4 અવયવીકરણ-1 (Factorization-1)

❖ યાદ કરીએ :

- 10ના બધા અવયવો આપો :

  1, 2, 5 અને 10

- વિદ્યાર્થીમિત્રો, હવે ઉપર મુજબ 12ના બધા અવયવો આપો.

  ______, ______, ______, ______, ______, ______

- 10ના અવયવો પાડો.

  10 = 2 × 5

  વિદ્યાર્થીમિત્રો, હવે તમે 18ના અન્ય રીતે અવયવો પાડી બતાવો.

  18 = ____________________

- 28ના અવયવો પાડો.

  28 = 2 × [14]

  ∴ 28 = 2 × 2 × [ ]

- 48ના અવયવો પાડો.

  48 = 2 × [24]

  = 2 × [ ] × 12

  = 2 × [ ] × [ ] × 6

  48 = 2 × [ ] × [ ] × [ ] × 3

આપણે અજ્ઞાત સંખ્યા વિશે જાણીએ છીએ, તો તેના આધારે પદાવલિઓના અવયવોની સમજ મેળવીશું.

એકપદીના અવયવો પાડવા :

જેમ $10 = 2 \times 5$

તેવી જ રીતે $2x = 2 \times x$

$6x = 2 \times 3 \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

આમ, એકપદીના અવયવો પાડવા માટે આપેલી એકપદીના સહગુણકના અવિભાજ્ય અવયવો અને અજ્ઞાત સંખ્યાને તેના ઘાતને આધારે ગુણાકાર સ્વરૂપે લખવી.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલી એકપદીના અવયવો પાડો :

(1) $15x^2y^2 = 3 \times 5 \times x \times x \times y \times y$

(2) $12xy^4 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times y \times y \times y$

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) $2x^2y^2 = ____ \times x \times x \times ____ \times y$

(2) $10a^2b = 2 \times ____ \times a \times ____ \times b$

(3) $6xy = ____ \times 3 \times x \times ____$

(4) $15mn^2 = 3 \times ____ \times m \times ____ \times n$

2. નીચેની એકપદીના અવયવો પાડો :

(1) 25 (2) $6x^2y$ (3) $20x^2y^4$

(4) $24x^3y^2$ (5) $26xy$ (6) $18a^3b$

❖ દ્વિપદીના અવયવો પાડવા :

અજ્ઞાત સંખ્યાઓ માટે વિભાજનનો ગુણધર્મ આપણે જાણીએ છીએ.

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (વિભાજનનો ગુણધર્મ)

$a (b + c) = ab + ac$

આમ $ab + ac$ના અવયવો મેળવવા માટે બંને પદને a વડે ભાગતાં $(b + 1)$ મળે છે. આમ, a અને $(b + c)$ તેના અવયવો થશે.

$ab + ac = \underline{a} \times b + \underline{a} \times c$

$= a (b + c)$ (a સામાન્ય લેતાં)

ઉદાહરણ 2 : $4x + 6$ના અવયવો પાડો

$= \underline{\mathbf{2} \times 2 \times x} + \underline{\mathbf{2} \times 3}$

$= 2\ (2x + 3)$ (2 સામાન્ય લેતાં)

ઉદાહરણ 3 : $6a^2b - 3ab^2$ ના અવયવો પાડો.

$= \underline{2 \times \mathbf{3} \times \boldsymbol{a} \times a \times \boldsymbol{b}} - \underline{\mathbf{3} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times b}$

$= 3ab(2a - b)$ ($3ab$ સામાન્ય લેતાં)

મહાવરો 2

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) $x^2 - x = x$ (______)

(2) $8x^3 + 4x^2 =$ (______) $(2x + 1)$

(3) $3a^2 - 6 = 3$ (______)

(4) $xy - xz = x$ (______)

2. નીચેની દ્વિપદીના અવયવો પાડો :

(1) $10x + 5$ (2) $5x^2 + 15$ (3) $7a - 7b$ (4) $-3x + 6$

(5) $6x^3y^2 - 3x$ (6) $9xy^2 - 18x^2$ (7) $8 - 4xy$ (8) $9x - 27xyz$

(9) $12a^2b - 18ab^2$

❖ બહુપદીના અવયવ પાડો :

$ax + ay + bx + by$ના અવયવ પાડો.

$= (ax + ay) + (bx + by)$ **અથવા** $= (ax + bx) + (ay + by)$

$= a(x + y) + b\ (x + y)$ $= x(a + b) + y(a + b)$

$= (x + y)\ (a + b)$ $= (x + y)\ (a + b)$

ઉદાહરણ 4 : $4ab + 6ac + 2bx + 3cx$ ના અવયવો પાડો.

$= (4ab + 6ac) + (2bx + 3cx)$

$= 2a\,(2b + 3c) + x(2b + 3c)$

$= (2b + 3c)\,(2a + x)$

આ રીતે ઉદાહરણ (4)માં અન્ય જૂથો બનાવી દાખલો ફરી ગણો.

ઉદાહરણ 5 : $8ax + 3by - 12bx - 2ay$ના અવયવ પાડો.

$= 8ax - 2ay - 12bx + 3by$ (પદોની ગોઠવણી કરતાં)

$= 2a(4x - y) - 3b(4x - y)$

$= (4x - y)(2a - 3b)$

ઉદાહરણ 5માં અન્ય જૂથો બનાવી દાખલો ફરી ગણો.

નીચેની બહુપદીઓના અવયવો પાડો :

(1) $xy + 2x + 4y + 8$

(2) $xy - 4x + 3y - 12$

(3) $x^2y + 5x^2 + y + 5$

(4) $6x^2 + 4xy - 3x - 2y$

(5) $15x - 4a + 6 - 10ax$

(6) $10m^2n + 9 + 6m + 15mn$

પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદી (Perfect Square trinomial)ના અવયવો :

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે નીચેનાં વિસ્તરણ ચકાસીએ :

$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$ ...(I)

$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ ...(III)

$(3x - 5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$ ...(III)

ઉપરના (I)માં $x^2 + 4xy + 4y^2$ એ પૂર્ણવર્ગ બહુપદી છે. જેનું પ્રથમ પદ (First Term) x^2 અને અંતિમ પદ (Last Term) $4y^2$ એ પૂર્ણવર્ગ પદ છે. વળી તે પદો ધન છે.

તેવી જ રીતે (II)માં $4x^2 + 12x + 9$ એ પૂર્ણવર્ગ બહુપદી છે તથા (III) માં $9x^2 - 30xy + 25y^2$ એ પૂર્ણવર્ગ બહુપદી છે. તેનાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ કેવાં છે? જાતે ચકાસો.

આમ, ત્રણેય વિસ્તરણ પરથી નક્કી કરી શકાય કે પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદીમાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ પૂર્ણવર્ગ અને સરવાળાના ચિહ્નથી જોડાયેલા હોય છે.

(I)ની પૂર્ણવર્ગ બહુપદીમાં મધ્યમ પદ (Middle Term) $4xy$ એ x અને $2y$ના ગુણાકારનાં બે ગણાં છે.

(II)ની પૂર્ણવર્ગ બહુપદીમાં મધ્યમ પદ $12x$ એ $2x$ અને 3 નાં ગુણાકારનાં બે ગણાં છે.

(III)ની પૂર્ણવર્ગ બહુપદીમાં મધ્યમ પદ $30xy$ એ $3x$ અને $5y$નાં ગુણાકારનાં બે ગણાં છે.

અહીં (I)માં x એ x^2 નું વર્ગમૂળ તથા $2y$ એ $4y^2$ નું વર્ગમૂળ છે. તથા મધ્યમ પદ x અને $2y$ ના ગુણાકારથી બમણું છે.

$$\therefore \text{ મધ્યમ પદ} = \pm 2 \times \sqrt{\text{પ્રથમ પદ}} \times \sqrt{\text{અંતિમ પદ}}$$

હવે, $(\text{મધ્યમ પદ})^2 = 4 \times \text{પ્રથમ પદ} \times \text{અંતિમ પદ}$

$$\therefore \text{ પ્રથમ પદ} = \frac{(\text{મધ્યમ પદ})^2}{4 \times \text{અંતિમ પદ}} \text{ અને અંતિમ પદ} = \frac{(\text{મધ્યમ પદ})^2}{4 \times \text{પ્રથમ પદ}}$$

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલી ત્રિપદી પૂર્ણવર્ગ છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(1) $6x^2 - 12x + 4$

પ્રથમપદ $= 6x^2$

અહીં પ્રથમપદ $6x^2$ માં 6 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી, તેથી આપેલ ત્રિપદી એ પૂર્ણવર્ગ નથી.

(2) $x^2 - 12x - 36$

આપેલ ત્રિપદીનું અંતિમ પદ બાદબાકીથી જોડાયેલું હોવાથી ત્રિપદી પૂર્ણવર્ગ નથી.

(3) $x^2 + 12x - 36$

આપેલ ત્રિપદીનું અંતિમ પદ બાદબાકીથી જોડાયેલું હોવાથી ત્રિપદી પૂર્ણવર્ગ નથી.

(4) $x^2 + 6x + 10$

આપેલ ત્રિપદીનું અંતિમ પદ પૂર્ણવર્ગ નથી, તેથી ત્રિપદી પૂર્ણવર્ગ નથી.

(5) $16x^2 + 12x + 1$

પ્રથમ પદ $= 16x^2 = (4x)^2$
અંતિમ પદ $= 1 = (1)^2$
} પ્રથમ અને અંતિમ બંને પદો પૂર્ણવર્ગ છે અને સરવાળાના ચિહ્નથી જોડાયેલા છે.

મધ્યમ પદ $= \pm\ 2\sqrt{\text{પ્રથમ પદ}} \times \sqrt{\text{અંતિમ પદ}}$

$= \pm\ 2\sqrt{16x^2} \times \sqrt{1}$

$= \pm\ 2 \times 4x \times 1$

$= \pm\ 8x$ અહીં મધ્યમ પદ $\pm\ 8x$ હોવું જોઈએ.

આપેલ ત્રિપદીનું મધ્યમ પદ $+\ 12x$ હોવાથી ત્રિપદી પૂર્ણવર્ગ નથી.

ઉદાહરણ 7 : નીચેની બહુપદી પૂર્ણવર્ગ બને તે માટે પ્રથમ પદ અથવા અંતિમ પદ શોધો.

(1) $x^4 + 6x^2 +$ ______

$$\text{અંતિમ પદ} = \frac{(\text{મ.પદ})^2}{4 \times \text{પ્ર.પદ}} = \frac{(6x^2)^2}{4 \times x^4} = \frac{6x^2 \times 6x^2}{4 \times x^4} = 9$$

(2) ______ $+ 10x + 25$

$$\text{પ્રથમ પદ} = \frac{(\text{મ.પદ})^2}{4 \times (\text{અં.પદ})} = \frac{(10x)^2}{4 \times 25} = \frac{10x \times 10x}{4 \times 25} = x^2$$

ઉદાહરણ 8 : અવયવો પાડો :

(1) $x^2 + 14x + 49$

$= (x)^2 + 2(x)(7) + (7)^2$ [$a^2 \pm 2ab + b^2$ પ્રમાણે ગોઠવતાં]

$= (x + 7)^2$

(2) $25m^2 - 20mn + 4n^2$

$= (5m)^2 - 2(5m)(2n) + (2n)^2$ ($a^2 \pm 2ab + b^2$ પ્રમાણે ગોઠવતાં)

$= (5m - 2n)^2$

(3) $4ax^2 + 12ax + 9a$

$= a(4x^2 + 12x + 9)$ (a સામાન્ય કાઢતાં)

$= a[(2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2]$

$= a(2x + 3)^2$

મહાવરો 4

1. નીચે આપેલ દરેક બહુપદી પૂર્ણવર્ગ છે કે નહીં તે નક્કી કરો :

(1) $x^2 + 2x + 4$ (2) $x^2 - 14x + 49$

(3) $a^2 + 10a + 25$ (4) $9x^2y^2 + 24xy + 8$

(5) $25x^2 - 35x + 49$ (6) $4x^2 + 4x + 1$

(7) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ (8) $x^2 - 8x + 16$

2. નીચેની બહુપદી પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદી બને તે માટે ખૂટતું પદ શોધો :

(1) $9a^2 +$ _______ $+ 16$

(2) _______ $- 12x + 9$

(3) $9x^2 + 30xy +$ _______

(4) _______ $+ 4xy + 4$

(5) $81x^2 +$ _______ $+ 4$

(6) $4a^2 +$ _______ $+ \frac{1}{4a^2}$

3. અવયવો પાડો :

(1) $x^2 + 12x + 36$ (2) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

(3) $9x^2 + 48x + 64$ (4) $x^2 - 8x + 16$

(5) $25x^2y^2 - 20xy + 4$ (6) $16x^2 + 40x + 25$

(7) $81 - 90xy + 25x^2y^2$ (8) $3x^3 - 30x^2 + 75x$

❖ **છ પદના અવયવો : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$**

(i) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ત્રિપદીના વર્ગના વિસ્તરણને ઊલટાવતાં

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

અહીં છ પદોમાં સરવાળાથી જોડાયેલાં પ્રથમ ત્રણ પદો પૂર્ણવર્ગ છે.

ચોથું પદ એ પહેલા અને બીજા પદના વર્ગમૂળનો ગુણાકાર × 2

પાંચમું પદ એ બીજા અને ત્રીજા પદના વર્ગમૂળનો ગુણાકાર × 2 અને

છઠ્ઠું પદ એ ત્રીજા અને પહેલા પદના વર્ગમૂળનો ગુણાકાર × 2 છે.

(ii) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

ત્રિપદીના વર્ગના વિસ્તરણને ઊલટાવતાં,

$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca = (a - b - c)^2$

અહીં (i) અને (ii) નાં છ પદોમાં બધાં જ પદો ધન અથવા અંતિમ ત્રણ પદોમાંથી બે અને માત્ર બે જ પદો ઋણ હોય.

ઉદાહરણ 9 : અવયવ પાડો :

(1) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20zx$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(5z) + 2(5z)(2x)$

$= (2x + 3y + 5z)^2$

(2) $16a^2 + 4b^2 + 36c^2 - 16ab + 24bc - 48ca$

$= (-4a)^2 + (2b)^2 + (6c)^2 + 2(-4a)(2b) + 2(2b)(6c) + 2(6c)(-4a)$

$= (-4a + 2b + 6c)^2$ અથવા $(4a - 2b - 6c)^2$

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણ (ii)માં છ પદોમાં જે બે પદમાં ઋણ નિશાની હોય તેમાં જે ચલ સામાન્ય હોય, તે ચલની ઋણ નિશાની મૂકવી.

મહાવરો 5

❖ **અવયવો પાડો :**

(1) $9x^2 + 4y^2 + 1 + 12xy + 4y + 6x$

(2) $16a^2 + 9b^2 + c^2 - 24ab + 6bc - 8ca$

(3) $a^4 + 4b^2 + 9 + 4a^2b - 12b - 6a^2$

(4) $9x^2 + 16y^2 + 25 + 24xy - 40y - 30x$

(5) $a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ca$

1. નીચેનું પ્રત્યેક વિધાન સાચું બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) $15x^3y = 3 \times$ ______ $\times$ ______ $\times x \times x \times y$

(2) $5x^4 - x^3 = x^3$ (______)

(3) $-5a^2 + 10a =$ ______ $(a - 2)$

(4) $ab + a - 2b - 2 = (a - 2)$ (______)

(5) $16a^2 +$ ______ $+ 1 = (4a + 1)^2$

(6) ______ $+ 10x + 25 = (x + 5)^2$

(7) $4y^2 -$ ______ $+ 9 = (2y - 3)^2$

(8) $16x^2 - 72x + 81$ એ ______ નો વર્ગ છે.

(9) $a^2 -$ ______ $+ 0.04 = (a - 0.2)^2$

(10) $9x^2 + 1$માં ______ ઉમેરતાં પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદી બને.

2. અવયવો પાડો :

(1) $4ab + 8a - b - 2$

(2) $x^2y - 3x^2 + y - 3$

(3) $2x^2 - 5a - 5x + 2ax$

(4) $3ab + 12 - 4a - 9b$

(5) $x^2 + 49 + 14x$

(6) $16a^2 + 40ab + 25b^2$

(7) $m^4 - 16m^2 + 64$

(8) $4y^3 - 28y^2 + 49y$

(9) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20xy + 12yz + 30zx$

(10) $4m^2 + 9n^2 + p^2 - 12mn + 6np - 4pm$

•

જવાબો

મહાવરો 1

1. (1) 2, y (2) 5, a (3) 2, y (4) 5, n

2. (1) 5×5 (2) $2 \times 3 \times x \times x \times y$

(3) $2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times y \times y \times y \times y$

(4) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y$

(5) $2 \times 13 \times x \times y$ (6) $2 \times 3 \times 3 \times a \times a \times a \times b$

મહાવરો 2

1. (1) $(x - 1)$ (2) $4x^2$ (3) $(a^2 - 2)$ (4) $y - z$

2. (1) $5(2x + 1)$ (2) $5(x^2 + 3)$ (3) $7(a - b)$ (4) $-3(x - 2)$ અથવા $3(2 - x)$

(5) $3x(2x^2y^2 - 1)$ (6) $9x(y^2 - 2x)$ (7) $4(2 - xy)$ (8) $9x(1 - 3yz)$

(9) $6ab(2a - 3b)$

મહાવરો 3

1. (1) $(x + 4)(y + 2)$ (2) $(x + 3)(y - 4)$ (3) $(x^2 + 1)(y + 5)$

(4) $(2x - 1)(3x + 2y)$ (5) $(5x + 2)(3 - 2a)$ (6) $(5mn + 3)(2m + 3)$

મહાવરો 4

1. (1) પૂર્ણવર્ગ નથી. (2) પૂર્ણવર્ગ છે. (3) પૂર્ણવર્ગ છે. (4) પૂર્ણવર્ગ નથી.

(5) પૂર્ણવર્ગ નથી. (6) પૂર્ણવર્ગ છે. (7) પૂર્ણવર્ગ છે. (8) પૂર્ણવર્ગ છે.

2. (1) 24a (2) $4x^2$ (3) $25y^2$ (4) x^2y^2 (5) $36x$ (6) 2

3. (1) $(x + 6)^2$ (2) $(2x + 3y)^2$ (3) $(3x + 8)^2$ (4) $(x - 4)^2$

(5) $(5xy - 2)^2$ (6) $(4x + 5)^2$ (7) $(9 - 5xy)^2$ (8) $3x(x - 5)^2$

મહાવરો 5

1. (1) $(3x + 2y + 1)^2$ (2) $(4a - 3b - c)^2$ (3) $(a^2 + 2b - 3)^2$
(4) $(3x + 4y - 5)^2$ (5) $(a - 2b + c)^2$

સ્વાધ્યાય

1. (1) $5, x$ (2) $5x - 1$ (3) $-5a$ (4) $b + 1$ (5) $8a$
(6) x^2 (7) $12y$ (8) $4x - 9$ (9) $0.4a$ (10) $\pm 6x$

2. (1) $(b + 2)(4a - 1)$ (2) $(x^2 + 1)(y - 3)$ (3) $(2x - 5)(x + a)$
(4) $(a - 3)(3b - 4)$ (5) $(x + 7)^2$ (6) $(4a + 5b)^2$ (7) $(m^2 - 8)^2$
(8) $y(2y - 7)^2$ (9) $(5x + 2y + 3z)^2$ (10) $(2m - 3n - p)^2$

જાણવા જેવું :

Pascal's Triangle

		સહગુણક
$(x + y)^0$	1	1
$(x + y)^1$	$x + y$	1 1
$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1
$(x + y)^3$	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1
$(x + y)^4$	$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1
$(x + y)^5$	$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$	1 5 10 10 5 1

સમજૂતી : દા.ત., $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ લખવા માટે 1, 3, 3, 1 એ સહગુણક છે. જ્યારે x ની ઘાત ઉતરતા ક્રમમાં લખેલ છે. જ્યારે y ની ઘાત ચઢતા ક્રમમાં લખેલી છે.