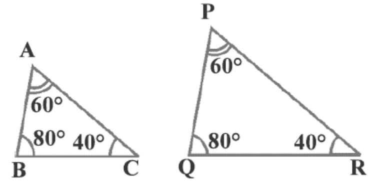
સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચેની આકૃતિઓ માં આપેલ ત્રિકોણો પૈકી કઈ જોડીના ત્રિકોણો સમરૂપ છે તે જણાવો. પ્રશ્નનો જવાબ આપવા કઈ સમરૂપતાની શરતનો ઉપયોગ કર્યો તે લખો અને સમરૂપ ત્રિકોણની જોડીઓને સંકેતમાં લખો :

(i)

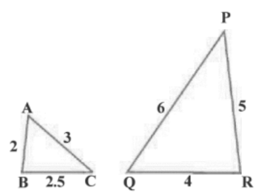


જ. $\angle A = \angle P = 60°$, $\angle B = \angle Q = 80°$ તેમજ $\angle C = \angle R = 40°$,

તેથી, ખૂખૂખૂ શરત અનુસાર,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

(ii)

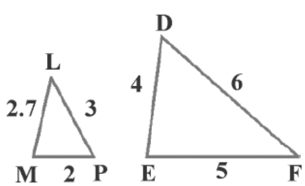


જ. $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ} = \frac{1}{2}$

તેથી, બાબાબા શરત અનુસાર,

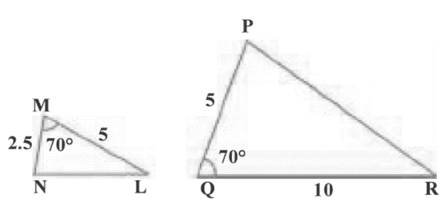
$\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii)



જ. ત્રિકોણો સમરૂપ નથી કારણ કે બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.

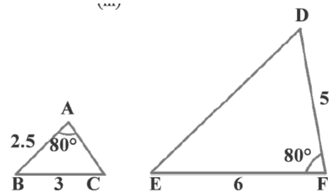
(iv)



જ. $\frac{MN}{PQ} \neq \frac{ML}{QR}$

ત્રિકોણો સમરૂપ નથી કારણ કે બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.

(v)

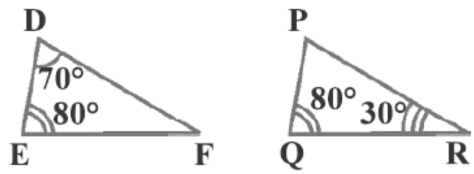


જ. $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}$

પરંતુ બંને બાજુઓ રચાતો ખૂણો સમાન નથી.

તેથી, ત્રિકોણો સમરૂપ નથી કારણ કે બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.

(vi)



જ. ΔDEF માં,

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$

$\Rightarrow 70° + 80° + \angle F = 180°$

$\Rightarrow \angle F = 180° - 150°$

$\Rightarrow \angle F = 30°$

તેજ રીતે,

ΔPQR માં,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$

$\Rightarrow \angle P + 80° + 30° = 180°$

$\Rightarrow \angle P = 180° - 110°$

$\Rightarrow \angle P = 70°$

તેથી,

ΔDEF અને ΔPQR માં,

$\angle D = \angle P$

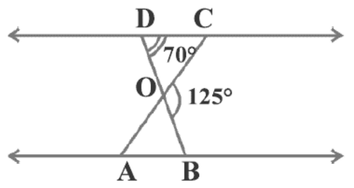
$\angle E = \angle Q$

$\angle F = \angle R$

તેથી, ખૂખૂખૂ શરત અનુસાર,

$\boldsymbol{\Delta DEF \sim \Delta PQR}$

2. **આકૃતિમાં $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ અને $\angle CDO = 70°$ હોય , તો $\angle DOC, \angle DCO$ અને $\angle OAB$ શોધો.**



જ. $\angle DOC$ અને $\angle COB$ રૈખિક જોડના ખૂણાઓ છે.

$\therefore \angle DOC + \angle COB = 180°$

$\therefore \angle DOC + 125° = 180°$

$\therefore \angle DOC = 180° - 125°$

$\therefore \angle DOC = 55°$

ΔDOC માં,

$\angle DCO + \angle CDO + \angle DOC = 180°$

$\therefore \angle DCO + 70° + 55° = 180°$

$\therefore \angle DCO = 180° - 125°$

$\therefore \angle DCO = 55°$

$\Delta ODC \sim \Delta OBA$ આપેલું છે.

$\therefore \angle OAB = \angle OCD = 55°$ (યુગ્મકોણો)

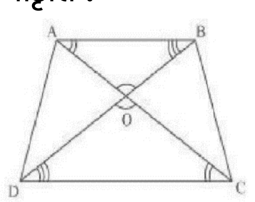
તેથી, $\angle DOC = 55°$,$\angle DCO = 55°$ અને $\angle OAB = 55°$

3. **સમલંબ ચતુષ્કોણ $ABCD$ માં $AB \parallel DC$ છે. વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. હવે ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે , $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.**

જ. **પક્ષ :** સમલંબ ચતુષ્કોણ $ABCD$ માં $AB \parallel DC$ છે. વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે.

સાધ્ય : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

આકૃતિ :



સાબિતી :

ΔDOC અને ΔBOA માં,

$\angle DOC = \angle BOA$ ($\because$ અભિકોણ)

$\angle CDO = \angle ABO$ ($\because$ યુગ્મકોણ)

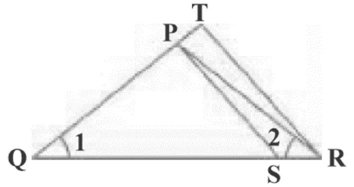
$\angle DCO = \angle BAO$ ($\because$ અનુકોણ)

$\therefore \ \Delta DOC \sim \Delta BOA$ ($\because$ ખૂખૂખૂ શરત)

$\therefore \frac{DO}{BO} = \frac{CO}{AO} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

જે સાબિત થાય છે.

4. **આકૃતિમાં, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$. સાબિત કરો કે $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.**



જ. **પક્ષ :** ΔTQR માં $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$.

સાધ્ય : $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

સાબિતી :

ΔPQR માં $\angle PQR = \angle PRQ$ ($\because$ પક્ષ)

$\therefore PQ = QR$ ……………(1)

હવે,

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ($\because$ પક્ષ)

$\therefore \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ ……………(2) ($\because$ પરિણામ (1))

ΔPQS અને ΔTQR માં,

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ ($\because$ પરિણામ (2))

$\angle Q = \angle Q$ ($\because$ એક જ ખૂણો)

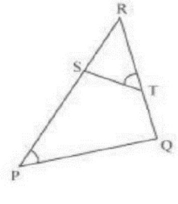
$\therefore \Delta PQS \sim \Delta TQR$ ($\because$ બાખૂબા શરત)

5. **ΔPQR ની બાજુઓ PR અને QR પર બિંદુઓ S અને T એવાં છે જે, જેથી $\angle P = \angle RTS$. સાબિત કરો કે, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.**

જ. **પક્ષ :** ΔPQR ની બાજુઓ PR અને QR પર બિંદુઓ S અને T એવાં છે જે, જેથી $\angle P = \angle RTS$

સાધ્ય : $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

આકૃતિ :



સાબિતી :

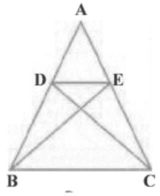
ΔRPQ અને ΔRST માં,

$\angle RTS = \angle QPS$ ($\because$ પક્ષ)

$\angle R = \angle R$ ($\because$ એક જ ખૂણો)

$\therefore \Delta RPQ \sim \Delta RST$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

6. **આકૃતિમાં જો $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.**



જ. **પક્ષ :** $\Delta ABE \cong \Delta ACD$

સાધ્ય : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

સાબિતી :

$\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ($\because$ પક્ષ)

$\therefore AB = AC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore AD = AE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

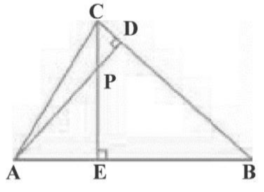
ΔADE અને ΔABC માં,

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ($\because$ પરિણામ (1) અને (2))

$\angle A = \angle A$ ($\because$ એક જ ખૂણો)

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ ($\because$ બાખૂબા શરત)

7. **આકૃતિમાં ΔABC ના વેધ AD અને CE એકબીજાને P બિંદુમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે,**



(i) **$\Delta AEP \sim \Delta CDP$**

જ. ΔAEP અને ΔCDP માં,

$\angle APE = \angle CPD$ ($\because$ અભિકોણ)

$\angle AEP = \angle CDP$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\therefore \Delta AEP \sim \Delta CDP$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

(ii) $\boldsymbol{\Delta ABD \sim \Delta CBE}$

જ. ΔABD અને ΔCBE માં,

$\angle ADB = \angle CEB$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\angle ABD = \angle CBE$ ($\because$ સમાન ખૂણા)

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta CBE$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

(iii) $\boldsymbol{\Delta AEP \sim \Delta ADB}$

જ. ΔAEP અને ΔADB માં,

$\angle AEP = \angle ADB$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\angle PAE = \angle DAB$ ($\because$ સમાન ખૂણા)

$\therefore \Delta AEP \sim \Delta ADB$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

(iv) $\boldsymbol{\Delta PDC \sim \Delta BEC}$

જ. ΔPDC અને ΔBEC માં,

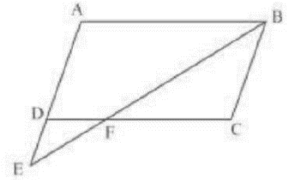
$\angle PDC = \angle BEC$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\angle PCD = \angle BCE$ ($\because$ સમાન ખૂણા)

$\therefore \Delta PDC \sim \Delta BEC$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

8. **બિંદુ E એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ ની લંબાવેલ બાજુ AD પરનું બિંદુ છે. BE એ CD ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\therefore \Delta ABE \sim \Delta CFB$.**

જ.



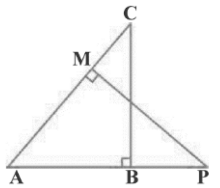
ΔABE અને ΔCFB માં,

$\angle A = \angle C$ ($\because$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

$\angle AEB = \angle CBF$ ($\because$ યુગ્મકોણ)

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CFB$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

9. **આકૃતિમાં ત્રિકોણ ABC અને AMP કાટકોણ છે અને તેમાં ખૂણા B અને M કાટખૂણા છે. સાબિત કરો કે,**



(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

જ. ΔABC અને ΔAMP માં,

$\angle ABC = \angle AMP$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\angle A = \angle A$ ($\because$ એક જ ખૂણો)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta AMP$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

જ. $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ ($\because$ (i) ની સાબિતી)

$\therefore \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ ($\because$ એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

10. **D અને H એ ΔABC અને ΔEFG ની અનુક્રમે બાજુઓ AB અને EF પર આવેલાં હોય તેવી રીતે CD અને G અનુક્રમે $\angle ACB$ અને $\angle EFG$ ના દ્વિભાજક છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ હોય, તો સાબિત કરો કે,**

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

જ. $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ ($\because$ આપેલું છે.)

$\therefore \angle A = \angle F, \angle B = \angle E$ અને $\angle ACB = \angle FGE$

$\therefore \angle ACD = \angle FGH$ ($\because$ દ્વિભાજકો)

$\therefore \angle DCB = \angle HGE$ ($\because$ દ્વિભાજકો)

ΔACD અને ΔFGH માં,

$\angle A = \angle F$

$\angle ACD = \angle FGH$

$\therefore \Delta ACD \sim \Delta FGH$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

$\therefore \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

જ. ΔDCB અને ΔHGE માં,

$\angle DCB = \angle HGE$

$\angle B = \angle E$

$\therefore \Delta DCB \sim \Delta HGE$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HFG$

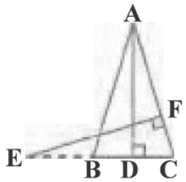
જ. ΔDCA અને ΔHFG માં,

$\angle ACD = \angle FGH$

$\angle B = \angle F$

$\therefore \Delta DCA \sim \Delta HFG$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

11. **આકૃતિમાં E એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC ની લંબાવેલ બાજુ CB પર આવેલ બિંદુ છે તથા $AB = AC$. જો $AD \perp BC$ અને $EF \perp AC$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta ECF$.**



જ. $AB = AC$

$\therefore \angle ABD = \angle ECF$

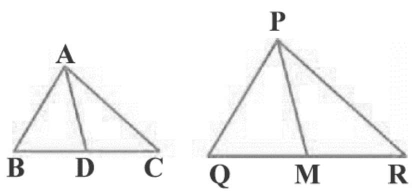
ΔABD અને ΔECF માં,

$\angle ADB = \angle EFC$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\angle ABD = \angle ECF$ ($\because$ ઉપર મુજબની સાબિતી)

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ECF$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

12. **ΔABC ની બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AD અનુક્રમે ΔPQR ની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણ છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.**



જ. AD અને PM ત્રિકોણની મધ્યગાઓ છે.

$\therefore BD = \frac{BC}{2}$ અને $QM = \frac{QR}{2}$

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$ ($\because$ આપેલું છે.)

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$

ΔABD અને ΔPQM માં,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$ ($\because$ ઉપલી સાબિતી)

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta PQM$ ($\because$ બાબાબા શરત)

ΔABC અને ΔPQR માં,

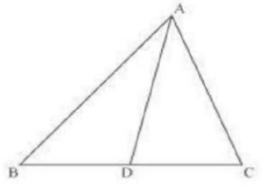
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (∵ ઉપલી સાબિતી)

$\therefore \angle ABD \sim \angle PQM$ (∵ બાબાબા શરત)

$\therefore \angle ABC \sim \angle PQR$

13. **બિંદુ D એ ΔABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે, $\angle ADC = \angle BAC$. સાબિત કરો કે, $CA^2 = CB \cdot CD$.**

જ.



ΔADC અને ΔBAC માં,

$\angle ADC = \angle BAC$ (∵ આપેલું છે.)

$\angle ACD = \angle BCA$ (∵ એક જ ખૂણો)

$\therefore \Delta ADC \sim \Delta BAC$ (∵ ખૂખૂ શરત)

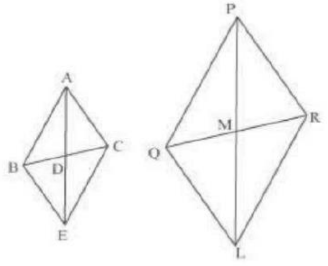
આપણે જાણીએ છીએ કે એકરૂપ ત્રિકોણો ની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણ માં હોય છે.

$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$

$\therefore CA^2 = CB \cdot CD$

14. **ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC તથા મધ્યગા AD એ અનુક્રમે ΔPQR ની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.**

જ.



$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ (∵ આપેલું છે.)

બિંદુ D અને L એવાં મળે કે જેથી $AD = DE$ અને $PM = ML$ થાય.

રેખાખંડ BE, CE, QL અને RL જોડો.

AD અને PM એ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ છે.

$BD = CD$ અને $QM = MR$

તેમજ, $AD = DE$ અને $PM = ML$ છે.

ચતુષ્કોણ $ABEC$ ના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે. તેથી ચતુષ્કોણ $ABEC$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

તેજ રીતે ચતુષ્કોણ $PQLR$ પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

$\therefore AC = BE, AB = EC$ તેમજ $PR = QL, PQ = LR$

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QL} = \frac{2AD}{2PM} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AE}{PL}$

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta PQL$ ($\because$ બાબાબા શરત)

આપણે જાણીએ છીએ કે એકરૂપ ત્રિકોણો ની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણ માં હોય છે.

$\therefore \angle BAE = \angle QPL$ …………… (1)

તેજ રીતે,

$\therefore \Delta AEC \sim \Delta PLR$ ($\because$ બાબાબા શરત)

$\therefore \angle CAE = \angle RPL$ …………… (2)

પરિણામ (1) અને (2) ને ઉમેરતાં,

$\therefore \angle BAE + \angle CAE = \angle QPL + \angle RPL$

$\therefore \angle CAB = \angle RPQ$ …………… (3)

ΔABC અને ΔPQR માં,

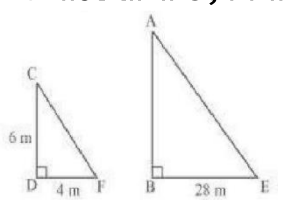
$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ ($\because$ આપેલું છે.)

$\angle CAB = \angle RPQ$ ($\because$ પરિણામ (3))

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ ($\because$ ખૂબાખૂ શરત)

15. એક 6 મીટર ઊંચા શિરોલંબ વાંસનો જમીન પરનો પડછાયો 4 મીટર લાંબો છે. એ જ વખતે એક મિનારાનો પડછાયો 28 મીટર લાંબો છે, મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

જ.



ધારો કે CD એ વાંસ છે અને AB એ મિનારો છે. તેથી, DF અને BE એ વાંસ અને મિનારાના પડછાયા થશે.

ΔABE અને ΔCDF માં,

$\angle BAE = \angle DCF$ ($\because$ સૂર્યનો એક જ જગ્યાથી ખૂણો)

$\angle ABE = \angle CDF$ ($\because$ કાટખૂણા)

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CDF$ ($\because$ ખૂખૂ શરત)

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DF}$

$\therefore \frac{AB}{6} = \frac{28}{4}$

$\therefore AB = \frac{28 \times 6}{4}$

$\therefore AB = 42$

તેથી, મિનારાની ઊંચાઈ 42 મીટર હશે.

16. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તથા AD અને PM અનુક્રમે ΔABC અને ΔPQR ની મધ્યગા હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

જ. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ આપેલું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે એકરૂપ ત્રિકોણો ની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણ માં હોય છે.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

તેમજ,

$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

AD અને PM ત્રિકોણની મધ્યગાઓ છે.

$\therefore BD = \frac{BC}{2}$ અને $QM = \frac{QR}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

પરિણામ (1) , (2) અને (3) પરથી,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

ΔABD અને ΔPQM માં,

$\angle B = \angle Q$ ($\because$ પરિણામ (2))

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ($\because$પરિણામ (4))

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta PQM$ ($\because$ બાખૂબા શરત)

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$