গণিতত প্ৰমাণ (Proofs in Mathematics)

পৰিশিষ্ট 1

A1.1. অৱতাৰণা (Introduction) :

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত যুক্তি প্ৰদৰ্শন আৰু স্পষ্ট চিন্তাৰ বাবে দক্ষতা অতীব প্ৰয়োজন। উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰাহ'ল এজন ৰাজনীতিবিদে তোমালোকক উদ্দেশি কয়,— 'যদি তোমালোক স্বচ্ছ চৰকাৰৰ বাবে আগ্ৰহী তেন্তে তোমালোকে মোক ভোট দিবা'। তোমালোকক তেওঁ এই বুলি বুজাবলৈ বিচাৰিছে যে যদি তোমালোকে তেওঁক ভোট নিদিয়া তেন্তে তোমালোকে স্বচ্ছ চৰকাৰ নাপাবও পাৰা। একেদৰে এটা বিজ্ঞাপনে তোমালোকক কৈছে, "বুদ্ধিমানীসকলে XYZ জোতা ব্যৱহাৰ কৰে'। কোম্পানীটোৱে তোমালোকক বুজাইছে যে, যদি তোমালোকে XYZ জোতা নিপিন্ধা তেন্তে তোমালোক মুঠেই বুদ্ধিমান নোহোৱা। তোমালোকে নিজেই পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিলে দেখা পাবা যে ওপৰৰ দুয়োটা উক্তিয়েই সাধাৰণ মানুহক বিপথে পৰিচালিত কৰিব পাৰে। সেয়ে, যদি আমি যুক্তিৰে শুদ্ধভাবটো বুজি পাওঁ তেন্তে আমি এনে প্ৰলোভনত নপৰোঁ।

গণিতৰ মূলত যুক্তিৰ শুদ্ধ ব্যৱহাৰ আছে, বিশেষভাৱে প্ৰমাণ গঠনত। নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক প্ৰমাণৰ ধাৰণাৰ লগত পৰিচয় কৰাই দিছিলোঁ আৰু তোমালোকে সচাঁকৈয়ে বহুতো উক্তিৰ প্ৰমাণ কৰিছিলা, বিশেষভাৱে জ্যামিতিত। মনত পেলোৱা যে, এটা প্ৰমাণ বহুতো গাণিতিক উক্তিৰে গঠিত, যিবোৰ যুক্তিপূৰ্ণভাৱে কোনোবা উক্তিৰ প্ৰমাণত থকা বা উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত থকা বা এটা স্বতঃসিদ্ধ বা প্ৰকল্পৰ পৰা টানি অনা হয়। এই মূল ভেটি য'ত আমি এটা প্ৰমাণ গঠনত ব্যৱহাৰ কৰোঁ, তাক বিশ্লেষণাত্মক যুক্তিৰ ধাৰা বোলা হয়।

আমি এই অধ্যায়ৰ আৰম্ভণি এটা পুনৰালোচনাৰে কৰিম যে এটা গাণিতিক উক্তিনো কি। তাৰ পাছত আমি সাধাৰণ উদাহৰণ লৈ নিগমন যুক্তিৰে আমাৰ দক্ষতা বৃদ্ধিৰ পথত আগ বাঢ়িম। আমি নঞৰ্থবোধক ধাৰণাৰ সৈতেও আলোচনা কৰিম আৰু এটা উক্তিৰ বিপৰীতটো নিৰ্ণয় কৰিম। তাৰপাছত আমি ব্যাখ্যা কৰিম যে, এটা উক্তিৰ বিপৰীত উলিয়াবলৈ ইয়াৰ তাৎপৰ্য্য কি। শেষত, বহুতো উক্তিৰ প্ৰমাণ বিশ্লেষণ কৰি নৱম শ্ৰেণীত শিকি অহা এটা প্ৰমাণৰ উপাদানসমূহৰ পুনৰালোচনা কৰিম। ইয়াত, আমি বিৰোধ প্ৰক্ৰিয়াৰে প্ৰমাণৰ ধাৰণাও আলোচনা কৰিম, যিটো তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত পাই আহিছা আৰু এই পুথিৰ বহুতো পাঠত পাইছা।

A1.2. গাণিতিক উক্তিৰ পুনৰীক্ষণ (Mathematical Statements Revisited) :

মনত পেলোৱা যে, উক্তি এটা হ'ল অৰ্থবহ বাক্য যি আদেশ বা ভাববোধক বা প্ৰশ্নবোধক নহয়। উদাহৰণস্বৰূপে, "কোনদুটা দলে ক্ৰিকেটৰ বিশ্বকাপ ফাইনেল খেলিব?"এটা প্ৰশ্নবোধক বাক্য, এটা উক্তি নহয়। 'যোৱা আৰু তোমাৰ ঘৰুৱা কাম শেষ কৰা' এটা আদেশ, এটা উক্তি নহয়। 'কি যে সুন্দৰ গ'লটো' এটা ভাববোধক বাক্য, এটা উক্তি নহয়।

মনতৰাখিবা— সাধাৰণতে উক্তি তলত দিয়া যিকোনো এটা হ'ব পাৰে-

- *সদায় সত্য*
- *সদায় অসত্য*
- *দ্বিঅৰ্থক।*

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে পঢ়িছিলা যে, গণিতত, **এটা উক্তি গ্ৰহণযোগ্য হ'ব যদি ই সত্য বা অসত্য।** গতিকে, দ্বিঅৰ্থক বাক্যবোৰ গাণিতিক উক্তি বুলি ধৰা নহয়।

কিছুমান উদাহৰণ জৰিয়তে, আমি আমাৰ ধাৰণাবোধ পুনৰালোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 1 : তলৰ উক্তিবোৰ সদায় সত্য নে সদায় অসত্য বা দ্বিঅৰ্থক বাছি উলিওৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা নিৰূপণ কৰা :

(i) সূৰ্যই পৃথিৱীক প্ৰদক্ষিণ কৰে।

(ii) যানবাহনৰ চাৰিটা চকা থাকে।

(iii) পোহৰৰ দ্ৰুতি প্ৰায় 3×10^5 কিঃমিঃ/ছেঃ

(iv) কলিকতালৈ যোৱা পথ নৱেম্বৰৰ পৰা মাৰ্চলৈ বন্ধ থাকিব।

(v) সকলো মানুহ মৰণশীল।

সমাধান :

(i) এই বাক্যটো সদায় অসত্য, কিয়নো জ্যোতিৰ্বিদসকলে এইটো প্ৰতিষ্ঠা কৰি থৈছে যে, পৃথিৱী সূৰ্যৰ চাৰিওফালে ঘূৰে।

(ii) এই বাক্যটো দ্বিঅৰ্থক কিয়নো আমি সিদ্ধান্ত দিব নোৱাৰো যে এইটো সদায় সত্য বা সদায় অসত্য। এইটো যানবাহনখনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে— যানবাহনৰ চকা 2, 3, 4, 6, 10টা আদি থাকিব পাৰে।

(iii) এই বাক্যটো সদায় সত্য, পদাৰ্থবিদে প্ৰমাণ কৰি গৈছে।

(iv) এই বাক্যটো দ্বিঅৰ্থক কাৰণ, এইটো স্পষ্ট নহয় যে কোনটো ৰাস্তাৰ কথা কৈছে।

(v) এই বাক্যটো সদায় সত্য যিহেতু প্ৰত্যেক মানুহেই কোনো এদিন মৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 2 : তলৰ উক্তিবোৰ সত্যনে অসত্য কোৱা আৰু তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততাৰ প্ৰমাণ দিয়া।

(i) সকলো সমবাহু ত্ৰিভুজ সমদ্বিবাহু।

(ii) কিছুমান সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ সমবাহু।

(iii) সকলো সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ সমবাহু।

(iv) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা।

(v) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা নহয়।

(vi) সকলো অখণ্ড সংখ্যা পৰিমেয় নহয়।

(vii) যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত কোনো পৰিমেয় সংখ্যা নাই।

সমাধান :

(i) এই উক্তিটো সত্য কাৰণ সমবাহু ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ সমান আৰু সেইবাবে সমদ্বিবাহু।

(ii) এই উক্তিটো সত্য কাৰণ যিবোৰ সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ ভূমিসংলগ্ন কোণ $60°$, সেইবোৰ সমবাহু।

(iii) এই উক্তিটো অসত্য। এটা বিৰোধ উদাহৰণ দিয়া।

(iv) এই উক্তিটো সত্য, যিহেতু পৰিমেয় সংখ্যাৰ আকাৰ $\frac{p}{q}$, য'ত p এটা অখণ্ড সংখ্যা আৰু

$q = 1$ হ'লে, অখণ্ড সংখ্যা হয় (উদাহৰণস্বৰূপে, $3 = \frac{3}{1}$)।

(v) এই উক্তিটো সত্য, কাৰণ পৰিমেয় সংখ্যাৰ আকাৰ $\frac{p}{q}$, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু

p ক q ৰে হৰণ নগলে, সংখ্যাটো অখণ্ড নহয় (উদাহৰণস্বৰূপে, $\frac{3}{2}$)

(vi) এই উক্তিটো 'তাত এটা অখণ্ড সংখ্যা আছে যিটো পৰিমেয় নহয়' বোলা কথাষাৰৰ সৈতে একে। এইটো অসত্য কাৰণ সকলো অখণ্ড সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

(vii) এই উক্তিটো অসত্য। তোমালোকে জানা যে, যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যা r আৰু s ৰ মাজত $\frac{r+s}{2}$ আছে, যিটো পৰিমেয় সংখ্যা।

উদাহৰণ 3 : যদি $x < 4$, তলৰ কোনটো উক্তি সত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

সমাধান :

(i) এই উক্তিটো অসত্য, কাৰণ, উদাহৰণস্বৰূপে, $x = 3 < 4$ এ $2x > 8$ক সিদ্ধ নকৰে।

(ii) এই উক্তিটো অসত্য, কাৰণ, উদাহৰণস্বৰূপে, $x = 3.5 < 4$ এ $2x < 6$ক সিদ্ধ নকৰে।

(iii) এই উক্তিটো সত্য, কাৰণ, এইটো $x < 4$ ৰ দৰে একে।

উদাহৰণ 4 : যথাযথ চৰ্তৰ সৈতে উক্তিবোৰ পুনৰ লিখা যাতে সিহঁত সত্য উক্তিলৈ ৰূপান্তৰ হয়।

(i) এটা চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণদুডাল সমান হ'লে ই এটা আয়ত।

(ii) এটা ত্ৰিভুজৰ দুডাল বাহুৰ ওপৰত থকা দুটা বিন্দুক সংযোগ কৰা ৰেখা তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল।

(iii) সকলো অখণ্ড সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ অপৰিমেয় সংখ্যা।

(iv) সকলো দ্বিঘাত সমীকৰণৰ দুটা বাস্তৱ মূল থাকে।

সমাধান :

(i) এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণদুডাল সমান হ'লে ই এটা আয়ত হ'ব।

(ii) এটা ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল তৃতীয়বাহুৰ সমান্তৰাল।

(iii) সকলো মৌলিক সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

(iv) সকলো দ্বিঘাত সমীকৰণৰ অতি বেছি দুটা বাস্তৱ মূল থাকে।

মন্তব্য : ওপৰৰ উক্তিবোৰ অন্যভাবেও পুনৰ লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, (iii) ক এনেদৰেও লিখিব পাৰি যে, 'সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা p ৰ বাবে, যিবোৰ পূৰ্ণবৰ্গ নহয়, $\sqrt{p}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।'

অনুশীলনী : A1.1

1. তলৰ উক্তিবোৰ সদায় সত্য নে, সদায় অসত্য বা দ্বিঅৰ্থক কোৱাঁ। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দৰ্শোৱা—

   (i) সকলো গণিতৰ পাঠ্যপুথিয়েই আনন্দদায়ক।

   (ii) পৃথিৱীৰ পৰা সূৰ্য্যৰ দূৰত্ব প্ৰায় 1.5×10^8 কিঃ মিঃ

   (iii) সকলো মানুহেই বুঢ়া হ'ব।

   (iv) উত্তৰকাশীৰ পৰা হৰ্ছিললৈ যাত্ৰা কষ্টকৰ।

   (v) এগৰাকী মহিলাই এযোৰ দুৰবীক্ষণ যন্ত্ৰৰ দ্বাৰা এটা হাতী দেখিছিল।

2. তলৰ উক্তিবোৰ সত্য নে অসত্য কোৱাঁ। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।

   (i) সকলো ষড়ভুজ বহুভুজ।

   (ii) কিছুমান বহুভুজ পঞ্চভুজ।

   (iii) সকলো যুগ্ম সংখ্যাকে 2ৰে হৰণ নাযায়।

   (iv) কিছুমান বাস্তৱ সংখ্যা অপৰিমেয়।

   (v) সকলো বাস্তৱ সংখ্যা পৰিমেয় নহয়।

3. ধৰা হ'ল a আৰু b বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $ab \neq 0$, তেন্তে তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দৰ্শোৱা।
   (i) দুয়োটা a আৰু b শূন্য হ'ব লাগিব।
   (ii) দুয়োটা a আৰু b অশূন্য হ'ব লাগিব।
   (iii) a বা b অশূন্য হ'ব লাগিব।
4. উপযুক্ত চৰ্ত আৰোপ কৰি তলৰ উক্তিবোৰ পুনৰ কোৱাঁ যাতে সিইঁত সত্য হয়।
   (i) যদি $a^2 > b^2$, তেন্তে $a > b$.
   (ii) যদি $x^2 = y^2$, তেন্তে $x = y$.
   (iii) যদি $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, তেন্তে $x = 0$.
   (iv) চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণদুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

A1.3. নিগমন যুক্তি (Deductive Reasoning) :

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক অৱৰোহণ যুক্তিৰ লগত পৰিচয় কৰি দিয়া হৈছিল। ইয়াত আমি বহুতো উদাহৰণৰ সৈতে কাৰ্য্য কৰিম যি, এটা প্ৰদত্ত উক্তি সত্য বুলি প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা নিগমন যুক্তিৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা দিব। প্ৰদত্ত উক্তিটোক প্ৰস্তাৱনা (premises) বা অনুমান (প্ৰকল্প) বোলে। আমি কিছুমান উদাহৰণৰ দ্বাৰা আৰম্ভ কৰিম।

উদাহৰণ 5 : দিয়া আছে যে বিজাপুৰ কৰ্ণাটক ৰাজ্যৰ অন্তৰ্গত আৰু ধৰা হ'ল শাবনা বিজাপুৰত বাস কৰে। কোনখন ৰাজ্যত শাবনা বাস কৰে?

সমাধান : ইয়াত আমাৰ দুটা প্ৰস্তাৱনা আছে।
   (i) বিজাপুৰ কৰ্ণাটক ৰাজ্যৰ অন্তৰ্গত।
   (ii) শাবনা বিজাপুৰত বাস কৰে।

এই প্ৰস্তাৱনা দুটাৰ পৰা আমি বাহিৰ কৰিব পাৰো যে শাবনা কৰ্ণাটক ৰাজ্যত বাস কৰে।

উদাহৰণ 6 : দিয়া আছে, সকলো গণিতৰ পাঠ্যপুথিয়েই মনোগ্ৰাহী আৰু ধৰোঁ তোমালোকে গণিতৰ পাঠ্যপুথি পঢ়ি আছা। তোমালোকে পঢ়ি থকা পাঠ্যপুথিৰ বিষয়ে আমি কি ক'ব পাৰোঁ?

সমাধান : দুটা প্ৰস্তাৱনা (বা অনুমান) ব্যৱহাৰ কৰি আমি ক'ব পাৰোঁ যে তোমালোকে মনোগ্ৰাহী পাঠ্যপুথি পঢ়ি আছা।

উদাহৰণ 7 : দিয়া আছে, $y = -6x + 5$, আৰু ধৰোঁ $x = 3$. y কি?

সমাধান : দুটা অনুমান দিয়া আছে, আমি পাওঁ, $y = -6(3) + 5 = -13$.

চিত্ৰ A1.1

উদাহৰণ 8 ঃ দিয়া আছে যে, ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু ধৰোঁ AD = 5 ছে.মি., AB = 7 ছে.মি. (চিত্ৰ A1.1 চোৱা)। DC আৰু BC ৰ দৈৰ্ঘ্য সম্বন্ধে তুমি কি ক'ব পাৰা?

সমাধান ঃ আমাক দিয়া আছে যে, ABCD এটা সামান্তৰিক। গতিকে, আমি নিগমন কৰিব পাৰোঁ যে সামান্তৰিকৰ সকলো ধৰ্ম ABCD সামান্তৰিকে মানি চলে। সেইবাবে, বিশেষভাবে, 'সামান্তৰিকৰ দুটা মুখামুখি বাহু পৰস্পৰ সমান ধৰ্মটোৱো মানি চলে। যিহেতু আমি জানো যে, AD = 5 চে.মি., আমি পাম যে, BC = 5 চে.মি. একেদৰে আমি বাহিৰ কৰিব পাৰো যে, DC = 7 চে.মি.।

মন্তব্য ঃ এই উদাহৰণত আমি দেখা পালো যে, কেনেকৈ প্ৰায়ে আমি প্ৰস্তাৱনাত নিহিত ধৰ্ম বিচাৰি উলিয়াব লাগে আৰু তাক ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে।

উদাহৰণ - 9 ঃ দিয়া আছে যে, $\sqrt{p}$, সকলো মৌলিক pৰ বাবে অপৰিমেয় আৰু ধৰো 19423 এটা মৌলিক সংখ্যা। $\sqrt{19423}$ ৰ বিষয়ে কি সিদ্ধান্ত তুমি দিব পাৰা?

সমাধান ঃ আমি সিদ্ধান্ত দিওঁ যে $\sqrt{19423}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

ওপৰৰ উদাহৰণবোৰত তোমালোকে দেখিলা নিশ্চয় যে আমি অনুমানবোৰ সত্য হয়নে নহয় নাজানো। আমি ধৰিছোঁ যে সেইবোৰ সত্য আৰু তেতিয়া নিগমন যুক্তি প্ৰয়োগ কৰোঁ। উদাহৰণ (9)ত আমি সত্যাপন কৰা নাই 19423 মৌলিক সংখ্যা হয়নে নহয়, আমি আমাৰ যুক্তিৰ স্বাৰ্থত এইটো মৌলিক বুলি ধৰি লৈছোঁ। আমি এই অনুচ্ছেদত কিহৰ ওপৰত গুৰুত্ব দিছোঁ সেয়া হ'ল, এটা প্ৰদত্ত প্ৰস্তাৱনাৰ পৰা কেনেকৈ নিগমন যুক্তিৰে এটা সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ। ইয়াত আচল কথাটো হ'ল যে, আমি যুক্তিৰ শুদ্ধ পথ ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ আৰু যুক্তিৰ এই পথটো অনুমানৰ সত্যতা বা অসত্যতাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়। যি কি নহওক, এইটো মন কৰিব লাগে যে, যদি আমি অশুদ্ধ প্ৰস্তাৱনাৰে আৰম্ভ কৰিছোঁ তেন্তে আমি ভুল সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ।

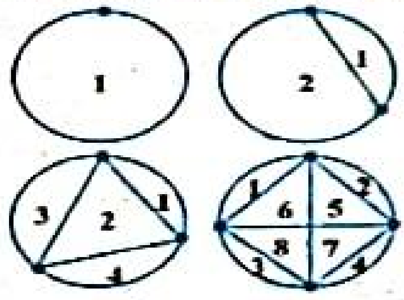
অনুশীলনী ঃ A1.2

1. দিয়া আছে, সকলো মাইকী মানুহ মৰণশীল, আৰু ধৰোঁ যে A এগৰাকী মাইকীমানুহ, A ৰ বিষয়ে আমি কি সিদ্ধান্ত দিব পাৰোঁ?
2. দিয়া আছে, দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ পুৰণফল পৰিমেয় আৰু ধৰোঁ a আৰু b পৰিমেয়, ab ৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত দিবা?
3. দিয়া আছে, অপৰিমেয় সংখ্যা দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে শেষ নহয় আৰু পৌনঃ পৌনিকো নহয় আৰু $\sqrt{17}$ এটা অপৰিমেয়, $\sqrt{17}$ ৰ দশমিক বিস্তাৰৰ বিষয়ে আমি কি সিদ্ধান্ত দিব পাৰোঁ?

4. দিয়া আছে, $y = x^2 + 6$ আৰু $x = -1$, y ৰ মানৰ বিষয়ে তুমি কি ক'বা?
5. দিয়া আছে, ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু $\angle B = 80°$, সামান্তৰিকটোৰ বাকী কোণবোৰৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত দিবা?
6. দিয়া আছে, PQRS এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ আৰু ইয়াৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। চতুৰ্ভুজটোৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বা?
7. দিয়া আছে, সকলো মৌলিক সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ অপৰিমেয় আৰু ধৰো 3721 এটা মৌলিক। তুমি ক'ব পাৰানে যে $\sqrt{3721}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা? কিয় বা কিয় নোৱাৰা?

A1.4. পূৰ্বানুমান, উপপাদ্য, প্ৰমাণ আৰু গাণিতিক যুক্তি (Conjectures, Theorems, Proofs and Mathematical Reasoning) :

চিত্ৰ A1.2 লোৱা হওক। প্ৰথম বৃত্তৰ ওপৰত এটা বিন্দু, দ্বিতীয়টোৰ ওপৰত দুটা বিন্দু, তৃতীয়টোৰ ওপৰত তিনিটা বিন্দু আৰু এনেকৈয়ে আছে। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি সকলো সম্ভাব্য ৰেখা টনা হ'ল।



চিত্ৰ A1.2

ৰেখাবোৰে বৃত্তক পৰস্পৰ-বহিৰ্ভূত অংশত (উমৈহতীয়া অংশ নথকা) ভাগ কৰে। আমি গণনা কৰি সেইবোৰক তলত লিখিলোঁ।

বিন্দুৰ সংখ্যা	অংশৰ সংখ্যা
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

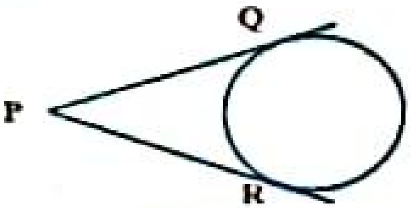
তোমালোকৰ কোনোবাজনে নিশ্চয় প্ৰদত্ত বিন্দুৰ বাবে ক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা দিব পৰা এটা সূত্ৰ বাহিৰ কৰিব পাৰিবা। নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিবা যে এনে বুদ্ধিমান অনুমানক পূৰ্বানুমান (*conjecture*) বোলে।

ধৰা হ'ল: তোমাৰ পূৰ্বনুমানটো হ'ল এটা বৃত্তৰ ওপৰত প্ৰদত্ত 'n' টা বিন্দুক সম্ভাব্য সকলো প্ৰকাৰে সংযোগ কৰিলে 2^{n-1} টা পৰস্পৰ পৃথক ক্ষেত্ৰ পোৱা যায়। এইটো এটা অত্যন্ত স্পৰ্শকাতৰ অনুমান যেন লাগে আৰু যিকোনোৱে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰে যে যদি $n = 5$, আমি 16 টা ক্ষেত্ৰ পাওঁ। গতিকে, $n = 5$ ৰ বাবে সত্যাপন কৰিলেই তুমি সন্তুষ্টনে যে যিকোনো n ৰ বাবে তাত 2^{n-1} টা ক্ষেত্ৰ আছে? যদি সেয়ে হয়, তুমি কেনেদৰে উত্তৰ দিবা, যদি কোনোবা এজনে সোধে যে, $n = 25$ৰ বাবে তুমি এইটো কেনেকৈ নিশ্চিত হ'লা? এনে প্ৰশ্নৰ লগত মোকাবিলা কৰিবলৈ তোমাক এটা প্ৰমাণৰ প্ৰয়োজন হ'ব যিটোৱে সন্দেহাতীতভাৱে সত্যটো প্ৰতিপন্ন কৰিব বা এটা স্পষ্ট উদাহৰণৰ প্ৰয়োজন হ'ব যি দেখুৱায় যে, কিছুমান 'n' ৰ বাবে এইটো সত্য নহয়। প্ৰকৃততে যদি তুমি ধৈৰ্য্যশীল আৰু $n = 6$ৰ বাবে এইটো যত্ন কৰা, তুমি পাবা যে তাত 31 ক্ষেত্ৰ আছে আৰু $n = 7$ৰ বাবে তাত 57 ক্ষেত্ৰ আছে। গতিকে, $n = 6$, পূৰ্বনুমানৰ বাবে এটা বিৰোধ উদাহৰণ। এইটোৱেই বিৰোধ (মুখামুখি) উদাহৰণৰ গুৰুত্বৰ নমুনা দাঙি ধৰে। তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিবা যে নৱম শ্ৰেণীত আমি এটা উক্তিক সত্য নহয় বুলি প্ৰমাণৰো ব্যাখ্যা কৰিছিলো, ইয়াৰ বাবে এটা বিপৰীত উদাহৰণ দাঙি ধৰিলেই যথেষ্ট।

তোমালোকে মন কৰিব পাৰা যে, $n = 1, 2, 3, 4$ আৰু 5 ৰ বাবে সত্যাপনৰ বিপৰীতে আমি ক্ষেত্ৰৰ সংখ্যাৰ সন্দৰ্ভত প্ৰমাণৰ ওপৰতহে গুৰুত্ব দিছোঁ। আমি আৰু কিছু অতিৰিক্ত উদাহৰণ লওঁহক। তোমালোকে এইটো ফলাফল (অধ্যায় 5ত দিয়া) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ৰ লগত পৰিচিত। ইয়াৰ সত্যতা প্ৰমাণ কৰিবলৈ $n = 1, 2, 3$ আৰু বহুতোৰ বাবে সত্যাপন কৰিলেই যথেষ্ট নহয় কাৰণ তাত কোনোবা 'n' থাকিব পাৰে যাৰ বাবে এই ফলাফলটো সত্য নহয় (ওপৰৰ উদাহৰণৰ দৰে, ফলাফলটো $n = 6$ ৰ বাবে অসত্য)।

আমি কি বিচাৰো, এটা প্ৰমাণ, যি সন্দেহাতীভাৱে ইয়াৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰে। তোমালোকে ওপৰ শ্ৰেণীত একেবিলিৰ বাবে প্ৰমাণৰ বিষয়ে শিকিবা।

এতিয়া, চিত্ৰ- A1.3 লোৱাহওঁক, য'ত PQ আৰু PR হ'ল P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ টনা স্পৰ্শক।



চিত্ৰ A1.3

তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিছিলা যে PQ = PR (উপপাদ্য 10.2)। তোমালোকে বিভিন্ন এনে চিত্ৰ অংকন কৰি প্ৰতিবাৰতে স্পৰ্শকৰ জোখলৈ আৰু তোমালোকে নিজেই সূত্ৰটো সত্যাপন কৰিও তোমালোক পতিয়ন যোৱা নাছিলা যে ফলাফলটো সত্য আছিল।

তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিছানে, প্ৰমাণটোত কি কি আছিল? এইটো উক্তিৰ অনুক্ৰমেৰে গঠিত, যিবোৰ কোনো প্ৰমাণৰ উক্তি, বা আগতে প্ৰমাণ কৰা (আৰু জ্ঞাত) ফলাফল প্ৰমাণ কৰিব লগীয়া ফলাফলৰ পৰা স্বতন্ত্ৰ বা স্বতঃসিদ্ধ বা সংজ্ঞাৰ পৰা বা ধৰিলোৱা উক্তিৰ পৰা তুলি অনা।

আৰু তোমালোকে তোমালোকৰ প্ৰমাণৰ সিদ্ধান্ত দিছিলা যে PQ = PR অৰ্থাৎ, তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিবলৈ বিচৰা উক্তিটো। এই পথেৰেই এটা প্ৰমাণ গঠিত হয়।

আমি এতিয়া, কিছুমান উদাহৰণ, উপপাদ্য আৰু তাৰ প্ৰমাণৰ ব্যাখ্যা লৈ চাম যি আমাক কেনেকৈ সেইবোৰ গঠন কৰা হয় তাক বুজিবলৈ সহায় কৰিব।

আমি তথাকথিত 'প্ৰত্যক্ষ' বা 'নিগমনাত্মক' পদ্ধতিৰে প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি আৰম্ভ কৰিম। এই পদ্ধতিত, আমি বহুতো উক্তি গঠন কৰিম। প্ৰতিটো পূৰ্বৰ উক্তিৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। যদি প্ৰতিটো উক্তি যুক্তিগতভাৱে শুদ্ধ (অৰ্থাৎ বৈধযুক্তি) হয় তেন্তে ই যুক্তিগতভাৱে শুদ্ধ সিদ্ধান্ত দিয়ে।

উদাহৰণ 10 : দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফল এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

সমাধান :

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধৰো x আৰু y পৰিমেয় সংখ্যা	যিহেতু ফলাফল পৰিমেয় সম্বন্ধীয়, আমি আৰু x আৰু y যিটো পৰিমেয় তাৰ পৰা আৰম্ভ কৰিম।
2.	ধৰো $x=\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ আৰু $y=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ যত m, n, p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি
3.	গতিকে, $x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	ফলাফলে পৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফলৰ কথা কৈছে সেয়ে আমি $x + y$ লৈছো।
4.	অখণ্ড সংখ্যাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ $mq + np$ আৰু nq অখণ্ড	অখণ্ড সংখ্যাৰ জ্ঞাত ধৰ্মব্যৱহাৰ কৰি
5.	যিহেতু $n \neq 0$ আৰু $q \neq 0$, ই দিয়ে যে, $nq \neq 0$	অখণ্ড সংখ্যাৰ জ্ঞাত ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি
6.	সেয়ে, $x+y=\frac{mq+np}{nq}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি।

মন্তব্য : মন কৰা যে, ওপৰৰ প্ৰমাণটোত প্ৰতিটো উক্তি পূৰ্বতে প্ৰতিষ্ঠিত কথা বা সংজ্ঞাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত।

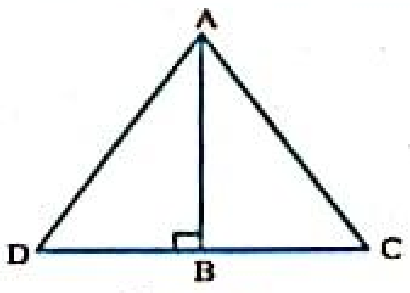
উদাহৰণ 11 : 3 তকৈ ডাঙৰ সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ আকাৰ $6k + 1$ বা $6k + 5$, য'ত k কোনো এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান :

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধৰো 3 তকৈ ডাঙৰ এটা মৌলিক সংখ্যা p.	যিহেতু ফলাফলটো 3তকৈ ডাঙৰ মৌলিক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰিব লাগে, সেয়ে আমি এনে সংখ্যাৰে আৰম্ভ কৰিছোঁ।
2.	p ক 6 ৰে হৰণ কৰিলে আমি পাওঁ 6 ৰ আকাৰ— $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, বা $6k + 5$, য'ত k এটা অখণ্ড সংখ্যা।	ইউক্লিডৰ হৰণৰ প্ৰমেয়িকা (Lemma) প্ৰয়োগ কৰি।
3.	কিন্তু $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, আৰু $6k + 3 = 3(2k + 1)$ গতিকে, সিহঁত মৌলিক নহয়।	প্ৰদত্ত মৌলিক সংখ্যা p ৰ ভাগশেষ বিশ্লেষণ কৰিছোঁ।
4.	গতিকে, p ৰ আকাৰ $6k + 1$ বা $6k + 5$ হ'বই লাগিব, কিছুমান অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে।	

মন্তব্য : ওপৰৰ উদাহৰণত, আমি বিভিন্ন সম্ভাৱনীয়তাবোৰ বাহিৰ কৰি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো। এই পদ্ধতিক কেতিয়াবা প্ৰমাণ (proof by exhaustion) বুলিও জনা যায়।

উপপাদ্য A1.1. : *(পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীত উক্তি) যদি এটা ত্ৰিভুজত, এটা বাহুৰ বৰ্গ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ সমষ্টিৰ সমান তেন্তে প্ৰথম বাহুৰ বিপৰীত কোণটো এটা সমকোণ।*



চিত্ৰ A1.4

প্ৰমাণ ঃ

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ
1.	ধৰো ΔABC এ অনুমানটো মানে অৰ্থাৎ $AC^2 = AB^2 + BC^2$.	যিহেতু আমি উক্তিটো এনে ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰতহে প্ৰমাণ কৰিম, আমি এইটোৰে আৰম্ভ কৰিছোঁ।
2.	AB ৰ ওপৰ BD লম্ব অংকা হ'ল যাতে $BD = BC$ আৰু A, D সংযোগ কৰা হ'ল।	এইটো এটা অন্তৰ্দৃষ্টিৰ পদক্ষেপ যিটো প্ৰায়ে উপপাদ্য প্ৰমাণৰ বাবে প্ৰয়োজন।
3.	অংকনমতে, ΔABD সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ পৰা আমি পাওঁ $AD^2 = AB^2+BD^2$.	আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিছো।
4.	অংকনমতে, $BD = BC$. গতিকে, আমি পাওঁ- $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	যুক্তিৰে বাহিৰ পৰা ফলাফল।
5.	সেয়ে, $AC^2 = AB^2 +BC^2 = AD^2$	ধৰিলোৱা উক্তি আৰু আগৰ উক্তি ব্যৱহাৰ কৰি
6.	যিহেতু AC, AD ধনাত্মক, আমি পাওঁ $AC = AD$	সংখ্যাৰ জ্ঞাত ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি
7.	আমি এইমাত্ৰ দেখুৱালো $AC = AD$. অংকনমতে $BC = BD$ আৰু AB হ'ল সাধাৰণ বাহু। সেইবাবে বাহু-বাহু -বাহু স্বীকাৰ্যমতে $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	জ্ঞাত উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি
8.	যিহেতু $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, আমি পাওঁ, $\angle ABC = \angle ABD$ যিটো সমকোণ ■	পূৰ্বতে প্ৰমাণিত সত্যৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত উক্তিৰ যুক্তিগত নিগমন।

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ প্ৰতিটো ফলাফল ঢাপে ঢাপে এটাৰ লগত আনটোৰ সংগতি ৰাখি প্ৰমাণ কৰা হ'ল। সেইবোৰৰ ক্ৰম গুৰুত্বপূৰ্ণ। প্ৰমাণৰ প্ৰতিটো ঢাপে আগৰ ঢাপ আৰু পূৰ্বৰ প্ৰতিষ্ঠিত ফলাফলক অনুকৰণ কৰে (উপপাদ্য 6.9. চোৱা)

অনুশীলনী : A1.3

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নত আমি তোমালোকক এটা উক্তি প্ৰমাণ কৰিবলৈ কৈছোঁ। প্ৰতিটো প্ৰমাণৰ সকলো ঢাপ তালিকাভুক্ত কৰা আৰু প্ৰতিটো ঢাপৰ কাৰণ দৰ্শোৱা :

1. প্ৰমাণ কৰা যে, দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফলক 4 ৰে হৰণ যায়।
2. দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যা লোৱা। সিহঁতৰ বৰ্গৰ যোগফল উলিওৱা আৰু তাৰ পাছত 6 যোগ কৰা। প্ৰমাণ কৰা যে, নতুন সংখ্যাটো সদায় 8 ৰে হৰণ যায়।
3. যদি $p \geq 5$, এটা মৌলিক সংখ্যা, দেখুওৱা যে, $p^2 + 2$, 3 ৰে বিভাজ্য। [ইংগিত : উদাহৰণ 11ব্যৱহাৰ কৰা].
4. ধৰো x আৰু y পৰিমেয় সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে xy এটা পৰিমেয় সংখ্যা।
5. যদি a আৰু b ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে তোমালোকে জনা যে, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, য'ত q এটা পূৰ্ণসংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে HCF (a, b) = HCF (b, r). [গঃ সাঃ উঃ (a, b) = গঃ সাঃ উঃ (b, r)]
   [ইংগিত : ধৰো গ.সা.উ. $(b, r) = h$. গতিকে, $b = k_1h$ আৰু $r = k_2h$, য'ত k_1 আৰু k_2 পৰস্পৰ মৌলিক]
6. ABC ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখাই AB আৰু AC ক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত কাটিছে। প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5. এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক (Negation of a Statement) :

এই অনুচ্ছেদত, আমি এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক মানেনো কি তাক ব্যাখ্যা কৰিম। আৰম্ভ কৰাৰ আগতে আমি কিছুমান সংজ্ঞাৰ লগত পৰিচয় কৰিব বিচাৰো, যি এই ধাৰণাটো সহজে বুজাত সহায় কৰিব। আৰম্ভ কৰিবলৈ, এটা উক্তিক এটা একক গোট বুলি আমি চাম আৰু ইয়াক এটা নাম দিম। উদাহৰণস্বৰূপে, আমি '2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল' এই উক্তিটোক p ৰে সূচিত কৰিব পাৰোঁ। আমি ইয়াক এনেদৰেও লিখিব পাৰো—

p : 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।

একেদৰে, আমি লিখোঁ, আহাঁ

q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা।

r : মাইকৰ কুকুৰটোৰ এডাল ক'লা নেজ আছে।

s : $2 + 2 = 4$.

t : ABC ত্ৰিভুজটো সমবাহু।

এই সংজ্ঞাসমূহে উক্তিৰ ধৰ্ম ব্যাখ্যা কৰাত আমাক সহায় কৰিব আৰু সেইবোৰক কেনেদৰে

সংযোগ কৰিব পাৰি চাম। আৰম্ভণিতে, যাক আমি 'সৰল উক্তি' বুলি কওঁ তাৰ সৈতে কাৰ্য্য কৰিম আৰু পৰবৰ্তী পৰ্য্যায়ত যৌগিক উক্তিৰ ফালে গতি কৰিম।

তলৰ তালিকাখন বিবেচনা কৰোঁহঁক, য'ত প্ৰদত্ত উক্তিৰ পৰা একেটা নতুন উক্তি সজোৱা হৈছে।

মূল উক্তি	নতুন উক্তি
p : 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।	$\sim p$: এইটো মিছা যে, 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।
q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা	$\sim q$: এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষকেই মহিলা।
r : মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা	$\sim r$: এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা।
$s : 2 + 2 = 4.$	$\sim s$: এইটো অসত্য যে, $2 + 2 = 4.$
t : ABC ত্ৰিভূজটো সমবাহু	$\sim t$: এইটো অসত্য যে, ABC সমবাহু ত্ৰিভূজ

তালিকাখনৰ প্ৰতিটো নতুন উক্তিয়েই অনুৰূপ মূল উক্তিৰ নঞৰ্থক। অৰ্থাৎ, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ আৰু $\sim t$ ক্ৰমে p, q, r, s আৰু t, উক্তিৰ নঞৰ্থক উক্তি। ইয়াত, $\sim p$ ক 'p নহয়' বুলি পঢ়া হয়। p উক্তিৰ দৃঢ়তাক $\sim p$ এ নহয় বুলি কয়। মন কৰিবা যে, সাধাৰণ কথাবতৰাত, আমি $\sim p$ মানে '2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হোৱা নাছিল' বুলি বুজো। যি কি নহওক, আমি এইটো কৰোঁতে, সতৰ্ক হোৱা প্ৰয়োজন। তোমালোকে ভাবিব পাৰা যে, কোনোবে প্ৰদত্ত উক্তিৰ উপযুক্ত স্থানত 'নহয়' শব্দটো বহুৱাই উক্তিটোৰ নঞৰ্থক উক্তি পাব পাৰে। যেতিয়া, p কথা কওঁ এইয়া সত্য, যেতিয়া আমি 'সকলো' আৰম্ভ কৰা উক্তি লওঁ তেতিয়া সমস্যা জটিল হৈ পৰিল। উদাহৰণস্বৰূপে, q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা উক্তিটো লোৱা হওঁক। আমি কৈছো যে, ইয়াৰ নঞৰ্থক উক্তি $\sim q$: এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষকেই মহিলা। এই উক্তিটো 'তাত কিছুমান শিক্ষক আছে যি পুৰুষ' উক্তিৰ লগত একে। এতিয়া, মাথো 'নহয়' শব্দটো q ত সংযোগ কৰিলে কি হয় চোৱা যাওক। আমি উক্তিটো পাওঁ— 'সকলো শিক্ষকেই মহিলা নহয়' বা 'শিক্ষকসকলো মহিলা নহয়'। প্ৰথম উক্তিয়ে মানুহক বিপথে পৰিচালিত কৰিব পাৰে। এইটোৱে বুজাব পাৰে যে, (যদি আমি 'সকলো' শব্দত জোৰ দিওঁ) সকলো শিক্ষক পুৰুষ। এইটো নিশ্চিতভাৱে qৰ নঞৰ্থক নহয়। যি কি নহওঁক দ্বিতীয়টোৱে $\sim q$ৰ অৰ্থ সূচায় অৰ্থাৎ তাত অতিকমেও এজন শিক্ষক আছে যি মহিলা নহয়। সেয়ে, উক্তিৰ নঞৰ্থক উক্তি লিখোতে সতৰ্ক হোৱা প্ৰয়োজন ! গতিকে, কেনেকৈ আমি সিদ্ধান্ত লম যে আমি শুদ্ধ নঞৰ্থক পাইছো? আমি তলৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰিম :

ধৰো; p এটা উক্তি আৰু $\sim p$ ইয়াৰ নঞৰ্থক। তেন্তে $\sim p$ অসত্য, যেতিয়া p সত্য আৰু $\sim p$ সত্য যেতিয়া p অসত্য।

উদাহৰণস্বৰূপে, যদি এইটো সত্য যে মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা, তেন্তে এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়। যদি এইটো অসত্য যে, 'মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা', তেন্তে এইটো সত্য যে, 'মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়'।

একেদৰে, s আৰু t উক্তিৰ নঞৰ্থক হ'ল—

$s : 2 + 2 = 4$; নঞৰ্থক, $\sim s : 2 + 2 \neq 4$.

t : ABC সমবাহু ত্ৰিভুজ; নঞৰ্থক, $\sim t$: ABC সমবাহু ত্ৰিভুজ নহয়।

এতিয়া, $\sim(\sim s)$ কি? এইটো হ'ব $2 + 2 = 4$, যিটো s। আৰু $\sim(\sim t)$ কি?

এইটো হ'ল,' ABC ত্ৰিভুজটো সমবাহু', অৰ্থাৎ, t । মুঠতে যিকোনো উক্তি p ৰ বাবে $\sim(\sim p)$ হ'ল p।

উদাহৰণ 12 : তলৰ উক্তিবোৰৰ নঞৰ্থকবোৰ কোৱা।

(i) মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়।

(ii) সকলো অপৰিমেয় সংখ্যাই বাস্তৱ সংখ্যা।

(iii) $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

(iv) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা।

(v) সকলো শিক্ষক পুৰুষ নহয়।

(vi) কিছুমান ঘোঁৰাৰ বং মুগা নহয়।

(vii) কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x নাই যাতে $x^2 = -1$.

সমাধান :

(i) এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়, অৰ্থাৎ, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা।

(ii) এইটো অসত্য যে, সকলো অপৰিমেয় সংখ্যাই বাস্তৱ সংখ্যা অৰ্থাৎ, কিছুমান (অন্ততঃ এটা) অপৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ নহয়। কোনোৱে এনেদৰেও লিখিব পাৰে— 'অপৰিমেয় সংখ্যা আটাইবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা নহয়'।

(iii) এইটো অসত্য যে, $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়, অৰ্থাৎ, $\sqrt{2}$ অপৰিমেয় নহয়।

(iv) এইটো অসত্য যে, কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা, অৰ্থাৎ কোনো পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড নহয়।

(v) এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষক পুৰুষ নহয়, অৰ্থাৎ, সকলো শিক্ষক পুৰুষ।

(vi) এইটো অসত্য যে, কিছুমান ঘোঁৰা মুগাৰঙৰ নহয়, অৰ্থাৎ সকলো ঘোঁৰাৰ বং মুগা।

(vii) এইটো অসত্য যে, কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x নাই যাতে, $x^2 = -1$, অৰ্থাৎ, তাত অতি

∴ কমেও এটা বাস্তৱ সংখ্যা x আছে যাতে $x^2 = -1$.

মন্তব্য : ওপৰৰ ব্যাখ্যাৰ পৰা তোমালোকে এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক নিৰ্ণয়ৰ বাবে তলৰ কাৰ্য পদ্ধতিত উপনীত হ'লাহি—

(i) প্ৰথমে, উক্তিটো নহয় শব্দৰে লিখা।

(ii) যদি তাত কোনো সন্দেহ থাকে, উপযুক্ত সালসলনি কৰা বিশেষকৈ যিবোৰ উক্তিত 'সকলো' বা "কিছুমান" শব্দ থাকে।

অনুশীলনী A1.4

1. তলৰ উক্তিবোৰৰ নঞৰ্থক উক্তিবোৰ লিখা :

(i) মানুহ মৰণশীল।

(ii) l ৰেখাডাল m ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল।

(iii) এই অধ্যায়ত বহুতো অনুশীলনী আছে।

(iv) সকলো অখণ্ড সংখ্যা পৰিমেয় সংখ্যা।

(v) কিছুমান মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম।

(vi) কোনো ছাত্ৰ এলেহুৱা নহয়।

(vii) কিছুমান মেকুৰী ক'লা নহয়।

(viii) কোনোবাস্তৱ সংখ্যা x নাই, যাতে $\sqrt{x} = -1$.

(ix) 2ৰ দ্বাৰা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a হৰণ যায়।

(x) অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক।

2. তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নতে দুটাকৈ উক্তি আছে। দ্বিতীয় উক্তিটো প্ৰথম উক্তিৰ নঞৰ্থক হয়নে নহয় কোৱা।

(i) মমতাজ ভোকাতুৰ।
মমতাজ ভোকাতুৰ নহয়।

(ii) কিছুমান মেকুৰী ক'লা।
কিছুমান মেকুৰী মুগা।

(iii) সকলো হাতী বৃহৎ।
এটা হাতী বৃহৎ নহয়।

(iv) সকলো অগ্নিনিৰ্বাপক ইঞ্জিন ৰঙা ৰঙৰ
সকলো অগ্নিনিৰ্বাপক ইঞ্জিন ৰঙা ৰঙৰ নহয়।

(v) কোনো মানুহ গৰু নহয়।
কিছুমান মানুহ গৰু।

A1.6. উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি (Converse of a Statement) :

এতিয়া আমি এটা উক্তিৰ 'বিপৰীত'ৰ সংজ্ঞা অনুসন্ধান কৰিম। ইয়াৰ বাবে, আমাক 'যৌগিক' উক্তিৰ অৰ্থাৎ দুটা বা ততোধিক সৰল উক্তিৰ সংযোজনৰ সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজন। যৌগিক উক্তি গঠনৰ

বহতো প্ৰক্ৰিয়া আছে, কিন্তু আমি সেইবোৰৰ ওপৰত মনোযোগ ৰাখিম য'ত 'যদি' আৰু 'তেন্তে' শব্দ ব্যৱহাৰ কৰি দুটা সৰল উক্তিক সংযোগ কৰিছে। উদাহৰণস্বৰূপে, 'যদি এতিয়া বৰষুণ দি আছে, তেন্তে এখন চাইকেলেৰে যোৱাটো কঠিকৰ' উক্তিটো দুটা উক্তিৰে গঠিত :

p : এতিয়া বৰষুণ দি আছে।

q : এখন চাইকেলেৰে যোৱাটো কষ্টকৰ।

আগৰ প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰি, আমি ক'ব পাৰো : যদি p, তেন্তে q। আমি এইটোৱো ক'ব পাৰো যে, 'p এ q ক সূচায়' আৰু এইটো $p \Rightarrow q$ ৰে নিৰ্দেশ কৰোঁ।

এতিয়া, ধৰোঁ তোমাৰ এটা উক্তি হ'ল— 'যদি পানীৰ চৌবাচ্চাটো ক'লা ৰঙৰ তেন্তে ইয়াত কিছু পানী আছে'। ইয়াৰ আকাৰ $p \Rightarrow q$, য'ত অনুমান কৰা হৈছে যে, p (পানীৰ চৌবাচ্চাটো ক'লা) সিদ্ধান্ত হ'ল q (চৌবাচ্চাত কিছু পানী আছে)। ধৰো, আমি অনুমান আৰু সিদ্ধান্ত পৰস্পৰ সলনি কৰো, আমি কি পাম? আমি পাম $q \Rightarrow p$ অৰ্থাৎ, যদি চৌবাচ্চাত থকা পানী সামান্য হয় তেন্তে চৌবাচ্চাটো নিশ্চিতভাৱে ক'লা। এই উক্তিটোক $p \Rightarrow q$ উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি বোলে।

সাধাৰণতে, $p \Rightarrow q$ উক্তিৰ বিপৰীত হ'ল $q \Rightarrow p$, য'ত p আৰু q উক্তি। মন কৰা, $p \Rightarrow q$ আৰু $q \Rightarrow p$ পৰস্পৰ এটা আনটোৰ বিপৰীত।

উদাহৰণ 13 : তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত উক্তি লিখা।

(i) যদি জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে, তেন্তে 17 আগষ্ট দেওবাৰ।

(ii) যদি 17 আগষ্ট দেওবাৰ, তেন্তে জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে।

(iii) যদি পলিনৰ খং উঠে তেন্তে তাইৰ মুখমণ্ডল ৰঙা হৈ পৰে।

(iv) যদি এজন ব্যক্তিৰ শিক্ষাতত্ত্বত স্নাতক ডিগ্ৰী আছে, তেন্তে তেওঁক শিকাবলৈ অনুমতি দিয়া হ'ল।

(v) যদি এজন ব্যক্তি ভাইৰেল আক্ৰান্ত, তেন্তে তেওঁ উচ্চ তাপ বহন কৰি ফুৰিছে।

(vi) যদি আহমেদ মুম্বাইত আছে, তেন্তে তেওঁ ভাৰতত আছে।

(vii) যদি ABC ত্ৰিভুজ সমবাহু, তেন্তে ইয়াৰ সকলো অন্তঃকোণ সমান।

(viii) যদি x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা, তেন্তে xৰ দশমিক ৰূপ অশেষ অপৌনঃপুনিক।

(ix) যদি $x - a$, $p(x)$ বহুপদ ৰাশিৰ উৎপাদকে, তেন্তে $p(a) = 0$.

সমাধান : ওপৰৰ প্ৰতিটো উক্তিৰ আকাৰ $p \Rightarrow q$ । গতিকে, বিপৰীত নিৰ্ণয়ৰ বাবে, আমি প্ৰথমে p আৰু q চিনাক্ত কৰিম আৰু পাছত $q \Rightarrow p$ লিখিম।

(i) p : জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে আৰু q : 17 আগষ্ট দেওবাৰ। সেইবাবে, বিপৰীতটো হ'ল, যদি 17 আগষ্ট দেওবাৰ, তেন্তে জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে।

(ii) এইটো (i) ৰ বিপৰীত। সেইবাবে, ইয়াৰ বিপৰীত হ'ল (i) ত দিয়া উক্তিটো।

(iii) যদি পলিনৰ মুখমণ্ডল ৰঙা পৰিছে, তেন্তে তাইৰ খং উঠিছে।

(iv) যদি এজন ব্যক্তিক শিকাবলৈ অনুমতি দিয়া হৈছে, তেন্তে তেওঁৰ শিক্ষাতত্ত্বত স্নাতক ডিগ্ৰী আছে।

(v) যদি এজন ব্যক্তি উচ্চ তাপত ভুগিছে, তেন্তে তেওঁ ভাইৰেল আক্ৰান্ত হৈছে।

(vi) যদি আহমেদ ভাৰতত আছে, তেন্তে তেওঁ মুম্বাইত আছে।

(vii) যদি ABC ত্ৰিভুজৰ সকলো অন্তঃকোণ সমান, তেন্তে ই সমবাহু।

(viii) যদি xৰ দশমিক ৰূপ অশেষ অপৌনঃপুনিক, তেন্তে xটো অপৰিমেয় সংখ্যা।

(ix) যদি $p(a) = 0$, তেন্তে, $x - a$, $p(x)$ বহুপদ ৰাশিৰ এটা উৎপাদক।

মন কৰিবলগীয়া ওপৰৰ উক্তিসমূহৰ প্ৰত্যেকৰে বিপৰীতটো আমি মাথো লিখিছোঁ, সিহঁত সত্য বা অসত্য ইয়াৰ ভ্ৰূক্ষেপ নকৰাকৈ। উদাহৰণ স্বৰূপে তলৰ উক্তিটো লোৱা হওঁক— যদি আহমেদ মুম্বাইত আছে, তেন্তে তেওঁ ভাৰতত আছে। এই উক্তিটো সত্য। কিন্তু, বিপৰীতটো লোৱা— যদি আহমেদ ভাৰতত আছে, তেন্তে তেওঁ মুম্বাইত আছে। এইটো সদায় সত্য হোৱাটো নিষ্প্ৰয়োজন। তেওঁ ভাৰতৰ অন্য অংশতো থাকিব পাৰে।

গণিতত, বিশেষকৈ জ্যামিতিত, তোমালোক বহুতো অৱস্থাৰ সম্মুখীন হ'বা য'ত $p \Rightarrow q$ সত্য আৰু তোমালোকে সিদ্ধান্ত লব লাগিব যে, বিপৰীতটো অৰ্থাৎ, $q \Rightarrow p$ ও সত্য।

উদাহৰণ 14 : তলৰ উক্তিসমূহৰ বিপৰীত উক্তি লিখা। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে, বিপৰীতটো সত্য নে অসত্য সিদ্ধান্ত দিয়া।

(i) যদি n যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে, $2n + 1$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) যদি এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ দশমিক ৰূপ সীমিত, তেন্তে সংখ্যাটো পৰিমেয়।

(iii) যদি এডাল ছেদকে এযোৰ সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰে তেন্তে প্ৰতিযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান।

(iv) যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ মুখামুখি বাহু সমান, তেন্তে চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

(v) যদি দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম, তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান।

সমাধান :

(i) বিপৰীত উক্তি হ'ল— 'যদি $2n + 1$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে n এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা'। এইটো এটা অসত্য উক্তি (উদাহৰণস্বৰূপে, $15 = 2(7) + 1$, আৰু 7 এটা অযুগ্ম)।

(ii) 'যদি এটা বাস্তৱ সংখ্যা পৰিমেয়, তেন্তে ইয়াৰ দশমিক ৰূপ সীমিত।' এইটো বিপৰীত উক্তি। এইটো এটা অসত্য উক্তি কাৰণ এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ অশেষ পৌনঃ পুনিক দশমিক ৰূপ থাকিব পাৰে।

(iii) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি এডাল ছেদকে দুডাল ৰেখাক এনেদৰে কটাকটি কৰে যে প্ৰতিযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান, তেন্তে ৰেখাদুডাল সমান্তৰাল'। আমি ধৰিছিলো, স্বতঃসিদ্ধ

6.4ৰ মতে, নৱম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথিত, যে এই উক্তিটো সত্য।

(iv) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰতিযোৰ মুখামুখি বাহু সমান' এইটো সত্য। (উপপাদ্য 8.1, IX শ্ৰেণীত)।

(v) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান, তেন্তে সিহঁত সৰ্বসম'। এইটো এটা অসত্য উক্তি। আমি, এইটো তোমালোকলৈ এৰিলো, উপযুক্ত বিৰোধ উদাহৰণ বাছি উলিওৱা।

অনুশীলনী : A1.5

1. তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত উক্তি লিখা :
   (i) যদি টকিঅ'ত গৰম পৰিছে তেন্তে শাৰংগ যথেষ্ট ঘামিছে।
   (ii) যদি শালিনীৰ ভোক লাগিছে তেন্তে তেওঁৰ পেটে কলমলাইছে।
   (iii) যদি যশৱন্তই এটা জলপানি পায়, তেন্তে তেওঁ এটা ডিগ্ৰী লব পাৰে।
   (iv) যদি এজোপা গছত ফুল আছে, তেন্তে ই জীৱিত।
   (v) যদি এটা জন্তু এটা মেকুৰী, তেন্তে ইয়াৰ এডাল নেজ আছে।
2. তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত লিখা। বিপৰীতবোৰ সত্যনে অসত্য বিচাৰ কৰা, প্ৰতিক্ষেত্ৰতে।
   (i) যদি ABC ত্ৰিভুজ সমদ্বিবাহু, তেন্তে ইয়াৰ ভূমিসংলগ্ন কোণ সমান।
   (ii) যদি এটা অখণ্ডসংখ্যা অযুগ্ম, তেন্তে ইয়াৰ বৰ্গ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।
   (iii) যদি $x^2 = 1$, তেন্তে, $x = 1$.
   (iv) যদি ABCD এটা সামান্তৰিক তেন্তে AC আৰু BD পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
   (v) যদি a, b আৰু c পূৰ্ণসংখ্যা তেন্তে $a + (b + c) = (a + b) + c$.
   (vi) যদি x আৰু y দুটা অযুগ্ম সংখ্যা তেন্তে, $x + y$ এটা যুগ্ম সংখ্যা।
   (vii) যদি এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ এটা বৃত্তত থাকে তেন্তে ই এটা আয়ত।

A1.7. বিৰোধাচৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে প্ৰমাণ (Proof by Contradiction) :

বৰ্তমানলৈকে, আমি সকলোবোৰ উদাহৰণতে সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ প্ৰত্যক্ষ যুক্তি ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ। এতিয়া আমি পৰোক্ষ যুক্তি অৱতাৰণা কৰিমহঁক, বিশেষভাৱে, গণিতৰ এক শক্তিশালী হাতিয়াৰ যাক 'বিৰোধাচৰণেৰে প্ৰমাণ' বুলি জনা যায়। আমি, ইতিমধ্যে এই পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰথম অধ্যায়ত বহুতো সংখ্যাৰ অপৰিমেয়তা প্ৰতিষ্ঠা কৰিছিলো আৰু অন্যান্য অধ্যায়তো কিছুমান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত ব্যৱহাৰ কৰি আহিছোঁ। ইয়াত, আমি আৰু কিছুমান উদাহৰণ লৈ ধাৰণাটো ব্যাখ্যা কৰিম।

আমি আৰম্ভ কৰাৰ আগতে, বিৰোধাচৰণনো কি তাক ব্যাখ্যা কৰোঁহক। গণিতত এটা বিৰোধাচৰণ

পোৱা হয় যেতিয়া আমি এটা উক্তি p আৰু ইয়াৰ নঞৰ্থক $\sim p$ দুয়োটা সত্য হয়। উদাহৰণস্বৰূপে,

p : $x=\frac{a}{b}$, য'ত a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক।

q : 2 ৰে 'a' আৰু 'b' দুয়োটাকে হৰণ যায়।

যদি, আমি ধৰোঁ যে p সত্য আৰু q ও সত্য বুলি দেখুওৱাৰ ব্যৱস্থা কৰোঁ, তেন্তে আমি এক বিৰোধাচৰণত উপস্থিত হ'লো কাৰণ q এ দিয়ে যে p ৰ নঞৰ্থক সত্য। তোমালোকে যদি মনত পেলোৱা, আমি $\sqrt{2}$ অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ যত্ন কৰোঁতে কি ঘটিছিল তাৰ সৈতে এইটো একে (1ম অধ্যায় চোৱা)।

কেনেকৈ বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণে কাৰ্য্য কৰে? এটা নিৰ্দিষ্ট উদাহৰণৰ যোগেদি এইটো চোৱা যাওক।

ধৰাহ'ল, আমাক তলত দিয়াখিনি দিয়া হৈছে :

সকলো মহিলা মৰণশীল। A এগৰাকী মহিলা। প্ৰমাণ কৰা যে A মৰণশীল।

যদিও এইটো এটা তেনেই সহজ উদাহৰণ, ইয়াক বিৰোধাচৰণেৰে কেনেকৈ প্ৰমাণ কৰিব পাৰি আমি চাওঁহক।

- আমি ধৰোঁ যে, আমি এটা উক্তি pৰ (ইয়াত আমি p : A মৰণশীল বুলি দেখুৱাব বিচাৰিছোঁ) সত্যতা প্ৰতিষ্ঠা কৰিব বিচাৰিছোঁ।
- সেয়ে, আমি উক্তিটো সত্য নহয় বুলি ধৰি আৰম্ভ কৰোঁহক, অৰ্থাৎ আমি ধৰোঁযে p ৰ নঞৰ্থক (অৰ্থাৎ, A মৰণশীল নহয়) সত্য।
- ইয়াৰ পাচত আমি p ৰ নঞৰ্থকৰ সত্যতাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত যুক্তিৰ এটা শ্ৰেণী বাহিৰ কৰি উলিয়াম।' (যিহেতু A মৰণশীল নহয়, আমি "সকলো মহিলা মৰণশীল।' উক্তিৰ এটা বিৰোধ উদাহৰণ পালো। সেয়ে, এইটো অসত্য যে সকলো মহিলা মৰণশীল।)
- যদি এইটোৱে আমাক এটা বিৰোধাচৰণলৈ আগবঢ়ায়, তেন্তে আমাৰ অশুদ্ধ ধাৰণা যে, p সত্য নহয় বুলি লোৱা বাবেই বিৰোধাচৰণ পোৱা গ'ল। (আমি এটা বিৰোধাচৰণ পালো, যিহেতু আমি দেখুৱালো যে 'সকলো মহিলা মৰণশীল' আৰু ইয়াৰ নঞৰ্থক উক্তি, 'সকলো মহিলা মৰণশীল নহয়' একেসময়তে সত্য। এই বিৰোধাচৰণ পোৱা গ'ল কিয়নো আমি ধৰিছিলো A মৰণশীল নহয়।
- সেইবাবে, আমি ধৰাটো ভুল, অৰ্থাৎ p সত্য হ'ব লাগিব (গতিকে A মৰণশীল) এতিয়া আমি কিছুমান গাণিতিক উদাহৰণ চাওঁহক :

উদাহৰণ 15 : এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যা আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল এটা অপৰিমেয়।

সমাধান ঃ

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
আমি বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰিম। ধৰোঁ r এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যা আৰু x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। ধৰোঁ $r = \frac{m}{n}$, m, n অখণ্ড সংখ্যা আৰু $m \neq 0$, $n \neq 0$। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে rx অপৰিমেয়।	
ধৰা হওঁক rx পৰিমেয়	ইয়াত, আমি প্ৰমাণ কৰিবলগীয়া উক্তিৰ নঞৰ্থক ধৰিছোঁ।
তেতিয়া, $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা।	এইটো আগৰ উক্তি আৰু পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞাৰ পৰা অনুকৰণ কৰা হৈছে।
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ আৰু $r = \frac{m}{n}$ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ, $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$.	
যিহেতু np আৰু mq অখণ্ড সংখ্যা আৰু $mq \neq 0$, x এটা পৰিমেয় সংখ্যা।	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা আৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি।
এইটো এটা বিৰোধাচৰণ কাৰণ আমি দেখুৱালো। x এটা পৰিমেয় কিন্তু আকাৰ প্ৰকল্পত x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।	এইটো আমি বিচাৰিছিলো - যিটো এটা বিৰোধাচৰণ।
rx পৰিমেয় বুলি কৰা ভুল বিবেচনাৰ বাবেই বিৰোধাচৰণ উদ্ভৱ হ'ল। সেইবাবে rx এটা অপৰিমেয়।	যুক্তিৰে বাহিৰ কৰা হ'ল।

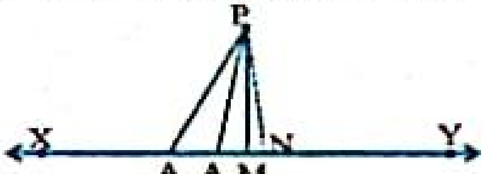
আমি এতিয়া উদাহৰণ (11) প্ৰমাণ কৰিম, কিন্তু এইক্ষেত্ৰত বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰিম। প্ৰমাণটো তলত দিয়া হ'ল ঃ

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
ধৰা হওক যে, উক্তিটো সত্য নহয়	আগত দেখাৰ দৰে- কোনো এটা যুক্তি 'বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰৰ আৰম্ভণি বিন্দুৱেই হ'ল এইটো।
গতিকে আমি ধৰিছোঁ যে, $p > 3$, এটা মৌলিক সংখ্যা আছে যিটো $6n + 1$ বা $6n + 5$, য'ত n এটা পূৰ্ণসংখ্যা, আকাৰত নপৰে।	এইটো ফলাফলটোত থকা উক্তিৰ নঞৰ্থক।
ইউক্লিডৰ বিভাজ্য সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি 6 ৰে হৰণ আৰু p, $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকাৰৰ নহয় কথাষাৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ- $p = 6n$ বা $p = 6n + 2$ বা $p = 6n + 3$ বা $p = 6n + 4$.	পূৰ্বতে প্ৰমাণিত ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰি।
সেইবাবে, p, 2 বা 3 ৰে হৰণ যায়	যক্তিৰে বাহিৰ কৰি লোৱা হ'ল
গতিকে, p এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়	যুক্তিৰ ফল।
এইটো এটা বিৰোধাকৰণ, কাৰণ আমাৰ প্ৰকল্পমতে p মৌলিক।	স্পষ্টকৈ যিটো আমি বিচাৰিছিলো।
এই বিৰোধাচৰণ উদ্ভৱ হ'ল কাৰণ আমি ধৰিছিলো যে এটা মৌলিক সংখ্যা $p > 3$ আছে যিটো $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকাৰত নপৰে।	
সেয়ে, 3 তকৈ ডাঙৰ সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ আকাৰ $6n + 1$ বা $6n + 5$.	আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো। ■

মন্তব্য ঃ ওপৰত দিয়া প্ৰমাণৰ উদাহৰণটোৱে তোমালোকক পুনৰ দেখুৱালে যে, এটা ফলাফলৰ প্ৰমাণ বিভিন্ন পন্থাৰে দিব পাৰি।

উপপাদ্য A1.2 ঃ এটা বিন্দুৰপৰা বিন্দুটোৰ মাজেৰে নোযোৱা এডাল ৰেখালৈ টনা সকলো ৰেখাখণ্ডৰ ভিতৰৰ আটাইতকৈ সৰু ৰেখাখণ্ডডাল ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব।

প্ৰমাণ ঃ



চিত্ৰ A1.5

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
ধৰো, XY প্ৰদত্ত ৰেখা, P, XY ৰেখাডালত নথকা এটা বিন্দু আৰু PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি P বিন্দুৰ পৰা XY ৰেখালৈ টনা ৰেখাখণ্ড য'ত PM আটাইতকৈ সৰু (চিত্ৰ A1.5 চোৱা)	যিহেতু PM, PA_1, PA_2 ... ইত্যাদিৰ মাজৰ আটাইতকৈ সৰুডাল XY ৰ ওপৰত লম্ব বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগে, আমি এই ৰেখাখণ্ডবোৰ টনা আৰম্ভ কৰিছোঁ।।
ধৰো, PM, XY ৰ ওপৰত লম্ব নহয়	এইটো বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ কৰিব লগীয়া উক্তিৰ নঞৰ্থক।
XY ৰ ওপৰত PN এডাল লম্ব টনা হ'ল, চিত্ৰ A1.5 ও ফুটফুটকৈখাৰে দেখুওৱা হৈছে।	প্ৰায়ে আমি ফলাফল প্ৰমাণৰ সমৰ্থত অৰ্জন কৰিব লাগে।
PN হ'ল PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি ৰেখা-খণ্ডৰ ভিতৰত আটাইতকৈ সৰু ৰেখাখণ্ড যিটোৱে দিয়ে, PN < PM	সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহু অতিভুজতকৈ সৰু আৰু সংখ্যাৰ প্ৰতিষ্ঠিত ধৰ্ম।
এইটোৱে, PM যে এনে ধৰণৰ সকলো ৰেখাখণ্ডৰ ভিতৰত আটাইতকৈ সৰু যিটো আমাৰ প্ৰকল্পটোক বিৰোধিতা কৰিছে।	পৰিষ্কাৰভাৱে যি আমাৰ ঈপ্সিত।
সেইবাবে, PM ৰেখাখণ্ড XY ৰ ওপৰত লম্ব	আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো।

অনুশীলনী : A1.6

1. ধৰাহওক, $a + b = c + d$, আৰু $a < c$ । বিৰোধাচৰণদ্বাৰা প্ৰমাণেৰে দেখুওৱা যে $b>d$।
2. ধৰা r এটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে, $r + x$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।
3. বিৰোধাচৰণদ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে যদি এটা অখণ্ড সংখ্যা a ৰ বাবে a^2 যুগ্ম, তেন্তে a ও যুগ্ম।
[ইংগিত : a যুগ্ম নহয় বুলি ধৰা অৰ্থাৎ ইয়াৰ আকাৰ $2n + 1$, কোনো অখণ্ড সংখ্যা nঅৰ বাবে আৰু তাৰ পাছত আগবাঢ়া]
4. বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে, যদি এটা অখণ্ড সংখ্যা a ৰ বাবে, a^2, 3ৰে বিভাজ্য তেন্তে a ও 3 ৰে বিভাজ্য।

5. বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে, n ৰ কোনো মান নাই যাৰ বাবে 6^n শূন্য অংকেত শেষ হয়।
6. বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণ কৰা যে এখন সমতল দুডাল ভিন্ন ৰেখাই এটাতকৈ বেছি বিন্দুত কটাকটি কৰিব নোৱাৰে।

A1.8. সাৰাংশ (Summary) :

এই পৰিশিষ্টত ভাগত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি শিকিলা :

1. নৱম শ্ৰেণীত শিকি অহা বিভিন্ন ধাৰণা আৰু প্ৰমাণৰ ভিন্ন উপাদানৰ বিষয়ে।
2. এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক।
3. এটা উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি।
4. বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণ।