 85 એમ કુલ છ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે કોઈ અંકનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ ન હોવાથી 22, 55, 88 એવી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય નહિ.

હવે આ જ સમસ્યાને ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ ઉકેલીએ. બે અંકવાળી સંખ્યામાં એકમ અને દશક એમ બે સ્થાન હોય.

દશકનું સ્થાન	એકમનું સ્થાન
2, 5 અને 8 માંથી કોઈપણ એક અંકની ગોઠવણી કરો.	હવે દશકના સ્થાન પર જે અંક ગોઠવાઈ ગયો હોય તે સિવાયના બે અંકોમાંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી અહીં કરો.

આમ, દશકના સ્થાનને ભરવા માટે 2, 5 અને 8 એમ ત્રણ વિકલ્પો છે. જ્યારે દશકનું સ્થાન કોઈ એક અંક દ્વારા ભરાય ગયા પછી એકમનું સ્થાન ભરવા માટે માત્ર બે જ વિકલ્પો છે. એટલે કે કુલ $3 \times 2 = 6$ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય. અહીં પહેલા એકમના સ્થાન માટે અંકની પસંદગી કરી પછી દશકના સ્થાન માટે અંકની પસંદગી કરીએ તોપણ પરિણામ બદલાશે નહિ.

નોંધ : આપણા અભ્યાસક્રમમાં વસ્તુઓના પુનરાવર્તનના ક્રમચયોનો સમાવેશ નથી.

- ધારો કે ચાર વિદ્યાર્થીઓ A, B, C, D માંથી એક વિદ્યાર્થીને ક્રિકેટ ટીમનો કપ્તાન અને બીજા વિદ્યાર્થીને ઉપકપ્તાન બનાવવાનો છે. હવે આ સમસ્યાના ઉકેલના કેટલા વિકલ્પો થાય ?

આ સમસ્યાનો ઉકેલ આપસૂઝથી મેળવીએ તો નીચે મુજબ જુદાં જુદાં બાર વિકલ્પો મળે :

વિકલ્પ	કપ્તાન	ઉપકપ્તાન
1	A	B
2	A	C
3	A	D
4	B	A
5	B	C
6	B	D
7	C	A
8	C	B
9	C	D
10	D	A
11	D	B
12	D	C

હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી મેળવીએ.

કપ્તાનનું સ્થાન	ઉપકપ્તાનનું સ્થાન
વિદ્યાર્થીઓ A, B, C, D પૈકી કોઈપણ એક વિદ્યાર્થીને કપ્તાન બનાવી શકાય.	હવે જે વિદ્યાર્થીને કપ્તાન બનાવ્યો હોય તેના સિવાયના ત્રણ વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એકને ઉપકપ્તાન બનાવી શકાય.

આમ, કપ્તાનની નિયુક્તિ કરવા માટે A, B, C અને D એમ ચાર વિકલ્પો છે. કપ્તાનની નિયુક્તિ થઈ ગયા પછી ઉપકપ્તાનની નિયુક્તિ કરવા માટે માત્ર ત્રણ જ વિકલ્પો છે. એટલે કે કુલ $4 \times 3 = 12$ વિકલ્પો મળી શકે.

• એક 100 મીટરની દોડની સ્પર્ધામાં A, B, C, D, E, F, G, H અને I એમ નવ સ્પર્ધકો ભાગ લે છે. સ્પર્ધામાં ટોચ પર રહેનાર ત્રણ વિજેતાઓને અનુક્રમે ગોલ્ડ, સિલ્વર અને બ્રોન્ઝ એમ ત્રણ મેડલ ઇનામ તરીકે એનાયત કરવાનાં છે. હવે આપણે આ ત્રણ મેડલ આ નવ સ્પર્ધકોને મળવાના કુલ વિકલ્પો મેળવવાના છે.

આમ, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ પ્રથમ ક્રિયા (ગોલ્ડ મેડલ) 9 પ્રકારે થઈ શકે, બીજી ક્રિયા (સિલ્વર મેડલ) 8 પ્રકારે થઈ શકે અને ત્રીજી ક્રિયા (બ્રોન્ઝ મેડલ) 7 પ્રકારે થઈ શકે. તેથી ત્રણેય ક્રિયાઓ સાથે બનવાના કુલ વિકલ્પો $9 \times 8 \times 7 = 504$ થાય. આ સમસ્યાના ઉકેલને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય :

મેડલ	ગોલ્ડ	સિલ્વર	બ્રોન્ઝ
મેડલ મેળવનાર સ્પર્ધકોના વિકલ્પો	9	9 - 1 = 8	9 - 2 = 7

ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ વિકલ્પો = $9 \times 8 \times 7 = 504$

(અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, સ્પર્ધકોમાં ટાઈ ઉદ્ભવતી નથી.)

n જુદી જુદી વસ્તુઓ આપેલી હોય તો તેમાંથી r ભિન્ન વસ્તુઓને r સ્થાનો $(1 \le r \le n)$ પર ગોઠવવાના દરેક વિકલ્પને ક્રમચય (Permutation) કહે છે. આવી ગોઠવણીની કુલ સંખ્યાને સંકેતમાં ^nP_r, $_nP_r$, $P(n, r)$, P_r^n વડે દર્શાવાય છે. આપણે ^nP_r સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, n જુદી જુદી વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો ^nP_r થાય.

^nP_r ને વ્યાખ્યાયિત કરવા પાછળનું કોષ્ટક સમજો.

ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r સ્થાનો પર r વસ્તુઓની ગોઠવણી કરવી છે, એટલે કે ^nP_r મેળવવું છે. આ ગોઠવણી આ મુજબ થઈ શકે. (સરળ સમજૂતી માટે પાછળના કોષ્ટકને અગાઉના મેડલવાળા ઉદાહરણ સાથે સરખાવો.)

r સ્થાનો	1	2	3	4	...	r
પ્રત્યેક સ્થાન માટેના શક્ય વિકલ્પો	n $= n - (1-1)$	$n - 1$ $= n - (2-1)$	$n - 2$ $= n - (3-1)$	$n - 3$ $= n - (4-1)$	...	$n - r + 1$ $= n - (r-1)$

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સમજી શકાય છે કે પ્રથમ સ્થાનને ભરવા માટે n વિકલ્પો ઉપલબ્ધ છે. હવે કોઈ પણ એક વસ્તુ વડે પ્રથમ સ્થાન ભર્યા બાદ બાકીની $(n-1)$ વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુથી બીજું સ્થાન ભરી શકાય. આમ પ્રથમ બે સ્થાનો ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1)$ થાય. તે જ પ્રમાણે પ્રથમ ત્રણ સ્થાન ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1) \times (n-2)$ થાય. આ મુજબ r સ્થાન ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times .... \times (n - r + 1)$ થાય. જેને n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો કહે છે. તેથી,

$$^nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times (n-r+1)$$

દરેક સ્થાન ભરવાના વિકલ્પોની સંખ્યા તેના અગાઉના સ્થાનના વિકલ્પોની સંખ્યા કરતાં એક ઓછી છે.

ક્રમચયના અભ્યાસમાં ક્રમગુણિત (Factorial) એ ખૂબ જ મહત્ત્વનું સ્થાન ધરાવે છે. સૌ પ્રથમ આપણે ક્રમગુણિતનો અર્થ સમજીએ. આપણે અગાઉ જોયું કે ઘણી બધી સમસ્યાના ઉકેલમાં ક્રમિક સંખ્યાઓની હારમાળાનો ગુણાકાર સમાયેલો છે. આ ગુણાકારને ટૂંકમાં દર્શાવવા માટે ક્રમગુણિતનો ઉપયોગ થાય છે. ક્રમગુણિતને સંકેતમાં '!' કે '⌊' વડે દર્શાવાય છે. જેમકે $n!$ અથવા $\underline{|n}$ (વાંચો n ફેક્ટોરિયલ) વડે દર્શાવાય છે. હવે આપણે $n!$ નો અર્થ સમજીએ.

$n!$ એટલે 1 થી n સુધીની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, એટલે કે,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$

અથવા

$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ (અનુકૂળતા ખાતર આપણે આ રીતે લખીશું.)

ઉદાહરણ તરીકે જોઈએ તો,

$$\begin{aligned} 7! &= 7 \times (7-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 5040 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \times (10-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 36,28,800 \end{aligned}$$

તે જ પ્રમાણે,

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 1! &= 1 \\ 6! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3! \\ &= 6 \times 5 \times 4! \\ &= 6 \times 5! \end{aligned}$$

જુઓ ઉપયોગિતા...!

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

વ્યાપક અર્થમાં,

$$n\,! = n\,(n-1)\,(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2!$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2) \times \ldots \times 3!$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,!$$
$$= n\,(n-1)!$$

$n! = (n)\,(n-1)!$ $n = 1$ મૂકતાં, $\therefore\ 1! = (1)\,(1-1)\,!$ $\therefore\ 1 = 1 \times 0!$ $\therefore\ 0! = 1$

હવે કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો જોઈએ.

આપણે અગાઉ જોયું તે મુજબ $^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1)$. આ પરિણામને નીચે પ્રમાણે પણ દર્શાવી શકાય :

$$^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1) \times \frac{(n-r)\,(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r)\,(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1)\,(n-r)\,(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r)\,!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\therefore\ ^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ જ્યાં, $n > 0$, $r \geq 0$, $n \geq r$, n ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા અને r અઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો તારવી શકાય.

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો			
$^nP_0 = 1$	$^nP_n = n!$	$^nP_1 = n$	$^nP_{n-1} = n!$
$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!}$ $= \frac{n!}{0!}$ $= n!$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!}$ $= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}$ $= n$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!}$ $= \frac{n!}{(n-n+1)!}$ $= n!$
દા.ત. $^5P_0 = 1$ $^{10}P_0 = 1$	દા.ત. $^5P_5 = 5!$ $^{10}P_{10} = 10!$	દા.ત. $^5P_1 = 5$ $^{10}P_1 = 10$	દા.ત. $^5P_4 = 5!$ $^{10}P_9 = 10!$

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાની કિંમતો શોધો :

(1) $^8P_3$ **(2)** $^{60}P_2$ **(3)** $^7P_6$ **(4)** $^5P_5$

(1) $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$\therefore\ ^8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!}$$
$$= \frac{8!}{5!}$$
$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$$
$$= 336$$

વૈકલ્પિક રીત ^nP_rની વ્યાખ્યા અનુસાર, $^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots..\,(n-r+1)$ $n = 8$ અને $r = 3$ મૂકતાં, $\therefore\ ^8P_3 = 8\,(8-1)\,(8-2)$ $= 8 \times 7 \times 6$ $= 336$

(2) ^nP_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nP_2 = n\ (n - 1)$

$\therefore\ ^{60}P_2 = 60\ (60 - 1)$

$= 60 \times 59$

$= 3540$

(3) ^nP_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nP_6 = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)\ (n - 4)\ (n - 5)$

$\therefore\ ^7P_6 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$= 5040$

(4) ^nP_r ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nP_5 = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)\ (n - 4)$

$\therefore\ ^5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

ઉદાહરણ 2 : $^nP_3 = 720$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

^nP_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nP_3 = n\ (n - 1)\ (n - 2)$

$\therefore\ n\ (n - 1)\ (n - 2) = 720$

હવે વિસ્તરણ કરવાને બદલે આપણે એવું વિચારીશું કે એવી કઈ ત્રણ ક્રમિક કિંમતો છે કે જેમનો ગુણાકાર 720 થાય ? તો ઉકેલ મળશે $10 \times 9 \times 8$. પરંતુ તેને આપણે નીચે મુજબ લખીશું :

$\therefore\ n\ (n - 1)\ (n - 2) = 10\ (10 - 1)\ (10 - 2)$

$\therefore\ n = 10$

ઉદાહરણ 3 : $^7P_r = 42$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore\ ^7P_r = \frac{7!}{(7-r)!}$$

$$\therefore\ 42 = \frac{7!}{(7-r)!}$$

$$\therefore\ (7 - r)! = \frac{7!}{42}$$

$$\therefore\ (7 - r)! = \frac{7 \times 6 \times 5!}{42}$$

$\therefore\ (7 - r)! = 5!$

$\therefore\ 7 - r = 5$

$\therefore\ r = 2$

વૈકલ્પિક રીત :

$^7P_r = 42$

$\therefore\ ^7P_r = 7 \times 6$

$\therefore\ ^7P_r = {}^7P_2$

$\therefore\ r = 2$

ઉદાહરણ 4 : $56 \times n! = 8!$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$56 \times n! = 8 \times 7 \times 6!$

$\therefore \quad n! = 6!$

$\therefore \quad n = 6$

ઉદાહરણ 5 : $\frac{n!}{2} = 60$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$\frac{n!}{2} = 60$

$\therefore \quad n! = 120 \; (= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$

$\therefore \quad n! = 5!$

$\therefore \quad n = 5$

ઉદાહરણ 6 : ${}^{(n+2)}P_3 : {}^{(n+1)}P_3 = 10 : 7$ હોય તો n શોધો.

$\frac{{}^{(n+2)}P_3}{{}^{(n+1)}P_3} = \frac{10}{7}$

$\therefore \quad \frac{(n+2)\,(n+1)\,(n)}{(n+1)\,(n)\,(n-1)} = \frac{10}{7}$

$\therefore \quad \frac{n+2}{n-1} = \frac{10}{7}$

$\therefore \quad 7(n+2) = 10(n-1)$

$\therefore \quad 7n + 14 = 10n - 10$

$\therefore \quad 3n = 24$

$\therefore \quad n = 8$

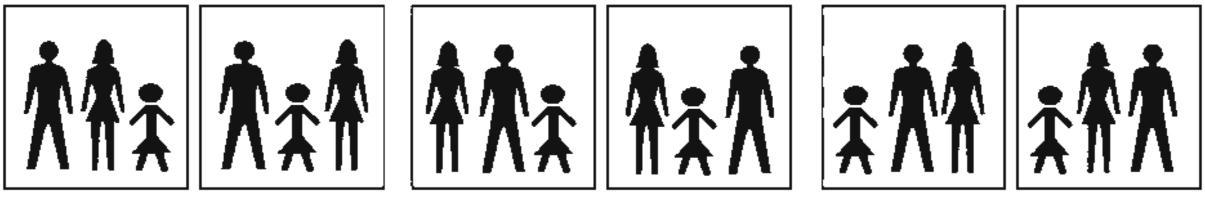
ઉદાહરણ 7 : એક કુટુંબના ત્રણ સભ્યો પતિ, પત્ની અને પુત્રીને એક ગ્રૂપફોટા માટે એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

અહીં કુટુંબમાં ત્રણ સભ્યો છે. તેમને ગ્રૂપફોટા માટે એક હારમાં કુલ ${}^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^3P_3$

$= 3!$

$= 6$



ઉદાહરણ 8 : 2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને ચાર અંકની,

(1) કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(2) તેમાંથી કેટલી સંખ્યા યુગ્મ હશે ?

(3) કેટલી સંખ્યાઓ 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી હશે ?

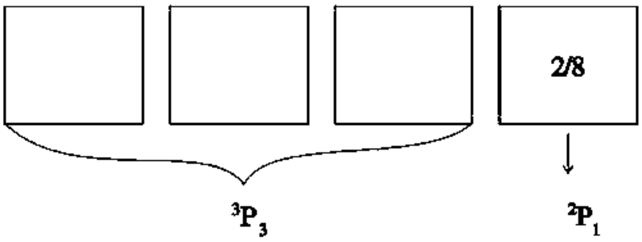
(4) કેટલી સંખ્યાઓ 5000 કરતાં મોટી હશે ?

(1) 2, 5, 7, 8 એ બધા એટલે કે ચાર અંકનો ઉપયોગ કરીને ચાર અંકની કુલ $^4P_4$ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય.

2578	5278	7258	8257
2587	5287	7285	8275
2758	5728	7528	8527
2785	5782	7582	8572
2857	5827	7825	8725
2875	5872	7852	8752
દરેક પ્રશ્નના ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા આ કોષ્ટકમાંની ગોઠવણી સાથે ચકાસો.			

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {^4P_4}$
$= 4!$
$= 24$

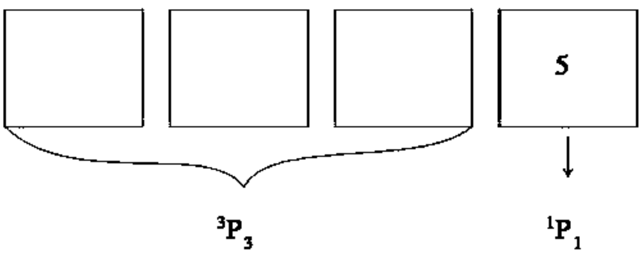
(2)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને યુગ્મ સંખ્યા બનાવવી હોય તો એકમના સ્થાન પર 2 અથવા 8 ગોઠવાવું જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી $^2P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે એકમના સ્થાન પર 2 કે 8 બેમાંથી એક અંક ગોઠવાઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકને બાકીના ત્રણ સ્થાન પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {^2P_1} \times {^3P_3}$
$= 2 \times 3!$
$= 2 \times 6$
$= 12$

(3)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી સંખ્યા બનાવવી હોય તો એકમના સ્થાન પર 5 આવવો જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી $^1P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે એકમના સ્થાન પર 5 ગોઠવાઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકને બાકીનાં ત્રણ સ્થાન પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

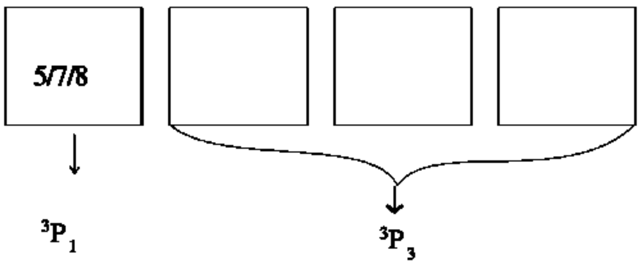
$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^{1}P_1 \times {}^{3}P_3$

$= 1! \times 3!$

$= 1 \times 6$

$= 6$

(4)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને 5000 કરતાં મોટી સંખ્યા બનાવવી હોય તો, હજારના સ્થાન (પ્રથમ સ્થાન) પર 5, 7 કે 8 આવવું જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી ${}^{3}P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે હજારના સ્થાન પર 5, 7 કે 8 એ ત્રણમાંથી એક અંકની ગોઠવણી થઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકની ગોઠવણી બાકીના ત્રણ સ્થાન પર ${}^{3}P_3$ રીતે થઈ શકે.

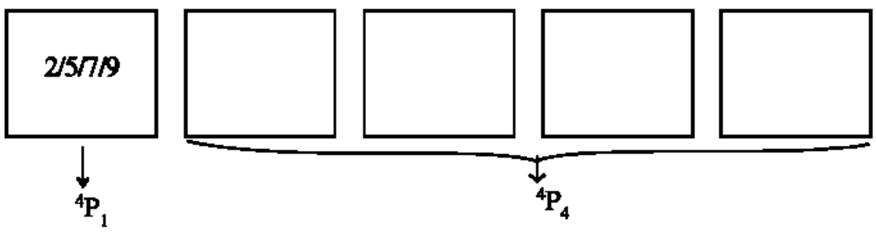
$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^{3}P_1 \times {}^{3}P_3$

$= 3 \times 3!$

$= 3 \times 6$

$= 18$

ઉદાહરણ 9 : 2, 5, 0, 7 અને 9 એ બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરી પાંચ અંકની કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?



2, 5, 0, 7, 9 એ બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકની સંખ્યા બનાવવી હોય તો સંખ્યાનો પ્રથમ અંક 0 હોવો જોઈએ નહિ. તેથી સંખ્યાના પ્રથમ સ્થાન પર 0 સિવાયના બાકીના ચાર અંકમાંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી ${}^{4}P_1$ રીતે કરી શકાય. હવે પ્રથમ સ્થાન પર 2, 5, 7 કે 9 માંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી થઈ ગયા બાદ બાકીના ચાર અંક (શૂન્ય સહિત)ની ગોઠવણી બાકીનાં ચાર સ્થાનો પર ${}^{4}P_4$ રીતે કરી શકાય.

> જો પ્રથમ સ્થાન પર 0 મૂકીએ તો તે સંખ્યા ચાર અંકની જ બને જેમકે,
>
> 02579 = 2579
>
> 09752 = 9752

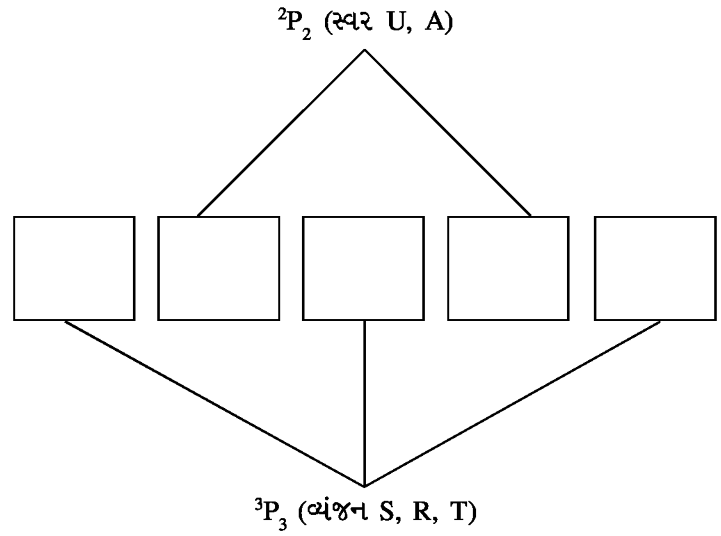
$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^{4}P_1 \times {}^{4}P_4$

$= 4 \times 4!$

$= 4 \times 24$

$= 96$

ઉદાહરણ 10 : SURAT શબ્દના બધા જ અક્ષરોની એવી કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય કે જેમાં સ્વર યુગ્મ સ્થાન પર જ આવે ?



SURAT શબ્દમાં U અને A એમ બે સ્વર છે. હવે તેમને બીજા અને ચોથા એમ બે યુગ્મ સ્થાનો પર $^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય. બાકીના ત્રણ અક્ષરો (વ્યંજન)ને બાકીનાં ત્રણ (અયુગ્મ) સ્થાનો પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

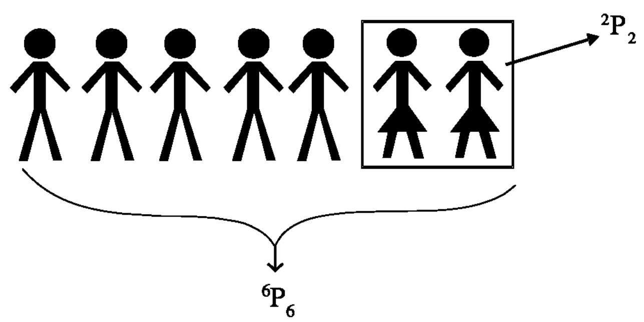
$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^2P_2 \times {}^3P_3$
$= 2! \times 3!$
$= 2 \times 6$
$= 12$

ઉદાહરણ 11 : 5 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી ગોઠવણીમાં,

(1) બંને છોકરીઓ એક સાથે જ ગોઠવાય ?

(2) બંને છોકરીઓ એક સાથે ન ગોઠવાય ?

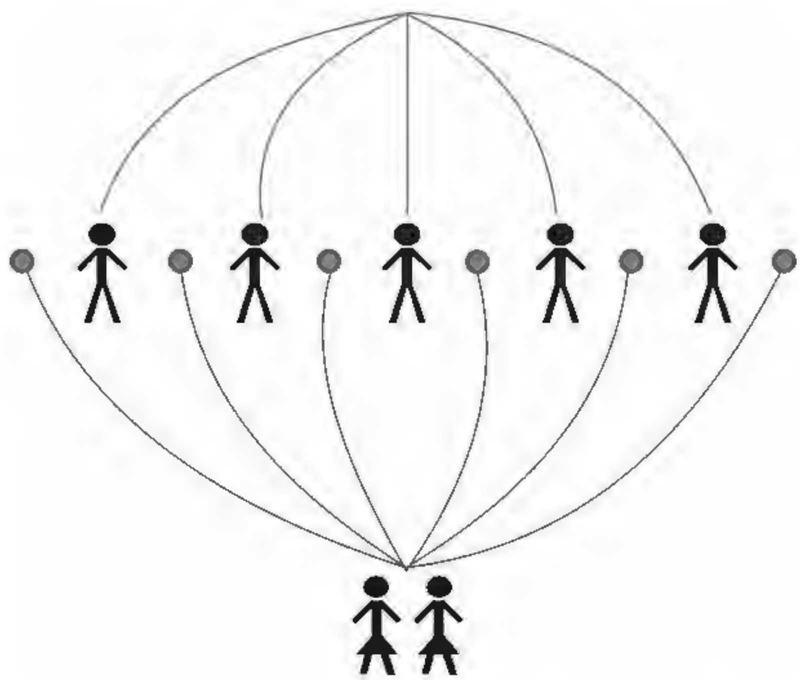
(1)



બે છોકરીઓને એક સાથે જ ગોઠવવાની હોવાથી તેમને એક જ વ્યક્તિ ગણતાં કુલ 6 વ્યક્તિઓને $^6P_6$ રીતે ગોઠવી શકાય અને આ પ્રત્યેક ગોઠવણીમાં બે છોકરીઓને અંદરોઅંદર $^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^6P_6 \times {}^2P_2$
$= 6! \times 2!$
$= 720 \times 2$
$= 1440$

(2) $^5P_5$ (છોકરાઓ)



$^6P_2$ (છોકરીઓ)

બે છોકરીઓને એક સાથે ગોઠવવાની ન હોવાથી તેમને પાંચ છોકરાઓની વચ્ચેની અને આજુબાજુની એમ કુલ છ જગ્યાઓ પર $^6P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય. ઉપરાંત પાંચ છોકરાઓને $^5P_5$ રીતે ગોઠવી શકાય.

∴ **કુલ ક્રમચય** $= {}^6P_2 \times {}^5P_5$

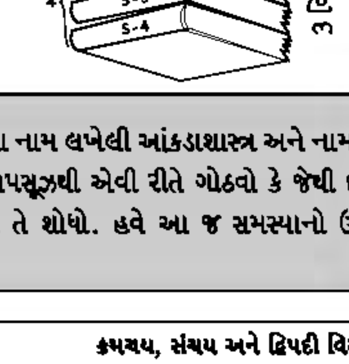
$= 6 \times 5 \times 5!$

$= 30 \times 120$

$= 3600$

ઉદાહરણ 12 : એક ટેબલ ઉપર ગુજરાતી ભાષાનાં જુદાં જુદાં 3, અંગ્રેજી ભાષાનાં જુદાં જુદાં 4 અને સંસ્કૃત ભાષાનાં જુદાં જુદાં 4 પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી દરેક વિષયનાં પુસ્તકો એક સાથે જ આવે ?

ગુજરાતી ભાષાનાં જુદાં જુદાં ત્રણ પુસ્તકો $^3P_3$ રીતે, અંગ્રેજી ભાષાનાં જુદાં જુદાં ચાર પુસ્તકો $^4P_4$ રીતે અને સંસ્કૃત ભાષાનાં જુદાં જુદાં ચાર પુસ્તકોને $^4P_4$ રીતે ગોઠવી શકાય. ઉપરાંત ત્રણેય વિષયોની ગોઠવણી $^3P_3$ રીતે થઈ શકે.



∴ **કુલ ક્રમચય** $= {}^3P_3 \times {}^4P_4 \times {}^4P_4 \times {}^3P_3$

$= 3! \times 4! \times 4! \times 3!$

$= 6 \times 24 \times 24 \times 6$

$= 20{,}736$

પ્રવૃત્તિ

તમારી આંકડાશાસ્ત્ર, નામા અને અર્થશાસ્ત્રની નોટબુક અને તમારા એક મિત્રના નામ લખેલી આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાની નોટબુક એકઠી કરો. હવે, આ તમામ નોટબુકને એક પર એક શક્ય તમામ રીતે આપસૂઝથી એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી દરેક વિષયની નોટબુક એક સાથે જ રહે. આવી જુદી જુદી કેટલી ગોઠવણી કરી શકાય તે શોધો. હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી મેળવી બંને જવાબ સરખાવો.

ઉદાહરણ 13 : ત્રણ છોકરાઓ અને ત્રણ છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી આવે ?

અહીં છોકરાઓ (B) અને છોકરીઓ (G)ને વારાફરતી ગોઠવવાના હોવાથી ગોઠવણી બાજુ મુજબ કરી શકાય :

B G B G B G

અથવા

G B G B G B

જો ગોઠવણીની શરૂઆત છોકરાથી કરીએ તો તે ગોઠવણી $({}^3P_3 \times {}^3P_3)$ રીતે ***અથવા*** જો ગોઠવણીની શરૂઆત છોકરીથી કરીએ તો તે ગોઠવણી $({}^3P_3 \times {}^3P_3)$ રીતે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= ({}^3P_3 \times {}^3P_3) + ({}^3P_3 \times {}^3P_3)$

$= (3! \times 3!) + (3! \times 3!)$

$= (6 \times 6) + (6 \times 6)$

$= 36 + 36$

$= 72$

ઉદાહરણ 14 : YOUNG શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં YOUNG શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

YOUNG શબ્દમાં Y, O, U, N, G એમ પાંચ અક્ષરો છે, જેમને ${}^5P_5 = 5! = 120$ રીતે ગોઠવી શકાય. હવે બનતી કુલ 120 ગોઠવણીઓ ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતા YOUNG શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે તે મેળવવાનું છે.

YOUNG શબ્દના મૂળાક્ષર ક્રમ G, N, O, U, Y છે.

G પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

N પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

O પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

U પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ સ્થાન પર અને G બીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^3P_3 = 6$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ અને N બીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^3P_3 = 6$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા અને G ત્રીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^2P_2 = 2$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા અને N ત્રીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^2P_2 = 2$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા, U ત્રીજા અને G ચોથા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 = 1$ ગોઠવણીઓ થાય.

ત્યાર પછીનો શબ્દ YOUNG આવે જે પોતે એક ક્રમ ધરાવે છે.

$\therefore$ YOUNG શબ્દનો ડિક્સનરી ક્રમ $= 24 + 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 + 1 = 114$

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણને સમજવા નીચેના કોષ્ટકની માહિતીનો અભ્યાસ કરો :

TAB શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી ${}^3P_3 = 3! = 6$ ગોઠવણીઓ બને, જે આ મુજબ છે. TAB, TBA, ATB, ABT, BTA, BAT. હવે આ 6 ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતા તેઓના ક્રમ આ મુજબ થાય. ABT, ATB, BAT, BTA, TAB, TBA. આમ, TAB શબ્દ પાંચમા ક્રમે આવે.

પ્રવૃત્તિ

ZERO શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓ આપસૂઝથી બનાવો. આ તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવી ZERO શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે તે જુઓ. હવે આ સમસ્યાનો ઉકેલ ઉપરના ઉદાહરણની ગણતરી મુજબ મેળવી બંને જવાબો સરખાવો.

સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય (Permutation of identical things)

જ્યારે કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય ત્યારે કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!}$ થાય. જેમકે BEE શબ્દમાં કુલ ત્રણ અક્ષરો (N = 3) છે, જે પૈકી E એ બે (A = 2) વખત પુનરાવર્તિત થાય છે, તો BEE શબ્દના બધા જ અક્ષરોની ગોઠવણીના કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$ થાય. આપણે સમજી શકીએ છીએ કે, BEE, EBE, EEB એમ ત્રણ જ ગોઠવણી શક્ય બને. આમ વ્યાપક રીતે જોઈએ તો કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, C વસ્તુઓ ત્રીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!\,B!\,C!}$ થાય.

ઉદાહરણ 15 : CINCINNATI શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય ?

CINCINNATI શબ્દમાં કુલ 10 અક્ષરો છે, જે પૈકી C એ 2 વખત, I એ 3 વખત અને N એ 3 વખત પુનરાવર્તિત થાય છે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચય $= \frac{10!}{2!\,3!\,3!}$

$= \frac{3628800}{2 \times 6 \times 6}$

$= 50,400$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) ${}^{10}P_3$ (2) ${}^{50}P_2$ (3) ${}^{8}P_7$ (4) ${}^{9}P_9$

2. ${}^{n}P_3 = 990$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

3. ${}^{9}P_r = 3024$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

4. $3 \cdot {}^{(n+3)}P_4 = 5 \cdot {}^{(n+2)}P_4$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

5. 4 વ્યક્તિઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

6. 1, 2, 3, 0, 7, 9 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરી છ અંકવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

7. 5 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી ગોઠવણીમાં બધા જ છોકરાઓ એક સાથે ગોઠવાય ?

8. એક પ્રાણી-સંગ્રહાલયમાં 7 વાઘને પૂરવા માટે 7 પાંજરાં છે. 7 પાંજરાંમાંથી 3 પાંજરાં એટલાં નાનાં છે કે જેમાં 7 વાઘ પૈકીના 3 વાઘ જઈ શકતા નથી, તો આ 7 વાઘને 7 પાંજરાંઓમાં કેટલી રીતે પૂરી શકાય ?

9. 2, 3, 5, 8, 9 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરી 50,000 કરતાં મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

10. એક વ્યક્તિ પાસે જુદાં જુદાં કદની 5 ચૉકલેટ છે. આ પાંચ ચૉકલેટ જુદી જુદી ઉંમરનાં પાંચ બાળકોમાં વહેંચવાની છે. જો સૌથી મોટી ચૉકલેટ સૌથી નાના બાળકને આપવાની હોય, તો આ પાંચ ચૉકલેટ પાંચ બાળકોમાં કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

11. નીચેના શબ્દોના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય ?

(1) STATISTICS (2) BOOKKEEPER (3) APPEARING

12. ASHOK શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓ અને GEETA શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓનો ગુણોત્તર કેટલો થશે ?

13. એક મોટરકારમાં ડ્રાઇવરની સીટ સહિત કુલ 5 જગ્યાઓ છે. એક કુટુંબના 10 સભ્યોમાંથી 3 સભ્યોને ડ્રાઇવિંગ આવડે છે, તો 10 સભ્યોમાંથી 5 વ્યક્તિઓને જુદી જુદી કેટલી રીતે મોટરકારમાં ગોઠવી શકાય ?

14. નીચે આપેલા શબ્દોના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં તે શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

(1) PINTU (2) NURI (3) NIRAL (4) SUMAN (5) RUTVA

15. SHLOKA શબ્દના બધા જ અક્ષરોની એવી કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય કે જેમાં સ્વર એક સાથે જ આવે ?

16. એક કાર્યક્રમમાં 7 વક્તાઓ A, B, C, D, E, F, Gને ભાષણ આપવા આમંત્રિત કરેલ છે. દરેક વક્તાઓએ વારાફરતી ભાષણ આપવાનું છે. જો વક્તા A પછી તરત જ વક્તા Bને ભાષણ આપવાનું હોય, તો આ સાત વક્તાઓનાં ભાષણ કુલ કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

*

6.2 સંચયનો અર્થ (Meaning of Combination)

અગાઉ આપણે જુદી જુદી વસ્તુઓની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે તેનો એટલે કે ક્રમચયનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આપણે જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી અમુક વસ્તુઓની પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે તેનો વિચાર કરીએ. દા.ત., તાનિયાને ત્રણ મિત્રો છે, જેમનાં નામ ઋત્વા, કથન અને કીર્તિ છે. હવે જો આ ત્રણ મિત્રોની બે સ્થાન પર ગોઠવણી કરવી હોય તો તે ${}^3P_2 = 3 \times 2 = 6$ રીતે થઈ શકે જે નીચે મુજબ છે :

ગોઠવણીના પ્રકારો	1	2	3	4	5	6
પ્રથમ સ્થાન	ઋત્વા	ઋત્વા	કથન	કથન	કીર્તિ	કીર્તિ
બીજું સ્થાન	કથન	કીર્તિ	ઋત્વા	કીર્તિ	ઋત્વા	કથન

પરંતુ હવે આપણે પસંદગીના પ્રકારોનો વિચાર કરવાનો છે. તાનિયા પોતાના ઘરે એક પ્રસંગમાં ઉપર્યુક્ત ત્રણ મિત્રોમાંથી બે જ મિત્રોને આમંત્રણ આપવા માંગે છે, તો તાનિયા પાસે ત્રણ મિત્રોમાંથી બે મિત્રો પસંદ કરવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો છે ? તાનિયા ઋત્વા અને કથનને આમંત્રણ આપશે ? ઋત્વા અને કીર્તિને આમંત્રણ આપશે ? કે કથન અને કીર્તિને આમંત્રણ આપશે ? આમ આવા જુદાં જુદાં માત્ર ત્રણ જ વિકલ્પ ઉદ્ભવી શકે જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે :

પસંદગીના વિકલ્પો	**1**	**2**	**3**
પસંદ થયેલ મિત્રો	ઋત્વા અને કથન	ઋત્વા અને કીર્તિ	કથન અને કીર્તિ

અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, ક્રમચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોય છે એટલે કે 'ઋત્વા અને કથન' તથા 'કથન અને ઋત્વા' એ બંને ક્રમચયની દૃષ્ટિએ અલગ છે. જ્યારે અહીં પસંદગીમાં ક્રમનું મહત્ત્વ હોતું નથી. એટલે કે તાનિયાના ઘરે 'ઋત્વા અને કથન' આવશે કે 'કથન અને ઋત્વા' આવશે એ બંનેનો અર્થ એક જ થાય છે. આમ, ત્રણ મિત્રોમાંથી બે મિત્રોની પસંદગી કુલ ત્રણ રીતે થઈ શકે. પસંદગીના આ વિકલ્પોને સંચય (Combination) કહે છે જેને આપણે $^3C_2$ વડે દર્શાવીશું. એટલે કે એમ કહી શકાય કે $^3C_2 = 3$ થાય. વ્યાપક સ્વરૂપે, જુદી જુદી n વસ્તુઓમાંથી r $(\leq n)$ વસ્તુઓને પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r થાય છે એમ કહી શકાય. જેને $_nC_r$, $C(n, r)$, C_r^n વડે પણ દર્શાવાય છે. આપણે ^nC_r સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r થાય.

હવે ^nC_rની કિંમત કેવી રીતે મળે તે જોઈએ. n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r છે. પસંદગી કરવાના દરેક વિકલ્પમાં r વસ્તુઓ હોય છે. r વસ્તુઓની અંદરોઅંદર ગોઠવણી $^rP_r = r!$ રીતે થઈ શકે. આમ, દરેક સંચયને અનુરૂપ $r!$ ક્રમચયો મળે. તેથી ^nC_r સંચયોને અનુરૂપ $^nC_r \times r!$ ક્રમચયો થાય. પરંતુ આપણે અગાઉ જોયું છે કે, n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો ^nP_r છે.

આમ, $^nP_r = {^nC_r} \times r!$

$$\therefore \quad {^nC_r} = \frac{^nP_r}{r!}$$

^nP_rની જગ્યાએ તેનું સૂત્ર મૂકતાં,

$$\therefore \quad {^nC_r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$\therefore\ {^nC_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ જ્યાં, $n > 0$, $r \geq 0$, $n \geq r$, n ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા અને r અઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો તારવી શકાય :

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો				
${}^nC_0 = 1$	${}^nC_n = 1$	${}^nC_1 = n$	${}^nC_{n-1} = n$	${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$
${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore {}^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore {}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore {}^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ $= \frac{n(n-1)!}{1\times(n-1)!}$ $= n$	${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore {}^nC_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!}$ $= \frac{n!}{(n-1)!}$ $= n$	${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore {}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$ $= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ $= {}^nC_r$
દા.ત. ${}^5C_0 = 1$ ${}^{10}C_0 = 1$	દા.ત. ${}^5C_5 = 1$ ${}^{10}C_{10} = 1$	દા.ત. ${}^5C_1 = 5$ ${}^{10}C_1 = 10$	દા.ત. ${}^5C_4 = 5$ ${}^{10}C_9 = 10$	દા.ત. ${}^5C_4 = {}^5C_1$ ${}^{10}C_7 = {}^{10}C_3$
જો ${}^nC_x = {}^nC_y$ હોય તો, $x + y = n$ અથવા $x = y$ થાય.				

ઉદાહરણ 16 : નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) ${}^8C_3$ **(2)** ${}^{20}C_3$ **(3)** ${}^5C_4$ **(4)** ${}^6C_6$

(1) ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$\therefore \quad {}^8C_3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

$= \frac{8!}{3! \times 5!}$

$= \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!}$

$= 56$

વૈકલ્પિક રીત :

${}^nC_r$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

$\therefore \quad {}^8C_3 = \frac{{}^8P_3}{3!}$

$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$

$= 56$

(2) ${}^nC_r$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

$\therefore \quad {}^{20}C_3 = \frac{{}^{20}P_3}{3!}$

$= \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1}$

$= 1140$

(3) ^nC_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$^nC_r = \frac{^nP_r}{r!}$$

$$\therefore \quad {}^5C_4 = \frac{^5P_4}{4!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 5$$

(4) ^nC_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$^nC_r = \frac{^nP_r}{r!}$$

$$\therefore \quad {}^6C_6 = \frac{^6P_6}{6!}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 1$$

ઉદાહરણ 17 : $^nC_2 = 45$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore \quad {}^nC_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\therefore \quad 45 = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\times1\times(n-2)!}$$

$$\therefore \quad 90 = n(n-1)$$

$$\therefore \quad n(n-1) = 10(10-1)$$

$$\therefore \quad n = 10$$

વૈકલ્પિક રીત :

$$^nC_2 = 45$$

$$\therefore \quad \frac{n(n-1)}{2\times1} = 45$$

$$\therefore \quad n(n-1) = 90$$

$$\therefore \quad n(n-1) = 10(10-1)$$

$$\therefore \quad n = 10$$

ઉદાહરણ 18 : $3\cdot{}^{2n}C_3 = 44\cdot{}^nC_2$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$$3\cdot{}^{2n}C_3 = 44\cdot{}^nC_2$$

$$\therefore \quad \frac{3\times2n(2n-1)(2n-2)}{3\times2\times1} = \frac{44\times n(n-1)}{2\times1}$$

$$\therefore \quad \frac{2n(2n-1)2(n-1)}{2} = \frac{44n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \quad 4(2n-1) = 44$$

$$\therefore \quad 2n-1 = 11$$

$$\therefore \quad 2n = 12$$

$$\therefore \quad n = 6$$

ઉદાહરણ 19 : $^nC_{n-3} = 56$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$^nC_{n-3} = {^nC_3}$ $\quad [\because {^nC_r} = {^nC_{n-r}}]$

$\therefore \quad {^nC_3} = 56$

$\therefore \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 56$

$\therefore \quad n(n-1)(n-2) = 336$

$\therefore \quad n(n-1)(n-2) = 8(8-1)(8-2)$

$\therefore \quad n = 8$

ઉદાહરણ 20 : જો $^nC_4 = {^nC_6}$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_x = {^nC_y}$ હોય તો,

વિકલ્પ 1 :

$x + y = n$

$\therefore \quad 4 + 6 = n$

$\therefore \quad n = 10$

વિકલ્પ 2 :

$x = y$

$\therefore \quad 4 = 6$

જે શક્ય નથી.

આમ, nની કિંમત 10 મળે.

ઉદાહરણ 21 : જો $^{50}C_{r+2} = {^{50}C_{2r-3}}$ હોય તો rની કિંમત શોધો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_x = {^nC_y}$ હોય તો,

વિકલ્પ 1 :

$x + y = n$

$\therefore \quad (r+2) + (2r-3) = 50$

$\therefore \quad r + 2 + 2r - 3 = 50$

$\therefore \quad 3r = 51$

$\therefore \quad r = 17$

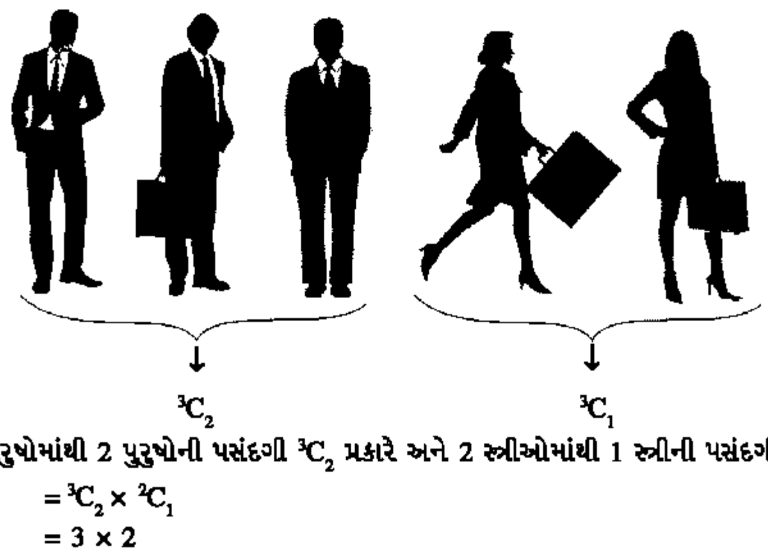
વિકલ્પ 2 :

$x = y$

$\therefore \quad r + 2 = 2r - 3$

$\therefore \quad r = 5$

ઉદાહરણ 22 : એક કંપનીમાં નોકરી કરતા 3 પુરુષ મૅનેજર અને 2 સ્ત્રી મૅનેજરમાંથી તાલીમ સંદર્ભે 2 પુરુષ મૅનેજર અને 1 સ્ત્રી મૅનેજરની પસંદગી કરવાની છે. આ પસંદગી કુલ કેટલી રીતે થઈ શકે ?

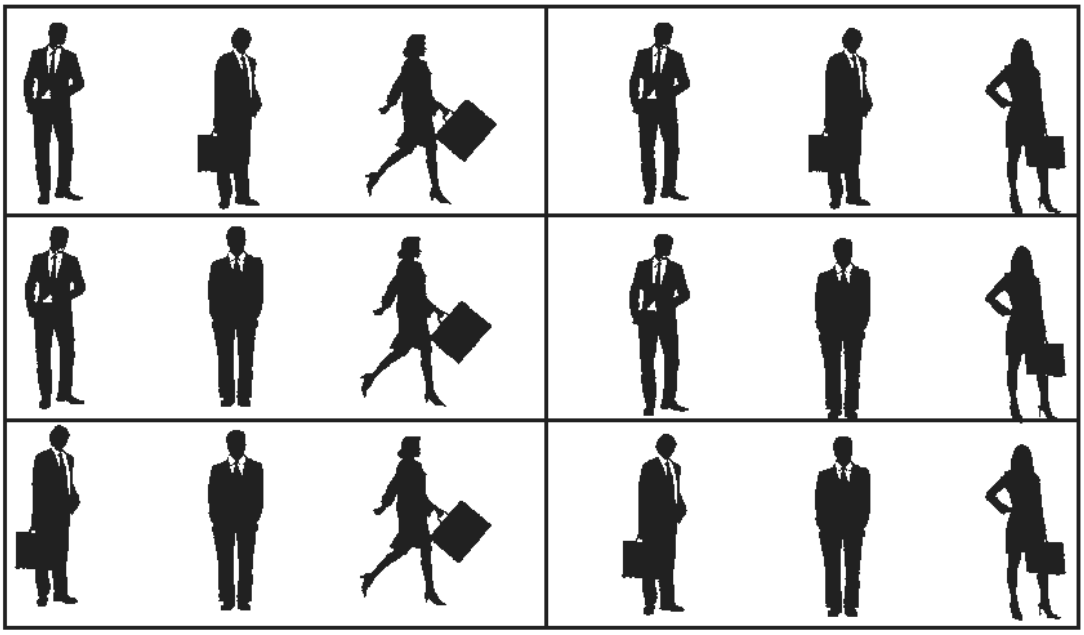


અહીં 3 પુરુષોમાંથી 2 પુરુષોની પસંદગી $^3C_2$ પ્રકારે અને 2 સ્ત્રીઓમાંથી 1 સ્ત્રીની પસંદગી $^2C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ કુલ સંચય $= {^3C_2} \times {^2C_1}$

$= 3 \times 2$

$= 6$



ઉદાહરણ 23 : એક ટોપલીમાં 5 પીળાં, 4 સફેદ અને 3 ગુલાબી ફૂલ છે. તેમાંથી 3 પીળાં, 2 સફેદ અને 1 ગુલાબી ફૂલ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

5 પીળાં ફૂલમાંથી 3ની પસંદગી ${}^5C_3$ પ્રકારે, 4 સફેદ ફૂલમાંથી 2ની પસંદગી ${}^4C_2$ પ્રકારે અને 3 ગુલાબી ફૂલમાંથી 1ની પસંદગી ${}^3C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ કુલ સંચય $= {}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1$

$= 10 \times 6 \times 3$

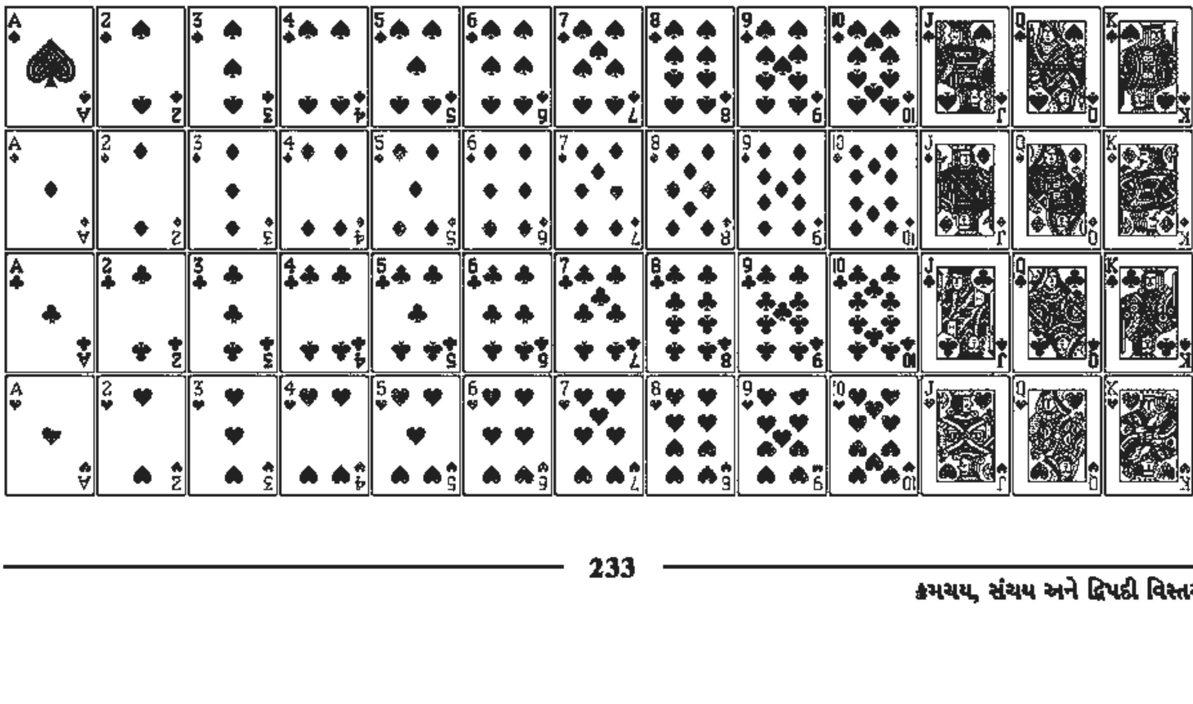
$= 180$

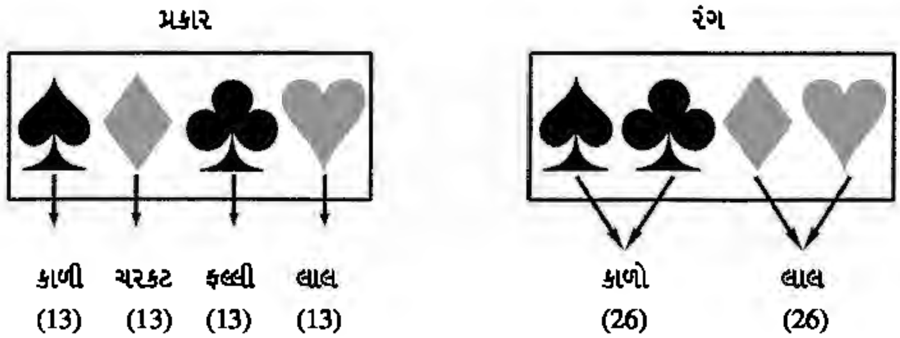
ઉદાહરણ 24 : 52 પત્તાંના ઢગમાંથી 2 પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. આ બંને પત્તાંમાં,

(1) એક પત્તું ચહેરાવાળું અને એક પત્તું ચહેરા વગરનું કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) બંને પત્તાં જુદાં જુદાં રંગના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) બંને પત્તાં એક જ પ્રકારના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?





(1) 52 પત્તાંમાં ચહેરાવાળાં (રાજા, રાણી, ગુલામ) કુલ 12 પત્તાં અને ચહેરા વગરનાં કુલ 40 પત્તાં હોય. તેથી એક પત્તું ચહેરાવાળું $^{12}C_1$ પ્રકારે અને એક પત્તું ચહેરા વગરનું $^{40}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$\therefore$ કુલ સંચય $= {}^{12}C_1 \times {}^{40}C_1$

$= 12 \times 40$

$= 480$

(2) 52 પત્તાંમાં કાળા રંગનાં 26 પત્તાં અને લાલ રંગનાં 26 પત્તાં હોય, પસંદ કરેલાં બંને પત્તાં જુદાં જુદાં રંગનાં હોય, તો તેમાં એક પત્તું કાળા રંગનું અને એક પત્તું લાલ રંગનું હોય. તેથી તેમની પસંદગી અનુક્રમે $^{26}C_1$ અને $^{26}C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ કુલ સંચય $= {}^{26}C_1 \times {}^{26}C_1$

$= 26 \times 26$

$= 676$

(3) 52 પત્તાંમાં કાળી, ચકાઈ, ફલ્લી અને લાલ એમ કુલ ચાર પ્રકારનાં પત્તાં હોય અને દરેક પ્રકારનાં 13 પત્તાં હોય. પસંદ કરેલાં બંને પત્તાં એક જ પ્રકારનાં હોય, તો તે બંને કાળી અથવા બંને ચકાઈ અથવા બંને ફલ્લી અથવા બંને લાલ હોઈ શકે.

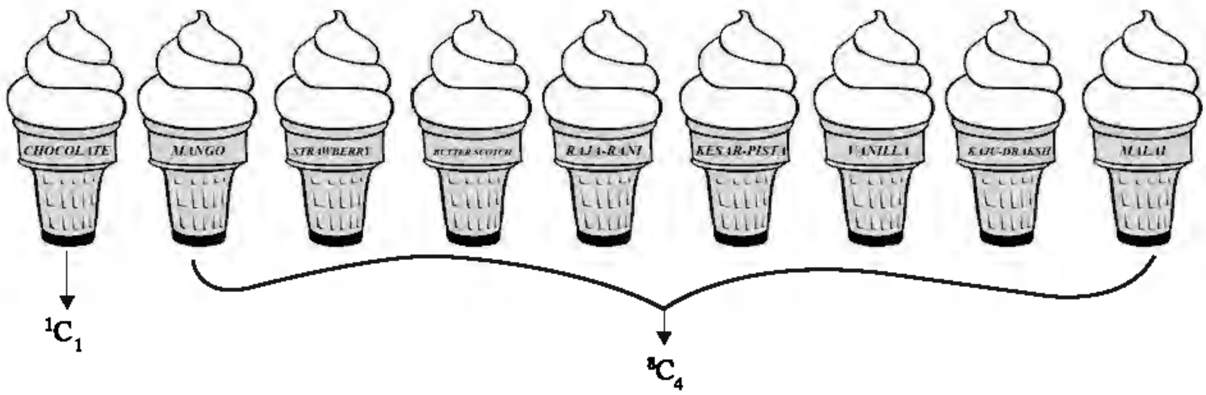
$\therefore$ કુલ સંચય $= {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2$

$= 78 + 78 + 78 + 78$

$= 312$

ઉદાહરણ 25 : કથન નામનો બાળક આઈસક્રીમ કોનની 9 જુદી જુદી ફ્લેવરમાંથી 5 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કોન પસંદ કરવા માંગે છે. જો તે ચોકલેટ ફ્લેવર પસંદ કરવા માંગતો જ હોય તો પસંદગીના કુલ પ્રકાર જણાવો.

અહીં આઈસક્રીમ કોનની 9 જુદી જુદી ફ્લેવરમાંથી કથન 5 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કોન પસંદ કરવા માગે છે. ચોકલેટ ફ્લેવરનો આઈસક્રીમ કોન પસંદ કરવાનો જ હોવાથી તે $^{1}C_1$ પ્રકારે પસંદ થઈ શકે. હવે કથન બાકીની જુદી જુદી 8 આઈસક્રીમ ફ્લેવરમાંથી બાકીની 4 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કોન $^{8}C_4$ પ્રકારે પસંદ કરી શકે.



$\therefore$ કુલ સંચય $= {}^{1}C_1 \times {}^{8}C_4$

$= 1 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 70$

ઉદાહરણ 26 : એક વ્યક્તિ કોઈ એક કંપનીના જુદાં જુદાં 10 મોબાઇલ હૅન્ડસેટમાંથી 3 મોબાઇલ હૅન્ડસેટ ખરીદવા ઇચ્છે છે. પરંતુ 2 મોબાઇલ હૅન્ડસેટ તે વ્યક્તિના બજેટમાં સમાય તેવા નથી. તો તે વ્યક્તિ પાસે 3 જુદાં જુદાં હૅન્ડસેટ ખરીદવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો રહેશે ?

અહીં જુદાં જુદાં 10 મોબાઇલ હૅન્ડસેટ છે. પરંતુ જે 2 મોબાઇલ હૅન્ડસેટ તે વ્યક્તિના બજેટમાં ન સમાતા હોય તેને ધ્યાનમાં ન લેતાં બાકીના 8 મોબાઇલ હૅન્ડસેટમાંથી 3 મોબાઇલ હૅન્ડસેટની પસંદગી ${}^8C_3$ પ્રકારે થઈ શકે.

${}^8C_3$

∴ **કુલ સંચય** $= {}^8C_3$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$

$= 56$

ઉદાહરણ 27 : એક કંપનીમાં 6 ઍન્જિનિયર અને 4 મૅનેજર છે. તેમાંથી જો 5 સભ્યોની કમિટી બનાવવાની હોય તો તેમાં,

(1) ઓછામાં ઓછા 2 મૅનેજર હોય.

(2) વધુમાં વધુ 2 ઍન્જિનિયર હોય.

(3) ઍન્જિનિયરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે તેવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

(1) 5 સભ્યોની કમિટીમાં ઓછામાં ઓછા 2 મૅનેજરની પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

મૅનેજર (4)		ઍન્જિનિયર (6)
2	અને	3
	અથવા	
3	અને	2
	અથવા	
4	અને	1

∴ **કુલ સંચયો** $= ({}^4C_2 \times {}^6C_3) + ({}^4C_3 \times {}^6C_2) + ({}^4C_4 \times {}^6C_1)$

$= (6 \times 20) + (4 \times 15) + (1 \times 6)$

$= 120 + 60 + 6$

$= 186$

(2) 5 સભ્યોની કમિટીમાં વધુમાં વધુ 2 એન્જિનિયરની પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

એન્જિનિયર (6)		મૅનેજર (4)
2	અને	3
	અથવા	
1	અને	4

∴ **કુલ સંચય** $= ({}^6C_2 \times {}^4C_3) + ({}^6C_1 \times {}^4C_4)$

$= (15 \times 4) + (6 \times 1)$

$= 60 + 6$

$= 66$

(3) 5 સભ્યોની કમિટીમાં એન્જિનિયરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે તેવી પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

એન્જિનિયર (6)		મૅનેજર (4)
5	અને	0
	અથવા	
4	અને	1
	અથવા	
3	અને	2

∴ **કુલ સંચય** $= ({}^6C_5 \times {}^4C_0) + ({}^6C_4 \times {}^4C_1) + ({}^6C_3 \times {}^4C_2)$

$= (6 \times 1) + (15 \times 4) + (20 \times 6)$

$= 6 + 60 + 120$

$= 186$

ઉદાહરણ 28 : એક વ્યક્તિને ઈન્ટરવ્યૂમાં પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી તે વ્યક્તિ (1) ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા કેટલા પ્રકારે આપી શકે ? (2) વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા કેટલા પ્રકારે આપી શકે ?

(1) જો વ્યક્તિને તેને પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય, તો તેનો અર્થ એમ થાય કે તેણે 4 અથવા 5 અથવા 6 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય.

∴ **કુલ સંચય** $= {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 15 + 6 + 1$

$= 22$

(2) જો વ્યક્તિએ તેને પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય તો, તેનો અર્થ એમ થાય કે તેણે 3 અથવા 2 અથવા 1 અથવા 0 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય.

∴ **કુલ સંચય** $= {}^6C_3 + {}^6C_2 + {}^6C_1 + {}^6C_0$

$= 20 + 15 + 6 + 1$

$= 42$

પ્રવૃત્તિ

વર્ગના 10 મિત્રો ભેગા થઈ દરેક મિત્ર બાકીના બધા જ મિત્રો સાથે હસ્તધૂનન (Handshake) કરો અને તમે તમામ મિત્રોએ કરેલા હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા નોંધો. હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ સંચયના સૂત્રના ઉપયોગથી મેળવી બંને જવાબો સરખાવો.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) $^{11}C_4$ (2) $^{9}C_0$ (3) $^{25}C_{23}$ (4) $^{8}C_8$

2. અજ્ઞાત સંખ્યા શોધો :

(1) $^{n}C_2 = 28$ (2) $^{27}C_{r+4} = {}^{27}C_{2r-1}$ (3) $^{n}C_{n-2} = 15$ (4) $4 \cdot {}^{n}C_4 = 7 \cdot {}^{n}C_3$

3. એક શાળામાં પટાવાળાની 2 જગ્યાઓ માટે 8 ઉમેદવારો પોતાની ઉમેદવારી નોંધાવે છે. આ 8 ઉમેદવારોમાંથી 2 પટાવાળાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

4. એક ક્રિકેટ ટુર્નામેન્ટમાં 5 દેશો ભાગ લે છે. જો પ્રથમ રાઉન્ડમાં દરેક દેશે દરેક દેશ જોડે એક-એક મૅચ રમવાની હોય, તો આ રાઉન્ડમાં કેટલી મૅચ રમાશે ?

5. એક પેટીમાં રહેલા 200 એકમોમાંથી 5 % એકમો ખામીવાળા છે. જો પેટીમાંથી 3 એકમો પસંદ કરવામાં આવે, તો તે બધા એકમો ખામીવાળા હોવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો હોઈ શકે ?

6. એક બૅન્કમાં નોકરી કરતા 14 કારકુન અને 6 પટાવાળામાંથી 3 કારકુન અને 1 પટાવાળાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

7. એક ટોપલીમાં 3 સફેદ અને 5 ગુલાબી ફૂલ છે. તેમાંથી,

(1) એક જ રંગનાં ત્રણ ફૂલો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) જુદાં જુદાં રંગનાં બે ફૂલો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

8. 52 પત્તાંની જોડમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો,

(1) બે પત્તાં લાલનાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) એક પત્તું રાજાનું અને એક પત્તું રાણીનું કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

9. એક બૅન્કના 9 કર્મચારીઓ પૈકી 6 કારકુન, 2 પટાવાળા અને 1 મૅનેજર છે. તેમાંથી 4 સભ્યોની સમિતિ બનાવવાની છે.

(1) જો મૅનેજરને પસંદ કરવાના જ હોય તો સમિતિ કેટલા પ્રકારે રચી શકાય ?

(2) જો બંને પટાવાળાને પસંદ કરવાના ન હોય અને મૅનેજરને પસંદ કરવાના જ હોય, તો સમિતિ કેટલા પ્રકારે રચી શકાય ?

10. એક ઑફિસમાં નોકરી કરતા 8 કર્મચારીઓમાં 3 સ્ત્રીઓ અને બાકીના પુરુષો છે. તાલીમ હેતુથી 3 સભ્યોની પસંદગી કરવાની હોય, તો તેમાં ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પુરુષ કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ?

11. એક વ્યક્તિને 6 મિત્રો છે. તે તેમાંથી ઓછામાં ઓછા એક મિત્રને પોતાના ઘરે કેટલા પ્રકારે આમંત્રણ આપી શકે ?

12. 8 જુદાં જુદાં પુસ્તકોમાંથી 5 પુસ્તકો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેમાં,

(1) અમુક નિશ્ચિત પુસ્તક હંમેશાં પસંદ થાય ?

(2) અમુક નિશ્ચિત પુસ્તક કદાપિ પસંદ ન થાય ?

13. ધોરણ 12ની સામાન્ય પ્રવાહની બોર્ડની પરીક્ષામાં કોઈ વિદ્યાર્થીએ કુલ 7 વિષયોની પરીક્ષા આપવાની છે. પરીક્ષામાં પાસ થવા માટે બધા જ વિષયોમાં પાસ થવું જરૂરી છે. દરેક વિષયમાં પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા અમુક ગુણ મેળવવાના હોય, તો આ પરીક્ષામાં બેસનાર વિદ્યાર્થી કેટલી રીતે નાપાસ થઈ શકે ?

14. એક હોટલનો માલિક તેના શહેરમાં ઉપલબ્ધ 8 જુદાં જુદાં સમાચારપત્રો અને 5 જુદાં જુદાં સામયિકોમાંથી 3 સમાચારપત્રો અને 2 સામયિકો નિયમિત ધોરણે મંગાવવા માંગે છે. આ પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ? જો કોઈ ચોક્કસ સમાચારપત્રને પસંદ કરવાનું જ હોય અને જો કોઈ ચોક્કસ સામયિકને પસંદ કરવાનું જ ન હોય, તો આવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

15. જો $^{n}P_2 + {}^{n}C_2 = 84$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

16. જો $^{n}P_r \div {}^{n}C_r = 24$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

*

6.3 દ્વિપદી વિસ્તરણનો અર્થ (Meaning of Binomial Expansion)

જે પદાવલિમાં બે પદો આવેલાં હોય અને બંને પદો વચ્ચે ધન અથવા ઋણ ચિહ્ન હોય તેવી પદાવલિને દ્વિપદી પદાવલિ કહે છે, જેમકે $a + b$, $x - y$, $4a + 3b$, $x + 2a$ વગેરે દ્વિપદી પદાવલિ કહેવાય. આપણે અગાઉના અભ્યાસકાળ દરમિયાન આવી દ્વિપદી પદાવલિના ત્રણ ઘાત સુધીના વિસ્તરણ શીખ્યાં છીએ, જે આ મુજબ છે :

- $(x + a)^1 = x + a$
- $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
- $(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$
- $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- $(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

હવે, એ વિચાર આવે કે દ્વિપદી પદાવલિની 3 થી વધુ મોટી ધન પૂર્ણાંક ઘાત હોય, તો તેનું વિસ્તરણ સરળતાથી કેવી રીતે મેળવી શકાય ? આ વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેયની મદદથી મેળવી શકાય. હવે આપણે તેના વિશે અભ્યાસ કરીએ.

આપણે અગાઉ દ્વિપદી પદાવલિના જે વિસ્તરણ લખ્યા તેનાં જુદાં જુદાં પદોના સહગુણકો સંચયના સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ, તો તે નીચે મુજબ લખી શકાય :

- $(x + a)^1 = x + a$

  $= {}^1C_0 x + {}^1C_1 a$
- $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

  $= {}^2C_0 x^2 + {}^2C_1 xa + {}^2C_2 a^2$
- $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

  $= {}^3C_0 x^3 + {}^3C_1 x^2a + {}^3C_2 xa^2 + {}^3C_3 a^3$

આ જ પ્રમાણે $(x + a)^4$ અને $(x + a)^5$ના વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકીએ :

$$(x + a)^4 = {}^4C_0x^4 + {}^4C_1 x^3a + {}^4C_2 x^2a^2 + {}^4C_3 xa^3 + {}^4C_4 a^4$$
$$= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$
$$(x + a)^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1 x^4a + {}^5C_2 x^3a^2 + {}^5C_3 x^2a^3 + {}^5C_4 xa^4 + {}^5C_5 a^5$$
$$= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

ઉપર્યુક્ત વિસ્તરણનું બારીકાઈથી અવલોકન કરશો તો જણાશે કે x નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક ઘટતો જાય છે જ્યારે a નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક વધતો જાય છે. આ પરથી દ્વિપદી પદાવલિ $(x + a)$ની ધન પૂર્ણાંક ઘાત nનું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\boxed{(x + a)^n = {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} a^1 + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nC_n x^0 a^n}$$

$(x + a)^n$ ના વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ (Binomial Expansion) કહે છે. આ વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ ${}^nC_r\, x^{n-r} a^r$ છે. આ પદમાં $r = 0, 1, 2, \dots, n$ મૂકીએ, એટલે દ્વિપદી વિસ્તરણનાં બધાં પદ મળે.

r	**વિસ્તરણમાં પદ ક્રમ**	${}^nC_r\, x^{n-r} a^r$
0	પ્રથમ પદ	${}^nC_0\, x^{n-0} a^0 = x^n$
1	બીજું પદ	${}^nC_1\, x^{n-1} a^1$
2	ત્રીજું પદ	${}^nC_2\, x^{n-2} a^2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$(n + 1)$ મું પદ	${}^nC_n\, x^{n-n} a^n = a^n$

આમ, ${}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r$ એ $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું $r + 1$મું પદ થાય. જેને $(x+a)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ (સામાન્ય પદ) કહેવાય. એટલે કે,

$$T_{r+1} = {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r$$

હવે $(x + a)^n$ ના ઉપર્યુક્ત વિસ્તરણમાં નીચેનાં લક્ષણો જોઈ શકાય છે :

(1) $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની કુલ સંખ્યા $n + 1$ છે, એટલે કે દ્વિપદી પદાવલિ $(x + a)$ની ઘાત કરતાં એક પદ વધારે છે.

(2) વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ છે.

(3) વિસ્તરણનું પ્રથમ પદ x^n છે. ત્યાર પછીના દરેક પદમાં x નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક ઘટતો જાય છે, જ્યારે a નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક વધતો જાય છે. વિસ્તરણનું છેલ્લું પદ a^n છે.

(4) વિસ્તરણના પ્રત્યેક પદમાં x અને aના ઘાતાંકનો સરવાળો n થાય છે.

(5) વિસ્તરણના મધ્ય પદથી બંને બાજુએ સરખા અંતરે આવેલાં પદોના સહગુણકો સમાન હોય છે.

દ્વિપદી વિસ્તરણના સહગુણકો ત્રિકોણ સ્વરૂપે નીચે આપેલા છે. આ ત્રિકોણની રચના ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી **બ્લેઝ પાસ્કલે** કરી હતી.

પાસ્કલનો ત્રિકોણ

ઘાત n	સહગુણકો	સહગુણકોનો સરવાળો = 2^n
1	1 1	$2^1 = 2$
2	1 2 1	$2^2 = 4$
3	1 3 3 1	$2^3 = 8$
4	1 4 6 4 1	$2^4 = 16$
5	1 5 10 10 5 1	$2^5 = 32$
6	1 6 15 20 15 6 1	$2^6 = 64$
7	1 7 21 35 35 21 7 1	$2^7 = 128$
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$2^8 = 156$
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$2^9 = 512$

ઉદાહરણ 29 : $(x + y)^6$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(x + y)^6$

$= {}^6C_0 (x)^6 (y)^0 + {}^6C_1 (x)^5 (y)^1 + {}^6c_2 (x)^4 (y)^2 + {}^6C_3 (x)^3 (y)^3$
$+ {}^6C_4 (x)^2 (y)^4 + {}^6C_5 (x)^1 (y)^5 + {}^6C_6 (x)^0 (y)^6$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

ઉદાહરણ 30 : $(1 + x)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(1 + x)^4$

$= {}^4C_0 (1)^4 (x)^0 + {}^4C_1 (1)^3 (x)^1 + {}^4C_2 (1)^2 (x)^2 + {}^4C_3 (1)^1 (x)^3 + {}^4C_4 (1)^0 (x)^4$

$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

ઉદાહરણ 31 : $(3a + 2y)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(3a + 2y)^3$

$= {}^3C_0 (3a)^3 (2y)^0 + {}^3C_1 (3a)^2 (2y)^1 + {}^3C_2 (3a)^1 (2y)^2 + {}^3C_3 (3a)^0 (2y)^3$

$= 27a^3 + 3 (9a^2) (2y) + 3 (3a) (4y^2) + 8y^3$

$= 27a^3 + 54a^2y + 36ay^2 + 8y^3$

ઉદાહરણ 32 : $(3x - y)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(3x - y)^4 = [3x + (- y)]^4$

$= {}^4C_0 (3x)^4 (- y)^0 + {}^4C_1 (3x)^3 (- y)^1 + {}^4C_2 (3x)^2 (- y)^2 + {}^4C_3 (3x)^1 (- y)^3 + {}^4C_4 (3x)^0 (- y)^4$

$= 81x^4 + 4 (27x^3) (- y) + 6 (9x^2) (y^2) + 4 (3x) (- y^3) + y^4$

$= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$

નોંધ : દ્વિપદી પદાવલિનાં બે પદો વચ્ચે ઋણ ચિહ્ન હોય તો વિસ્તરણમાં પ્રથમ પદનું ચિહ્ન +, બીજા પદનું ચિહ્ન −, ત્રીજા પદનું ચિહ્ન +, ચોથા પદનું ચિહ્ન − વગેરે આવશે.

ઉદાહરણ 33 : $(2x - a)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(2x - a)^5$

$= {}^5C_0 (2x)^5 (a)^0 - {}^5C_1 (2x)^4 (a)^1 + {}^5C_2 (2x)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2x)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2x)^1 (a)^4 - {}^5C_5 (2x)^0 (a)^5$

$= 32x^5 - 5(16x^4) (a) + 10 (8x^3) (a^2) - 10 (4x^2) (a^3) + 5(2x) (a^4) - a^5$

$= 32x^5 - 80x^4a + 80x^3a^2 - 40x^2a^3 + 10xa^4 - a^5$

ઉદાહરણ 34 : $\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

$\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$

$= {}^5C_0 (x)^5 \left(\frac{2}{x}\right)^0 - {}^5C_1 (x)^4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 + {}^5C_2 (x)^3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 - {}^5C_3 (x)^2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^5C_4 (x)^1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 - {}^5C_5 (x)^0 \left(\frac{2}{x}\right)^5$

$= x^5 - 5 (x)^4 \left(\frac{2}{x}\right) + 10 (x)^3 \left(\frac{4}{x^2}\right) - 10 (x^2) \left(\frac{8}{x^3}\right) + 5 (x) \left(\frac{16}{x^4}\right) - \frac{32}{x^5}$

$= x^5 - 10x^3 + 40x - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^3} - \frac{32}{x^5}$

પ્રવૃત્તિ

$(11)^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણથી મેળવવા સૌપ્રથમ 11ને 11 = 10 + 1 એવી દ્વિપદી પદાવલિમાં ફેરવો. હવે $(11)^4 = (10 + 1)^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવી ને કેલ્યુલેટરથી ચકાસી જુઓ કે મેળવેલી કિંમત સાચી છે કે કેમ ?

ઉદાહરણ 35 : $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$$

$$= {}^4C_0 \left(\frac{a}{b}\right)^4\left(\frac{b}{a}\right)^0 - {}^4C_1 \left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{a}\right)^1 + {}^4C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - {}^4C_3 \left(\frac{a}{b}\right)^1\left(\frac{b}{a}\right)^3 + {}^4C_4 \left(\frac{a}{b}\right)^0\left(\frac{b}{a}\right)^4$$

$$= \frac{a^4}{b^4} - 4\left(\frac{a^3}{b^3}\right)\left(\frac{b}{a}\right) + 6\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - 4\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b^3}{a^3}\right) + \frac{b^4}{a^4}$$

$$= \frac{a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} + 6 - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$$

ઉદાહરણ 36 : $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$$

$$= {}^4C_0 (\sqrt{a})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^0 + {}^4C_1 (\sqrt{a})^3 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^1 + {}^4C_2 (\sqrt{a})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

$$+ {}^4C_3 (\sqrt{a})^1 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3 + {}^4C_4 (\sqrt{a})^0 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$$

$$= a^2 + 4\ (\sqrt{a})^2 + 6 + 4\ \frac{1}{(\sqrt{a})^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2 + 4a + 6 + \frac{4}{a} + \frac{1}{a^2}$$

ઉદાહરણ 37 : $(1 + x)^6$નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $x = 1$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

$(1 + x)^6$

$= {}^6C_0 (1)^6 (x)^0 + {}^6C_1 (1)^5 (x)^1 + {}^6C_2 (1)^4 (x)^2 + {}^6C_3 (1)^3 (x)^3$
$+ {}^6C_4 (1)^2 (x)^4 + {}^6C_5 (1)^1 (x)^5 + {}^6C_6 (1)^0 (x)^6$

$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

આમ,

$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

$x = 1$ મૂકતાં,

ડા.બા.$= (1 + x)^6 = (1 + 1)^6 = (2)^6 = 64$

જ.બા.$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

$= 1 + 6(1) + 15(1)^2 + 20(1)^3 + 15(1)^4 + 6(1)^5 + (1)^6$

$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

$= 64$

આમ, ડા.બા. = જ.બા.

ઉદાહરણ 38 : $(\sqrt{3}+2)^5 - (\sqrt{3}-2)^5$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

$(\sqrt{3}+2)^5 - (\sqrt{3}-2)^5$

$$= \begin{bmatrix} {}^5C_0(\sqrt{3})^5(2)^0 \\ + {}^5C_1(\sqrt{3})^4(2)^1 \\ + {}^5C_2(\sqrt{3})^3(2)^2 \\ + {}^5C_3(\sqrt{3})^2(2)^3 \\ + {}^5C_4(\sqrt{3})^1(2)^4 \\ + {}^5C_5(\sqrt{3})^0(2)^5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^5C_0(\sqrt{3})^5(2)^0 \\ - {}^5C_1(\sqrt{3})^4(2)^1 \\ + {}^5C_2(\sqrt{3})^3(2)^2 \\ - {}^5C_3(\sqrt{3})^2(2)^3 \\ + {}^5C_4(\sqrt{3})^1(2)^4 \\ - {}^5C_5(\sqrt{3})^0(2)^5 \end{bmatrix}$$

(હવે બે દ્વિપદી પદાવલિ વચ્ચે ઋણ ચિહ્ન હોવાથી બીજી પદાવલિના વિસ્તરણનાં ચિહ્નો બદલાશે. પરિણામે બંને પદાવલિઓના વિસ્તરણના પહેલા, ત્રીજા અને પાંચમા પદનો લોપ થશે.)

$= 2\ [{}^5C_1\ (\sqrt{3})^4\ (2)^1 + {}^5C_3\ (\sqrt{3})^2\ (2)^3 + {}^5C_5\ (\sqrt{3})^0\ (2)^5]$

$= 2\ [5\ (9)\ (2) + 10\ (3)\ (8) + 32]$

$= 2\ [90 + 240 + 32]$

$= 2\ [362]$

$= 724$

ઉદાહરણ 39 : $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$

$$= \begin{bmatrix} {}^4C_0(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^0 \\ + {}^4C_1(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^1 \\ + {}^4C_2(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2 \\ + {}^4C_3(\sqrt{3})^1(\sqrt{2})^3 \\ + {}^4C_4(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^4C_0(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^0 \\ - {}^4C_1(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^1 \\ + {}^4C_2(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2 \\ - {}^4C_3(\sqrt{3})^1(\sqrt{2})^3 \\ + {}^4C_4(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^4 \end{bmatrix}$$

(હવે બે દ્વિપદી પદાવલિ વચ્ચે ધન ચિહ્ન હોવાથી બીજી પદાવલિના વિસ્તરણનાં ચિહ્નો બદલાશે નહિ. પરિણામે બંને પદાવલિઓના વિસ્તરણના બીજા અને ચોથા પદનો લોપ થશે.)

$= 2\ [4_{C_0}\ (\sqrt{3})^4\ (2)^0 + 4_{C_2}\ (\sqrt{3})^2\ (\sqrt{2})^2 + 4_{C_4}\ (\sqrt{3})^0\ (\sqrt{2})^4]$

$= 2\ [\ 9 + 6\ (3)\ (2) + 4]$

$= 2\ [9 + 36 + 4]$

$= 2\ [49]$

$= 98$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચે આપેલી દ્વિપદી પદાવલિઓના વિસ્તરણ મેળવો :

(1) $(3a + 4b)^3$ (2) $(1 + x)^7$ (3) $\left(\frac{3}{x} - \frac{4x}{3}\right)^4$ (4) $\left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ (5) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^5$

2. દ્વિપદી વિસ્તરણની મદદથી કિંમત મેળવો.

(1) $(\sqrt{5} + 1)^5 - (\sqrt{5} - 1)^5$

(2) $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^4 + (\sqrt{5}-\sqrt{3})^4$

3. $(1 + x)^5$ નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $x = 1$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

4. $(1 + a)^6$ નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $a = 2$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

સારાંશ

- જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય, તો બંને સમૂહોની કુલ વસ્તુઓમાંથી કોઈપણ એક વસ્તુની પસંદગી $m + n$ પ્રકારે થઈ શકે.
- જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો તે કુલ $m \times n$ પ્રકારે થઈ શકે.
- $n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
- n જુદી જુદી વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો ${}^nP_r$ થાય.
- ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો મૂળભૂત તફાવત એ છે કે, ક્રમચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોય છે જ્યારે સંચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોતું નથી. એટલે કે, ક્રમચયમાં *ab* અને *ba* નો અર્થ અલગ છે જ્યારે સંચયમાં *ab* અને *ba* નો અર્થ સમાન થાય છે.
- $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણના કુલ $(n + 1)$ પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_n$ છે.

સૂત્રોની યાદી

- ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- ${}^nP_0 = 1,\ {}^nP_n = n!,\ {}^np_1 = n,\ {}^np_{n-1} = n!$
- કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, C વસ્તુઓ ત્રીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો $\frac{N!}{A!\,B!\,C!}$ થાય.
- ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ક્રમચય અને સંચયના સંદર્ભમાં ${}^nP_r$ અને ${}^nC_r$ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ : ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$
- $(x + a)^n$ પદાવલિનું વિસ્તરણ :
  ${}^nC_0 (x)^n (a)^0 + {}^nC_1 (x)^{n-1} (a)^1 + {}^nC_2 (x)^{n-2} (a)^2 + \ldots + {}^nC_n (x)^0 (a)^n$

સ્વાધ્યાય 6

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય, તો બંને સમૂહોમાંથી કોઈપણ એક વસ્તુની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

(a) mn (b) $\frac{m}{n}$ (c) $m - n$ (d) $m + n$

2. જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો બંને ક્રિયાઓ સાથે થવાના કુલ પ્રકારો કેટલા થાય ?

(a) mn (b) $\frac{m}{n}$ (c) $m - n$ (d) $m + n$

3. $n!$ એટલે શું ?

(a) 1 થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો (b) 1 થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

(c) 1 થી $n-r$ સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (d) 0 થી n સુધીની સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

4. ક્રમચય અને સંચયના પ્રચલિત સંકેતો અનુસાર નીચેનામાંથી ક્યો સંબંધ સાચો છે ?

(a) ${}^nC_r = {}^nP_r \times r!$ (b) ${}^nP_r = {}^nC_r + r!$ (c) ${}^nP_r = \frac{{}^nC_r}{r!}$ (d) ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

5. ${}^nC_r$ની કિંમત નીચેના પૈકી કોની બરાબર હોય છે ?

(a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) ${}^nC_{n-r}$ (c) ${}^nC_{r-1}$ (d) $\frac{{}^nC_{r+1}}{r}$

6. ${}^nC_0 + {}^nC_n$ ની કિંમત શોધો.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $2n$

7. $(n + 1)! = 120$ હોય, તો nની કિંમત જણાવો.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

8. $(x + a)^{n-1}$ ના વિસ્તરણમાં કુલ કેટલાં પદ હોય ?

(a) n (b) $n - 2$ (c) $n + 1$ (d) $n + 2$

9. $10 \times n\,! = 240$ હોય, તો nની કિંમત શોધો.

(a) 6 (b) 3 (c) 5 (d) 4

10. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું અંતિમ (છેલ્લું) પદ જણાવો.

(a) a^n (b) a^{n-1} (c) x^0 (d) x^{n-1}

11. એક ફન ફેરની રાઈડમાં 3 વ્યક્તિઓને બેસવા માટે 8 જગ્યાઓ છે. તેઓ આ જગ્યાઓ પર કેટલી રીતે બેસી શકે ?

(a) ${}^8C_3$ (b) ${}^3P_8$ (c) ${}^3C_8$ (d) ${}^8p_3$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ક્રમચય અને સંચય વચ્ચે મુખ્ય તફાવત શું છે ?

2. ગણતરીનો સરવાળાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

3. ગણતરીનો ગુણાકારનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

4. પ્રચલિત સંકેત અનુસાર ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ લખો.

5. $(x + a)^n$ માં $n = 6$ મૂકતાં મળતા વિસ્તરણના સહગુણકો લખો.

6. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ લખો.

7. એક ટ્રેનના ડબામાં 3 વ્યક્તિઓને બેસવા માટે 5 જગ્યાઓ છે. તેઓ કેટલા પ્રકારે પોતાની જગ્યા મેળવી શકે ?

8. ${}^nC_2 = 15$ હોય તો nની કિંમત જણાવો.

9. ${}^nP_3 = 210$ હોય તો nની કિંમત જણાવો.

10. TUESDAY શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી નવી કેટલી ગોઠવણીઓ થઈ શકે ?

11. VIAAN શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલી ગોઠવણીઓ બનાવી શકાય ?

12. 5 જુદા જુદા પત્રોને 5 કવરમાં કેટલી રીતે મૂકી શકાય ?

13. ${}^nP_r$ એટલે શું ?

14. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણના $n + 1$ પદોના સહગુણકો લખો.

15. જો ${}^nC_x = {}^nC_y$ હોય, તો x અને y ના સંબંધના શક્ય બે વિકલ્પો લખો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણનાં લક્ષણો લખો.

2. એક વિજ્ઞાનમેળામાં 10 શાળાઓ ભાગ લે છે. આ શાળાઓમાં પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય ઇનામો કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

3. 4 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી કોઈ પણ બે છોકરાઓ કે બે છોકરીઓ એક સાથે ન ગોઠવાય ?

4. એક ટેબલ પર આંકડાશાસ્ત્રનાં 6, નામાનાં 5 અને અંગ્રેજી વિષયનાં 4 જુદાં જુદાં પુસ્તકોને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી દરેક વિષયનાં પુસ્તકો એક સાથે જ આવે ?

5. 3, 8, 0, 7, 6 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

6. TANI શબ્દના બધા જ અક્ષરોની કેટલી ગોઠવણી એવી હશે કે જેમાં સ્વર ભેગા જ આવે ?

7. MANGO શબ્દના બધા જ અક્ષરોની કેટલી ગોઠવણી એવી હશે કે જેમાં સ્વર ભેગા ન આવે ?

8. અયુગ્મ અંક અયુગ્મ સ્થાન પર જ આવે તેવી રીતે 1234321ના બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરીને કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

9. ROLLS શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓ અને DOLLS શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓનો ગુણોત્તર કેટલો થશે ?

10. એક બૉક્સમાં 6 સ્ક્રૂ છે, જેમાં 2 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. આ બૉક્સમાંથી ખામીરહિત બે સ્ક્રૂ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

11. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી બે પત્તાં રાણીના અથવા રાજાના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

12. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી ત્રણ પત્તાં એક જ રંગના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

13. $(2x + 3y)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

14. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

15. $(y + k)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રથમ પાંચેય પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરીને,

(1) કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(2) 30,000 કરતાં મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(3) 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

2. 4 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી કોઈ પણ બે છોકરાઓ કે બે છોકરીઓ એક સાથે ન આવે ?

3. 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી,

(1) બંને છોકરીઓ એક સાથે જ આવે ?

(2) છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી આવે ?

(3) ત્રણેય છોકરાઓ એક સાથે જ આવે ?

4. WAKEFUL શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં WAKEFUL શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

5. એક પાર્ટીમાં 4 યુગલો (પતિ-પત્ની) ભાગ લે છે. તે 8 વ્યક્તિઓમાંથી 2 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓ પતિ-પત્ની હોય તેવી પસંદગીના પ્રકારો કેટલા થશે ?

(2) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓમાં એક પુરુષ અને એક સ્રી હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(3) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓમાં એક પુરુષ અને એક સ્રી હોય પરંતુ તેઓ પતિ-પત્ની ન હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

6. એક ટેબલ પર આંકડાશાસ્રનાં 4 અને અર્થશાસ્રનાં 3 જુદાં જુદાં પુસ્તકો ગોઠવેલાં છે. આ પુસ્તકોમાંથી બે પુસ્તકો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બે પુસ્તકમાં,

(1) બંને પુસ્તકો એક જ વિષયના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) બંને પુસ્તકો જુદા જુદા વિષયનાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) અર્થશાસ્ર વિષયનું એક પણ પુસ્તક ન આવે તેવી પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

7. એક રમકડાંની દુકાનમાં 3 ઢીંગલીઓ, 4 કીચન સેટ અને 3 કાર ડિસ્પ્લેમાં મૂકેલાં છે. એક બાળક તેમાંથી ત્રણ રમકડાં પસંદ કરે છે. તો તેમાં,

(1) ત્રણેય રમકડાં ઢીંગલીઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) ત્રણેય રમકડાં જુદાં જુદાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) બે ઢીંગલીઓ અને એક કીચન સેટ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

8. એક સામાજિક સંસ્થા સાથે જોડાયેલા 4 સી.એ. અને 5 ડૉક્ટરમાંથી 3 સભ્યોની સમિતિ બનાવવાની છે. આ સમિતિમાં,

(1) સી.એ.ની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે.

(2) ડૉક્ટરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે.

તેવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

9. $(\sqrt{7}+1)^3 - (\sqrt{7}-1)^3$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

10. $(\sqrt{3}+1)^6 + (\sqrt{3}-1)^6$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

French mathematician – Pascal's inventions and discoveries have been instrumental to developments in the fields of geometry, physics and computer science. His exploration of binomial coefficients infulenced Sir Isaac Newton, leading him to uncover his "general binomial theorem for fractional and negative powers."

In the 1970s, the Pascal (Pa) unit was named after Blaise Pascal, in honor of his contributions. Pascal is also credited with building the foundation of probability theory.

●

"Sampling theory deals with inductive inference which is the process by which we draw a conclusion about some measure of population based on a sample value."

– W. A. Spur and C. P. Bonini

7

નિદર્શન પદ્ધતિઓ

(Sampling Methods)

વિષયવસ્તુ :

7.1 સમષ્ટિ અને નિદર્શ : અર્થ

7.2 સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ

7.3 નિદર્શનની જરૂરિયાત

7.4 આદર્શ નિદર્શનાં લક્ષણો

7.5 નિદર્શનું કદ નક્કી કરવા માટેના મુદ્દા

7.6 નિદર્શન પદ્ધતિઓ :

7.6.1 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

7.6.1.1 અર્થ

7.6.1.2 લોટરીની રીત

7.6.1.3 યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકની રીત

7.6.1.4 લાભ અને ગેરલાભ

7.6.2 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

7.6.2.1 અર્થ

7.6.2.2 લાભ અને ગેરલાભ

7.6.3 પદિક નિદર્શન

7.6.3.1 અર્થ

7.6.3.2 લાભ અને ગેરલાભ

7.1 સમષ્ટિ અને નિદર્શ (Population and Sample)

અર્થ :

અભ્યાસ હેઠળ આવતી તમામ વસ્તુઓ કે એકમોના સમૂહને **સમષ્ટિ (Population)** કહેવામાં આવે છે. સમષ્ટિમાંથી અમુક ચોક્કસ ધોરણ કે પદ્ધતિથી પસંદ કરેલા સમષ્ટિના ભાગને **નિદર્શ (Sample)** કહેવામાં આવે છે.

ધારો કે આપણે ગુજરાત બોર્ડના ધોરણ 12માં અભ્યાસ કરતાં વિદ્યાર્થીઓની બુદ્ધિમત્તાના આંકનું સ્તર જાણવા માંગતા હોઈએ તો ગુજરાત બોર્ડના 12મા ધોરણના બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો સમૂહ એ સમષ્ટિ થઈ કહેવાય. જો ગુજરાત બોર્ડના ધોરણ 12ના આ બધા વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ ચોક્કસ આધારે 1000 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરવામાં આવે, તો આ 1000 વિદ્યાર્થીઓનો સમૂહ એ આપણો **નિદર્શ** કહેવાય. આપણે રોજબરોજના જીવનમાં પણ નિદર્શની પસંદગી કરતાં હોઈએ છીએ. કોઈ દુકાનદાર પાસેથી આપણે શાકભાજી કે ફળ ખરીદવા જઈએ તો આપણે પહેલાં તેની પાસે રહેલાં શાકભાજી કે ફળના સમગ્ર જથ્થામાંથી કેટલાંકની પસંદગી કરી તેને ચકાસીએ છીએ. અહીં, દુકાનદાર પાસે શાકભાજી કે ફળનો કુલ જથ્થો છે તે સમષ્ટિ છે અને તેમાંથી પસંદ કરેલાં કેટલાંક શાકભાજી કે ફળ એ નિદર્શ છે.

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શની પસંદગી પુરવણી સહિત (with replacement) અથવા પુરવણીરહિત (without replacement) પ્રકારે થઈ શકે છે. સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરતી વખતે જો નિદર્શના દરેક એકમની પસંદગી, તેની અગાઉ પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પાછો મૂકી એટલે કે પરત કરીને કરવામાં આવે તો આવા નિદર્શને **પુરવણી સહિતનું નિદર્શ** કહેવાય. જ્યારે સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરતી વખત જો નિદર્શના દરેક એકમની પસંદગી, તેની અગાઉ પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પાછો મૂક્યા વગર એટલે કે પરત કર્યા સિવાય કરવામાં આવે, તો આવા નિદર્શને **પુરવણીરહિતનું નિદર્શ** કહેવાય. તે જ પ્રમાણે જો સમષ્ટિમાંથી નિદર્શના એકમો એક સાથે લેવામાં આવે તો તે પુરવણીરહિતનું નિદર્શ થાય.

7.2 સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ (Population Inquiry and Sample Inquiry)

અભ્યાસ હેઠળ આવતી સમષ્ટિના અભ્યાસ માટે બે રીતે માહિતી એકઠી કરી શકાય છે. જે રીતમાં સમષ્ટિના બધા એકમોની માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે તેને **સમષ્ટિ તપાસ (Population Inquiry or Census Inquiry)** કહે છે.

આપણા ભારત દેશમાં દર દસ વર્ષે થતી વસતી-ગણતરી એ સમષ્ટિ તપાસનું ઉદાહરણ છે. ધારો કે કોઈ શાળાના ધોરણ 11 અને 12ના વિદ્યાર્થીઓના ગુણને લગતાં અભ્યાસમાં ધોરણ 11 અને 12ના બધા વિદ્યાર્થીઓના ગુણની માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે તો તે સમષ્ટિ તપાસ થઈ કહેવાય. તે જ રીતે કોઈ એક ચૂંટણી દરમિયાન પડેલા તમામ મતની ચકાસણી પણ સમષ્ટિ તપાસનું ઉદાહરણ છે.

જે રીતમાં સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શના એકમોની તપાસ કરી માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે તેને **નિદર્શ તપાસ (Sample Inquiry or Sample Survey)** કહે છે. કોઈ એક કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની નાણાં-ખર્ચ કરવાની આદત કે ટેવ વિશેનો અભ્યાસ કરવો હોય અને જો આપણે તે કૉલેજના કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની નાણાં-ખર્ચ કરવાની આદત વિશે કોઈ આધારે માહિતી એકત્ર કરીએ તો તે નિદર્શ તપાસનું ઉદાહરણ છે. કોઈ વ્યક્તિનું બ્લડગ્રૂપ જાણવા માટે શરીરમાં રહેલા લોહીમાંથી એક ટીપું લેવામાં આવે છે. આ લોહીનાં ટીપાંની તપાસ કરવી એ પણ નિદર્શ તપાસનું ઉદાહરણ છે.

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની પ્રક્રિયાને **નિદર્શન (Sampling)** કહેવામાં આવે છે.

7.3 નિદર્શનની જરૂરિયાત (Need of sampling)

વાસ્તવિક જીવનમાં આપણે નિદર્શનનો ઉપયોગ કરતા હોઈએ છીએ. એક ફેક્ટરીનું ગુણવત્તા-નિયંત્રણ ખાતું ઉત્પાદિત એકમોની ગુણવત્તા ચકાસવા કુલ ઉત્પાદિત એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે અમુક ચોક્કસ એકમો પસંદ કરે છે. ફેક્ટરીનું કુલ ઉત્પાદન સમષ્ટિ ગણાય અને તેમાંથી પસંદ કરેલા અમુક એકમો નિદર્શ ગણાય. કુલ ઉત્પાદનમાંથી પસંદ કરવામાં આવતા અમુક એકમોની પ્રક્રિયાને નિદર્શન કહેવાય છે. ડેરીમાં વ્યક્તિ દ્વારા લાવવામાં આવતા દૂધમાંથી ચરબીનું પ્રમાણ જાણવા થોડું દૂધ પસંદ કરવાની પ્રક્રિયા, કોઈ એક રોગનું કારણ જાણવા આ રોગથી પીડાતા થોડા દર્દીઓના લોહીની તપાસ વગેરે નિદર્શનનાં અન્ય ઉદાહરણો છે.

નિદર્શન નીચેની પરિસ્થિતિઓમાં અનિવાર્ય છે :

- સમષ્ટિમાં એકમોની સંખ્યા ખૂબ મોટી હોય.
- સમષ્ટિના એકમો ભૌગોલિક દૃષ્ટિએ વિશાળ વિસ્તારમાં ફેલાયેલા હોય.
- એકમોનો નાશ થતો હોય એટલે કે તપાસ દરમિયાન એકમ નાશ પામતો હોય.
  દા.ત., ઇલેક્ટ્રિક બલ્બના આયુષ્યની તપાસ.
- તપાસ હાથ ધરવા માટે જરૂરી સંસાધનો જેવાં કે સમય, નાણાકીય જોગવાઈ, નિષ્ણાત અન્વેષકોની ઉપલબ્ધિ મર્યાદિત હોય.

સામાન્ય રીતે સમષ્ટિ તપાસ કાયદાકીય અને બંધારણીય જોગવાઈ હેઠળ તથા કેટલાંક વહીવટી કારણોસર કરવામાં આવે છે. કેટલીક પરિસ્થિતિઓમાં સમષ્ટિ તપાસ યોજવી શક્ય હોય તો પણ નિદર્શ તપાસને પ્રાધાન્ય આપવામાં આવે છે, કારણ કે સમષ્ટિ તપાસમાં વધારે સમય જોઈએ, ખર્ચ વધુ થાય અને વધુ માનવશક્તિની જરૂર પડે છે. વધુમાં સમષ્ટિ તપાસમાં એકમોની તપાસ હાથ ધરવાનું કાર્ય ગહન અને વ્યાપક હોવાથી તપાસમાં એકમોની માહિતી મેળવવામાં ત્રુટિઓ પ્રવેશે છે.

નિદર્શનનો મુખ્ય ઉદ્દેશ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલા નિદર્શના અભ્યાસ પરથી સમષ્ટિની ખાસિયતો વિશે તારણો મેળવવાનો હોય છે. નિદર્શ એકમો પરથી મળતાં સંખ્યાત્મક પરિણામોને આધારે મેળવેલાં વિવિધ માપ જેવાં કે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન વગેરેને **નિદર્શ આગણકો (Sample Statistics)** કહેવાય છે, જ્યારે સમષ્ટિ માટેનાં આ બધાં માપોને **પ્રાચલો (Parameters)** કહેવાય છે.

7.4 આદર્શ નિદર્શનાં લક્ષણો (Characteristics of an Ideal sample)

સમષ્ટિમાંથી પસંદ થયેલ નિદર્શ પરથી સમષ્ટિવિષયક માહિતીનાં તારણો મેળવવા માટે નિદર્શ તપાસનો ઉપયોગ થાય છે. આમ, સમષ્ટિમાંથી પસંદ થયેલ નિદર્શ સમષ્ટિ વિશેની માહિતી મેળવવામાં મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે. તેથી નિદર્શની પસંદગી યોગ્ય રીતે થાય તે ખૂબ જ જરૂરી છે. જે નિદર્શ નીચે જણાવેલા ગુણધર્મો ધરાવતો હોય તે નિદર્શને **આદર્શ નિદર્શ (Ideal Sample)** કહી શકાય.

(1) તે સમષ્ટિનું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું હોવું જોઈએ એટલે કે સમષ્ટિનાં બધાં જ લક્ષણોનો સમાવેશ નિદર્શમાં થયેલ હોવો જોઈએ.

(2) તેની પસંદગી યાદૃચ્છિક રીતે થવી જોઈએ એટલે કે તેની પસંદગીમાં સમષ્ટિના કોઈ પણ એકમ માટે પક્ષપાત કે પૂર્વગ્રહ ન હોવો જોઈએ.

(3) નિદર્શન દરમિયાન અભ્યાસને અસર કરતાં પરિબળોમાં કોઈ ખાસ મોટા ફેરફારો થયેલા ન હોવા જોઈએ.

(4) નિદર્શના એકમોની પસંદગી નિરપેક્ષ (સ્વતંત્ર) રીતે થયેલી હોવી જોઈએ, એટલે કે નિદર્શના એક એકમની પસંદગીને બીજા એકમની પસંદગી સાથે કોઈ સંબંધ ન હોવો જોઈએ.

(5) નિદર્શના એકમોની સંખ્યા (એટલે કે નિદર્શનું કદ) યોગ્ય પ્રમાણમાં અને યોગ્ય રીતે નક્કી થયેલું હોવું જોઈએ.

7.5 નિદર્શનું કદ નક્કી કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવા માટેના મુદ્દા

(Points to be considered while determining the sample size)

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શમાં પસંદ કરવામાં આવતા એકમોની સંખ્યા એટલે **નિદર્શનું કદ (Sample size)**. નિદર્શનું કદ નક્કી કરવા માટે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જરૂરી છે :

(1) સમષ્ટિનું કદ અને અભ્યાસનો વ્યાપ

(2) સમષ્ટિની વિષમાંગતા એટલે કે સમષ્ટિના એકમોના ચલ લક્ષણની કિંમતોમાં રહેલું ચલન

(3) સમય, નાણાકીય સાધનો અને નિષ્ણાત તજજ્ઞોની ઉપલબ્ધતા

(4) નિદર્શ પરિણામોની ચોકસાઈનું અપેક્ષિત ધોરણ

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

જો સમષ્ટિનું કદ ખૂબ મોટું હોય, સમષ્ટિના એકમોમાં વિષમાંગતાનું પ્રમાણ વધુ હોય અને ચોકસાઈનું અપેક્ષિત ધોરણ ઊંચું હોય, તો સંસાધનોની મર્યાદામાં રહી મોટા કદનું નિદર્શ પસંદ કરવામાં આવે છે.

7.6 નિદર્શન પદ્ધતિઓ (Sampling Methods)

સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની રીતને **નિદર્શન પદ્ધતિ** કહેવાય છે. વ્યવહારમાં વિવિધ નિદર્શન પદ્ધતિઓમાંથી એક કે વધુ પદ્ધતિઓ વપરાય છે. કઈ નિદર્શન પદ્ધતિની પસંદગી કરવી એ સમષ્ટિના પ્રકાર અને નિદર્શનના હેતુને આધારે નક્કી કરવામાં આવે છે.

નિદર્શનની વિવિધ પદ્ધતિઓ છે તેમાંથી આપણે માત્ર નીચેની પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું :

(1) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (2) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન (3) પદિક નિદર્શન.

7.6.1 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (Simple Random Sampling)

7.6.1.1 અર્થ (Meaning)

નિદર્શનના હેતુસર આ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિને વિવિધ અવલોકનોના એક જ સમૂહ તરીકે લેવામાં આવે છે. જે નિદર્શનમાં બધા જ એકમોની પસંદગી નિરપેક્ષ રીતે થાય અને જેમાં સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સમાન તક આપવામાં આવે તેને સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (Simple Random Sampling) કહે છે. જ્યારે સમષ્ટિ લગભગ સમાંગ (Homogeneous) હોય એટલે કે સમષ્ટિનાં અવલોકનો લગભગ સરખા ગુણધર્મો ધરાવે ત્યારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ પરથી મેળવેલાં પરિણામો વિશ્વસનીય હોય છે.

જો સમષ્ટિમાંથી એક પછી એક એકમની પસંદગી કરવામાં આવે અને કોઈ પણ એકમની પસંદગી કરતાં પહેલાં અગાઉ પસંદ થયેલ એકમ સમષ્ટિમાં પાછો મૂકવામાં આવે, તો તેવા નિદર્શનને પુરવણી સહિતનું સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન કહેવાય અને જો અગાઉ પસંદ થયેલ એકમ પછીના એકમની પસંદગી પહેલાં પાછો મૂકવામાં ન આવે, તો તેને પુરવણીરહિતનું યાદચ્છિક નિદર્શન કહેવાય.

સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સામાન્ય રીતે યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવવા માટે નીચેની બે પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે :

(a) લોટરીની રીત (b) યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકની રીત.

7.6.1.2 લોટરીની રીત (Method of Lottery)

સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાની આ એક ખૂબ જ સરળ અને પ્રચલિત રીત છે. આ રીતમાં સમષ્ટિના એકમોને ઓળખ માટે 1, 2, 3... એ પ્રમાણે ક્રમ આપવામાં આવે છે અને દરેક ક્રમની નાની અને સરખી ચિઠ્ઠી બનાવવામાં આવે છે. (એકસરખી ચિઠ્ઠી એટલે રંગ, કદ અને આકારમાં સમાન, જેથી ચિઠ્ઠીની પસંદગીમાં કોઈ પક્ષપાત કે પૂર્વગ્રહ થાય નહિ.) બધી ચિઠ્ઠીઓને વાળીને એક વાસણ કે ડબ્બામાં મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ જેટલા એકમોનો નિદર્શ લેવાનો હોય તેટલી વાળેલી ચિઠ્ઠીઓ વાસણ કે ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે ઉપાડવામાં આવે છે અને ઉપાડેલી ચિઠ્ઠીઓમાં જે ક્રમો આવે તે ક્રમોના એકમો સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરવાથી મળતો નિદર્શ સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ કહેવાય છે. આધુનિક સમયમાં ચિઠ્ઠીઓને બદલે યંત્રની મદદથી અંકો પસંદ કરીને પણ યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવવામાં આવે છે.

7.6.1.3 યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકની રીત (Method of Random Numbers Table)

જ્યારે સમષ્ટિના એકમોની સંખ્યા ઘણી મોટી હોય ત્યારે લોટરીની રીતમાં ખૂબ સમય લાગે છે અને તે કંટાળાજનક બને છે. આવા સંજોગોમાં યાદચ્છિક સંખ્યાઓના તૈયાર કરેલાં કોષ્ટકોની મદદથી નિદર્શ લેવાનું કાર્ય સરળ બને છે. યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકો વૈજ્ઞાનિક ઢબે બનાવવામાં આવે છે. યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકો પૈકી નીચેનાં કોષ્ટકોનો ઉપયોગ વધુ પ્રચલિત છે :

(i) એલ. એચ. સી. ટીપેટનાં કોષ્ટકો (ii) ફિશર અને યેટ્સનાં કોષ્ટકો (iii) અમેરિકાની રેન્ડ કૉર્પોરેશન સંસ્થાનાં કોષ્ટકો.

જ્યારે યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનો હોય ત્યારે યાદચ્છિક સંખ્યાઓનાં કોષ્ટકની પુસ્તિકાનું કોઈ પણ પાનું યાદચ્છિક રીતે ખોલવામાં આવે છે અને તેમાંથી કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ હાર અથવા સ્તંભમાંથી શરૂ કરી જે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ મળે તે ક્રમના એકમો સમષ્ટિના કદ અનુસાર પસંદ કરી યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે.

યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવવા માટે ટીપેટનાં કોષ્ટકોનો ઉપયોગ વધુ પ્રચલિત છે. યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનાં ઉદાહરણો માટે આપણે ટીપેટના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીશું. નીચે ટીપેટના કોષ્ટકનો એક ભાગ કોષ્ટકના ઉદાહરણ સ્વરૂપે આપેલ છે :

	1	2	3	4
(1)	053	274	323	599
(2)	667	484	786	833
(3)	992	347	253	338
(4)	428	982	564	785
(5)	278	154	490	076
(6)	819	314	589	889
(7)	195	222	428	924
(8)	390	379	699	786
(9)	420	598	443	692
(10)	664	430	343	118
(11)	171	035	189	236
(12)	289	505	667	484
(13)	535	300	112	089
(14)	784	280	257	154
(15)	640	143	364	326

ઉદાહરણ 1 : એક શાળાના ધોરણ 10ના વિદ્યાર્થીઓનો બુદ્ધિમત્તાનો આંક ચકાસવા માટે ધોરણ 10ના કુલ 70 વિદ્યાર્થીઓની સમષ્ટિમાંથી 10 વિદ્યાર્થીઓનો એક યાદચ્છિક નિદર્શ પુરવણીરહિત પ્રકારે મેળવો.

સૌપ્રથમ શાળાના ધોરણ 10ના બધા વિદ્યાર્થીઓને 1થી 70 ક્રમ આપીશું.

અહીં સમષ્ટિનું કદ (N) = 70 છે જે બે અંકોની સંખ્યા છે, તેથી આપણે યાદચ્છિક સંખ્યાઓના પ્રથમ બે અંકો જ ધ્યાનમાં લઈશું. આપણે યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકની પુસ્તિકામાંથી કોઈ પણ પાનું યાદચ્છિક રીતે લઈ તેમાંથી કોઈ પણ હાર કે સ્તંભ લઈ નિદર્શ મેળવી શકીયે પરંતુ અહીં આપણે અગાઉ આપેલ યાદચ્છિક કોષ્ટકના નમૂનાનો ઉપયોગ કરીશું.

ધારો કે આપણે તે નમૂનાના કોષ્ટકની ત્રીજી હારથી શરૂ કરી ક્રમમાં વારાફરતી હાર જોઈ યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવીએ. તે નમૂનાની યાદચ્છિક સંખ્યાઓના ફક્ત પ્રથમ બે અંકો જ ધ્યાનમાં લઈએ, તો તે નમૂનાનું કોષ્ટક નીચે મુજબ દર્શાવાય :

(3)	99	34	25	33
(4)	42	98	56	78
(5)	27	15	49	07
(6)	81	31	58	88
(7)	19	22	42	92
(8)	39	37	69	78
(9)	42	59	44	69
(10)	66	43	34	11
(11)	17	03	18	23
(12)	28	50	66	48
(13)	53	30	11	08
(14)	78	28	25	15
(15)	64	14	36	32

સમષ્ટિનું કદ 70 છે તેથી 70થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓને આપણે અવગણીશું. પુરવણીરહિત પ્રકારે નિદર્શ મેળવવાનું હોઈ જે યાદચ્છિક સંખ્યા પુનરાવર્તિત થતી હોય તેને પણ અવગણીશું. આમ કરવાથી આપણને નીચે મુજબની યાદચ્છિક સંખ્યાઓ મળે છે :

(3)	—	34	25	33
(4)	42	—	56	—
(5)	27	15	49	07
(6)	—	31	58	—
(7)	19	22	—	—
(8)	39	37	69	—
(9)	—	59	44	—
(10)	66	43	—	11
(11)	17	03	18	23
(12)	28	50	—	48
(13)	53	30	—	08
(14)	—	—	—	—
(15)	64	14	36	32

આપણે 10 કદનો નિદર્શ લેવાનો હોઈ ઉપર્યુક્ત સંખ્યાઓમાંથી આપણે પ્રથમ દસ સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. આમ પસંદગી પામેલી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અનુક્રમે

34, 25, 33, 42, 56, 27, 15, 49, 7, 31 છે.

આમ ઉપર્યુક્ત ક્રમ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરી 10 વિદ્યાર્થીઓનો એક યાદચ્છિક નિદર્શ બુદ્ધિમત્તાનો આંક ચકાસવા માટે મળે છે.

નોંધ : યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકમાંથી પસંદ કરાતા યાદચ્છિક અંકો કોઈપણ હાર અથવા સ્તંભમાંથી ગમે તે સ્થાનથી પસંદ કરી શકાતા હોવાથી જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ દ્વારા મેળવેલા યાદચ્છિક નિદર્શ જુદા-જુદા હોઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 2 : આવકવેરાની 5000 ફાઈલમાંથી વધુ ઝીણવટભરી તપાસ (scrutiny) માટે 7 ફાઈલનું પુરવણીરહિત પ્રકારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવો.

સૌપ્રથમ આપણે આવકવેરાની 5000 ફાઈલને 1થી 5000 ક્રમ આપીશું.

અહીં, સમષ્ટિનું કદ (N) = 5000 છે, જે ચાર અંકની સંખ્યા છે, નિદર્શ પસંદ કરવા માટે અગાઉ આપેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીશું.

ધારો કે આપણે તે કોષ્ટકની પ્રથમ હારથી શરૂ કરી વારાફરતી ક્રમમાં બધી હાર જોઈ યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવીશું.

	1	2	3	4
(1)	053	274	323	599
(2)	667	484	786	833
(3)	992	347	253	338
(4)	428	982	564	785
(5)	278	154	490	076
(6)	819	314	589	889
(7)	195	222	428	924
(8)	390	379	699	786
(9)	420	598	443	692
(10)	664	430	343	118
(11)	171	035	189	236
(12)	289	505	667	484
(13)	535	300	112	089
(14)	784	280	257	154
(15)	640	143	364	326

સમષ્ટિનું કદ 5000 હોવાથી જે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 5000થી મોટી છે તે અવગણીશું તેમજ પુરવણીરહિતનો નિદર્શ લેવાનો હોઈ પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યા પણ અવગણીશું. N = 5000 છે, જે 4 અંકો ધરાવે છે. તેથી 4 અંકોવાળી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ હોવી જોઈએ. પરંતુ અહીં અગાઉ આપેલા કોષ્ટકના દરેક સ્તંભમાં 3 અંકોની સંખ્યાઓ છે તેથી ઉપરના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા મુજબ પ્રથમ સ્તંભની 3 અંકોની સાથે બીજા સ્તંભની સંખ્યાનો પ્રથમ અંક જોડી દઈ 4 અંકોની યાદચ્છિક સંખ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈશું. 7 કદનો નિદર્શ લેવાનો હોઈ આપણે પ્રથમ 7 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. ઉપર મુજબ જોતા પસંદગી પામેલી 7 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ નીચે મુજબ મળે :

0532, 4289, 2781, 1952, 3903, 4205, 1710

આમ, વધુ ઝીણવટભરી તપાસ માટે ઉપર્યુક્ત ક્રમ ધરાવતી 7 આવકવેરાની ફાઈલ નિદર્શમાં પસંદ થશે.

ઉદાહરણ 3 : યાદચ્છિક સંખ્યાઓના કોષ્ટકમાંથી મેળવેલી ક્રમિક બે અંકોવાળી નીચેની 15 યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરી 50 એકમો ધરાવતી એક સમષ્ટિમાંથી 5 કદનો નિદર્શ (i) પુરવણી સહિત (ii) પુરવણીરહિત પ્રકારે મેળવો.

62, 25, 6, 60, 95, 55, 98, 11, 71, 25, 20, 45, 89, 27, 40

સૌપ્રથમ સમષ્ટિના 50 એકમોને આપણે 1 થી 50 ક્રમ આપીશું; સમષ્ટિનું કદ 50 હોવાથી 50 થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યા આપણે અવગણીશું. તેથી આપણને 25, 6, 11, 25, 20, 45, 27 અને 40 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ મળશે.

(i) હવે પ્રથમ પુરવણી સહિત પ્રકારે નિદર્શ મેળવવાનો હોઈ આપણે પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓને અવગણવાને બદલે તેને પણ ધ્યાનમાં લઈશું. નિદર્શનું કદ 5 હોવાથી આપણે 5 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. આમ પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 25, 6, 11, 25 અને 20 થશે.

(ii) હવે પુરવણીરહિત પ્રકારે નિદર્શ મેળવવાનો હોઈ આપણે પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓને અવગણીશું. નિદર્શનું કદ 5 હોવાથી આપણે 5 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. આમ, પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 25, 6, 11, 20 અને 45 થશે. (અહીં 25 પુનરાવર્તિત થતી હોઈ આપણે તેને બીજી વખત લઈશું નહિ.)

7.6.1.4 સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિના લાભ તથા ગેરલાભ :

લાભ :

(1) આ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના દરેક એકમને પસંદ થવાની સમાન તક હોવાથી નિદર્શની પસંદગીમાં પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતને કોઈ અવકાશ રહેતો નથી.

(2) યાદચ્છિક નિદર્શ સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે તેની શક્યતા વધારે હોય છે. જેમ જેમ નિદર્શનું કદ વધે તેમ તે સમષ્ટિનું વધુ યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

(3) ઓછા ખર્ચ અને ઓછા સમયમાં સમષ્ટિનાં લક્ષણો વિશે વિશ્વસનીય માહિતી મેળવી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) સમષ્ટિના બધા જ એકમોની યાદી જરૂરી છે, જો તે પ્રાપ્ય ન હોય તો આ પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લઈ શકાતી નથી.

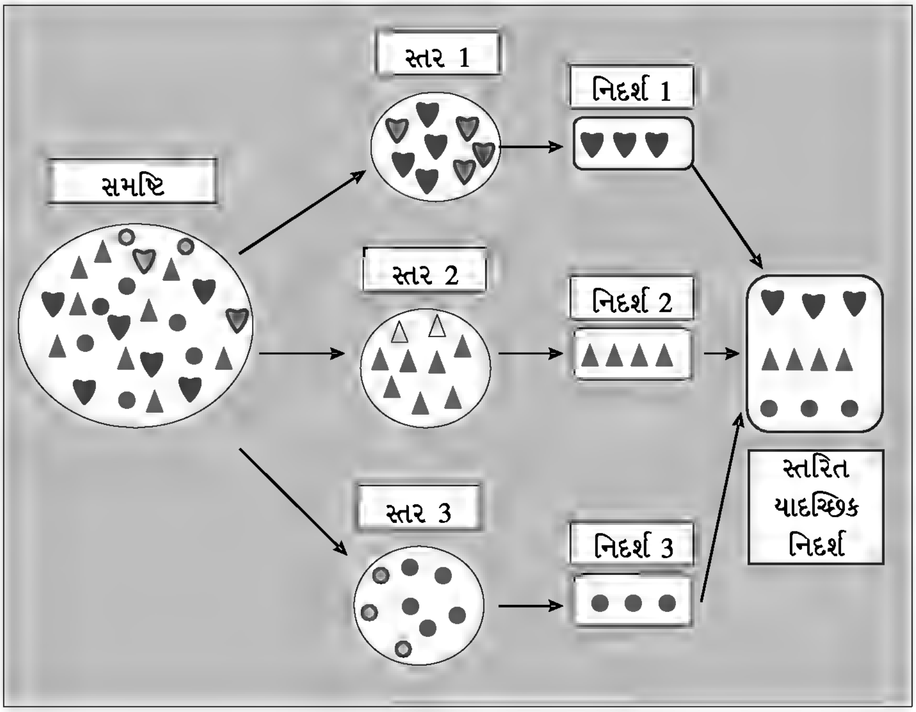
(2) જ્યારે સમષ્ટિનું કદ મોટું હોય ત્યારે ચિઠ્ઠી બનાવવાનું અથવા સમષ્ટિના એકમોને ક્રમ આપવાના કામમાં વધુ સમય લાગે છે અને તે કંટાળાજનક બને છે.

(3) જો નિદર્શનું કદ નાનું હોય અને સમષ્ટિ વિષમાંગ હોય, તો નિદર્શ સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતું નથી.

7.6.2 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન (Stratified Random Sampling) :

7.6.2.1 અર્થ (Meaning) :

જ્યારે સમષ્ટિ વિષમાંગ (Heterogeneous) હોય એટલે કે સમષ્ટિના એકમોમાં વધુ પ્રમાણમાં ચલન હોય ત્યારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કરતાં સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ વધુ યોગ્ય રહે છે. આ પદ્ધતિમાં અભ્યાસ હેઠળના ચલનાં લક્ષણોને ધ્યાનમાં રાખી સૌપ્રથમ સમષ્ટિના એકમોને બે કે તેથી વધુ પરસ્પર નિવારક વિભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે. વિષમાંગ સમષ્ટિને લગભગ સમાંગ કહી શકાય તેવા વિભાગોમાં એવી રીતે વહેંચવામાં આવે છે કે જેથી સમષ્ટિનો કોઈ પણ એકમ એકથી વધુ વિભાગમાં સમાવિષ્ટ ન હોય. આ પ્રક્રિયાને સ્તરીકરણ (Stratification) કહે છે. આ રીતે મળતા વિભાગોને સ્તરો (Strata) કહેવાય છે. આ બધા જ સ્તરો એકબીજાથી જુદા હોય છે, પણ દરેક સ્તરના એકમો આંતરિક રીતે લગભગ સમાન ગુણધર્મો ધરાવતા હોય છે. હવે, દરેક સ્તર (Stratum)માંથી યાદચ્છિક રીતે નિદર્શ લઈને તે બધા જ નિદર્શનના એકમો ભેગા કરીને એક નિદર્શ મેળવવામાં આવે છે. જેને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ કહેવામાં આવે છે અને નિદર્શ પસંદ કરવાની આ પદ્ધતિને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ (Stratified Random Sampling) કહે છે. પ્રત્યેક સ્તરમાંથી કેટલા એકમો પસંદ કરવા તે નક્કી કરવા માટે પ્રમાણસર ફાળવણી (Proportional Allocation), ઈષ્ટતમ ફાળવણી (Optimal Allocation), લઘુતમ ખર્ચ વગેરે રીતનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.



એક કૉમર્સ કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની નાણાં-ખર્ચ કરવાની ટેવ વિશેનો અભ્યાસ કરવો હોય તો કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓને વધુ આવક ધરાવતા, મધ્યમ આવક ધરાવતા અને ઓછી આવક ધરાવતાં એમ ત્રણ વિભાગો (સ્તરો)માં વહેંચવામાં આવે છે. આ ત્રણેય સ્તરોમાંથી ચોક્કસ સંખ્યામાં યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ આ ત્રણેય નિદર્શોના એકમો ભેગા કરી એક નિદર્શ મેળવાય છે. આ રીતે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ મળે છે. આ જ રીતે, એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત એકમોની ગુણવત્તા ચકાસવી હોય તો ફેક્ટરીમાં કુલ ઉત્પાદિત એકમોને સવારની પાળીમાં ઉત્પાદિત અને રાત્રિની પાળીમાં ઉત્પાદિત એકમો એમ બે વિભાગો (સ્તરો)માં વહેંચવામાં આવે છે. આ બંને સ્તરોમાંથી ચોક્કસ સંખ્યામાં યાદચ્છિક નિદર્શ લેવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ આ બંને નિદર્શોના એકમો ભેગા કરી એક નિદર્શ મેળવાય છે. આ રીતે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ મળે છે.

ઉદાહરણ 4 : **કૉલેજમાં વિદ્યાર્થીઓને મળતી સવલતો અંગે પ્રતિભાવ જાણવા માટે કૉલેજના 1500 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 % વિદ્યાર્થીઓનો સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ પ્રમાણસર ફાળવણી કરી પુરવણીરહિત પ્રકારે પસંદ કરો. કૉલેજમાં પ્રથમ વર્ષમાં 600, બીજા વર્ષમાં 500 અને ત્રીજા વર્ષમાં 400 વિદ્યાર્થીઓ છે. નિદર્શન માટે નીચેની 40 ત્રણ અંકોવાળી યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરો.**

158, 092, 411, 745, 009, 724, 674, 550, 716, 359, 419, 969, 200, 458,
384, 019, 676, 631, 390, 557, 299, 786, 706, 206, 729, 344, 543, 309,
227, 483, 741, 766, 027, 070, 648, 956, 238, 912, 480, 558.

(પ્રથમ 14 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પ્રથમ વર્ષ માટે, પછીની 14 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ બીજા વર્ષ માટે અને બાકી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ ત્રીજા વર્ષ માટે ઉપયોગમાં લો.)

સૌપ્રથમ કૉલેજના 1500 વિદ્યાર્થીઓને પ્રથમ વર્ષ, બીજા વર્ષ અને ત્રીજા વર્ષના વિદ્યાર્થીઓ એમ ત્રણ સ્તરોમાં વહેંચો. હવે 1 % વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ પસંદ કરવા પ્રત્યેક સ્તરમાંથી 1 % વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરીશું. એટલે કે પ્રથમ વર્ષના 600 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 % એટલે કે 6 બીજા વર્ષના 500 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 % એટલે કે 5 અને ત્રીજા વર્ષના 400 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 % એટલે કે 4 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરીશું. આ પસંદગી સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ દ્વારા કરીશું.

પ્રથમ વર્ષના 600 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 6 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી :

પ્રથમ વર્ષ માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ : 158, 092, 411, 745, 009, 724, 674, 550, 716, 359, 419, 969, 200, 458.

સૌ પહેલા પ્રથમ વર્ષના 600 વિદ્યાર્થીઓને 1 થી 600 ક્રમ આપીશું. પ્રથમ વર્ષમાં 600 વિદ્યાર્થીઓ હોવાથી અને પુરવણી-રહિત પ્રકારે પસંદગી કરવાની હોઈ આપણે 600થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અને પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અવગણીશું. આપણે 6 કદનો યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનો હોઈ પ્રથમ 6 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. અહીં, પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 158, 092, 411, 009, 550, 359 છે. આમ, આ છ ક્રમ ધરાવતાં વિદ્યાર્થીઓ પ્રથમ વર્ષના યાદચ્છિક નિદર્શમાં પસંદ થાય.

બીજા વર્ષના 500 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી :

બીજા વર્ષ માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ : 384, 019, 676, 631, 390, 557, 299, 786, 706, 206, 729, 344, 543, 309

સૌ પહેલા બીજા વર્ષના 500 વિદ્યાર્થીઓને 1 થી 500 ક્રમ આપીશું. બીજા વર્ષમાં 500 વિદ્યાર્થીઓ હોવાથી અને પુરવણી-રહિત પ્રકારે પસંદગી કરવાની હોઈ આપણે 500 થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અને પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અવગણીશું. આપણે 5 કદનો યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનો હોઈ પ્રથમ 5 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. અહીં, પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 384, 019, 390, 299, 206 છે. આમ આ પાંચ ક્રમ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓ બીજા વર્ષના યાદચ્છિક નિદર્શમાં પસંદ થાય.

ત્રીજા વર્ષના 400 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી :

ત્રીજા વર્ષ માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ : 227, 483, 741, 766, 027, 070, 648, 956, 238, 912, 480, 558

સૌ પહેલા ત્રીજા વર્ષના 400 વિદ્યાર્થીઓને 1 થી 400 ક્રમ આપીશું. ત્રીજા વર્ષના 400 વિદ્યાર્થીઓ હોવાથી અને પુરવણી-રહિત પ્રકારે પસંદગી કરવાની હોઈ આપણે 400થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અને પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અવગણીશું. આપણે 4 કદનો યાદચ્છિક નિદર્શ લેવાનો હોઈ પ્રથમ 4 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. અહીં, પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 227, 027, 070, 238 છે. આમ, આ ચાર ક્રમ ધરાવતાં વિદ્યાર્થીઓ ત્રીજા વર્ષના યાદચ્છિક નિદર્શમાં પસંદ થાય.

પસંદ થયેલા પ્રથમ વર્ષના 6 વિદ્યાર્થીઓ, બીજા વર્ષના 5 વિદ્યાર્થીઓ અને ત્રીજા વર્ષના 4 વિદ્યાર્થીઓને ભેગા કરવાથી 15 વિદ્યાર્થીઓનો એક સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ મળે છે.

ઉદાહરણ 5 : એક શહેરના વિસ્તારના 30 છોકરાઓ અને 20 છોકરીઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણીરહિત પ્રકારે એની 7 વ્યક્તિઓના નિદર્શની મોબાઈલના વપરાશના અભ્યાસ માટે પસંદગી કરવાની છે. સ્તરિત નિદર્શન પદ્ધતિથી નિદર્શ મેળવો કે જેમાં 3 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓ હોવા જોઈએ.

છોકરાઓ માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ : 82, 95, 18, 96, 20, 84, 56, 11, 52, 03

છોકરીઓ માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ : 04, 40, 34, 13, 72, 11, 50, 55, 08, 11, 76, 18

સૌપ્રથમ 50 વ્યક્તિઓને છોકરાઓ અને છોકરીઓ એમ બે વિભાગો (સ્તરો)માં વહેંચવામાં આવેલા છે. હવે, સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ દ્વારા આપણે 30 છોકરાઓમાંથી 3 અને 20 છોકરીઓમાંથી 4 છોકરીઓ પસંદ કરીશું.

30 છોકરાઓમાંથી 3 કદના નિદર્શની પસંદગી :

સૌપ્રથમ 30 છોકરાઓને 1 થી 30 ક્રમ આપીશું. અહીં 30 છોકરાઓ હોવાથી અને પુરવણીરહિત પ્રકારે પસંદગી કરવાની હોઈ 30 થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અને પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ આપણે અવગણીશું. આપણે 3 કદનો નિદર્શ લેવાનો હોઈ પ્રથમ 3 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. અહીં પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 18, 20 અને 11 છે. આમ, આ ત્રણ ક્રમ ધરાવતા છોકરાઓ મોબાઈલના વપરાશના અભ્યાસ માટે પસંદ થાય.

20 છોકરીઓમાંથી 4 કદના નિદર્શની પસંદગી :

સૌપ્રથમ 20 છોકરીઓને 1 થી 20 ક્રમ આપીશું. અહીં 20 છોકરીઓ હોવાથી અને પુરવણીરહિત પ્રકારે પસંદગી કરવાની હોઈ 20થી મોટી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ અને પુનરાવર્તિત થતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ આપણે અવગણીશું. આપણે 4 કદનો નિદર્શ લેવાનો હોઈ પ્રથમ 4 યાદચ્છિક સંખ્યાઓ પસંદ કરીશું. અહીં પસંદગી પામેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓ 04, 13, 11 અને 8 છે. આમ, આ ચાર ક્રમ ધરાવતી છોકરીઓ મોબાઇલના વપરાશના અભ્યાસ માટે પસંદ થાય.

પસંદગી પામેલ ત્રણ છોકરાઓ અને ચાર છોકરીઓ ભેગા કરી 7 વ્યક્તિઓનો એક સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ મળે છે.

7.6.2.2 સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ પદ્ધતિના લાભ તથા ગેરલાભ :

લાભ :

(1) આ પદ્ધતિમાં પ્રત્યેક સ્તરમાંથી નિદર્શ પસંદ કરી સ્તરિત નિદર્શ મેળવવામાં આવે છે તેથી સમષ્ટિનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ નિદર્શમાં જળવાઈ રહે છે.

(2) સામાન્ય રીતે સમષ્ટિના પ્રાચલો માટે મેળવેલા આગણકોની ચોકસાઈ આ પદ્ધતિમાં વધે છે.

(3) આ નિદર્શન પદ્ધતિમાં દરેક સ્તર માટે પૂર્વ નિર્ધારિત ચોકસાઈનું ધોરણ જાળવવું શક્ય બને છે.

(4) આ પદ્ધતિમાં નિદર્શ લેવા માટેની વહીવટી સુગમતા વધે છે.

(5) જુદા જુદા સ્તર માટે નિદર્શની પસંદગી કરવા જુદા જુદા અન્વેષકોની નિયુક્તિ કરી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) સમષ્ટિને સમાંગ સ્તરોમાં વહેંચવાનું કાર્ય ક્યારેક મુશ્કેલ હોય છે.

(2) જો સ્તરીકરણ યોગ્ય રીતે ન થયું હોય તો નિદર્શ તપાસમાંથી મળતાં પરિણામોની વિશ્વસનીયતા ઘટે છે.

(3) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન કરતાં સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ પરથી સમષ્ટિના પ્રાચલોનું આગણન (estimation) કરવાનું કાર્ય થોડું મુશ્કેલ છે.

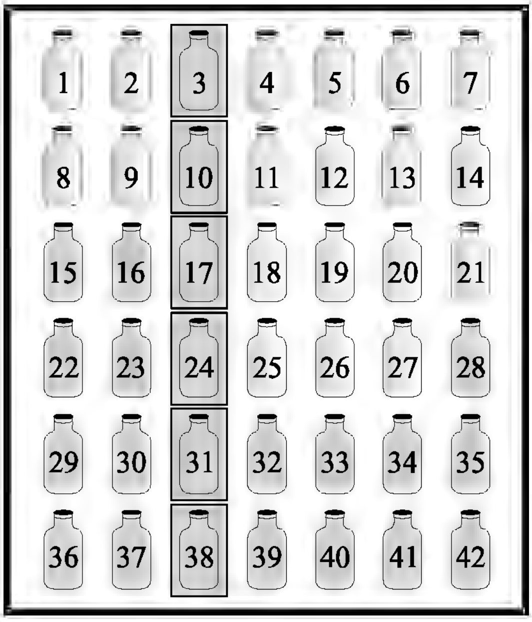
7.6.3 પદિક નિદર્શન (Systematic Sampling)

7.6.3.1 અર્થ (Meaning)

આ પદ્ધતિમાં નિદર્શમાં પસંદ થતો પ્રથમ એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને બાકીના એકમો આપોઆપ એકમોની યાદીની શ્રેણીમાંથી કોઈ ચોક્કસ અંતરે એક પછી એક પસંદ થાય છે. જ્યારે સમષ્ટિના બધા જ એકમો કોઈ ખાસ રીતે જેમકે વર્ણાનુસાર, સમયાનુસાર, ભૌગોલિક વગેરે રીતે ગોઠવાયેલા હોય અને તેની સંપૂર્ણ યાદી પ્રાપ્ય હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લેવી હિતાવહ છે.

ધારો કે સમષ્ટિના કુલ N એકમોને કોઈ ચોક્કસ રીતે ગોઠવી તેમને 1 થી N ક્રમ આપેલા છે. તેમાંથી આપણે n કદનો નિદર્શ પસંદ કરવો છે કે જેથી $N = nk$ અથવા $k = N/n$ થાય. અહીં k ને સામાન્ય રીતે નિદર્શન અંતરાલ (Sampling Interval) કહે છે. અહીં k પૂર્ણાંક કિંમત ધારણ કરશે એવું ધારીશું. હવે આપણે પ્રથમ k એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક એકમ પસંદ કરીએ છીએ અને ત્યાર બાદ પસંદ થયેલા એકમથી દર k મો એકમ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા આ એકમોથી બનતા નિદર્શને પદિક નિદર્શ (Systematic Sample) કહે છે અને નિદર્શ લેવાની આ પદ્ધતિને પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે.

ધારો કે એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત 42 પ્લાસ્ટિકની બૉટલોમાંથી 6 બૉટલો પસંદ કરવાની છે. સૌપ્રથમ ઉત્પાદિત 42 બૉટલોને 1 થી 42 ક્રમ આપીશું. અહીં સમષ્ટિનું કદ (N) = 42 અને નિદર્શનું કદ (6) છે અને $k = N/n = 42/6 = 7$ થશે. તેથી પ્રથમ 7 બૉટલોમાંથી યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક બૉટલ પસંદ કરવામાં આવે છે. ધારો કે ત્રીજા ક્રમની બૉટલ યાદચ્છિક રીત પસંદ થાય છે. ત્યાર બાદ દર સાતમી (kમી) બૉટલો એટલે કે 10મી, 17મી, 24મી, 31મી અને 38મી બૉટલો નિદર્શમાં પસંદ થાય છે.



ધારો કે કોઈ એક અભ્યાસ માટે એક સોસાયટીનાં 120 ઘરમાંથી 10 ઘરનું પદિક નિદર્શ મેળવવું છે. અહીં ($k = \frac{120}{10} = 12$) થાય. તેથી 1 થી 12 ક્રમના ઘરમાંથી એક ઘર યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી ત્યાર બાદ દર 12મું ઘર પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પ્રથમ 12 ઘરમાંથી યાદચ્છિક રીતે 8મા ક્રમનું ઘર પસંદ થાય, તો પદિક નિદર્શમાં નીચેના ક્રમવાળાં ઘર પસંદ થશે :

8, 20, 32, 44, 56, 68, 80, 92, 104, 116.

(હવે જો આ 120 ઘરમાં નિદર્શમાં પસંદ થયેલ પ્રત્યેક ઘર ખૂણા પરનું ઘર હોય તો પસંદગી પામેલ નિદર્શનમાં યાદચ્છિકતા જળવાય નહિ તેવું બની શકે.)

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

જ્યારે $N \neq nk$ હોય ત્યારે નીચેના પૈકી કોઈ એક પ્રક્રિયાથી પદિક નિદર્શ મેળવવામાં આવે છે.

- જો નિદર્શમાં $(n + 1)$ એકમો હોય, તો એક એકમ નિદર્શમાંથી કાઢી નાખો.
- કેટલાક એકમો કાઢી નાખો જેથી $N = nk$ થાય.
- ચક્રિય પદિક નિદર્શન પદ્ધતિ
- નિદર્શન અંતરાલ k અપૂર્ણાંક હોય, તો નજીકનો પૂર્ણાંક k તરીકે લો.

ઉદાહરણ 6 : એક બહુમાળી મકાનમાં 40 ફ્લૅટ છે. એક સાંસ્કૃતિક કાર્યક્રમમાં આ 40 ફ્લૅટમાંથી 5 ફ્લૅટ સુશોભન માટે પદિક નિદર્શન દ્વારા પસંદ કરવા છે, તો પદિક નિદર્શ કેવી રીતે પસંદ થાય તે સમજાવો.

અહીં, કુલ ફ્લૅટ 40 તેથી $N = 40$ અને આપણે 5 ફ્લૅટ પસંદ કરવા છે તેથી $n = 5$. તેથી નિદર્શન અંતરાલ $k = N/n = 40/5 = 8$ થાય. તેથી પ્રથમ 8 ફ્લૅટમાંથી કોઈ એક ફ્લૅટ યાદચ્છિક રીતે લઈ ત્યાર બાદ દર 8મો ફ્લૅટ પસંદ કરવામાં આવશે. ધારો કે પ્રથમ 8 ફ્લૅટમાંથી 3 જો ફ્લૅટ પસંદ થાય, તો નીચેના ક્રમવાળા 5 ફ્લૅટ પદિક નિદર્શમાં પસંદ થશે :

3, 11, 19, 27, 35.

ઉદાહરણ 7 : એક કાર સર્વિસ સ્ટેશનના માલિક પાસે તેની પાસે કારનું સમારકામ કરાવ્યું હોય તેવા 1000 કારમાલિકોની યાદી છે. કારનું સમારકામ સંતોષકારક થયું છે કે કેમ તે જાણવાની એક મોજણી માટે તે 50 કારમાલિકોને પસંદ કરવા માંગે છે. પદિક નિદર્શન દ્વારા કેવી રીતે 50 કારમાલિકોનો નિદર્શ પસંદ થશે તે સમજાવો.

અહીં $N = 1000$ અને $n = 50$ હોવાથી $k = N/n = 1000/50 = 20$ થાય. સૌપ્રથમ 1 થી 20 ક્રમના કારમાલિકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક કારમાલિક પસંદ થશે અને ત્યાર બાદ દર 20મા ક્રમના કારમાલિકની પસંદગી થશે. ધારો કે 1 થી 20માંથી 11મા ક્રમના કારમાલિક પસંદ થાય, તો નીચેના ક્રમવાળા 50 કારમાલિકોની પદિક નિદર્શમાં પસંદગી થશે.

11, 31, 51, 71, ..., 991

ઉદાહરણ 8 : એક સમષ્ટિમાં 12 એકમો છે. તેમાંથી 3 કદનાં શક્ય બધાં જ પદિક નિદર્શો મેળવો.

અહીં N = 12 અને n = 3 છે તેથી નિદર્શન અંતરાલ k = N/n = 12/3 = 4 થશે. સૌપ્રથમ 1 થી 4 માંથી કોઈ એક એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી ત્યાર બાદ દર 4થો એકમ પસંદ થશે. આમ, 4 શક્ય નિદર્શો મેળવી શકાય છે.

	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
નિદર્શ ક્રમ	I	II	III	IV

આમ શક્ય નિદર્શો :

નિદર્શ I : 1, 5, 9

નિદર્શ II : 2, 6, 10

નિદર્શ III : 3, 7, 11

નિદર્શ IV : 4, 8, 12

7.6.3.2 પદિક યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિના લાભ તથા ગેરલાભ :

લાભ :

(1) નિદર્શની પસંદગી કોઈ પણ ભૂલ કર્યા વગર સહેલાઈથી થઈ શકે છે.

(2) નિદર્શમાં પસંદ થયેલા એકમો સમષ્ટિમાં એક સમાન રીતે ફેલાયેલા હોય છે.

(3) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ અને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કરતાં આ પદ્ધતિ ઓછા સમયમાં અને ઓછા શ્રમથી પૂર્ણ કરી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) સમષ્ટિના બધા જ એકમોની યાદી પ્રાપ્ય હોય તો જ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.

(2) સમષ્ટિના બધા એકમોને કોઈ ચોક્કસ આધારે ક્રમમાં ગોઠવવાનું કાર્ય ઘણી વખત સમય માંગી લે તેવું અને કંટાળાજનક થાય છે અને ક્યારેક શક્ય પણ નથી હોતું.

(3) પદિક નિદર્શ સંપૂર્ણપણે યાદચ્છિક નિદર્શ નથી.

(4) જો કોઈ છૂપા આવર્તનનો ગાળો અને નિદર્શન અંતરાલ સમરૂપ થઈ જાય, તો નિદર્શ પક્ષપાત કે પૂર્વગ્રહયુક્ત મળે છે.

સારાંશ

- અભ્યાસ હેઠળ આવતી તમામ વસ્તુઓ કે એકમોના સમૂહને સમષ્ટિ કહેવામાં આવે છે.
- સમષ્ટિમાંથી અમુક ચોક્કસ ધોરણ કે પદ્ધતિથી પસંદ કરેલા સમષ્ટિના ભાગને નિદર્શ કહેવામાં આવે છે.
- જે તપાસ સમષ્ટિના બધા એકમોની માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે તેને સમષ્ટિ તપાસ કહે છે.
- જે તપાસ સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શના એકમોની તપાસ કરી માહિતી એકત્ર કરવામાં આવે તેને નિદર્શ તપાસ કહે છે.
- સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની પ્રક્રિયાને નિદર્શન કહેવામાં આવે છે.
- નિદર્શ એકમો પરથી મળતાં સંખ્યાત્મક પરિણામોને આધારે મેળવેલાં વિવિધ માપ જેવાં કે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન વગેરેને નિદર્શ આગણકો કહેવાય છે, જ્યારે સમષ્ટિનાં માટેનાં આ બધાં માપને પ્રાચલો કહેવાય છે.
- સમષ્ટિમાંથી નિદર્શ પસંદ કરવાની રીતને નિદર્શન પદ્ધતિ કહેવાય છે.
- જે નિદર્શનમાં બધા જ એકમોની પસંદગી નિરપેક્ષ રીતે થાય અને જેમાં સમષ્ટિના પ્રત્યેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાથી સમાન તક આપવામાં આવે તેને સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન કહે છે.
- જ્યારે સમષ્ટિ વિષમાંગ હોય ત્યારે સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કરતાં સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ વધુ યોગ્ય છે.
- દરેક સ્તરમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શ રીતે લઈને તે બધાં જ નિદર્શોના એકમો ભેગા કરીને એક નિદર્શ મેળવવામાં આવે તેને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શ કહેવામાં આવે છે અને નિદર્શ પસંદ કરવાની આ પદ્ધતિને સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિ કહે છે.
- પદિક નિદર્શ પદ્ધતિમાં પ્રથમ એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે અને બાકીના એકમો આપોઆપ એકમોની યાદીની શ્રેણીમાંથી કોઈ ચોક્કસ અંતરે એક પછી એક પસંદ થાય છે.

સ્વાધ્યાય 7

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. એક સમષ્ટિમાંથી પસંદ કરેલ નિદર્શમાં નીચેનામાંથી શાનો સમાવેશ થાય છે ?

(a) સમષ્ટિના બધા જ એકમો (b) સમષ્ટિના ફક્ત 50 % એકમો

(c) સમષ્ટિના ફક્ત 15 % એકમો (d) સમષ્ટિના કેટલાક એકમો

2. નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) જે નિદર્શમાં એકમની પસંદગી કરતાં પહેલાં અગાઉ પસંદ થયેલ એકમ સમષ્ટિમાં પાછો મૂકવામાં આવે તેને પુરવણી- રહિત નિદર્શ કહે છે.

(b) જો તપાસ દરમિયાન એકમનો નાશ કરવો પડતો હોય, તો નિદર્શ તપાસ માત્ર જરૂરી નહિ પણ ફરજિયાત છે.

(c) કોઈ પણ નિદર્શન પદ્ધતિમાં નિદર્શનું કદ સમષ્ટિ પર આધારિત નથી.

(d) જો સમષ્ટિ સમાંગ હોય તો સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન શ્રેષ્ઠ પદ્ધતિ છે.

3. નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સમષ્ટિના બધા જ એકમોને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સમાન તક હોય છે.

(b) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સમષ્ટિના બધા જ એકમોને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સમાન તક હોય છે.

(c) કોઈ પણ નિદર્શન પદ્ધતિમાં નિદર્શનું કદ સમષ્ટિ પર આધારિત નથી.

(d) પદિક નિદર્શમાં સમષ્ટિના બધા જ એકમોને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સમાન તક હોય છે.

4. પ્રાચલ અને આગણક અનુક્રમે કોના કોના લક્ષણ છે ?

(a) સમષ્ટિ અને નિદર્શ (b) નિદર્શ અને સમષ્ટિ (c) નિદર્શ અને નિદર્શ (d) સમષ્ટિ અને સમષ્ટિ

5. જો સમષ્ટિમાં છૂપા આવર્તન હોય તો કઈ નિદર્શન પદ્ધતિ પર તેની અસર સૌથી વધુ થાય છે ?

(a) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન (b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

(c) પદિક નિદર્શન (d) (b) અને (c) બંને

6. જો આપણે કોઈ સમષ્ટિ માટે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનનો ઉપયોગ કરતા હોઈએ અને સમષ્ટિને જુદાં જુદાં કદ ધરાવતાં સ્તરોમાં વહેંચેલી હોય, તો હવે તેમાંથી પ્રમાણસર ફાળવણીવાળા સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શની પસંદગી આપણે કેવી રીતે કરી શકીએ ?

(a) પ્રત્યેક સ્તરમાંથી સમાન કદનો નિદર્શ પસંદ કરો.

(b) પ્રત્યેક સ્તરમાંથી અસમાન કદનો નિદર્શ પસંદ કરો.

(c) સમષ્ટિના દરેક સ્તરના કદના પ્રમાણમાં તે સ્તરમાંથી નિદર્શના એકમો પસંદ કરો.

(d) આમાંથી એક પણ નહિ.

7. કોઈ મોલમાં પ્રવેશતા દરેક વાહનની સલામતી કારણોસર થતી ચકાસણી નીચેના પૈકી શાનું ઉદાહરણ છે ?

(a) સમષ્ટિ તપાસ (b) સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન

(c) પદિક નિદર્શન (d) સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન

વિભાગ B

નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો :

1. જો સમષ્ટિમાંથી સમય, મૂલ્ય અથવા સ્થાનના સમાન અંતરે એકમો પસંદ કરવામાં આવે તો, તે નિદર્શન યોજનાને સ્તરિત નિદર્શન યોજના કહેવાય.
2. આગણક એ સમષ્ટિનું લક્ષણ છે.
3. સારા નિદર્શમાં નિદર્શના એકમો સમયના એક જ ગાળામાં પસંદ થયેલા હોવા જોઈએ.
4. જ્યારે સમષ્ટિના એકમોના ગુણધર્મો વચ્ચે વધુ અસમાનતા જોવા મળે ત્યારે સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન ફાયદાકારક પદ્ધતિ છે.
5. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ પદ્ધતિમાં સમષ્ટિના દરેક એકમને નિદર્શમાં પસંદ થવાની સમાન તક હોય છે.
6. સમષ્ટિના એકમોને સમાંગ સમૂહોમાં વહેંચી તેમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શો જે નિદર્શન પદ્ધતિમાં લેવામાં આવે છે તેને પદિક નિદર્શન કહે છે.
7. સમષ્ટિ તપાસમાં સમષ્ટિના દરેક એકમની તપાસ કરવામાં આવે છે.

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. નિદર્શ માહિતી પરથી સમષ્ટિ વિશે અનુમાન કરવાની પદ્ધતિને શું કહેવાય ?
2. અનેક સમૂહોમાં વહેંચાયેલી સમષ્ટિમાં જ્યારે સમૂહની અંદર રહેલા એકમોમાં ઓછું ચલન અને જુદાં જુદાં સમૂહોનાં અવલોકનો વચ્ચે વધુ ચલન હોય ત્યારે કયા નિદર્શનનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ?
3. જે નિદર્શનમાં સરખા અંતરે રહેલા એકમોની પસંદગી કરવામાં આવે છે તેને કયું નિદર્શન કહે છે ?
4. સૌથી વધુ પ્રચલિત યાદચ્છિક સંખ્યાનું કોષ્ટક કયું છે ?
5. કઈ તપાસમાં વધુ ભૂલો થાય છે ?
6. સમષ્ટિ તપાસ એટલે શું ?
7. પુરવણીરહિત નિદર્શન એટલે શું ?
8. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનનો ઉપયોગ કયા સંજોગોમાં વધુ યોગ્ય ગણાય છે ?
9. ક્યારે પદિક નિદર્શ પક્ષપાતપૂર્વકનું હોઈ શકે છે ?
10. વિષમાંગ સમષ્ટિની વ્યાખ્યા આપો.
11. નાશવંત નિદર્શનનું ઉદાહરણ આપો.
12. જો ત્રણ અંકો ધરાવતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ આપેલી હોય અને સમષ્ટિનું કદ બે અંકોમાં હોય તો નિદર્શ પસંદ કરવા યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કેવી રીતે થશે ?
13. જો બે અંકો ધરાવતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ આપેલી હોય અને સમષ્ટિનું કદ ત્રણ અંકોમાં હોય, તો નિદર્શ પસંદ કરવા યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કેવી રીતે થશે ?
14. સમષ્ટિના પ્રાચલની વ્યાખ્યા આપો.
15. નિદર્શ આગણકની વ્યાખ્યા આપો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નિદર્શ તપાસ ક્યારે કરવામાં આવે છે ?
2. નિદર્શન એટલે શું ?
3. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરવાની રીતો જણાવો.
4. વિવિધ નિદર્શન પદ્ધતિઓનાં નામ જણાવો.
5. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનમાં પ્રત્યેક સ્તરમાંથી નિદર્શ કઈ કઈ રીતે લેવામાં આવે છે તે જણાવો.
6. પદિક નિદર્શનમાં નિદર્શ અંતરાલનો અર્થ સમજાવો.
7. સ્તરીકરણ પ્રક્રિયા વિશે સમજાવો.
8. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શનમાં સ્તરની વ્યાખ્યા આપો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ ઉદાહરણ આપી સમજાવો.
2. સમષ્ટિ તપાસ અને નિદર્શ તપાસ વચ્ચેનો તફાવત સમજાવો.
3. આદર્શ નિદર્શનાં લક્ષણો જણાવો.
4. નિદર્શનું કદ નક્કી કરવા માટે ધ્યાનમાં રાખવાના મુદ્દાઓ જણાવો.
5. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શનના લાભ જણાવો.
6. સરળ યાદચ્છિક નિદર્શન વિશે નોંધ લખો.
7. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શન વિશે નોંધ લખો.
8. સ્તરિત યાદચ્છિક નિદર્શના ગેરલાભ જણાવો.
9. પદિક નિદર્શન વિશે નોંધ લખો.
10. પદિક નિદર્શન લાભ જણાવો.
11. સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં સમષ્ટિ તપાસ શા માટે શક્ય નથી ?
12. નિદર્શ તપાસના લાભ જણાવો.
13. નીચેની યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરી બૅન્કના 100 એ.ટી.એમ. (A.T.M.)માંથી 5 એ.ટી.એમ. (A.T.M.)નો પુરવણીરહિત પ્રકારે યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવો :

    018, 502, 153, 096, 027, 007, 118, 245, 012, 054, 444, 211, 323, 428, 137.
14. એક વર્ગખંડમાં 70 વિદ્યાર્થીઓ ભણે છે. શિક્ષક કોઈ સાત પ્રવૃત્તિઓ માટે સાત વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી કરવા માંગે છે. આ માટે નીચે આપેલ યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરી પૂરવણી સહિતનો યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવો.

    274, 323, 923, 599, 667, 320, 910, 484, 786, 253, 009, 885, 115.
15. નીચે ત્રણ અંકો ધરાવતી યાદચ્છિક સંખ્યાઓ આપેલી છે :

    170, 111, 352, 002, 563, 203, 405, 545, 111, 446, 776, 691, 816, 233, 616, 300, 250, 816, 010.

    આ યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરી 350 કદની સમષ્ટિમાંથી 2 % કદનું પુરવણી સહિત અને પુરવણીરહિત પ્રકારે યાદચ્છિક નિદર્શ મેળવો :

16. એક કોલેજના અધ્યાપકગણ વિશે અભિપ્રાય મેળવવા માટે તે કોલેજના 600 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 2 % વિદ્યાર્થીઓનો પુરવણીરહિત પ્રકારે નિદર્શ મેળવો. કોલેજમાં પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય એમ બધાં વર્ષમાં 200 વિદ્યાર્થીઓ ભણે છે.

નીચેની ત્રણ અંકોવાળી યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરો :

પ્રથમ વર્ષ માટે : 158, 092, 411, 745, 009, 724, 674, 550, 716, 359, 419, 696, 200, 458

દ્વિતીય વર્ષ માટે : 384, 019, 679, 131, 390, 057, 299, 786, 006, 206, 729, 344, 543, 309

તૃતીય વર્ષ માટે : 227, 483, 741, 766, 027, 070, 648, 956, 198, 912, 200, 058, 696, 500

17. એક ગામમાં 30 નાના ખેડૂતો અને 20 મોટા ખેડૂતોમાંથી ખાતરનો વપરાશ જાણવા માટે 10 ખેડૂતોનો યાદચ્છિક નિદર્શ પસંદ કરો કે જેમાં 6 નાના ખેડૂતો અને 4 મોટા ખેડૂતો હોય.

નાના ખેડૂતો માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ :

12, 95, 18, 96, 20, 84, 56, 11, 52, 03, 10, 45

મોટા ખેડૂતો માટે યાદચ્છિક સંખ્યાઓ :

04, 40, 34, 11, 72, 11, 50, 55, 08, 13, 76, 18.

18. એક આઇ.ટી. કંપનીના 60 કર્મચારીઓમાંથી ઘરે રહી કાર્ય કરવાના ખ્યાલ વિશે 5 કદનો પદ્દિક નિદર્શ પસંદ કરવાનો છે. નિદર્શ કેવી રીતે પસંદ કરશો તે સમજાવો.

19. 20 કદની સમષ્ટિમાંથી 4 કદના શક્ય બધાં જ પદ્દિક નિદર્શો મેળવો.

20. એક શાળાના શિક્ષકને ધોરણ 11ના 30 વિદ્યાર્થીમાંથી 10 વિદ્યાર્થીઓના ઘરકામની ચકાસણી કરવી છે. પદ્દિક નિદર્શન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી કેટલાં શક્ય નિદર્શો મેળવી શકાય ?

W. G. Cochran
(1909 - 1980)

Prof. Cochran began his career at Rothamsted Research without a Ph.D., Cochran published 18 papers while at Rothamsted and attended the lectures of R.A. Fisher before leaving England for the United States. He was tasked with developing the graduate program in Statictics within the Mathematics Department. During this time, Cochran also worked on the advisory panel to the U.S. Census.

Later, he moved to Johns Hopkins University's Department of Biostatistics, where his work shifted from agricultural issues to medical applications of Statistics. While at Johns Hopkins, he wrote Sampling Techniques and Experimental Designs. From 1957 until his retirement in 1976, Cochran worked at Harvard. His last position was Professor Emeritus.

•

"In practice, most of the interdependent relationships among characteristics can not be termed as function."

– Unknown

8

વિધેય

(Function)

વિષયવસ્તુ :

8.1 વ્યાખ્યા

8.2 પ્રદેશ, સહપ્રદેશ, વિસ્તાર

8.3 વિધેયના સંકેતો

8.4 વિધેયના પ્રકારો

8.4.1 એક-એક વિધેય

8.4.2 અનેક-એક વિધેય

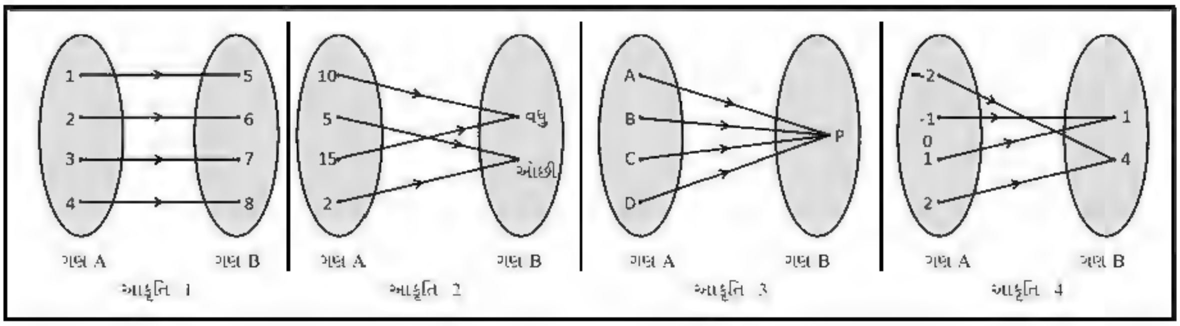
8.4.3 અચળ વિધેય

8.5 વિધેયોની સમાનતા

8.6 વાસ્તવિક વિધેય

8.1 વ્યાખ્યા (Definition)

આપણે ગણના સિદ્ધાંતના અભ્યાસ દરમિયાન જાણ્યું કે, બે જુદા જુદા ગણોના ઘટકો વચ્ચે સંબંધ હોઈ શકે. આવા સંબંધોમાંના અમુક પ્રકારના સંબંધોને આપણે વિધેય કહીશું. આ સમજવા માટે આપણે કેટલીક આકૃતિઓ સમજીએ.



આકૃતિ 1માં ગણ A ના ઘટકો {1, 2, 3, 4} છે જેના ઘટકોનાં મૂલ્યમાં 4 ઉમેરતા ગણ B ના ઘટકો {5, 6, 7, 8} મળે. આમ ગણ A અને ગણ Bના ઘટકો વચ્ચેનો સંબંધ સ્પષ્ટ કરી શકાય કે ગણ A ના ઘટકોમાં 4 ઉમેરતાં ગણ B ના ઘટકો મળે છે.

આકૃતિ 2માં કોઈ એક વસ્તુની દૈનિક માંગ ગણ A દ્વારા દર્શાવાય છે જેના ઘટકો {10, 5, 15, 2} છે. જ્યારે ગણ B એ વસ્તુની માંગ વધુ છે કે ઓછી છે તે દર્શાવે છે અને તેના ઘટકો {વધુ, ઓછી} છે. હવે જો વસ્તુની માંગ 10 કે તેથી વધુ હોય તો તેને વધુ માંગ કહેવામાં આવે, નહિ તો માંગ ઓછી કહેવામાં આવે એવું નક્કી કરવામાં આવે, તો ગણ A અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત થાય, જે આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ સમજી શકાય છે.

આકૃતિ 3માં ગણ A કોઈ એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના નામ બતાવે છે. જ્યારે ગણ B એ તે વર્ગના વર્ગશિક્ષકનું નામ બતાવે છે તો ગણ A અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે પણ સંબંધ છે.

આકૃતિ 4માં ગણ A ના ઘટકો {–2, –1, 0, 1, 2} છે જ્યારે ગણ B ના ઘટકો {1, 4} છે, તો ગણના અમુક ઘટકોનો ગણ B ના ઘટકો સાથેનો સંબંધ જોઈ શકાય છે. ગણ A ના ઘટક શૂન્ય (0)ને અનુરૂપ ગણ B માં કોઈ ઘટક મળતો નથી.

ઉપરનાં તમામ ઉદાહરણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ગણ A ના ઘટકો અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે જુદા જુદા પ્રકારના સંબંધો છે. તો શું આ તમામ સંબંધોને વિધેય કહી શકાય ? આ સમજવા માટે સૌપ્રથમ વિધેયની વ્યાખ્યા જોઈએ.

વ્યાખ્યા : જો ગણ A અને ગણ B ખાલી ન હોય તેવા બે ભિન્ન ગણો હોય અને જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B ના કોઈ એક અનન્ય ઘટક સાથે કોઈ નિયમ, સંબંધ કે સંગતતાથી સંકળાયેલ હોય તો તે નિયમ, સંબંધ કે સંગતતાને ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય (function) કહે છે, જે સંકેતમાં f, g, h, k વગેરે સંકેતો દ્વારા દર્શાવાય છે.

ઉપરની આકૃતિ 1માં ગણ A ના ઘટકોમાં 4 ઉમેરવા તે નિયમને વિધેય કહેવાય. તે સંબંધ $f(x) = x + 4$, $x \in A$ વડે દર્શાવાય.

આકૃતિ 2માં દર્શાવેલ વસ્તુની માંગ જો 10 કે તેથી વધુ હોય, તો તેને વધુ માંગ કહેવાય, નહિ તો ઓછી માંગ કહેવાય. આ સંબંધને પણ વિધેય કહી શકાય.

આકૃતિ 3માં દર્શાવેલ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓનાં નામ અને તેમના વર્ગ-શિક્ષકના નામ વચ્ચેની સંગતતાને પણ વિધેય કહી શકાય.

આકૃતિ 4ને ધ્યાનથી જોતાં માલૂમ પડે છે કે, ગણ A ના ઘટકો {–2, –1, 0, 1, 2} છે જ્યારે ગણ B ના ઘટકો {1, 4} છે. અહીં ગણ Aના ઘટકો –2, –1, 1, 2 ને સંગત ગણ B માં ઘટકો 1, 4 મળે છે, પરંતુ ગણ A ના ઘટક શૂન્ય (0) માટે ગણ B માં કોઈ ઘટક મળતો નથી તેથી આ સંબંધને વિધેય કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલા ગણોના ઘટકો વચ્ચેનો સંબંધ વિધેય છે કે નહિ તે ચકાસો :

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, સંબંધ $f(x) = 2x + 1$, $x \in A$

(2) $P = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$, $S = \{10\}$, નિયમ $k(x) = 10$, $x \in P$

(3) $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{7}, \frac{13}{6}\}$, નિયમ $y = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \in A$

(4) $B = \{-1, 0, 1, 3\}$, $C = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$, નિયમ $h(x) = 2x + 3$, $x \in B$

(1) અહીં $x \in A$ માટે, ગણ B માં તેનું પ્રતિબિંબ (વિધેયાત્મક કિંમત) મેળવીએ.

$f(x) = 2x + 1$ છે.

$x = 1$ માટે $f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$x = 2$ માટે $f(2) = 2(2) + 1 = 5$

$x = 3$ માટે $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

$x = 4$ માટે $f(4) = 2(4) + 1 = 9$

આમ ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે ગણ B માં અનન્ય ઘટક મળે છે. એટલે કે ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B ના અનન્ય ઘટક સાથે નિયમ $2x + 1$ થી સંકળાયેલ છે. તેથી $f(x) = 2x + 1$ વિધેય છે.

(2) અહીં પ્રત્યેક $x \in P$ માટે $k(x) = 10$ છે.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 10$

$x = 0$ માટે $k(0) = 10$

$x = 1$ માટે $k(1) = 10$

આમ પ્રત્યેક $x \in P$ માટે ગણ S માં નિશ્ચિત પ્રતિબિંબ "10" મળે છે. તેથી સંબંધ $k(x) = 10$ એ વિધેય છે.

(3) પ્રત્યેક $x \in A$ માટે નિયમ $\frac{2x-1}{x+1}$ ની કિંમત મેળવતાં

$x = 2$ માટે $y = \frac{2(2)-1}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$x = 5$ માટે $y = \frac{2(5)-1}{5+1} = \frac{10-1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$x = 6$ માટે $y = \frac{2(6)-1}{6+1} = \frac{12-1}{7} = \frac{11}{7}$

આમ પ્રત્યેક $x \in A$ માટે ગણ B માં અનન્ય કિંમત મળે છે. તેથી નિયમ $y = \frac{2x-1}{x+1}$ ને વિધેય કહેવાય.

(4) અહીં પ્રત્યેક $x \in B$ માટે ગણ C માં પ્રતિબિંબ નિયમ $2x + 3$ દ્વારા મેળવીએ.

$x = -1$ માટે $h(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

$x = 0$ માટે $h(2) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = 1$ માટે $h(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$ જે ગણ C માં નથી.

આમ $x = 1$ માટેની પ્રતિબિંબિત કિંમત ગણ C માં નથી. તેથી નિયમ $h(x) = 2x + 3$ એ વિધેય નથી.

8.2 પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર (Domain, Co–domain and Range)

આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધેય બે ભિન્ન અરિક્ત ગણોના ઘટકો વચ્ચેનો અનન્ય સંબંધ છે. ગણ A કે જેના ઘટકો માટે ગણ B માં અનન્ય ઘટક કે પ્રતિબિંબ મેળવવામાં આવે છે. અહીં ગણ A ને પ્રદેશ અને ગણ B ને સહપ્રદેશ કહેવામાં આવે છે. પ્રદેશ ગણના ઘટક માટે વિધેયની જે પ્રતિબિંબિત કિંમત કે વિધેયાત્મક કિંમત મેળવવામાં આવે છે તે કિંમતોના ગણને તે વિધેયનો વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. વિધેયના પ્રદેશ ગણને D_f અને વિસ્તાર ને R_f વડે દર્શાવાય છે. ટૂંકમાં $R_f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ થાય. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ ગણ પોતે જ હોય છે. ઉપરના ઉદાહરણ 1ના (1) માં ગણ A એ વિધેયનો પ્રદેશ ગણ છે. જ્યારે ગણ B એ તેનો સહપ્રદેશ ગણ છે. અહીં જોઈ શકાય છે કે તેનો વિસ્તાર પણ ગણ B પોતે જ છે. જ્યારે (2)માં પ્રદેશ ગણ P અને સહપ્રદેશ ગણ કે વિસ્તાર એ ગણ S છે (3)ના પ્રદેશ ગણ A છે જ્યારે સહપ્રદેશ ગણ B છે અને વિસ્તાર ગણ $R_f = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{7}\right\}$ છે જે સહપ્રદેશ ગણ B નો ઉપગણ છે.

8.3 વિધેયના સંકેતો (Notations of Functions)

જો વિધેય f એ ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય હોય તો તેને સંકેતમાં $f: A \to B$ વડે દર્શાવાય છે અને શબ્દમાં તે વિધેય f એ ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય છે તેમ કહેવાય. અહીં ગણ A ને પ્રદેશ ગણ જ્યારે ગણ B ને સહપ્રદેશ ગણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ઉપરના ઉદાહરણ (1)ના સંબંધ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

(1) $f: A \to B$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ અને $f(x) = 2x + 1$, $x \in A$

(2) $k: P \to S$, $P = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$, $S = \{10\}$ અને $k(x) = 10$, $x \in P$

(3) $f: A \to B$, $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{7}, \frac{13}{6}\}$, $y = f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \in A$

(4) અહીં આપેલ સંબંધ વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ વિધેયો માટે તેમનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો :

(1) $f: A \to B$, $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f(x) = 2x + 5$, $x \in A$

(2) $g: A \to N$, $A = \{-1, 2, 3, 4\}$, $g(x) = 3x + 5$, $x \in A$

(3) $h: P \to S$, $P = \{-2, -1, 0, 1\}$, $S = \{-4, -3, -2, -1\}$, $h(x) = x - 2$, $x \in P$

(4) $k: A \to Z$, $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $k(x) = 4x^2 + 3$, $x \in A$

(1) પ્રદેશ $A = D_f = \{-1, 0, 1\}$

સહપ્રદેશ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$f(x) = 2x + 5$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x)$ મેળવીશું.

$x = -1$ માટે $f(-1) = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

$x = 0$ માટે $f(0) = 2(0) + 5 = 0 + 5 = 5$

$x = 1$ માટે $f(1) = 2(1) + 5 = 2 + 5 = 7$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{f(-1), f(0), f(1)\} = \{3, 5, 7\}$

(2) અહીં પ્રદેશ $A = D_f = \{-1, 2, 3, 4\}$

સહપ્રદેશ $B = N$

$g(x) = 3x + 5$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $g(x)$ મેળવીશું.

$x = -1$ માટે $g(-1) = 3(-1) + 5 = 2$

$x = 2$ માટે $g(2) = 3(2) + 5 = 11$

$x = 3$ માટે $g(3) = 3(3) + 5 = 14$

$x = 4$ માટે $g(4) = 3(4) + 5 = 17$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{2, 11, 14, 17\}$ જે સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ છે.

(3) પ્રદેશ $A = P = D_f = \{-2, -1, 0, 1\}$

સહપ્રદેશ $B = S = \{-4, -3, -2, -1\}$

$h(x) = x - 2$, પ્રત્યેક $x \in P$ માટે $h(x)$ મેળવીશું.

$x = -2$ માટે $h(-2) = -2 - 2 = -4$

$x = -1$ માટે $h(-1) = -1 - 2 = -3$

$x = 0$ માટે $h(0) = 0 - 2 = -2$

$x = 1$ માટે $h(1) = 1 - 2 = -1$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{-4, -3, -2, -1\}$

અહીં વિધેયનો વિસ્તાર અને સહપ્રદેશ સમાન છે.

(4) અહીં પ્રદેશ A = $D_f = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

સહપ્રદેશ B = Z

વિધેય $k(x) = 4x^2 + 3$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $k(x)$ મેળવીશું.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$x = 0$ માટે $k(0) = 4(0)^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = \frac{1}{2}$ માટે $k\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$\therefore$ વિધેયનો વિસ્તાર $R_f = \{3, 4\}$

અહીં વિધેયનો વિસ્તાર એ તેના સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિધેયોના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જાણવો :

(1) $f : A \to N$, $f(x) = x^2 + 1$, $A = \{x \mid -2 \le x < 1, x \in Z\}$

(2) $f : Z \to N$, $f(x) = x^2 + 2$, $x \in Z$

(3) $f : N \to N$, $f(x) = 4x$, $x \in N$

(1) પ્રદેશ $D_f = A = \{-2, -1, 0\}$

સહપ્રદેશ B = N

વિધેય $f(x) = x^2 + 1$

$x = -2$ માટે $f(-2) = 4 + 1 = 5$

$x = -1$ માટે $f(-1) = 1 + 1 = 2$

$x = 0$ માટે $f(0) = 0 + 1 = 1$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{5, 2, 1\}$

(2) પ્રદેશ $D_f = A = Z$

સહપ્રદેશ B = N

વિધેય $f(x) = x^2 + 2$ માટેનો વિસ્તાર

$R_f = \{......, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), ...\}$ થશે.

$= \{......, 2, 3, 6, 11, ...\}$ થશે.

(3) પ્રદેશ $D_f = A = N$

સહપ્રદેશ B = N

$f(x) = 4x$

વિસ્તાર $R_f = \{f(1), f(2), f(3), f(4), ...\}$

$= \{4, 8, 12, 16, ...\}$

પ્રવૃત્તિ

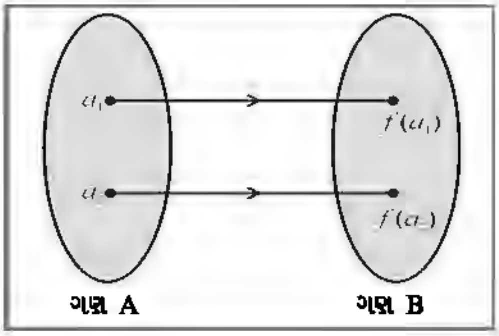
તમે જોયેલી છેલ્લી ક્રિકેટ મેચમાં પાંચ બૉલરનાં નામ દર્શાવતો ગણ રચો. તેમજ મેચમાં તેને મળેલી શક્ય વિકેટોની સંખ્યા દર્શાવતો ગણ બનાવો અને આ માહિતી પરથી બૉલર અને તેને મળેલી વિકેટની સંખ્યા વચ્ચેના સંબંધને વિધેય કહેવાય ? જો હા તો આ વિધેય માટે તેનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

8.4 વિધેયના પ્રકારો (Types of Function)

વિધેયના અનેક પ્રકારો છે. તેમાંથી મુખ્ય ત્રણ પ્રકારો નીચે મુજબ છે :

(1) એક-એક વિધેય (2) અનેક-એક વિધેય (3) અચળ વિધેય

8.4.1 એક-એક વિધેય (one–one function)



ધારો કે $f: A \rightarrow B$, પ્રદેશ ગણ A ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો માટે સહપ્રદેશ ગણમાં મળતાં પ્રતિબિંબો કે વિધેયાત્મક કિંમતો ભિન્ન હોય, તો તે વિધેય f ને એક-એક વિધેય કહે છે.

એટલે કે વિધેય $f: A \rightarrow B$ માટે જો $a_1 \neq a_2$ તથા $a_1, a_2 \in A$ માટે જો $f(a_1) \neq f(a_2)$ થતું હોય, તો વિધેય f ને એક-એક વિધેય કહેવાય.

દા.ત., $g : X \rightarrow Y$ જ્યાં $X = \{-2, -1, 0\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ અને $g(x) = x + 2$ છે.

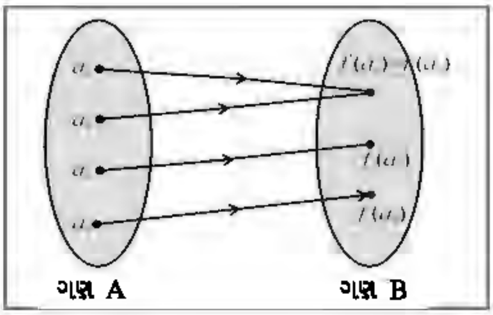
હવે $x = -2$ માટે $g(-2) = 0$

$x = -1$ માટે $g(-1) = 1$

$x = 0$ માટે $g(0) = 2$

આમ $a_1 \neq a_2$ માટે $g(a_1) \neq g(a_2)$ મળે છે. એટલે કે પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે સહપ્રદેશમાં તેના પ્રતિબિંબ ભિન્ન મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય g એ એક-એક વિધેય છે.

8.4.2 અનેક-એક વિધેય (many–one function)



ધારો કે $f: A \rightarrow B$, પ્રદેશ ગણ A ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો માટે સહપ્રદેશ ગણમાં મળતાં પ્રતિબિંબો કે વિધેયાત્મક કિંમતો સમાન હોય, તો તે વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

એટલે કે $f: A \rightarrow B$ માટે જો $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ માટે જો $f(a_1) = f(a_2)$ થતું હોય, તો વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

દા.ત., $f: A \rightarrow B$, $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ અને $B = \{2, 5\}$, $f(x) = x^2 + 1$ છે. તો પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક કિંમત માટે તેમની વિધેયાત્મક કિંમત મેળવો,

$x = -2$ માટે $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

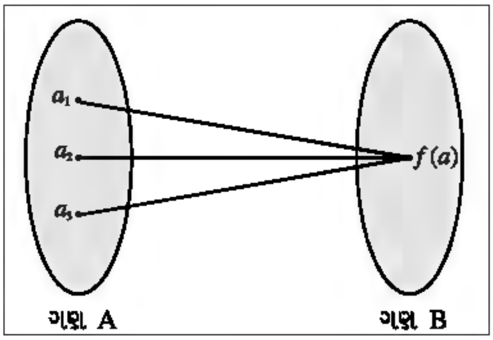
$x = -1$ માટે $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$x = 1$ માટે $f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$x = 2$ માટે $f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

આમ $a_1 \neq a_2$ માટે $f(a_1) = f(a_2)$ મળે છે એટલે કે પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય f એ અનેક-એક વિધેય છે.

8.4.3 અચળ વિધેય (constant function)



ધારો કે $f: A \rightarrow B$ છે. જો પ્રદેશ ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે સહપ્રદેશ ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબ મળતું હોય, તો વિધેય f ને અચળ વિધેય કહે છે.

દા.ત., $f = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ અને $f(x) = 5$ છે એટલે કે x ની કિંમત અનુક્રમે 1, 2 અને 3 લેતાં $f(x)$ની કિંમત 5 જ મળશે. તેથી વિધેય f એ અચળ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 4 : જો f : N→N અને $f(x) = x^2$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

પ્રદેશ ગણ D_f = N = {1, 2, 3, ...}

સહપ્રદેશ ગણ B = N = {1, 2, 3, ...}

$f(x) = x^2$ માં x = 1, 2, 3, ... લેતાં તેનાં પ્રતિબિંબ 1, 4, 9,... વગેરે મળે.

આમ, પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે સહપ્રદેશમાં ભિન્ન પ્રતિબિંબો મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 5 : જો f : Z→N ∪ {0} અને $f(x) = x^2$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

પ્રદેશ ગણ D_f = Z = {... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

સહપ્રદેશ ગણ B = N ∪ {0} = {0, 1, 2, 3, ...}

x = –2, –1, 0, 1, 2 લેતાં વિધેયની કિંમત અનુક્રમે 4, 1, 0, 1, 4 મળશે.

આમ, પ્રદેશ ગણની બે ભિન્ન કિંમતો {–2, 2} અને {–1, 1} માટેનાં પ્રતિબિંબો સમાન મળે છે. તેથી તે અનેક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 6 :

(i) f : Z→R અને $f(x)$ = 100 હોય તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ ગણ A = D_f = Z = {....., –2, –1, 0, 1, 2, ...} અને સહપ્રદેશ ગણ B = R છે. પ્રદેશ ગણની કોઈ પણ કિંમત માટે સહપ્રદેશ ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબિત કિંમત 100 મળે છે.

તેથી આપેલ વિધેય f અચળ વિધેય છે.

(ii) કોઈ એક મહિનાની તારીખો અને વાર વચ્ચેના વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.

એક મહિનામાં ચાર અઠવાડિયાં પૂરાં હોય તેથી અઠવાડિયાના વાર મહિનાની તારીખ પ્રમાણે ઓછામાં ઓછા ચાર વખત પુનરાવર્તિત થાય.

તેથી તે અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા પાંચ મિત્રોનાં નામનો ગણ અને તેમના કુટુંબના સભ્યોની સંખ્યા વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતા વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.

8.5 વિધેયોની સમાનતા (Equal Functions)

બે ભિન્ન વિધેયો f અને g નીચેની શરતોનું સમાધાન કરે તો તેમને સમાન વિધેયો કહેવામાં આવે છે. સંકેતોમાં તેને $f = g$ વડે દર્શાવાય છે.

(1) બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ સમાન હોવા જોઈએ એટલે કે બંને વિધેયો એક જ પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવા જોઈએ.

(2) પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક ઘટક x માટે $f(x) = g(x)$ થવું જોઈએ. એટલે કે પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમત માટે તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોવા જોઈએ.

સંકેતમાં સમાન વિધેયની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય :

જો f : A → B અને g : A → C હોય તેમજ પ્રત્યેક $x \in$ A માટે $f(x) = g(x)$ થાય તો $f = g$ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : જો f = N → N, $f(x) = x^2$ અને g = Z – {0} → N, $g(x) = x^2$ છે, તો શું f અને g સમાન વિધેયો છે ?

વિધેય f નો પ્રદેશ ગણ D_f = A = N

વિધેય g નો પ્રદેશ ગણ D_f = A = Z – {0}

બંને વિધેયો જુદા જુદા પ્રદેશ ગણ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી તે સમાન વિધેયો નથી.

ઉદાહરણ 8 : f : A→B, A = {1, 3}, B = {1, 4, 9, 16}, $f(x) = x^2$ છે. તેમજ g : A→B, A = {1, 3}, B = {1, 4, 7, 9, 11} $g(x) = 4x - 3$ છે, તો f અને g વિધેયોની સમાનતા ચકાસો.

અહીં બંને વિધેયો એક જ પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

તેમજ $x = 1, f(1) = 1^2,$ $g(1) = 4(1) - 3$

$= 1$ $= 1$

$x = 3, f(3) = 3^2,$ $g(3) = 4(3) - 3$

$= 9$ $= 9$

આમ, પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = g(x)$ છે. તેથી f અને g સમાન વિધેયો છે.

ઉદાહરણ 9 : $f : A \rightarrow B, f(x) = 1 - 4x$ તથા $g : A \rightarrow C, g(x) = 6x + 1$ અને $A = \{0, 1, 2\}$ તો શું f અને g સમાન વિધેયો છે ?

અહીં બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ સમાન છે.

$x = 0$ માટે $f(0) = 1 - 4(0) = 1$ અને $g(0) = 6(0) + 1 = 1$

$x = 1$ માટે $f(1) = 1 - 4(1) = -3$ અને $g(1) = 6(1) + 1 = 7$

આમ, $f(1) \neq g(1)$ તેથી f અને g સમાન વિધેયો નથી.

8.6 વાસ્તવિક વિધેય (Real Function)

જો $f : A \rightarrow B$ જ્યાં $A \subset R$ હોય તો વિધેય f ને વાસ્તવિક ચલનું વિધેય કહે છે અને જો તેનો વિસ્તાર પણ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R પર વ્યાખ્યાયિત હોય, તો f ને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે. દા.ત., $f : Z \rightarrow R$ માટે પ્રદેશ ગણ Z એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ છે જ્યારે તેનો સહપ્રદેશ ગણ R જે વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ પોતે જ છે. તેથી વિધેય f વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય. ટૂંકમાં જે વિધેયનો પ્રદેશ ગણ અને સહપ્રદેશ ગણ એ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R કે તેના કોઈ પણ ઉપગણ હોય, તો તે વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $f(x)$ $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$ જ્યાં $x \in Z - \{1\}$ હોય, તો $f(-2), f(-1)$ અને $f(0)$ મેળવો.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^3 + 1}{(-2)^2 - 2(-2) + 1}; \qquad f(-1) = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 - 2(-1) + 1}$$

$$= \frac{-8 + 1}{4 + 4 + 1} \qquad = \frac{-1 + 1}{1 + 2 + 1}$$

$$= -\frac{7}{9} \qquad = \frac{0}{4}$$

$$= 0$$

$$f(0) = \frac{0^3 + 1}{0^2 - 2(0) + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

ઉદાહરણ 11 : જો $f(x) = x^3 + 3^x - x^2 - 2^x$ હોય તો $f(3) - 6f(2)$ ની કિંમત શોધો.

$f(x) = x^3 + 3^x - x^2 - 2^x$

$f(3) = (3)^3 + 3^3 - (3)^2 - (2)^3$ અને $f(2) = 2^3 + 3^2 - 2^2 - 2^2$

$= 27 + 27 - 9 - 8$ $= 8 + 9 - 4 - 4$

$= 37$ $= 9$

$\therefore \quad f(3) - 6f(2) = 37 - 6(9)$

$= 37 - 54$

$= -17$

ઉદાહરણ 12 : વિધેય $f(x) = x(2x - 7)$ જ્યાં $x \in R$ છે. જો $f(x) = 15$ હોય, તો x ની કિંમત મેળવો.

$f(x) = 15$

$\therefore \quad x(2x - 7) = 15$

$\therefore \quad 2x^2 - 7x - 15 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + 3x - 10x - 15 = 0$

$\therefore \quad x(2x + 3) - 5(2x + 3) = 0$

$\therefore \quad (2x + 3)(x - 5) = 0$

$\therefore \quad (2x + 3) = 0$ અથવા $(x - 5) = 0$

$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}$ અથવા $x = 5$

ઉદાહરણ 13 : જો $f(x) = x^2 - 4x + 8$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(2x) = 2f(x)$ થાય ?

$f(x) = x^2 - 4x + 8$

$\therefore \quad f(2x) = (2x)^2 - 4(2x) + 8$

$= 4x^2 - 8x + 8$

હોય, $f(2x) = 2f(x)$

$\therefore \quad 4x^2 - 8x + 8 = 2x^2 - 8x + 16$

$\therefore \quad 2x^2 - 8 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 4 = 0$

$\therefore \quad x^2 = 4$

$\therefore \quad x = \pm 2$

$\therefore$ જ્યારે $x = \pm 2$ હોય ત્યારે $f(2x) = 2f(x)$ થાય.

સારાંશ

- બે અરિક્ત ગણોના ઘટકો વચ્ચેના અનન્ય સંબંધને વિધેય કહેવાય.
- વિધેય $f : A \to B$ હોય તો ગણ A ને પ્રદેશ જ્યારે ગણ B ને સહપ્રદેશ કહેવામાં આવે છે.
- પ્રદેશ ગણની પ્રત્યેક કિંમત માટે મળતી પ્રતિબિંબિત કિંમતોના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે.
- વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ પોતે જ હોય છે.
- વિધેયના પ્રદેશની ભિન્ન કિંમતો માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો પણ ભિન્ન હોય, તો તેને એક-એક વિધેય કહે છે.
- વિધેયના પ્રદેશની કોઈ બે કે તેથી વધુ ભિન્ન કિંમતો માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોય તો તેને અનેક-એક વિધેય કહે છે.
- વિધેયના પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમત માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન જ રહે તો તેને અચળ વિધેય કહે છે.
- સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલ તેમજ પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમતો માટે જો બે ભિન્ન વિધેયોનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોય, તો તેમને સમાન વિધેયો કહે છે.
- જો વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R નો ઉપગણ હોય, તો વિધેય f ને વાસ્તવિક ચલનું વિધેય કહે છે.
- જો વિધેયનો પ્રદેશ અને તેનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R પર વ્યાખ્યાયિત હોય, તો તેને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

સ્વાધ્યાય 8

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુ વિકલ્પ પ્રશ્ન માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચે આપેલ વિધાનો પૈકી ક્યાં વિધાનો સાચાં છે ?

(a) $f : \{ 1, 2, 3, 4 \} \rightarrow \{ 3, 4, 5 \}$, 'પ્રદેશ ગણની કિંમતમાં 2 નો વધારો કરો' આ નિયમ વિધેય નથી.

(b) $f : A \rightarrow B$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2 \}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, માટે $f(x) = x^2$ વિધેય નથી.

(c) $g : P \rightarrow Q$, $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{- \frac{1}{3}\ -1, 3\}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ છે, તો g ને વિધેય કહી શકાય.

(d) $g : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ માટે $g(x) = 4x - 3$ વિધેય છે.

2. વિધેય $f: A \rightarrow B$ માટેના વિસ્તાર માટે નીચેના વિધાનોપૈકી કયું વિધાન સાચું છે.

(a) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (b) સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ કે સહપ્રદેશ પોતે ન હોય

(c) પ્રદેશ તેનો વિસ્તાર હોય છે. (d) $f(A) = \{f(x) \mid x \in B\}$

3. $g : X \rightarrow Y$, $X = \{-1, 0\}$, $Y = \{2, 4\}$, $g(x) = 4 - 2x$. આ પરથી જણાવો કે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે.

(a) g ને વિધેય કહી શકાય. (b) g ને વિધેય ના કહી શકાય.

(c) X ને વિધેય કહી શકાય. (d) Y ને વિધેય કહી શકાય.

4. $f : A \rightarrow B$ માટે પ્રદેશ ગણ A માંની કોઈ બે ભિન્ન કિંમતો માટે વિધેયાત્મક કિંમત સમાન મળે તો તે સંબંધને શું કહેવાય ?

(a) એક-એક વિધેય કહેવાય. (b) અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

(c) એક-અનેક વિધેય કહેવાય. (d) અનેક-અનેક વિધેય કહેવાય.

5. $f : A \rightarrow B$ માટે ગણ A ની પ્રત્યેક કિંમત માટે ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબ મળતું હોય તેને કેવા પ્રકારનું વિધેય કહેવાય ?

(a) વિધેય ન કહેવાય. (b) એક-એક વિધેય (c) અચળ વિધેય કહેવાય. (d) અનેક-એક વિધેય

6. એક-એક વિધેય માટે નીચેનાં પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) પ્રદેશની ફક્ત બે જ કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો ભિન્ન હોવાં જોઈએ.

(b) પ્રદેશની કોઈ બે કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો સમાન હોવાં જોઈએ.

(c) પ્રદેશની કોઈ બે ભિન્ન કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો ભિન્ન હોવાં જોઈએ.

(d) પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો સમાન હોવાં જોઈએ.

7. $f : Z - \{0\} \rightarrow N$ અને $f(x) = x^2$, $x \in Z - \{0\}$ એ કયા પ્રકારનું વિધેય છે ?

(a) એક-એક વિધેય છે. (b) અનેક-એક વિધેય છે. (c) અચળ વિધેય છે. (d) $f(x)$ એ વિધેય નથી.

8. બે ભિન્ન વિધેયો સમાન થાય તે માટે નીચેની પૈકી કઈ શરત પર્યાપ્ત છે ?

(a) બંને વિધેયોનો પ્રદેશ સમાન હોવા જોઈએ. (b) બંને વિધેયોના વિસ્તાર સમાન હોવા જોઈએ.

(c) (a) અને (b) (d) (a) અથવા (b)

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિધેય વ્યાખ્યાયિત થવા માટેની જરૂરી શરત જણાવો.
2. $f : A \rightarrow B$, $A = \{-3\ -1, 1, 3\}$, $B = \{1, 0, 9\}$, $f(x) = x^2$. શું f એ વિધેય છે ?
3. $g : N \rightarrow N$, પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક ઘટકમાંથી 2 બાદ કરો. આ નિયમને વિધેય કહી શકાય ?
4. એક-એક વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.
5. અનેક-એક વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.
6. અચળ વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.
7. $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow N$, $g : \{2, 3, 4\} \rightarrow N$, $f(x) = 2x + 1$ અને $g(x) = x - 1$
   f અને g સમાન વિધેય છે ? શા માટે ?
8. વિધેય $f : Z \rightarrow N$, $f(t) = t^2 + 1$ $t \in Z$ છે, તો f નો પ્રકાર નક્કી કરો.
9. વિધેય $f : N \rightarrow N$, $f(t) = t^2 + 1$ $t \in N$ છે, તો f નો પ્રકાર નક્કી કરો.
10. વાસ્તવિક ચલનું વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.
2. વિધેયના પ્રદેશ અને સહપ્રદેશની વ્યાખ્યા આપો.
3. વિધેયના વિસ્તાર વ્યાખ્યાયિત કરો.
4. વિધેય $g : A \rightarrow N$, $A = \{x \mid x \in N, 1 < x \leq 4\}$ $g(x) = x + 1$ નો વિસ્તાર શોધો.
5. $k : X \rightarrow Y$ માટે $X = \{t \mid t \in Z, -3 \leq t \leq 3\}$, $Y = \{a \mid a \in N, 1 \leq a \leq 20\}$, $k(t) = t^2 + 2$ હોય તો વિધેય k નો પ્રકાર જણાવો.
6. $h : A \rightarrow B$ માટે $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $h(x) = x + 5$ માટે વિધેય h નો પ્રકાર જણાવો.
7. જો $P : A \rightarrow B$, $P(x) = 2x - 3$ અને $R_f = \{-2, -1, 0\}$ હોય, તો વિધેયનો પ્રદેશ ગણ મેળવો.
8. જો $f : R \rightarrow R - \{-1, 1\}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{1-x^2}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ હોય તો $f(2) - f(-2)$ ની કિંમત મેળવો.
9. જો $f : N \rightarrow N$, $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$ નો પ્રદેશગણ $\{0, 3, 6\}$ હોય, તો તેનો વિસ્તાર શોધો.
10. જો વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$ હોય, તો $f(3) - f(2)$ની કિંમત મેળવો.
11. જો $f : R \rightarrow R$ તેમજ $f(x) = x^2 + 2x - 1$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.
12. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = \frac{2x-4}{x+7}$ માટે x ની કઈ કિંમત માટે પ્રતિબિંબ શૂન્ય મળે.
13. $f : Z - \{2\} \rightarrow Z$, $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.
14. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = 6x^3 - 5^x + 15$ માટે $f(0)$ની કિંમત શોધો.
15. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$ માટે $f(3) + f(-3)$ ની કિંમત શોધો.

વિભાગ D

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. $f : A \rightarrow B$, $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{18, 48, 98, 128, 148\}$, $f(x) = 5x - 2$ માટે પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2. $f : P \rightarrow Q$, $P = \left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $Q = \left\{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\right\}$, $f(x) = \frac{x}{2-x}$ માટે પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

3. જો $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ હોય, તો $f(-1)$, $f(-2)$ અને $f\left(\frac{1}{2}\right)$ની કિંમત મેળવો.

4. જો વિધેય $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 4x - 3$ માટે $R_f = \{9, 13, 17, 25\}$ હોય તો D_f મેળવો.

5. જો વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(3x) - 3f(x) + 5 = 0$ થાય ?

6. જો $f : A \rightarrow M$, $A = \{x \mid x \in N, 1 \le x < 5\}$ અને $M = \{x \mid x \in N, 1 \le x \le 20\}$ તેમજ $f(x) = x^2 + 1$ હોય, તો વિધેય f નો વિસ્તાર શોધો.

7. જો $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ જ્યાં $x \in Z - \{2\}$ હોય, તો $f(0) + f(1) - f(-2)$ની કિંમત શોધો.

8. વિધેય $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ નો પ્રદેશ $\{4, 5\}$ હોય, તો તેનો વિસ્તાર શોધો.

9. જો $f(x) = x^2$ અને $g(x) = 5x - 6$ જ્યાં $x \in \{2, 3, 4,\}$ છે, તો બંને વિધેયોની સમાનતા ચકાસો.

10. જો $k : R \rightarrow R$ તેમજ $k(x) = x^2 + 3x - 12$ હોય તો વિધેય k નો પ્રકાર જણાવો.

11. જો $f(x) = x(3x-2)$ તેમજ $g(x) = x^3$ અને $x \in \{0, 1, 2,\}$ હોય તો સાબિત કરો કે f અને g સમાન વિધેયો છે.

12. જો $f(x) = \frac{2x+3}{5x+2}$, $x \in R$ હોય, તો $f(2) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ ની કિંમત મેળવો.

13. જો $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, $x \in R$ હોય, તો $f(3) + f(-3)$ ની કિંમત મેળવો.

14. જો $f(x) = 15x^3 - 4x^2 + x + 10$, $x \in R$ હોય, તો $\frac{f(2)}{f(1)}$ ની કિંમત મેળવો.

15. જો $f(x) = \sqrt{5600-4x}$, $x \in R$ છે. $x = 1000$ હોય ત્યારે $f(x)$ મેળવો તેમજ x ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = 20$ થશે ?

Pierre-Simon Laplace
(1749 - 1827)

Pierre-Simon Laplace : He was an influential French scholar whose work was important to the development in the fields of mathematics, statistics, physics, and astronomy. His work translated the geometric study of classical mechanics to one based on calculus, opening up a broader range of problems in statistics. He was pioneer in the development of classical probabity theory. The Bayesian interpretation of probability was developed by Laplace.

●

Geometric Progreassion in Nature

Bacteria such as Shewanella Oneidensis Multiply by doubling their population in size after as little as 40 minutes. A geometric progression such as this, where each number is double the previous number produces a rapid increase in the population in a very short time.

9

ગુણોત્તર-શ્રેણી
(Geometric Progression)

વિષયવસ્તુ :

9.1 અર્થ
9.2 *n* મું પદ મેળવવાનું સૂત્ર
9.3 શ્રેઢીનો અર્થ
9.4 ત્રણ ક્રમિક પદો

9.1 અર્થ (Meaning)

શ્રેણી એટલે કોઈ ચોક્કસ નિયમને અનુસરતી સંખ્યાઓની ગોઠવણી. શ્રેણીના અલગ-અલગ પ્રકાર હોય છે. આપણે સમાંતર શ્રેણીનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ. જે શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત સરખો અને શૂન્યેતર હોય તેને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. દા.ત., 3, 6, 9, 12, ...

હવે આપણે બીજી શ્રેણી ગુણોત્તર-શ્રેણી વિશે અભ્યાસ કરીશું.

ધારો કે આપણે 3, 6, 12, 24, ... શ્રેણી લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 છે. જો પ્રથમ પદ 3 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $3 \times 2 = 6$ મળે છે જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 6 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $6 \times 2 = 12$ મળે છે જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીનાં ક્રમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = 2, \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = 2, \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = 2, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

બીજી શ્રેણી 4, −12, 36, − 108, ... લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે. જો પ્રથમ પદ 4 ને (−3) વડે ગુણીએ તો આપણને $4 \times (-3) = -12$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ (−12) ને (−3) વડે ગુણીએ તો આપણને $(-12) \times (-3) = 36$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીના ક્રમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

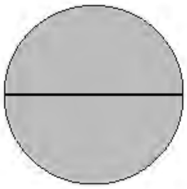
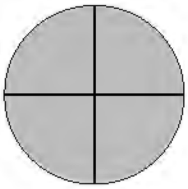
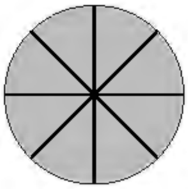
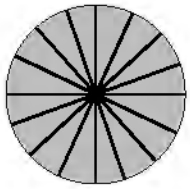
$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = -3$, આ જ રીતે આગળ

હજુ એક શ્રેણી 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 છે. જો પ્રથમ પદ 2 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $2 \times \frac{1}{2} = 1$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 1 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીનાં ક્રમિક પદોથી મળતાં નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = \frac{1}{2}$, આ જ રીતે આગળ

ઉપર તપાસેલ ત્રણ શ્રેણીઓ પૈકીની દરેક શ્રેણીમાં જોઈ શકાય છે કે $n \geq 1$ માટે શ્રેણીનાં $(n+1)$ મા પદ અને n મા પદના ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ છે. આવી શ્રેણીને **ગુણોત્તર-શ્રેણી** કહેવાય.

				
વ્યાસની સંખ્યા	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$

ઉપર્યુક્ત આકૃતિઓમાં વ્યાસની સંખ્યા અનુક્રમે 1, 2, 4, 8, ... છે, જે ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

તેમજ વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા અનુક્રમે : 2, 4, 8, 16, ... છે, તે પણ ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના કેટલાક વ્યવહારિક ઉદાહરણો

ધારો કે એક ધનિક વ્યક્તિની સંપત્તિ આશરે 200 કરોડ રૂપિયા છે અને તે દર 5 વર્ષે બમણી થાય છે.

હાલની સંપત્તિ 200 કરોડ છે અને પ્રથમ 5 વર્ષના અંતે બમણી થાય છે તેથી પ્રથમ 5 વર્ષ બાદ તે સંપત્તિ $200 \times 2 = 400$ કરોડ રૂપિયા થશે. હવે બીજાં 5 વર્ષના અંતે સંપત્તિ ફરીથી બમણી થતાં તે $400 \times 2 = 800$ કરોડ રૂપિયા થશે. આમ તેની સંપત્તિ અનુક્રમે 200, 400, 800, ... (કરોડમાં) થશે, જે 2 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.

એક વ્યક્તિ ₹ 10,000 બૅન્કમાં જમા કરાવે છે. બૅન્ક તેને તેના રોકાણ પર વાર્ષિક 10 % ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ આપે છે. એટલે કે તેની જમા રાશિ દર વર્ષે 10 ટકાના દરે વધશે.

બૅન્કમાં જમા કરાવેલ રકમ ₹ 10,000 છે અને બૅન્ક 10 % વ્યાજ આપે છે તેથી એક વર્ષ બાદ 10,000 + 1000 (10,000 ના 10 %) = ₹ 11, 000 થશે. હવે બૅન્ક ₹11,000 ઉપર 10 % વ્યાજ આપશે તેથી બીજા વર્ષના અંતે તે 11,000 + 1100 = ₹ 12,100 થશે. તે જ રીતે ત્રીજા વર્ષના અંતે 12,100 + 1210 (12,100 ના 10 %) = ₹ 13310 થશે. આમ, 10000, 11000, 12100, 13310, ... જે 1.1 ગુણોત્તર વાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.

કોઈ એક જગ્યાએ ક્રૂડ ઑઈલનો 50 લાખ મેટ્રિક ટન જથ્થો છે અને તે દર વર્ષે 10 % ઘટે છે.

હાલનો ક્રૂડ ઑઈલનો જથ્થો 50 લાખ મેટ્રિક ટન છે. ક્રૂડ ઑઈલનો જથ્થો દર વર્ષે 10 % ઘટે છે તેથી પ્રથમ વર્ષના અંતે 5000000–500000 (5000000 ના 10 %) = 4500000 મેટ્રિક ટન થશે. બીજા વર્ષના અંતે 4500000 – 450000 (4500000 ના 10 %)= 4050000 મેટ્રિક ટન થશે. આમ, 5000000, 4500000, 4050000....જે 0.9 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે.

9.2 nમું પદ મેળવવાનું સૂત્ર (Formula for obtaining n^{th} term)

જો a અને r શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો ધનપૂર્ણાંક $n \geq 1$ માટે જે શ્રેણીનું n મું પદ $T_n = ar^{n-1}$ હોય તે શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહે છે. a ને શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને r ને શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર (common ratio) કહે છે.

આમ, ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો $a, ar, ar^2 ar^3, ...$ છે અને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેણીનું સામાન્ય પદ કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 7 અને 2 હોય તો છઠ્ઠું પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 7$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે અને છઠ્ઠું પદ શોધવાનું છે. એટલે કે, $n = 6$.

a, r અને n ની કિંમતોને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_6 = 7 \times (2)^{6-1}$$
$$= 7 \times (2)^5$$
$$= 7 \times 32$$
$$= 224$$

આમ, શ્રેણીનું છઠ્ઠું પદ 224 છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર અને પાંચમું પદ અનુક્રમે 3 અને 324 હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 3$ અને પાંચમું પદ 324 છે. અહીં $T_5 = 324$ અને પ્રથમપદ એટલે કે a શોધવાનું છે

અહીં $T_5 = 324$ છે.

$\therefore \quad ar^{5-1} = 324 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad a\,(3)^4 = 324 \qquad (\because r = 3)$

$\therefore \quad a \times 81 = 324$

$\therefore \quad a = \frac{324}{81} = 4$

આમ, શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે.

ઉદાહરણ 3 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ અને ચોથું પદ અનુક્રમે 5 અને 40 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 5$ અને ચોથું પદ 40 છે. અહીં $T_4 = 40$ અને આપણે સામાન્ય ગુણોત્તર r શોધવાનો છે.

અહીં $T_4 = 40$ છે.

$\therefore \quad ar^{4-1} = 40 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad 5 \times r^3 = 40 \qquad (\because a = 5)$

$\therefore \quad r^3 = \frac{40}{5} = 8$

$\therefore \quad r = 2$

આમ, શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 4 અને –2 છે. જો શ્રેણીનું n મું પદ –128 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ $a = 4$, સામાન્ય ગુણોત્તર $r = -2$ અને n મું પદ -128 એટલે કે $T_n = -128$ છે.

અહીં $T_n = -128$

$\therefore \quad ar^{n-1} = -128 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad 4 \times (-2)^{n-1} = -128 \qquad (\because a = 4$ અને $r = -2)$

$\therefore \quad (-2)^{n-1} = \frac{-128}{4} = -32$

$\therefore \quad (-2)^{n-1} = (-2)^5$

બંને બાજુની ઘાતને સરખાવતાં,

$n - 1 = 5$

$\therefore \quad n = 6$

ઉદાહરણ 5 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ચોથું અને સાતમું પદ અનુક્રમે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{3}{32}$ હોય તો દસમું પદ શોધો.

ધારો કે ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $= a$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $= r$ છે.

આપણને $T_4 = \frac{3}{4}$ અને $T_7 = \frac{3}{32}$ આપેલ છે.

આમ $\frac{T_7}{T_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = r^3$ અને $\frac{T_7}{T_4} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{32} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{8}$

$\therefore \quad r^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\therefore \quad r = \frac{1}{2}$

હવે $r = \frac{1}{2}$ ને $T_4 = ar^3 = \frac{3}{4}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad a \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a = \frac{3}{4} \times 8$

$\therefore \quad a = 6$

હવે શ્રેણીનું દસમું પદ શોધવાનું છે અહીં, $n = 10$.

a, r અને n ની કિંમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_{10} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= 6 \times \frac{1}{512}$$

$$= \frac{3}{256}$$

આમ, શ્રેણીનું 10 મું પદ $\frac{3}{256}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 9, –6, 4, ... નું 5 મું પદ શોધો.

અહીં $a = 9$ અને $r = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$ છે. 5 મું પદ શોધવાનું છે એટલે કે $n = 5$

a, r અને n ની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતા

$$T_5 = 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{5-1}$$

$$= 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^4$$

$$= 9 \times \frac{16}{81}$$

$$= \frac{16}{9}$$

આમ, શ્રેણીનું 5 મું પદ $\frac{16}{9}$ છે.

ઉદાહરણ 7 : ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ...નું આઠમું પદ શોધો.

અહીં $a = \frac{1}{8}$ અને $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$. આઠમું પદ શોધવાનું છે એટલે કે $n = 8$

a, r અને n ની કિંમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_8 = \frac{1}{8} \times (2)^{8-1}$$
$$= \frac{1}{8} \times (2)^7$$
$$= \frac{1}{8} \times 128$$
$$= 16$$

આમ, શ્રેણીનું આઠમું પદ 16 છે.

ઉદાહરણ 8 : જો કોઈ એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું બીજું પદ 4 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.

ધારો કે, પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે.

અહીં બીજું પદ 4 છે એટલે કે $T_2 = 4$.

હવે $n = 1$, $n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં

$T_1 = a$, $T_2 = ar$ અને $T_3 = ar^2$ મળે છે.

આમ, $T_1 \times T_2 \times T_3 = a \times ar \times ar^2$

$$= a^3 \times r^3$$
$$= (ar)^3$$
$$= (4)^3 \qquad (\because T_2 = ar = 4)$$
$$= 64$$

આમ, શ્રેણીના પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 64 થાય છે.

ઉદાહરણ 9 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર અનુક્રમે 3 અને 216 છે. તો શ્રેણીનું 7 મું પદ શોધો.

શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 છે એટલે કે $a = 3$.

હવે $n = 1$, $n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં $T_1 = a$, $T_2 = ar$ અને $T_3 = ar^2$ મળે છે.

પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 216 આપેલ છે.

એટલે કે $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$ છે.

હવે, $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$

$\therefore \quad a \times ar \times ar^2 = 216$

$\therefore \quad a^3 \times r^3 = 216$

$\therefore \quad 3^3 \times r^3 = 216 \qquad (\because a = 3)$

$\therefore \quad 27 \times r^3 = 216$

$\therefore \quad r^3 = \frac{216}{27} = 8$

$\therefore \quad r = 2$

તેથી શ્રેણીનું સાતમું પદ $T_7 = ar^6$

$\therefore$ $T_7 = 3 \times (2)^6$
$= 3 \times 64$
$= 192$

આમ, શ્રેણીનું સાતમું પદ 192 છે.

ઉદાહરણ 10 : જો સંખ્યાઓ 2, G, 50 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તો G ની કિંમત શોધો.

અહીં $T_1 = 2$, $T_2 = G$ અને $T_3 = 50$ છે.

સામાન્ય ગુણોત્તર = $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$

$\therefore$ $\frac{G}{2} = \frac{50}{G}$

$\therefore$ $G^2 = 100$

$\therefore$ $G = \pm 10$

$\therefore$ $G = 10$ અથવા -10

ઉદાહરણ 11 : જો સંખ્યાઓ a, b, c, d માટે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ હોય તો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તેમ બતાવો.

ધારો કે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = r$, જ્યાં r એક શૂન્યેતર અચલ છે.

$\therefore$ $b = ar$, $c = br$, $d = cr$

$\therefore$ $c = (ar)\, r = ar^2$ અને $d = (ar^2)\, r = ar^3$

જો $T_1 = a$, $T_2 = b = ar$, $T_3 = c = ar^2$, $T_4 = d = ar^3$

લઈએ તો T_1, T_2, T_3, T_4 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. આમ a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 12 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.008, 0.016, 0.032, ...નું કેટલામું પદ 4.096 છે ?

અહીં $a = 0.008$ અને $r = \frac{0.016}{0.008} = 2$ છે.

હવે, $T_n = 4.096$

$\therefore$ $ar^{n-1} = 4.096$

$\therefore$ $0.008 \times (2)^{n-1} = 4.096$

$\therefore$ $2^{n-1} = \frac{4.096}{0.008}$

$\therefore$ $2^{n-1} = 512$

$\therefore$ $2^{n-1} = 2^9$

બંને બાજુ ઘાતને સરખાવતાં,

$n - 1 = 9$

$\therefore$ $n = 10$

આમ, શ્રેણીનું 10મું પદ 4.096 છે.

ઉદાહરણ 13 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું ત્રીજું પદ તે શ્રેણીના પ્રથમ પદનો વર્ગ હોય અને ચોથું પદ 243 હોય તો શ્રેણી શોધો.

ધારો કે પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે. અહીં ત્રીજું પદ, પ્રથમ પદનો વર્ગ છે. એટલે કે $T_3 = a^2$

$\therefore$ $T_3 = ar^2 = a^2$

$\therefore$ $r^2 = a$

ઉપરાંત ચોથું પદ 243 એટલે કે $T_4 = 243$

$\therefore T_4 = ar^3 = 243$

$\therefore \quad r^2 \times r^3 = 243 \ (\because r^2 = a)$

$\therefore \quad r^5 = 243$

$\therefore \quad r^5 = 3^5$

$\therefore \quad r = 3$

હવે, $a = r^2$

$\therefore \quad a = 3^2$

$\therefore \quad a = 9$

$a = 9$ અને $r = 3$ લેતાં, 9, 27, 81, 243... શ્રેણી મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વ્યક્તિ વર્ષ 2009માં બૅન્કમાં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. વર્ષ 2010માં ₹ 20,000 જમા કરાવે છે અને વર્ષ 2011માં ₹ 40,000 જમા કરાવે છે. કોઈ એક વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ પાછલા વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ કરતાં બમણી છે. તો વર્ષ 2014માં વ્યક્તિએ કેટલી રકમ જમા કરાવી હશે ?

એક વ્યક્તિ પ્રથમ વર્ષમાં એટલે કે વર્ષ 2009માં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. $\therefore$ પ્રથમ પદ $(a) = 10,000$ છે. દર વર્ષે જમા કરેલ રકમ અગાઉના વર્ષ કરતાં બમણી છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $(r) = 2$ છે. આપણે વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ શોધવાની છે એટલે $n = 6$.

a, r અને n ને $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$$T_6 = 10000\ (2)^{6-1}$$
$$= 10,000\ (2)^5$$
$$= 10,000 \times 32$$
$$= 3,20,000$$

આમ, વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ ₹ 3,20,000 છે.

ઉદાહરણ 15 : એક 50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી છે. લિકેજના કારણે દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે, તો પાંચ અઠવાડિયાં પછી પાણીનું સ્તર કેટલું હશે ? (નવું પાણી ટાંકીમાં ઉમેરાતું નથી.)

50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલ છે. $\therefore a = 50,000 = T_1$, દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે. $\therefore$ સામાન્ય ગુણોત્તર $(r) = \frac{1}{2}$ થશે.

એક અઠવાડિયા પછીનું પાણીનું સ્તર $= 50,000 \times \frac{1}{2} = 25,000$ લિટર થશે. આપણે પાંચ અઠવાડિયાં પછીનું પાણીનું સ્તર શોધવાનું છે એટલે $n = 6$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$$T_6 = 50,000 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$
$$= 50,000 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$= 50,000 \times \frac{1}{32} = 1562.5$$

આમ, પાંચ અઠવાડિયા પછી પાણીનું સ્તર 1562.5 લિટર હશે.

ઉદાહરણ 16 : એક શહેરની વસ્તી 20 લાખ છે. જો વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધતી હોય તો 6 વર્ષ પછી તે શહેરની વસ્તી કેટલી હશે ?

શહેરની હાલની વસ્તી 2000000 છે. $\therefore a = 2000000 = T_1$. વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધે છે.

$\therefore r = 1.03$

> વસ્તી 3 ટકાના દરે વધે છે તેથી
>
> $\therefore \quad r = \frac{100+3}{100} = 1.03$

એક વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી = 2000000 × 1.03 = 2060000 = T_2 થશે. આપણે 6 વર્ષ પછીની વસ્તી શોધવાની છે એટલે $n = 7$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$T_7 = 20,00000\ (1.03)^{7-1}$

$= 20,00000\ (1.03)^6$

$\therefore\quad T_7 = 2388104.5930$

આમ, 6 વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી આશરે 23,88,105 થશે.

ઉદાહરણ 17 : મશીનના ઘસારાનો દર વર્ષે 15 % રાખવો એવું સરકાર નક્કી કરે છે. જો મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 હોય, તો સાત વર્ષ પછી મશીનની કિંમત કેટલી થશે ?

મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 છે. $\therefore\ a = 50,000 = T_1$. મશીનનો ઘસારો દર વર્ષે 15 % છે.

$\therefore\quad r = 0.85$

મશીનની કિંમતમાં વર્ષે 15 ટકાનો ઘટાડો છે. $\therefore\ r = \frac{100-15}{100} = 0.85$

એક વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત = 50,000 × 0.85

= 42,500 = T_2 થશે.

સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત શોધવાની છે એટલે $n = 8$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$T_8 = 50,000\ (0.85)^{8-1}$

$= 50,000\ (0.85)^7$

$= 16028.8544$

≈ 16028.85

આમ, સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત ₹ 16,028.85 થશે.

9.3 શ્રેઢીનો અર્થ (Meaning of Sequence)

જો $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ને ગુણોત્તર-શ્રેણી લઈએ તો $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ એ **ગુણોત્તર શ્રેઢી** બનશે.

દા.ત., જો 2, 6, 18, 54, ... ગુણોત્તર-શ્રેણી હોય તો તેનાથી મળતી ગુણોત્તર શ્રેઢી 2 + 6 + 18 + 54 + ... થશે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાને સંકેત S_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$

જ્યાં $T_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

આમ, $S_1 = T_1$, $S_2 = T_1 + T_2$, $S_3 = T_1 + T_2 + T_3$ વગેરે.

જો બધાં પદો a અને rના રૂપમાં દર્શાવીએ તો,

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ મળશે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના સંદર્ભમાં નીચે દર્શાવેલ સૂત્રો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

(1) $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r$ = સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણાંક છે.

(2) $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ જ્યાં $n = 1, 2, 3, \ldots$

(3) $S_n = na$ જ્યાં $r = 1$

(4) $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ જ્યાં $r \neq 1$

(5) $S_n = \frac{rT_n - a}{(r-1)}$ જ્યાં $r \neq 1$

ઉદાહરણ 18 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 5, 15, 45, ... ના પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 5$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{15}{5} = 3$ છે.

પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે. $\therefore\ n = 5$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_5 = \frac{5(3^5 - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{5(243-1)}{2}$$

$$= \frac{5(242)}{2}$$

$$= 605$$

આમ, પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 605 છે.

ઉદાહરણ 19 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 8, 4, 2, ... ના પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 8$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ છે. પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે.

$\therefore\ n = 6$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad S_6 = \frac{8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{8\left[\frac{1}{64} - 1\right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8\left[-\frac{63}{64}\right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 8 \times \left(-\frac{63}{64}\right) \times \left(\frac{2}{-1}\right)$$

$$= \frac{63}{4}$$

આમ, પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો $\frac{63}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 20 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 3$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે, એટલે કે $n = 4$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_4 = \frac{3[2^4-1]}{(2-1)}$$

$$= \frac{3(16-1)}{1}$$

$$= 3 \times 15$$

$$= 45$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 45 છે.

ઉદાહરણ 21 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણી જેમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 0.2 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 છે તો પ્રથમ પદ શોધો.

અહીં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 0.2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 એટલે કે $S_3 = 0.496$ છે.

r અને n ની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a\left[0.2^3-1\right]}{0.2-1}$$

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a(0.008-1)}{(-0.8)}$$

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a(-0.992)}{(-0.8)}$$

$$\therefore \quad a = \frac{0.496 \times (-0.8)}{(-0.992)}$$

$$\therefore \quad a = 0.4$$

આમ, પ્રથમ પદ 0.4 છે.

ઉદાહરણ 22 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 800,400,200, ...ના કેટલા પદોનો સરવાળો 1500 થશે ?

અહીં પ્રથમ પદ $a = 800$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{400}{800} = 0.5$ છે. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 1500 છે. એટલે કે $S_n = 1500$

a અને rની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{800\left[(0.5)^n-1\right]}{(0.5-1)}$$

$$\therefore \quad 1500 = \frac{800\left[(0.5)^n-1\right]}{(-0.5)}$$

$$\therefore \quad (0.5)^n - 1 = \frac{1500 \times (-0.5)}{800}$$

$$\therefore \quad (0.5)^n = 1 - 0.9375$$

$$(0.5)^n = 0.0625$$

$$\therefore \quad (0.5)^n = (0.5)^4$$

બંને બાજુ ઘાતને સરખાવતાં,

$$n = 4$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 1500 થશે.

ઉદાહરણ 23 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 27 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ a = 27 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. એટલે કે $S_3 = 189$

કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad S_3 = \frac{27(r^3-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 189 = \frac{27\ (r-1)\ (r^2+r+1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 189 = 27\ (r^2 + r + 1)$

$\therefore \quad r^2 + r + 1 = 7$

$\therefore \quad r^2 + r - 6 = 0$

$\therefore \quad (r + 3)\ (r - 2) = 0$

$\therefore \quad r = -3$ અથવા $r = 2$

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર – 3 અથવા 2 છે.

ઉદાહરણ 24 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 1 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે એટલે કે $S_5 = 1$.

કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad S_5 = \frac{1(r^5-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 1 = \frac{(r^5-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad r^5 - 1 = r - 1$

$\therefore \quad r^5 = r$

$\therefore \quad r^4 = 1$

$\therefore \quad r = \pm 1$

જો a = 1 અને $r = 1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, 1, 1, 1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 5 થાય પણ આપેલ સરવાળો 1 છે. તેથી $r = 1$ શક્ય નથી.

જો $a = 1$ અને $r = -1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, –1, 1, –1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 1 થાય, તેથી $r = -1$ થશે.

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર – 1 છે.

ઉદાહરણ 25 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 2, 4, 8, 16......નાં પ્રથમ *n* પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહીં તેવી *n* ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 2$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{4}{2} = 2$. n પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહિ.

એટલે કે $S_n \le 5000$.

a અને r ને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{2\ (2^n-1)}{(2-1)}$$

$$= 2\ (2^n - 1)$$

હવે, $S_n \le 5000$ હોવાથી

$2\ (2^n - 1) \le 5000$

$\therefore \quad 2^n - 1 \le 2500$

$\therefore \quad 2^n \le 2501$

હવે nની વિવિધ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે 2^nની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને nની જે ધન પૂર્ણાંક કિંમત માટે $2^n \le 2501$ થાય તેવી nની મહત્તમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાશે કે $n = 10$ માટે $2^n = 1024$, $n = 11$ માટે $2^n = 2048$ છે અને $n = 12$ માટે $2^n = 4096$ જે 2501 કરતાં વધુ છે.

$n = 11$ તે nની મહત્તમ કિંમત છે કે જેના માટે $2^n \le 2501$ થાય.

$\therefore \quad n = 11$

ઉદાહરણ 26 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 3^2, 3^3, ...ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 થાય તેવી nની લઘુતમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{3}{1} = 3$. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 હોવો જોઈએ એટલે કે $S_n \ge 3000$.

a અને rને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{1(3^n - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

હવે, $S_n \ge 3000$ હોવાથી

$\therefore \quad \frac{3^n - 1}{2} \ge 3000$

$\therefore \quad 3^n - 1 \ge 6000$

$\therefore \quad 3^n \ge 6001$

હવે nની વિવિધ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે 3^nની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને n ની જે ધન પૂર્ણાંક કિંમત માટે $3^n \ge 6001$ થાય તેવી nની લઘુતમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9
3^n	81	243	729	2187	6561	19683

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે $n = 8, 9, \dots$ માટે $3^n \ge 6001$ છે.

આમ, nની લઘુતમ કિંમત 8 છે જેને માટે $3^n \ge 6001$ હોય.

$\therefore \quad n = 8$

ઉદાહરણ 27 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $S_8 = 10S_4$ હોય તો 'r' શોધો.

અહીં, $S_8 = 10S_4$

$$\therefore \quad \frac{a(r^8-1)}{(r-1)} = 10\left[\frac{a(r^4-1)}{(r-1)}\right]$$

$$\therefore \quad r^8 - 1 = 10(r^4 - 1)$$

$$\therefore \quad (r^4 - 1)(r^4 + 1) = 10(r^4 - 1)$$

$$\therefore \quad r^4 + 1 = 10$$

$$r^4 = 9$$

$$\therefore \quad r^2 = 3$$

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 28 : એક વ્યક્તિ તેના દીકરાને 1લી માર્ચે ₹ 5 આપે છે, 2જી માર્ચે ₹ 10 આપે છે, 3જી માર્ચે ₹ 20 આપે છે. આમ રોજ અગાઉના દિવસ કરતા બમણી રકમ આપે છે. તો 10મી માર્ચ સુધી વ્યક્તિએ તેના દીકરાને કેટલી રકમ આપી હશે ?

વ્યક્તિ 1લી માર્ચે ₹ 5 આપે છે તેથી પ્રથમ પદ $a = 5$. રોજ આપેલ રકમ અગાઉના દિવસ કરતાં બમણી રકમ આપે છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. આપણે 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ શોધવાની છે. તેથી $n = 10$.

a, r અને nની કિંમતો $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_{10} = \frac{5(2^{10}-1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{5(1024-1)}{1}$$

$$= 5 \times 1023$$

$$= 5115$$

આમ, 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ ₹ 5115 થશે.

ઉદાહરણ 29 : એક વ્યક્તિને કુલ ₹ 2,42,000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તો વ્યક્તિએ પહેલા મહિને દાનમાં આપેલ રકમ શોધો.

એક વ્યક્તિને કુલ ₹ 242000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. એટલે કે $S_5 = 242000$ અને $n = 5$. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{1}{3}$. આપણે પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ શોધવાની છે. એટલે કે, a શોધવાનો છે.

r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_5 = \frac{a\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right]}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)}$$

$\therefore \quad 242000 = \dfrac{a\left(\frac{1}{243}-1\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore \quad 242000 = \dfrac{a\left(-\frac{242}{243}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore \quad 242000 = a \times \left(\frac{-242}{243}\right)\times\left(\frac{3}{-2}\right)$

$\therefore \quad 242000 = a \times \frac{121}{81}$

$\therefore \quad a = \frac{242000\times 81}{121}$

$\therefore \quad a = 162000$

આમ, પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ ₹ 1,62,000 છે.

ઉદાહરણ 30 : એક વ્યક્તિ બૅન્કમાં ₹ 20,000 વર્ષે 8 ટકાના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકે છે. પાંચ વર્ષ પછી વ્યક્તિને કેટલી રકમ મળશે ?

વ્યક્તિ ₹ 20,000 બૅન્કમાં મૂકે છે.

$\therefore \quad a = 20,000 = T_1$

બૅન્ક જમા કરેલ રકમ પર 8 ટકા વ્યાજ આપે છે. $\quad \therefore \; r = 1.08$

રકમ 8 ટકાના દરે વધે છે તેથી $r = \frac{100+8}{100} = 1.08$

એક વર્ષ પછી મળતી રકમ = 20,000 × 1.08 = 21,600 = T_2

આપણે પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ શોધવાની છે એટલે n = 6 લઈશું.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} T_6 &= 20,000 \times (1.08)^{6-1} \\ &= 20,000 \times (1.08)^5 \\ &= 29386.5615 \\ &\approx 29386.56 \end{aligned}$$

આમ, પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ ₹ 29,386.56 છે.

ઉદાહરણ 31 : ત્રણ ઘન સંખ્યાઓ $k + 1$, $3k - 1$, $5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. તો k શોધો.

અહીં, $k + 1$, $3k - 1$, $5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

તેથી $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ = સામાન્ય ગુણોત્તર r થશે.

$\therefore \quad \frac{3k-1}{k+1} = \frac{5k+1}{3k-1}$

$\therefore \quad (3k - 1)^2 = (5k + 1)(k + 1)$

$\therefore \quad 9k^2 - 6k + 1 = 5k^2 + 6k + 1$

$\therefore \quad 4k^2 - 12k = 0$

$\therefore \quad 4k(k - 3) = 0$

$\therefore \quad 4k = 0$ અથવા $k - 3 = 0$

$\therefore \quad k = 0$ અથવા $k = 3$

પણ $k = 0$ માટે $(3k - 1)$ની કિંમત -1 મળશે જે ઋણ છે. તેથી $k = 0$ અસ્વીકાર્ય છે. આમ, $k = 3$ છે

ઉદાહરણ 32 : જો 15, x, 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો x અને yની કિંમતો શોધો.

અહીં, 15, x, 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

તેથી $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$ સામાન્ય ગુણોત્તર r થશે.

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ લેતાં,

$\therefore \quad \frac{x}{15} = \frac{240}{x}$

$\therefore \quad x^2 = 15 \times 240$

$= 3600$

$\therefore \quad x = \pm 60$

$\therefore \quad x = 60$ અથવા $- 60$

ઉપરાંત $\quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$

$\therefore \quad \frac{240}{x} = \frac{y}{240}$

$\therefore \quad xy = 240 \times 240$

$\therefore \quad xy = 57600$

હવે, જો $x = 60$ લઈએ તો

$60y = 57600$

$\therefore \quad y = \frac{57600}{60}$

$\therefore \quad y = 960$

અને

$x = - 60$ લઈએ તો

$- 60y = 57600$

$\therefore \quad y = \frac{57600}{-60}$

$\therefore \quad y = - 960$

આમ, $x = 60$ અને $y = 960$ અથવા $x = - 60$ અને $y = - 960$.

ઉદાહરણ 33 : જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = 80$, $S_n = 157.5$ અને $r = 2$ હોય તો a અને n શોધો.

અહીં T_n અને S_nની કિંમતો આપેલ છે તેથી

$S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

T_n, r અને S_nની કિંમતો સૂત્રમાં મૂકતાં,

$157.5 = \frac{2 \times 80 - a}{2-1}$

$\therefore \quad 157.5 = 160 - a$

$\therefore \quad a = 160 - 157.5$

$\therefore \quad a = 2.5$

હવે $\quad T_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad 80 = 2.5 \times (2)^{n-1}$

$\therefore \quad 2^{n-1} = 32$

$\therefore \quad 2^{n-1} = 2^5$

બંને બાજુ ઘાત સરખાવતાં,

$n - 1 = 5$

$\therefore \quad n = 6$

આમ, $a = 2.5$ અને $n = 6$ છે.

ઉદાહરણ 34 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો S_4 મેળવો.

અહીં, $T_n = 2^{n+1}$ છે.

$\therefore \quad T_1 = 2^{1+1} = 4,\ T_2 = 2^{2+1} = 8,\ T_3 = 2^{3+1} = 16, \ldots$

અહીં પ્રથમ પદ $a = 4$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{8}{4} = 2$ થશે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો મેળવવાનો છે તેથી $n = 4$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_4 = \frac{4(2^4 - 1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{4(16-1)}{1}$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60$$

આમ, $S_4 = 60$.

ઉદાહરણ 35 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} મેળવો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1] - \frac{2}{3}[4^n - 1]$$

$$= \frac{2}{3}[(4^{n+1} - 1) - (4^n - 1)]$$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1 - 4^n + 1]$$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 4^n]$$

$$= \frac{2}{3} \times 4^n [4 - 1]$$

$\therefore \quad T_{n+1} = 2(4^n)$

ઉદાહરણ 36 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણી $S_n = \frac{4}{3}(3^n - 1)$ હોય તો T_3 શોધો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$\therefore \quad T_3 = S_3 - S_2$

$$= \frac{4}{3}(3^3 - 1) - \frac{4}{3}(3^2 - 1)$$

$$= \frac{4}{3}[(27 - 1) - (9 - 1)]$$

$$= \frac{4}{3}[26 - 8]$$

$$= \frac{4}{3}(18)$$

$\therefore \quad T_3 = 24$

9.4 ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો (Three consecutive terms of geometric progression)

ઘણી વખત ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ક્રમિક પદોના સરવાળા અને ગુણાકાર આપ્યા હોય અને પદો શોધવાના હોય છે. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં પદ a, ar, ar^2, ar^3, ... લઈએ તોપણ પદોની કિંમતો શોધી શકાય પરંતુ આ રીતે પદોની પસંદગી કરવાથી ગણતરી કેટલીક વાર સરળ બનતી નથી. શ્રેણીનાં પદોના સ્વરૂપની ધારણા એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી ગણતરી સરળ બને. nની કેટલીક કિંમતો માટે આ ધારણા નીચે દર્શાવી છે :

$n = 3$ માટે, ત્રણ ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r}, a, ar$

$n = 4$ માટે, ચાર ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

$n = 5$ માટે, પાંચ ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

નોંધ : આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં અજ્ઞાત પદો શોધવાનો અભ્યાસ માત્ર ત્રણ પદો પૂરતો જ સીમિત રાખીશું.

ઉદાહરણ 37 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 26 અને ગુણાકાર 216 છે તો તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}, a, ar$ લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 216

$\therefore \quad \frac{a}{r} \times a \times ar = 216$

$\therefore \quad a^3 = 216$

$\therefore \quad a = 6$

ત્રણ પદોનો સરવાળો = 26

$\therefore \quad \frac{a}{r} + a + ar = 26$

$\therefore \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 26$

$\therefore \quad 6\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = 26 \qquad (\because a = 6)$

$\therefore \quad 3(1 + r + r^2) = 13r$

$\therefore \quad 3 + 3r + 3r^2 = 13r$

$\therefore \quad 3r^3 - 10r + 3 = 0$

$\therefore \quad (r - 3)(3r - 1) = 0$

$\therefore \quad r = 3$ અથવા $r = \frac{1}{3}$

હવે જો આપણે $a = 6$ અને $r = 3$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{6}{3} = 2, \ 6, \ 6 \times 3 = 18$ બનશે. આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 2, 6, 18 થશે.

જો આપણે $a = 6$ અને $r = \frac{1}{3}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{6}{1/3} = 18, \ 6, \ 6 \times \frac{1}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 18, 6, 2 થશે.

ઉદાહરણ 38 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 9.5 અને ગુણાકાર 27 છે તો શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}$, a, ar લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 27

$\therefore \quad \frac{a}{r} \times a \times ar = 27$

$\therefore \quad a^3 = 27$

$\therefore \quad a = 3$

ત્રણ પદોનો સરવાળો = 9.5

$\therefore \quad \frac{a}{r} + a + ar = 9.5$

$\therefore \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 9.5$

$\therefore \quad 3\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = 9.5 \qquad (\because \; a = 3)$

$\therefore \quad 3 + 3r + 3r^2 = 9.5r$

$\therefore \quad 3r^2 - 6.5\,r + 3 = 0$

બંને બાજુ 2 વડે ગુણતા,

$\therefore \quad 6r^2 - 13r + 6 = 0$

$\therefore \quad (2r - 3)(3r - 2) = 0$

$\therefore \quad r = \frac{3}{2}$ અથવા $r = \frac{2}{3}$

હવે, જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{3}{2}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 2,\; 3,\; 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ બનશે.

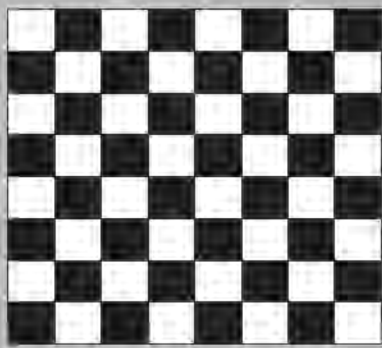
આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 2, 3, $\frac{9}{2}$ થશે.

જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{2}{3}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$, 3, $3 \times \frac{2}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{9}{2}$, 3, 2 થશે.

પ્રવૃત્તિ

(1) ચેસ બોર્ડના એક ખાનામાં અનાજનો એક દાણો મૂકો, બીજા ખાનામાં બે દાણા, ત્રીજા ખાનામાં ચાર દાણા, ચોથા ખાનામાં આઠ દાણા અને આ જ રીતે આગળ. ચેસ બોર્ડના છેલ્લા ખાનામાં અનાજના કેટલા દાણા મૂકવામાં આવશે ?



(2)

1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 = 1.1111

ગુણોત્તર-શ્રેણીનો ઉપયોગ ચકાશો.

Hint : અહીં 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 શ્રેણી છે.

સારાંશ અને સૂત્ર

- $n \geq 1$ માટે શ્રેણીના $(n+1)$મા પદ અને nમા પદનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ હોય તેવી શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહેવાય.
- જો $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ગુણોત્તર-શ્રેણી હોય તો $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ગુણોત્તર શ્રેઢી છે.
- nમું પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેણીનું સામાન્ય પદ કહે છે. (જ્યાં $n \geq 1$)
- $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r =$ સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણાંક છે.
- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
- જ્યારે $r = 1$ હોય ત્યારે $S_n = na$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$
- ગુણોત્તર-શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદોની ધારણા : $\frac{a}{r}, a, ar$

સ્વાધ્યાય 9

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.2, 1, 5, ...નું છઠ્ઠું પદ જણાવો.

(a) 25 (b) 0.5 (c) 0.1 (d) 625

2. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને સામાન્ય ગુણોત્તર 'b' છે, તો $(n + 1)$મું પદ જણાવો.

(a) ab^n (b) ar^n (c) ab^{n-1} (d) ar^{n-1} છે.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, ...નું પાંચમું પદ શોધો.

(a) 9 (b) $9\sqrt{3}$ (c) 27 (d) $\frac{(\sqrt{3})^5-1}{(\sqrt{3}-1)}$ છે.

4. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_1 = a$ અને $T_5 = \frac{1}{a}$ જ્યાં $a > 0$ હોય તો ત્રીજું પદ મેળવો.

(a) a^2 (b) 1 (c) $\frac{1}{a^2}$ (d) a છે.

5. ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1,... નું સાતમું પદ શોધો.

(a) 6561 (b) 243 (c) 81 (d) $\frac{1}{81}$

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું nમું પદ $3(2^{n-1})$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 1

7. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.4, 0.04, 0.004, ...નો સામાન્ય ગુણોત્તર જણાવો.

(a) 10 (b) 0.4 (c) 4 (d) 0.1

8. જો x, 10, –25 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો x ની કિંમત મેળવો.

(a) 4 (b) –25 (c) –4 (d) 2

9. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર –1 અને પ્રથમપદ –1 હોય, તો પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધો.

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 6

10. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 1 હોય અને $S_{10} = 40$ હોય, તો પ્રથમ પદ જણાવો.

(a) 0 (b) 10 (c) 4 (d) 400

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી ar, ar^2, ar^3, ... નું nમું પદ શું થશે ?

2. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.1, 0.01, 0.001, ... નો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 7, 7, 7, ... માટે પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો શોધો.

4. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું n મું પદ $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

5. જો સંખ્યાઓ 4, 1, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો y ની કિંમત શોધો.

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શું હશે ?

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_7 = 15$ અને $S_6 = 11$ હોય તો સાતમું પદ શોધો.

8. વિધાન "જો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો $ad = bc$ થશે" સાચું છે કે ખોટું ?

9. ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે વિધાન " $T_1 = S_1$" સાચું છે કે ખોટું તે જણાવો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો.
2. ગુણોત્તર શ્રેઢીની વ્યાખ્યા આપો.
3. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 1 હોય અને $S_8 = 24$ હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.
4. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_1 = 2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 1000 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
5. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 2$ અને $r = 3$ હોય તો પ્રથમ 4 પદોનો સરવાળો શોધો.
6. ગુણોત્તર-શ્રેણી 4, 12, 36, ... નું કેટલામું પદ 324 છે ?
7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = \frac{4}{9}$ અને $r = \frac{-3}{2}$ હોય તો T_3 = ...
8. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો સાતમા અને ત્રીજા પદનો ગુણોત્તર મેળવો.
9. નીચેની શ્રેણીના માગ્યા પ્રમાણેના પદો શ્રેણી સૂત્રથી મેળવો :

   (1) 2, 10, 50, ... (છઠ્ઠું પદ) (2) 100, 50, 25, ... (સાતમું પદ)

   (3) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}$ ... (આઠમું પદ) (4) $2, 2\sqrt{2}, 4$, ... (પાંચમું પદ)

વિભાગ D

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_5 = 405$ અને $T_7 = 3645$ હોય તો T_4 શોધો.
2. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ $\frac{27}{16}$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $\frac{2}{3}$ હોય તો T_5 અને S_4 શોધો.
3. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં a = 4 અને $T_5 = \frac{1}{4}$ હોય તો T_7 શોધો.
4. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_2 = 9$ અને $T_5 = 243$ હોય તો S_4 શોધો.
5. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 10 છે અને $T_4 = 0.08$ હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો શોધો.
6. ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_1^2 = T_2$ અને $T_3 = 64$ હોય તો ગુણોત્તર-શ્રેણી લખો.
7. જો 5, m, 20, t ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો m અને t શોધો.
8. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 10$, $r = 0.1$ અને $T_n = 0.01$ હોય તો n શોધો.
9. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 1$, $r = 3$ અને $S_n = 121$ હોય તો n શોધો.
10. જો $S_n = \frac{2}{3}(2^n - 1)$ હોય તો T_4 શોધો.
11. જો $S_n = 4(3^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} શોધો.
12. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં બીજું પદ 5 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.
13. ગુણોત્તર-શ્રેણી 2, 4, 8, 16, ...નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 126 થશે ?
14. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = 324$, $S_n = 484$ અને $r = 3$ હોય તો a અને n શોધો.
15. નીચે આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીના માગ્યા પ્રમાણે સરવાળા શ્રેઢી સૂત્રથી શોધો :

    (1) 4, 16, 64, ... (પ્રથમ 4 પદ) (3) 100, 20, 4, ... (પ્રથમ 5 પદ)

    (2) 2, 3, $\frac{9}{2}$, ... (પ્રથમ 5 પદ) (4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ... (પ્રથમ 10 પદ)

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. ત્રણ ઘન સંખ્યાઓ $k + 4$, $4k - 2$ અને $7k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે, તો k શોધો.
2. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 3^2, 3^3 ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 365થી વધે નહિ તેની nની મહત્તમ કિંમત શોધો.
3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 2, 2^2, 2^3, ... ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 2000 કે તેથી વધુ હોય તેવી n ની લઘુતમ કિંમત શોધો.
4. ગુણોત્તર-શ્રેણી $y, \frac{y}{3}, \frac{y}{9}, ...$ (જ્યાં $y > 0$)નાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 121 હોય તો x શોધો.
5. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_4 = 10\ S_2$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
6. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પાંચમા અને ત્રીજા પદોનો સરવાળો અને તફાવત 5:3 ના પ્રમાણમાં હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 31 અને ગુણાકાર 125 છે. તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.
8. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 6 અને ગુણાકાર – 64 છે. તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.
9. એક બાંધકામ વ્યવસાયની કંપની ગ્રાહકોને આકર્ષવા ફ્લેટ્સની એક યોજના પ્રસ્તુત કરે છે. આ યોજનામાં ગ્રાહકે પ્રથમ હપતામાં 10,000 રૂપિયા ચૂકવવાના અને ત્યાર પછીના દરેક વાર્ષિક હપતાની રકમ તેના અગાઉના હપતાની રકમથી બમણી રકમ આપવાની થાય છે. દસ હપતા સુધીમાં ગ્રાહકે કુલ કેટલા રૂપિયા ચૂકવવા પડશે ?
10. એક બેન્કર પહેલી મિનિટમાં 128 નોટની ગણતરી કરે છે અને ત્યાર બાદ તે દર મિનિટે અગાઉની મિનિટ કરતાં અડધી નોટો ગણતો જાય છે. તો તેણે પાંચ મિનિટમાં કેટલી નોટો ગણી હશે ?
11. એક ગામની વસ્તી 5000 છે. જો વસ્તી દર વર્ષે 2 ટકાના દરે વધતી હોય તો દસ વર્ષ બાદ તે ગામની વસ્તી કેટલી હશે ?
12. એક ગાડીની કિંમતમાં દર વર્ષે 10 ટકાના દરે ઘસારો થાય છે. જો ગાડીની ખરીદકિંમત 5,00,000 રૂપિયા હોય, તો 6 વર્ષ પછી ગાડીની કેટલી કિંમત હશે ?

Aryabhatta
(476 – 550)

Aryabhatta was a famous Indian mathematician and astronomer. His notable contributions to the world of science and mathematics includes the theory that the earth rotates on its axis, explanations of the solar and lunar eclipses, solving of quadratic equations, place value system with zero, and approximation of pie (π). Aryabhatta had defined sine, cosine, and inverse sine back in his era, influencing the birth of trigonometry. His calendar calculation has been in continuous use in India, on which the present day Panchangam is based. His studies are also base for the national calendars of Iran and Afghanistan today.

The ISRO (Indian Space Research Organization) named its first satellite after the genius mathematician and astronomer.

●

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

1.	(c)	**2.**	(b)	**3.**	(a)	**4.**	(d)	**5.**	(a)
6.	(b)	**7.**	(c)	**8.**	(a)	**9.**	(b)	**10.**	(c)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. 50 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

બાળકોની સંખ્યા (x)	0	1	2	3	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા (f)	6	16	21	07	50

2. 60 કર્મચારીઓની પૂરા વર્ષમાં ઉંમર દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ઉંમર(વર્ષ)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	કુલ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	3	8	10	11	12	7	6	3	60

3. 60 દિવસ દરમિયાન મોબાઈલનું ઉત્પાદન દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

મોબાઈલની સંખ્યા	100 - 199	200 - 299	300 - 399	400 - 499	500 - 599	600 - 699	700 - 799	800 - 899	900 - 999	1000 - 1100	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	4	9	7	10	8	9	4	3	4	60

'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

મોબાઈલની સંખ્યા	99.5	199.5	299.5	399.5	499.5	599.5	699.5	799.5	899.5	999.5	1099.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	6	15	22	32	40	49	53	56	60

'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

'થી વધુ કે તેટલી મોબાઈલની સંખ્યા	99.5	199.5	299.5	399.5	499.5	599.5	699.5	799.5	899.5	999.5	1099.5
'થી વધુ સંચયી આવૃત્તિ	60	58	54	45	38	28	20	11	7	4	0

4.

વર્ગ	0 - 99	100 - 299	300 - 499	500 - 749	750 - 899	900 - 999
મધ્યકિંમત	49.5	199.5	399.5	624.5	824.5	949.5
વર્ગલંબાઈ	100	200	200	250	150	100
આવૃત્તિ	10	12	14	16	8	10

5. 'થી ઓછા પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

x કે તેથી વધુ ભૂલો	0	1	2	3
સંચયી આવૃત્તિ	140	250	370	400

'થી વધુ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

x કે તેથી ઓછી ભૂલોની સંખ્યા	0	1	2	3
સંચયી આવૃત્તિ	400	260	150	30

6. અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વર્ગ	45 - 49	50 - 54	55 - 59	60 - 64	65 - 69	70 - 74	75 - 79	કુલ
આવૃત્તિ	30	80	100	50	150	80	10	500

7. નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વર્ગ	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	કુલ
આવૃત્તિ	17	8	15	8	6	3	2	1	60

8.

વર્ગ	0 - 50	50 - 160	160 - 300	300 - 500	500 - 800	800 - 1000	કુલ
આવૃત્તિ	10	30	40	60	80	30	250

9.

વર્ગ	7 - 16	17 - 26	27 - 36	37 - 46	47 - 56	કુલ
આવૃત્તિ	160	120	43	40	2	365

10.

વર્ગ	0.9875 - 1.4875	1.4875 - 1.9875	1.9875 - 2.4875	2.4875 - 2.9875	2.9875 - 3.4875	3.4875 - 3.9875	કુલ
આવૃત્તિ	5	10	20	20	10	5	70

સ્વાધ્યાય 2.2

1. કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની જાતિ અને અભ્યાસ-વર્ષ અનુસાર સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

અભ્યાસ-વર્ષ	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
પ્રથમ	330	220	550
દ્વિતીય	225	225	450
તૃતીય	300	100	400
કુલ	**855**	**545**	**1400**

2. 1600 કર્મચારીઓની જાતિ તેમજ વૈવાહિક દરજ્જો દર્શાવતું કોષ્ટક

વૈવાહિક દરજ્જો	જાતિ		કુલ
	પુરુષો	સ્ત્રીઓ	
પરિણીત	715	485	1200
અપરિણીત	205	195	400
કુલ	**920**	**680**	**1600**

3. બૅન્કમાં ભરતી માટે બોલાવેલ ઉમેદવારોનો હોદ્દા, જાતિ તેમજ તેમનો વૈવાહિક દરજ્જો દર્શાવતું કોષ્ટક

હોદ્દો	પરિણીત			અપરિણીત			કુલ		
	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ
મૅનેજર									
ક્લાર્ક									
કૅશિયર									
પટાવાળા									
કુલ									

4. નોકરીનો અનુભવ, રહેણાંક અને વૈવાહિક દરજ્જા અનુસાર સ્ત્રીઓની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વિસ્તાર	વૈવાહિક દરજ્જો						કુલ		
	પરિણીત			અપરિણીત					
	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ
મજૂર	250	93	343	163	43	206	413	136	549
અન્ય	87	400	487	14	800	814	101	1200	1301
કુલ	**337**	**493**	**830**	**177**	**843**	**1020**	**514**	**1336**	**1850**

5. વર્ષ 2011થી 2014 દરમિયાન કંપનીમાં જાતિવાર કેળવાયેલ અને બિનકેળવાયેલ કારીગરોની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વર્ષ	કેળવાયેલ			બિનકેળવાયેલ			કુલ		
	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ
2011	1170	80	1250	260	140	400	1430	220	1650
2012	1300	175	1475	200	50	250	1500	225	1725
2013	1460	240	1700	40	10	50	1500	250	1750
2014	1670	290	1960	30	10	40	1700	300	2000

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

1. (d)	**2.** (d)	**3.** (b)	**4.** (a)	**5.** (c)
6. (a)	**7.** (b)	**8.** (a)	**9.** (c)	**10.** (a)
11. (c)	**12.** (a)	**13.** (c)	**14.** (b)	**15.** (b)

વિભાગ C

7. 4.5, 17, 37, 62, 87.5

8. 10, 15, 25, 25, 26

9. 'થી ઓછા' પ્રકારનું અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

પ્રાપ્તાંક કે તેથી ઓછા	10	20	30	40	50
સંચયી આવૃત્તિ	10	40	70	90	100

10. વર્ષ દરમિયાન વસ્તુની માંગ દર્શાવતું કોષ્ટક

માંગ	સારી	મધ્યમ	ઓછી	કુલ
અઠવાડિયાની સંખ્યા	12	22	18	52

11.

વર્ષ	ગુણધર્મ A			ગુણધર્મ B			કુલ		
	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ
2014	200	100	300	100	100	200	300	200	500
2015	150	400	550	150	300	450	300	700	1000

વિભાગ D

8.

વર્ગ	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800	કુલ
આવૃત્તિ	20	80	80	40	60	20	300

9. 40 કર્મચારીઓનો જાતિવાર વૈવાહિક દરજ્જો દર્શાવતું કોષ્ટક

જાતિ	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ
પુરુષ	8	8	16
સ્ત્રી	15	9	24
કુલ	23	17	40

10. કામદારોની માસિક આવક દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

માસિક વેતન (₹)	2400 - 2900	2900 - 3400	3400 - 3900	3900 - 4400	4400 - 4900	4900 - 5400	5400 - 5900	5900 - 6400	કુલ
કામદારોની સંખ્યા	3	9	18	25	23	10	7	5	100

11. 200 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ગુણ	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	કુલ
વિદ્યાર્થીઓ	20	40	50	35	25	22	6	1	1	200

12.

વર્ગ	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
આવૃત્તિ	12	18	16	22	14	10	6	2

13. અમદાવાદ શહેરમાં વ્યક્તિઓના પરિવહન માટે ઉપયોગમાં આવતી BRTS અને AMTS ની બસના પ્રકારો દર્શાવતું કોષ્ટક

પરિવહનનો પ્રકાર	બસના પ્રકાર		કુલ
	વાતાનુકૂલિત	બિનવાતાનુકૂલિત	
BRTS	250	100	350
AMTS	150	500	650
કુલ	400	600	1000

14. કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓનું વિદ્યાશાખામાં જાતિની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વિદ્યાશાખા	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
વિજ્ઞાન	250	350	600
વાણિજ્ય	650	250	900
કુલ	900	600	1500

19. પાસપાસેની સ્તંભાકૃતિ

21. વર્તુળાકૃતિ

વિભાગ E

1. આંબાવાડીમાં 30 દિવસ દરમિયાન ઊગેલી કેરીઓનું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કેરીની સંખ્યા	90 – 94	95 – 99	100 – 104	105 – 109	110 – 114	115 – 119	120 – 124	125 – 129	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	3	6	4	4	4	4	3	30

2. એક શહેરના 40 રિક્ષાચાલકોએ કરેલ દૈનિક કમાણીનું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

દૈનિક કમાણી (₹)	200 – 219	220 – 239	240 – 259	260 – 279	280 – 299	300 – 319	320 – 339	340 – 359	કુલ
રિક્ષાચાલકોની સંખ્યા	4	6	4	6	4	5	6	5	40

3. વિસ્તારના 50 રહેણાકમાં થયેલ પાણીનો વપરાશ દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

પાણીનો વપરાશ	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	કુલ
ઘરોની સંખ્યા	2	10	9	7	10	5	3	4	50

4. 50 કર્મચારીઓનું વજન (કિગ્રામાં) દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કર્મચારીઓનું વજન	60 – 65	65 – 70	70 – 75	75 – 80	80 – 85	85 – 90	કુલ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	5	11	11	11	7	5	50

5. 'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ	24.5	29.5	34.5	39.5	44.5	49.5	54.5	59.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	3	11	21	26	41	49	50

'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃ સીમાબિંદુ કે તેથી વધુ	24.5	29.5	34.5	39.5	44.5	49.5	54.5	59.5
સંચયી આવૃત્તિ	50	47	39	29	24	9	1	0

6. કારખાનામાં 30 દિવસ દરમિયાન ગેરહાજર રહેતા કામદારોની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ગેરહાજર કામદારો	0	1	2	3	4	5	6	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	5	7	5	6	4	2	1	30

'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ગેરહાજર કામદારો કે તેથી ઓછા	0	1	2	3	4	5	6
દિવસોની સંખ્યા	5	12	17	23	27	29	30

7. શાળામાં ભણતા 850 વિદ્યાર્થીઓનું ધોરણ અને જાતિવાર વર્ગીકરણ દર્શાવતું કોષ્ટક

ધોરણ	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
10	255	145	400
11	125	125	250
12	150	50	200
કુલ	530	320	850

8. વર્ષ 2013 થી 2015 દરમિયાન શાળાના વિદ્યાર્થીઓનું જાતિવાર હોસ્ટેલમાં રહેનાર અને ન રહેનાર વિદ્યાર્થીઓ દર્શાવતું કોષ્ટક

વર્ષ	હોસ્ટેલમાં રહેનાર			હોસ્ટેલમાં ન રહેનાર			કુલ		
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ
2013	600	350	950	200	50	250	800	400	1200
2014	700	420	1120	260	100	360	960	520	1480
2015	840	520	1360	260	100	360	1100	620	1720

9. 2000 ઉમેદવારોની અરજીઓનું અભ્યાસ, જાતિ તેમજ વૈવાહિક દરજ્જો દર્શાવતું કોષ્ટક

અભ્યાસ	પુરુષ			સ્ત્રી			કુલ		
	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ
સ્નાતક	150	450	600	160	240	400	310	690	1000
અનુસ્નાતક	192	288	480	160	160	320	352	448	800
અન્ય વ્યવસાયિક	70	70	140	36	24	60	106	94	200
કુલ	412	808	1220	356	424	780	768	1232	2000

10. (1) 50 ટકાનો વધારો

(2) 20 ટકા

(3) પુરુષોમાં 53.33 ટકાનો વધારો અને સ્ત્રીઓમાં 40 ટકાનો વધારો.

વિભાગ F

1. આંખનાં લેન્સની જાડાઈ દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

લેન્સની જાડાઈ	1.505 – 1.510	1.510 – 1.515	1.515 – 1.520	1.520 – 1.525	1.525 – 1.530	કુલ
લેન્સની સંખ્યા	5	3	6	7	4	25

ખામીવાળા લેન્સની ટકાવારી = 36 %

2. 30 દિવસ દરમિયાન શેરના બંધભાવમાં થયેલ ફેરફારો દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

શેરની કિંમત (₹)	10.5 – 12.5	12.5 – 14.5	14.5 – 16.5	16.5 – 18.5	18.5 – 20.5	20.5 – 22.5	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	6	8	4	8	2	30

(i) ₹ 17.5 (ii) 16 દિવસો (iii) 6 દિવસો

3. **40 દિવસ દરમિયાન મિક્સરના ઉત્પાદનની સંખ્યામાં થતા તફાવતો દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ**

મિક્સરનાં ઉત્પાદનમાં થયેલ તફાવત	–12 થી –6	–6 થી 0	0 થી 6	6 થી 12	12 થી 18	18 થી 24	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	5	12	10	6	5	40

'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ	–12	–6	0	6	12	18	24
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	7	19	29	35	40

'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃસીમાબિંદુ	–12	–6	0	6	12	18	24
સંચયી આવૃત્તિ	40	38	33	21	11	5	0

4. **30 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ**

ઊંચાઈ (સેમી)	140 - 144	145 - 149	150 - 154	155 - 159	160 - 164	165 - 169	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	8	8	4	6	2	30

'થી ઓછા' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ	139.5	144.5	149.5	154.5	159.5	164.5	169.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	10	18	22	28	30

'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃ સીમાબિંદુ	139.5	144.5	149.5	154.5	159.5	164.5	169.5
સંચયી આવૃત્તિ	30	28	20	12	8	2	0

(i) 8 વિદ્યાર્થીઓ (ii) 12 વિદ્યાર્થીઓ (iii) 149 સેમી

5. **યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓનું વિદ્યાશાખા તેમજ જાતિ અનુસાર વર્ગીકરણ**

વિદ્યાશાખા	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ
ઈજનેરી	7750	3150	10,900
દાક્તરી	6000	4000	10,000
વિજ્ઞાન	7000	1000	8000
વિનયન	2800	6800	9600
વાણિજ્ય	450	1050	1500
કુલ	24,000	16,000	40,000

●

સ્વાધ્યાય 3.1

(1) મધ્યક = 1.78 સેમી

(2) સુધારેલ મધ્યક = 24.5 વર્ષ, ભાગ લઈ શકશે.

(3) મધ્યક = 41 મિમિ

(4) મધ્યક = 35.36 ગુણ

(5) મધ્યક = 7.49 મિનિટ

(6) મધ્યક = ₹ 18.76 લાખ

(7) મધ્યક = 40 એકમો

સ્વાધ્યાય 3.2

(1) મિશ્ર મધ્યક = ₹ 198.75

(2) ભારિત મધ્યક = 118.09 ટકાવારી ફેરફાર

(3) ભારિત મધ્યક = ₹ 506.67

(4) મધ્યક = 82 ગુણ

સ્વાધ્યાય 3.3

(1) ગુણોત્તર મધ્યક = 2.61 પુસ્તકો

(2) સરેરાશ ઘસારો = 6.05 % (ગુણોત્તર મધ્યક)

(3) ગુણોત્તર મધ્યક = 61.73 કિમી

સ્વાધ્યાય 3.4

1. ચતુર્થકો Q_1 = 4 ગુણ, Q_2 = 6 ગુણ, Q_3 = 7 ગુણ
2. મધ્યસ્થ = 229.17 કિમી, 50 % દિવસોની મુસાફરી 229.17 કિમી કે તેથી ઓછી હશે.
   Q_3 = 291.67 કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 75 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 291.67 કિમી હશે.
   D_8 = 314.29 કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 80 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 314.29 કિમી હશે.
   P_{62} = 259.17 કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 62 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 259.17 કિમી હશે.
3. મધ્યસ્થ = 19 વર્ષ, 50 % વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર 19 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
   Q_1 = 18 વર્ષ, 25 % વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર 18 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
   D_4 = 19 વર્ષ, 40 % વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર 19 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
   P_{32} = 18.92 વર્ષ, 32 % વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર 18.92 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
4. મધ્યસ્થ = ₹ 21.78 હજાર, સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 20 % કર્મચારીઓના વેતનની ન્યૂનતમ સીમા= ₹ 26.84 હજાર
5. મધ્યસ્થ = ₹ 495
6. અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી મધ્યસ્થ = 4 દિવસ
   વર્ગીકૃત માહિતી પરથી મધ્યસ્થ = 4.17 દિવસ
   બંને કિંમતો લગભગ સમાન છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. બહુલક = 138
2. બહુલક = 13 કેક
3. આસાદિત સૂત્ર માટે મધ્યક = 68.85 વર્ષ, મધ્યસ્થ = 67.11 વર્ષ તેથી બહુલક = 63.63 વર્ષ
4. બહુલક તેની વ્યાખ્યાની રીતે શોધી શકાતો નથી જ્યારે આસાદિત સૂત્રથી મેળવી શકાય.
5. સૂત્રના આધારે બહુલક = 152.35 ગ્રામ
   આલેખ પરથી બહુલક = 153 ગ્રામ
6. બહુલક = ₹ 22 હજાર

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

1. (a)	**2.** (d)	**3.** (b)	**4.** (c)	**5.** (a)
6. (b)	**7.** (c)	**8.** (d)	**9.** (c)	**10.** (b)
11. (a)	**12.** (b)	**13.** (c)	**14.** (b)	**15.** (d)

વિભાગ B

2. ભારિત મધ્યક
4. $M_o = 3\ M - 2\bar{x}$
7. કાર્લ પિયર્સન
8. મધ્યસ્થ = 55
9. મધ્યક = 13
10. બહુલક = 10
11. બીજી સંખ્યા = 4
12. $Q_1 = 4$
13. મધ્યસ્થ
14. $P_{75} = 25.75$
15. મધ્યસ્થ = 150

વિભાગ C

7. મધ્યસ્થ = 5.8
8. બીજી સંખ્યા = 16
9. મધ્યક = 293
10. $a = 10$
11. મિશ્ર મધ્યક = 81 ગુણ
12. મધ્યસ્થ = 2 વાહનો
13. ભારિત મધ્યક = 1090

વિભાગ D

7. સરેરાશ વિકાસદર = 2.87 % ગુણોત્તર મધ્યક
8. D_7 = 8 ફોન, 70 % દિવસોનું વેચાણ 8 કે તેથી ઓછા ફોનનું હશે.
   P_{15} = 6 ફોન, 15 % દિવસોનું વેચાણ 6 કે તેથી ઓછા ફોનનું હશે.
9. મધ્યક = 30.07 મિ.લિ. મશીન યોગ્ય રીતે કામ કરે છે.
10. મધ્યક = 61.62 ગુણ
11. નવો મધ્યક = 34.69
12. મધ્યસ્થ = 54 ગુણ
13. મધ્યક = 138.9 એકમો. જાહેરાતથી વેચાણનો મધ્યક વધ્યો છે.

વિભાગ E

1. મધ્યસ્થ = 362.5 યુનિટ
2. બહુલક = ₹ 2.86 હજાર
3. Q_1 = 34.21 ગૂણ, Q_3 = 36.69 ગૂણ
4. મધ્યક = 164.97 સેમી
5. મધ્યસ્થ = ₹ 15.2 હજાર
6. બહુલક = 23 હજાર
7. મધ્યક = 24.46 ગુણ
8. Q_1 = 6.66 કલાક, Q_3 = 7.64 કલાક

વિભાગ F

1. (i) D_3 = 25, નાપાસ થનારા વિદ્યાર્થીઓમાં મહત્તમ ગુણ 25 હશે તેથી પાસ થવા માટે 26 ગુણ જરૂરી હશે.
   (ii) P_{95} = 60.83, સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા 5 % વિદ્યાર્થીઓમાં ન્યૂનતમ ગુણ 61 હશે.
2. A માટે મધ્યક = 22.33 હજાર કિમી
   B માટે મધ્યક = 23.5 હજાર કિમી ∴ B બ્રાન્ડના ટાયર વધારે સારા
3. આસાદિત સૂત્ર માટે મધ્યક = 16.71 મોટર, મધ્યસ્થ = 16.72 મોટર
   તેથી બહુલક = 16.74 મોટર
4. મધ્યક = 35.93 ક્વિન્ટલ મધ્યસ્થ = 35.11 ક્વિન્ટલ
5. બહુલક = 34 વર્ષ
6. બહુલક = 72.5 એકમો. બહુલકની કિંમત વધી છે.
7. x માટે મધ્યસ્થ = 13.26 ડબા
   y માટે મધ્યસ્થ = 10.7 ડબા
   x નું વેચાણ વધારે છે.
8. બહુલક = 25.5 વર્ષ

●

સ્વાધ્યાય 4.1

1. વિસ્તાર = 40 સેમી, વિસ્તારાંક = 0.12
2. વિસ્તાર = 35, વિસ્તારાંક = 0.90
3. વિસ્તાર = 60 ગુણ, વિસ્તારાંક = 0.6
4. વિસ્તાર = ₹ 29 હજાર, વિસ્તારાંક = 0.74

સ્વાધ્યાય 4.2

1. Q_d = 7.88, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.29
2. Q_d = 10 ગુણ, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.33
3. Q_d = 38.54 રૂપિયા, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.32

સ્વાધ્યાય 4.3

1. સરેરાશ વિચલન = 5 સેમી
2. સરેરાશ વિચલન = 2.8 બેરિંગ, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.35
3. સરેરાશ વિચલન = 3.33 મિનિટ, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.46
4. સરેરાશ વિચલન = 15 ટી.વી., સરેરાશ વિચલનાંક = 0.25
5. સરેરાશ વિચલન = 13.18 બોક્સ

સ્વાધ્યાય 4.4

1. s = 2.67 ગુણ
2. s = 2.65 કાર
3. s = 6.71 એકમો, પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.35
4. s = 12.89 (લાખ રૂપિયા)
5. s = 19.76 વર્ષ, પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.56

સ્વાધ્યાય 4.5

1. શેર A માટે : $\bar{x}$ = 321 રૂપિયા, s = 2.65 રૂપિયા, ચલનાંક = 0.83 %
   શેર B માટે : $\bar{x}$ = 140 રૂપિયા, s = 7.14 રૂપિયા, ચલનાંક = 5.1 %, શેર Bના ભાવમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે.
2. કંપની A અને B ના ચલનાંક અનુક્રમે 5 % અને 4 % છે. કંપની B ના વેતનમાં સ્થિરતા વધુ છે.
3. બે શ્રેણીનાં મધ્યકો અનુક્રમે 50 અને 36

સ્વાધ્યાય 4.6

1. $\bar{x}_c$ = 53.45, S_c = 12.64
2. $\bar{x}_c$ = 21, S_c = 5.22

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

1. (b)	2. (a)	3. (d)	4. (c)	5. (a)	6. (c)
7. (a)	8. (c)	9. (b)	10. (c)	11. (a)	12. (a)

વિભાગ B

3. સાપેક્ષ માપો
4. પ્રમાણિત વિચલન
5. (સેન્ટિમીટર)^2
6. વિસ્તાર = 100 સેમી
7. Q_d = 15.91
8. $s = 0$
9. સરેરાશ વિચલન = 2

વિભાગ C

4. સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન
5. વિસ્તાર = 14, વિસ્તારાંક = 1.75
6. Q_d = 6, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.67
7. સરેરાશ વિચલન = 2.4
8. વિચરણ = 25
9. s = 1.41

10. A નો ચલનાંક 20 %; B નો ચલનાંક = 25%, ઉત્પાદનના સંદર્ભમાં ફેક્ટરી A વધુ સ્થિર છે.

11. ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.29

વિભાગ D

9. $Q_d = 3$

10. સરેરાશ વિચલન = 0.75 ગોલ

11. $\bar{x}$ = 4.25, s = 1.63, ચલનાંક = 38.35 %

12. s_c = 7.43

13. $\bar{x}$ = 8, s = 4, ચલનાંક = 50 %

વિભાગ E

1. $\bar{x}$ = 25.17 ગુણ, સરેરાશ વિચલન = 3.81 ગુણ

2. $Q_1 = 16.5$, $Q_3 = 43.75$, $Q_d = 13.63$

3. s = 15.94 રન

4. Q_1 = 14.5 ગુણ, Q_3 = 34.5 ગુણ, Q_d = 10 ગુણ

5. ટીમ A માટે : $\bar{x}$ = 1.45, s = 1.48, ચલનાંક = 102.07 %

ટીમ B માટે : $\bar{x}$ = 1.07, s = 1.33, ચલનાંક = 124.3 %

ટીમ A વધુ સંગીન છે.

6. સુધારેલો મધ્યક = 39.3

સુધારેલો પ્રમાણિત વિચલન = 10.24

7. કુલ ખર્ચ y માટે : વિસ્તાર = 150, ચતુર્થક વિચલન = 15, સરેરાશ વિચલન = 24 અને પ્રમાણિત વિચલન = 30

વિભાગ F

1. વિસ્તાર = 32, વિસ્તારાંક = 0.84

ચતુર્થક વિચલન = 6, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.33

સરેરાશ વિચલન = 5.91, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.33

2. $\bar{x}$ = 15.54, s = 1.45, $\bar{x} \pm s$ = 14.09 થી 16.99, 55 %

3. ચતુર્થક વિચલન યોગ્ય માપ છે. $Q_1 = 17.5$, $Q_3 = 29$, $Q_d = 0.25$

4. s = 14.84

5. $\bar{x}$ = ₹ 42.6, સરેરાશ વિચલન = ₹ 14.99

6. $\bar{x}$ = ₹ 404.35, s = ₹ 172.58, ચલનાંક = 42.68 %

7. વિદ્યાર્થી A માટે : $\bar{x}$ = 62 ગુણ, s = 11.49 ગુણ, ચલનાંક = 18.53 %

વિદ્યાર્થી B માટે : $\bar{x}$ = 60.5 ગુણ, s = 8.62 ગુણ, ચલનાંક = 14.25 %

વિદ્યાર્થી B ના ગુણનો ચલનાંક ઓછો છે તેથી વિદ્યાર્થી B અભ્યાસમાં વધુ સુસંગત છે.

8. સમૂહ A માટે : $\bar{x}$ = 46.29 કિગ્રા, s = 11.57 કિગ્રા, ચલનાંક = 25 %

સમૂહ B માટે : $\bar{x}$ = 46.43 કિગ્રા, s = 10.93 કિગ્રા, ચલનાંક = 23.54 %

સમૂહ A માં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે.

●

પ્રકરણ 5

સ્વાધ્યાય 5.1

1. $\bar{x}$ = 4.27 દૂધની કોથળીઓ, M_0 = 4 દૂધની કોથળીઓ, s = 1.65 દૂધની કોથળીઓ, j = 0.16
2. $\bar{x}$ = 14.01 ઈંચ, M = 14 ઈંચ, s = 0.87 ઈંચ, j = 0.03
3. $\bar{x}$ = 14.22 મિનિટ, M_0 = 12.28 મિનિટ, s = 5.33 મિનિટ, j = 0.36
4. $\bar{x}$ = ₹ 9.92 લાખ, M_0 = ₹ 9.8 લાખ, s = ₹ 2.37 લાખ, j = 0.05
5. $\bar{x}$ = ₹ 20.12 લાખ, M = ₹ 21.5 લાખ, s = ₹ 7.98 લાખ, j = –0.52
6. $\bar{x}$ = 10.31 હજાર ગાંસડી, M = 9.86 હજાર ગાંસડી, s = 6.33 હજાર ગાંસડી, j = 0.21
7. $\bar{x}$ = 9.5 સેલ્સિયસ, M = 8.6 સેલ્સિયસ, s = 7.27 સેલ્સિયસ, j = – 0.37

સ્વાધ્યાય 5.2

1. Q_1 = 20 વર્ષ, M = 22 વર્ષ, Q_3 = 25 વર્ષ, j = 0.2
2. Q_1 = ₹ 335 લાખ, M = ₹ 490 લાખ, Q_3 = ₹ 912.5 લાખ, j = 0.46
3. Q_1 = 40 હજાર ટન, M = 48 હજાર ટન, Q_3 = 68.75 હજાર ટન, j = 0.44
4. Q_1 = ₹ 18.27 હજાર, M = ₹ 20.53 હજાર, Q_3 = ₹ 22.44 હજાર, j = – 0.08

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

1. (c)	2. (b)	3. (c)	4. (c)	5. (a)	6. (d)	7. (c)
8. (d)	9. (a)	10. (b)	11. (c)	12. (a)	13. (d)	14. (b)

વિભાગ B

13. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.
14. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.
15. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.
16. આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતા ધરાવે છે.
17. આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતા ધરાવે છે.

વિભાગ C

5. $\bar{x}$ = 46	6. M = 69	7. M = 32.50
8. s = 12	9. j = 0.33	10. j = – 0.15
11. M = 42	12. j = – 0.4	13. j = –0.24
14. s = 4, s^2 = 16	15. M_0 = 38, j = 0.5	

વિભાગ D

5. સમૂહ A નો વિષમતાંક j = –0.17, સમૂહ B નો વિષમતાંક j = –0.40, સમૂહ A સંમિતતાની નજીક છે.
6. સમૂહ A નો Q_1 = 36, M = 48, Q_3 = 72, સમૂહ A નો j = 0.33, સમૂહ B નો j = 0.39, સમૂહ A કરતા સમૂહ B વધુ વિષમ છે.
7. S_k = 1.6, j = 0.07
8. s = 8, j = – 0.025
9. $\bar{x}$ = 32, s = 4, j = – 0.15
10. M_0 = 66, M = 62

11. $s = 12$, $M_o = 56$, $M = 61.33$, ચલનાંક = 18.75 **12.** $j = -0.75$

13. $\bar{x} = 36$, $M_o = 24$, $M = 32$, કાર્લ પિયર્સનની રીતે $j = 0.19$, બાઉલીની રીતે $j = -0.4$

વિભાગ E

6. પેઢી A : કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક $j = 0.69$, બાઉલની રીતે વિષમતાંક $j = -0.25$
પેઢી B : કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક $j = 1.58$, બાઉલીની રીતે વિષમતાંક $j = 0.5$
કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં પેઢી A કરતાં પેઢી B ની માહિતી વધુ વિષમતા ધરાવે છે. બાઉલીની પદ્ધતિમાં પેઢી A કરતાં પેઢી B વધુ વિષમ છે.

7. $\bar{x} = 18.9$ ડઝન, $M = 18$ ડઝન, $s = 4.44$ ડઝન, $j = 0.06$

8. $\bar{x} = 21.14$ એકમ, $M_o = 20$ એકમ, $s = 1.65$ એકમ, $j = 0.69$

9. $s = 7.5$, $j = -2.4$

વિભાગ F

1. $Q_1 = 2$ કલાક, $M = 3$ કલાક, $Q_3 = 4$ કલાક, $j = 0$, બાઉલીનો, $j = 0$

2. $\bar{x} = 14.89$ સેલ્સિયસ $M = 15.12$ સેલ્સિયસ, $s = 8.29$ સેલ્સિયસ, $j = -0.08$

3. $\bar{x} = 31.42$ ગુણ, $M = 31.32$ ગુણ, $s = 11.68$ ગુણ, $j = 0.026$

4. $Q_1 =$ ₹ 17.5 લાખ, $Q_3 =$ ₹ 34.38 લાખ, $M =$ ₹ 26 લાખ, $j = -0.007$, ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

5. $\bar{x} = 9.28$ એકમ $M = 8$ એકમ, $s = 6.66$ એકમ, $S_k = 3.84$, $j = 0.58$

6. $Q_1 = 4.19$ મિમિ, $Q_3 = 4.46$ મિમિ, $M = 4.32$ મિમિ, $j = 0.037$, ધન વિષમતા ધરાવે છે.

7. $\bar{x} = 9.23$ પૅકેટ, $M = 4.75$ પૅકેટ, $s = 10.22$ પૅકેટ, $j = 1.32$

8. $Q_1 = 2.95$ ચોમી, $Q_3 = 5.95$ ચોમી, $M = 4.55$ ચોમી, $j = -0.067$, ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

9. $\bar{x} = 180$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $M_o = 180$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $s = 41.63$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $j = 0$, આપેલ વિતરણ સંમિત છે.

10. $Q_1 = 23.75$ મશીન, $Q_3 = 35.63$ મશીન, $M = 30.5$ મશીન, $j = -0.14$

●

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (1) 720	(2) 2450	(3) 40,320	(4) 3,62,880	
2. $n = 11$	**3.** $r = 4$	**4.** $n = 7$	**5.** 24	**6.** 600
7. 2880	**8.** 576	**9.** 72	**10.** 24	
11. (1) 50400	(2) 151200	(3) 90720	**12.** 2:1	**13.** 9072
14. (1) 49	(2) 12	(3) 83	(4) 93	(5) 40
15. 240	**16.** 720			

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (1) 330	(2) 1	(3) 300	(4) 1	
2. (1) $n = 8$	(2) $r = 8$ અથવા $r = 5$		(3) $n = 6$	(4) $n = 10$
3. 28	**4.** 10	**5.** 120	**6.** 2184	
7. (1) 11	(2) 15	**8.** (1) 78	(2) 16	
9. (1) 56	(2) 20	**10.** 55	**11.** 63	
12. (1) 35	(2) 21	**13.** 127	**14.** 560, 126	
15. $n = 8$	**16.** $r = 4$			

સ્વાધ્યાય 6.3

1. (1) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$

   (2) $1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$

   (3) $\frac{81}{x^4} - \frac{144}{x^2} + 96 - \frac{256x^2}{9} + \frac{256x^4}{81}$

   (4) $\frac{x^3}{729} + \frac{2x^2}{27} + \frac{5x}{3} + 20 + \frac{135}{x} + \frac{486}{x^2} + \frac{729}{x^3}$

   (5) $\frac{a^5}{32} - \frac{5a^4b}{48} + \frac{5a^3b^2}{36} - \frac{5a^2b^3}{54} + \frac{5ab^4}{162} - \frac{b^5}{243}$

2. (1) 352 (2) 198 (3) 248

સ્વાધ્યાય 6

વિભાગ A

1. (d) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (d) **5.** (b) **6.** (c)
7. (b) **8.** (a) **9.** (d) **10.** (a) **11.** (d)

વિભાગ B

5. 1,6,15,20,15,6,1
7. 60 **8.** 6 **9.** 7 **10.** 5039 **11.** 60 **12.** 120

વિભાગ C

2. 720 **3.** 144 **4.** 12441600 **5.** 96 **6.** 12 **7.** 72
8. 18 **9.** 1:1 **10.** 6 **11.** 12 **12.** 5200
13. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
14. $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
15. $y^5 + 5y^4k + 10y^3k^2 + 10y^2k^3 + 5yk^4 + k^5$

વિભાગ D

1. (1) 120 (2) 72 (3) 24 **2.** 1152 **3.** (1) 48 (2) 12 (3) 36
4. 4370 **5.** (1) 4 (2) 16 (3) 12 **6.** (1) 9 (2) 12 (3) 6
7. (1) 1 (2) 36 (3) 12 **8.** (1) 34 (2) 50 **9.** 44 **10.** 416

●

સ્વાધ્યાય 7

વિભાગ A

1. (d) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a) **5.** (c) **6.** (c) **7.** (a)

વિભાગ B

1. (1) ખોટું (2) ખોટું (3) સાચું (4) સાચું
(5) સાચું (6) ખોટું (7) સાચું
2. નિદર્શન **3.** સ્તરિત **4.** પદિક **5.** ટિપેટ **6.** સમષ્ટિ તપાસ

વિભાગ D

દાખલા નંબર 13 થી 17ના આપેલ જવાબ ઉપરાંત અન્ય યાદચ્છિક નિદર્શ પણ મળી શકે છે.

13. 018, 096, 027, 007, 012

14. 27, 32, 59, 66, 32, 48, 25

15. પુરવણી સહિત : 170, 111, 002, 203, 111, 233, 300
પુરવણીરહિત : 170, 111, 002, 203, 233, 300, 250

16. પ્રથમ વર્ષ : 158, 092, 009, 200
દ્વિતીય વર્ષ : 019, 131, 057, 006
તૃતીય વર્ષ : 027, 070, 198, 200

17. ઘઉં પકવતાં ખેડૂતો : 12, 18, 20, 11, 03, 10
ચોખા પકવતાં ખેડૂતો : 04, 11, 08, 13

19. N = 20, n = 4, k = N/n = 20/4 = 5
નિદર્શ 1 : 1, 6, 11, 16
નિદર્શ 2 : 2, 7, 12, 17
નિદર્શ 3 : 3, 8, 13, 18
નિદર્શ 4 : 4, 9, 14, 19
નિદર્શ 5 : 5, 10, 15, 20

20. N = 30, n = 10, k = N/n = 30/10 = 3
નિદર્શ 1 : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
નિદર્શ 2 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29
નિદર્શ 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

●

સ્વાધ્યાય 8

વિભાગ A

1. (a) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (b) **5.** (c) **6.** (c) **7.** (b) **8.** (c)

વિભાગ B

1. પ્રદેશ ગણ A અને સહપ્રદેશ ગણ B અરિક્ત ન હોવા જોઈએ. **2.** હા **3.** ના

7. ના. બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ જુદા છે. **8.** અનેક-એક **9.** એક-એક

વિભાગ C

4. $R_f = \{3, 4, 5\}$ **5.** અનેક-એક **6.** એક-એક **7.** $D_f = \{\frac{1}{2}\ 1, \frac{3}{2}\}$

8. 0 **9.** $R_f = \{-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{10}\}$ **10.** 27 **11.** અનેક-એક

12. $x = 2$ **13.** એક-એક **14.** 14 **15.** 0

વિભાગ D

1. $D_f = \{10, 20, 30\}$, $B = \{18, 48, 98, 128, 148\}$, $R_f = \{48, 98, 148\}$

2. $D_f = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$, $B = \{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\}$, $R_f = \{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\}$

3. $f(-1) = -1, f(-2) = -\frac{5}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$	**4.** $D_f = \{3, 4, 5, 7\}$	**5.** $x = \pm \frac{1}{2}$
6. $R_f = \{2, 5, 10, 17\}$	**7.** 5	**8.** {0, 3}
9. અસમાન વિધેયો	**10.** અનેક–એક	**12.** $\frac{14}{27}$
13. 36	**14.** $\frac{58}{11}$	**15.** 40, 1300

●

પ્રકરણ 9

વિભાગ A

1. (d)	**2.** (a)	**3.** (a)	**4.** (b)	**5.** (c)
6. (b)	**7.** (d)	**8.** (c)	**9.** (a)	**10.** (c)

વિભાગ B

1. ar^n	**2.** 0.1	**3.** 140	**4.** 2	**5.** $\frac{1}{4}$
6. –1	**7.** 4	**8.** સાચું	**9.** સાચું	

વિભાગ C

3. $a = 3$	**4.** $r = 5$	**5.** 80	**6.** પાંચમું	**7.** 1
8. 16	**9.** (1) 6250	(2) $\frac{25}{16}$	(3) $\frac{128}{6561}$	(4) 8

વિભાગ D

1. ± 135	**2.** $T_5 = \frac{1}{3}$ અને $S_4 = \frac{65}{16}$	**3.** $\frac{1}{16}$	**4.** 120
5. 12.4	**6.** 4, 16, 64....	**7.** $m = \pm 10, t = \pm 40$	
8. $n = 4$	**9.** $n = 5$	**10.** $\frac{16}{3}$	**11.** $8(3^n)$
12. 125	**13.** 6	**14.** $a = 4$ અને $n = 5$	
15. (1) 340	(2) $\frac{211}{8}$	(3) 124.96	(4) $\frac{1023}{1024}$

વિભાગ E

1. $k = 5$	**2.** $n = 6$	**3.** $n = 11$
4. 81	**5.** $r = \pm 3$	**6.** $r = \pm 2$
7. 1, 5, 25 અથવા 25, 5, 1	**8.** 2, –4, 8 અથવા 8, –4, 2	**9.** S_{10} = ₹ 1,02,30,000
10. 248 નોટો	**11.** 6095	**12.** ₹ 2,65,720.50

● ● ●