त्रि – विमीयज्यामिति

Ex 14.1

प्रश्न 1. एक रेखा के दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती हैं।

हल : माना रेखा निर्देशांक्षों के साथ समान कोण θ बनाती है। अतः दिक्-कोसाइन

$l = \cos\theta, m = \cos\theta, n = \cos\theta$

परन्तु

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow 3\cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 2. दो बिन्दुओं (4, 2, 3) तथा (4, 5, 7) को मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दुओं P(x1, y1, z1) तथा Q(x2, y2, z2) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

प्रश्नानुसार $x_1 = 4, y_1 = 2, z_1 = 3$

$x_2 = 4, y_2 = 5, z_2 = 7$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(4-4)^2 + (5-2)^2 + (7-3)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

∴ बिन्दुओं (4, 2, 3) और (4, 5, 7) को मिलाने वाली रेखा के

दिक्-कोज्याएँ $\frac{4-4}{5}, \frac{5-2}{5}, \frac{7-3}{5}$ या $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ हैं।

प्रश्न 3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात 2, -1, -2 हैं, तो इसकी दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : a = 2, b = -1, c = -2

माना रेखा के दिक्-कोसाइन l, m और n हैं तो

$$l = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \; m = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

तथा $$n = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

अतः $$l = \frac{\pm 2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{\pm 2}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{\pm 2}{\sqrt{9}} = \frac{\pm 2}{\pm 3} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ $$m = \frac{\mp 1}{\pm 3} = -\frac{1}{3}$$

$$n = \frac{\mp 2}{\pm 3} = \frac{-2}{3}$$

प्रश्न 4. एक सदिश $\vec{r}$, X, Y तथा Z-अक्षों के साथ क्रमशः 45°, 60°, 120° के कोण बनाता है। यदि सदिश $\vec{r}$ का परिमाण 2 इकाई है तो $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\because \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

दिया है : $|\vec{r}| = 2$

तथा $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 120°$

$$\vec{r} = 2[\cos 45° \,\hat{i} + \cos 60° \,\hat{j} + \cos 120° \,\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{2}{2}[\sqrt{2}\,\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}]$$

$$= \sqrt{2}\,\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

Ex 14.2

प्रश्न 1. बिन्दु (5, 7, 9) से गुजरने गली उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्न अक्षों के समान्तर है :

(i) X-अक्ष

(ii) Y-अक्ष

(iii) Z-अक्ष

हल : बिन्दु A(5, 7, 9) स्थिति सदिश

$\vec{r_1} = 5\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$

(i) X-अक्ष के समान्तर जाने वाली रेखा बिंदु B(1, 0, 0) से गुजरती है, अत: बिंदु B का स्थिति सदिश

$\vec{r_2} = (\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$

अत: वाँछित रेखा का समीकरण समीकरण

$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{r_2}$

$\vec{r} = (5\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}) + l(\hat{i} + 0.\hat{j} + 0.\hat{k})$

$\vec{r} = (5 + \lambda)\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$

दी गई रेखा का कार्तीय समीकरण माना xi + yj + zk है अतः

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (5 + \lambda)\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$

तुलना करने पर,

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{0} = \frac{z-9}{0} = \lambda$$

अत: रेखा का वांछित समी.

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{0} = \frac{z-9}{0}$$

(ii) Y-अक्ष के समान्तर रेखा बिंदु (0, 1, 0) से गुजरती है। अतः बिंदु B की स्थिति सदिश

$\vec{r_2} = 0.\hat{i} + 1.\hat{j} + 0.\hat{k}$

अतः वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{r_2}$$

$$\vec{r} = (5\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}) + 1\,(0.\hat{i} + 1.\hat{j} + 0.\hat{k})$$

$$\vec{r} = 5\hat{i} + (7+1)\hat{j} + 9\hat{k}$$

कार्तीय समीरकण—माना $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है तो

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + (7+1)\hat{j} + 9\hat{k}$$

तुलना करने पर, $x = 5, y = 7 + \lambda, z = 9$

अर्थात् $\quad \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-9}{0} = \lambda$

∴ रेखा का समीकरण

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-9}{0}$$

(iii) Z-अक्ष के समान्तर रेखा बिंदु (0, 0, 1) से गुरजती है। अत: बिंदु C का सदिश

$$= 0.\hat{i} + 1.\hat{j} + 1.\hat{k}$$

अत: वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{r_2}$$

$$\vec{r} = (5\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}) + \lambda\,(0.\hat{i} + 0.\hat{j} + 1.\hat{k})$$

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 7\hat{j} + (9+\lambda)\hat{k}$$

कार्तीय समीकरण—माना $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है तो

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 7\hat{j} + (9+\lambda)\hat{k}$$

तुलना करने पर, $x = 5, y = 7, z = 9 + 1$

अर्थात् $\quad \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-7}{0} = \dfrac{z-9}{1} = \lambda$

∴ वांछित समीकरण $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-7}{0} = \dfrac{z-9}{1}$

प्रश्न 2. सरल रेखा को सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश

$2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

है, से गुजरती है तथा सदिश

$3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

के समान्तर है। इसका कार्तीय रूप में रूपान्तरण भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये बिंदु का स्थिति सदिश

$2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ है।

$\therefore \quad \vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

दिया गया सदिश $\vec{b} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

$\therefore$ दिये गये बिंदु सदिश $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ से गुजरने वाली सदिश $\vec{b} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = (2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$$

$$= (2+3\lambda)\hat{i}+(-3+4\lambda)\hat{j}+(4-5\lambda)\hat{k}$$

पुन: माना कार्तीय समीकरण $xi + yj + zk$ है तो

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = (2+3\lambda)\hat{i}+(-3+4\lambda)\hat{j}+(4-5\lambda)\hat{k}$$

तुलना करने पर, $x = 2 + 3\lambda$, $y = -3 + 4\lambda$, $z = 4 - 5\lambda$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-5} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-5}$$

प्रश्न 3. सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो संदेश

$2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

के समान्तर है और बिन्दु (5,-2, 4) से गुजरती है।

हल : चूँकि रेखा बिंदु (5,-2, 4) से गुजरती है।

∴ बिंदु (5,-2, 4) का स्थिति सदिश

$$\vec{a} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

दिया गया सदिश

$$\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

∴ बिंदु (5, −2, 4) से जाने वाली तथा सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

के समान्तर रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = (5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$

प्रश्न 4. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2,-1, 1) से गुजरती है तथा रेखा

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{-3}$$

के समान्तर है।

हल : दी गई रेखा

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{-3}$$

के समान्तर बिंदु (2, − 1, 1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-3}$$

क्योंकि दोनों समान्तर रेखाओं के दिक्-अनुपात एक ही होते हैं।

अतः बिंदु $A(2, -1, 1)$ से गुजरने वाली सदिश $\vec{m} = 2\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

के समान्तर रेखा के समीकरण के लिये A का स्थिति सदिश

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

∴ वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{m}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$$

प्रश्न 5. एक रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$$

है, इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$$

बिन्दु (5, -4, 6) से होकर जाती है।

$$\therefore \quad \vec{a} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात 3, 7, 2 हैं।

$$\therefore \quad \vec{b} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$\text{या} \quad \vec{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$$

प्रश्न 6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो (1,2,3) से जाती है तथा

$$\frac{-x-2}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{2z-6}{3}$$

हल : माना रेखा बिंदु (x1, y1, z1) से गुजरती है और उसके दिक्अनुपात a, b, c हैं तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा बिंदु (1, 2, 3) से गुजरती है तथा रेखा

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{2z-6}{3}$$

के समान्तर है।।

अत: रेखा के दिक्-अनुपात

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-3}{3/2}$$

से -1,7 या -2, 14, 3 होंगे।

अतः वांछित रेखा का समीकरण,

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-3}{3}$$

प्रश्न 7. समान्तर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्षों के निर्देशांक A(4, 5, 10), B(2, 3, 4) और C(1,2,-1) हैं। AB और BC के सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। D के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना मूलबिन्दु O है।

∴ बिन्दुओं A, B, C तथा D के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

(i) यदि भुजा AB पर कोई बिन्दु P(x, y, z) तथा इसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ हो तब भुजा AB का सदिश समीकरण

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a}) \quad (\because \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$
$$\therefore \vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k}+\lambda\{2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}-(4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k})\}$$
$$\Rightarrow \vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}) \quad ...(1)$$

भुजा AB के कार्तीय समीकरण के लिए,

समीकरण (1) में $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ रखने पर,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k} + \lambda(-2\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$\Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (4 - 2\lambda)\hat{i} + (5 - 2\lambda)\hat{j} + (10 - 6\lambda)\hat{k}$$

दोनों पक्षों में $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$x = 4 - 2\lambda, y = 5 - 2\lambda, z = 10 - 6\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{-2} = \lambda, \frac{y-5}{-2} = \lambda, \frac{z-10}{-6} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{-2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-10}{-6} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-10}{3}$$

जो भुजा AB का कार्तीय समीकरण है।

> **ध्यान दें :** चूँकि रेखा AB बिन्दुओं $A(4, 5, 10)$ तथा $B(2, 3, 4)$ से जाती है।
>
> $\therefore$ A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं।
>
> तब $\vec{a} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k}$
>
> तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
>
> तब AB का सदिश समीकरण
>
> $$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

(ii) भुजा BC के लिए,

रेखा BC बिन्दुओं B(2, 3, 4) तथा C(1, 2, − 1) से जाती है।

$$= \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

बिन्दु C का स्थिति सदिश = $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ भुजा (रेखा) BC का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{b} + \lambda(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \mu\{\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \mu(-\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \quad ...(2)$$

जो BC का सदिश समीकरण है।

भुजा BC के कार्तीय समीकरण के लिए,

माना भुजा BC पर कोई बिन्दु Q(x, y, z) है जिसका स्थिति सदिश

$\vec{r}$ है, तब $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r}$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \mu(-\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$$

$$\Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2-\mu)\hat{i} + (3-\mu)\hat{j} + (4-5\mu)\hat{k}$$

दोनों पक्षों में $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$x = 2 - \mu, y = 3 - \mu, z = 4 - 5\mu$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \mu, \frac{y-3}{-1} = \mu, \frac{z-4}{-5} = \mu$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{5} = \mu$$

या $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{5}$

भुजा BC को कार्तीय समीकरण है।

(iii) बिन्दु D के निर्देशांक के लिए,

माना D के निर्देशांक (x1, y1, z1) हैं।

∵ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः AC तथा BD के मध्य-बिन्दु सम्पाती होंगे।

तब AC मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \frac{4+1}{2}, \frac{5+2}{2}, \frac{10-1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$$

या AC का मध्य-बिन्दु $P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

पुनः BD के मध्य-बिन्दु Q के निर्देशांक

$$= \frac{2+x_1}{2}, \frac{3+y_1}{2}, \frac{4+z_1}{2}$$

या BD का मध्य-बिन्दु

$$Q\left(\frac{2+x_1}{2}, \frac{3+y_1}{2}, \frac{4+z_1}{2}\right)$$

$\because$ AC तथा BD के मध्य-बिन्दु क्रमशः P तथा Q सम्पाती हैं।

$$\therefore \quad \frac{5}{2}=\frac{2+x_1}{2}, \frac{7}{2}=\frac{3+y_1}{2}, \frac{9}{2}=\frac{4+z_1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5-2, \; y_1 = 7-3, \; z_1 = 9-4$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = 5$$

$\therefore$ बिन्दु $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$

$\therefore$ बिन्दु D के निर्देशांक $(3, 4, 5)$

प्रश्न 8. एक रेखा का कार्तीय समीकरण 3x + 1 = 6y − 2 = 1 − z है। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ से यह गुजरती है, साथ ही इसके दिक्-अनुपात तथा सदिश समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा का समीकरण

$3x + 1 = 6y - 2 = 1 - z$

या $$3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 6\left(y-\frac{1}{3}\right) = 1-z$$

या $$\frac{x+1/3}{1/3} = \frac{y-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{z-1}{-1}$$

अतः रेखा बिंदु $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ से गुजरती है।

रेखा के दिक्-अनुपात $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -1$ हैं अर्थात् 2, 1, − 6 है।

बिंदु $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ का स्थिति सदिश

$$\vec{a} = -\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + k$$

तथा $$\vec{m} = (2i + j - 6k)$$

∴ वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + k\right) + \lambda(2i + j - 6k)$$

प्रश्न 9. बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश

$$(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

के समान्तर हैं।

हल :

∵ रेखा यदि

$$3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

के समान्तर है।

∴ इसने दिक् अनुपात 3, 2, − 2 होंगे।

चूँकि रेखा 1, 2, 3 से जा रही है। अतः इसका कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2} \text{ होगा}$$

पुनः बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

प्रश्न 10.

बिन्दु जिसका स्थिति सदिश

$$2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

है, से गुजरने व सदिश

$$\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दु $\vec{a}$ से गुजरने वाली रेखा का जो सदिश $\vec{b}$ की दिशा में है, समीकरण,

में है, समीकरण, $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$

यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

∴ अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \quad ...(1)$$

जहाँ λ एक प्राचल है।

कार्तीय रूप में, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ समी. (1) में रखने पर,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2 + \lambda)\hat{i} + (-1 + 2\lambda)\hat{j} + (4 - \lambda)\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}$ और $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$x = 2 + \lambda, \quad y = -1 + 2\lambda, \quad z = 4 - \lambda$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = \lambda, \quad \frac{y+1}{2} = \lambda, \quad \frac{z-4}{-1} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1} = \lambda$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

प्रश्न 11. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-2, 4,-5) से जाती है और

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$$

के समान्तर हैं|

हल : माना रेखा बिन्दु (x1, y1, z1) से गुजरती है और उसके दिक्-अनुपात a, b, c हैं, तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा (-2, 4, 5) से जाती है तथा

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$$

के समान्तर है।

अतः रेखा के दिक्-अनुपात : 3, 5, 6.

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$$

प्रश्न 12.

एक रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{z}$$

इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल :

कातीय समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

से प्रदर्शित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = (x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}) + \lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$$

मान रखने पर।

$$\vec{r} = (5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$$

प्रश्न 13. भूल बिन्दु और (5,-2, 3) से जाने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मूल बिन्दु O(0, 0, 0) का स्थिति सदिश $\vec{a} = \vec{0}$ तथा बिन्दु (5, − 2, 3) का स्थिति सदिश समीकरण

$$\vec{b} = 5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

∴ बिन्दुओं में $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ से जाने वाली रेखा को सदिश

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{0} + \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} - \vec{0})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).$$

(ii) रेखा बिन्दु O(0, 0, 0) से होकर जाती है तथा इसके दिक्-अनुपात 5, − 2, 3 हैं।

∴ रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - 0}{5} = \frac{y - 0}{-2} = \frac{z - 0}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

प्रश्न 14. बिन्दुओं (3, -2, − 5) और (3, -2, 6) से गुजरने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेखा बिन्दु A(3, -2, -5) तथा B(3, -2, 6) से जाती है। तब बिन्दु A(3, -2, -5) का स्थिति सदिश

$$\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

तथा बिन्दु B(3, -2, 6) की स्थिति सदिश

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

(i) तब रेखा AB का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda[(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) - (3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k})]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{j} + 6\hat{k} + 5\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + (11\lambda)\hat{k}$$

(ii) रेखा बिन्दुओं A(3,-2,-5) तब B(3,-2, 6) से जाती है।

अतः रेखा AB का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-3}{3-3}=\frac{y+2}{-2+2}=\frac{z+5}{6+5}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+5}{11}$$

Ex 14.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

हल : दिया है : प्रथम रेखा

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

सदिश $\vec{b_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ की दिशा में है।

द्वितीय रेखा $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

सदिश $\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में है।

यदि रेखाओं के बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}}{|\vec{b_1}| \cdot |\vec{b_2}|}$$

$$= \frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{|3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}| \cdot |\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}|}$$

$$= \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 2}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2}\ \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{9 + 4 + 36}\ \sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{49}.\sqrt{9}} = \frac{19}{7 \times 3} = \frac{19}{21}.$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right).$$

प्रश्न 2.

निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$$

हल : रेखा

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

के दिक्-अनुपात 2, 2, 1 हैं और रेखा

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$$

के दिक्-अनुपात 4, 1, 8 हैं।

∴ a1 = 2, b1 = 2, c1 = 1

a2 = 4, b2 = 1, c2 = 8

यदि दो रेखाओं के बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$=\frac{2\times4+2\times1+1\times8}{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(1)^2}\ \sqrt{(4)^2+(1)^2+(8)^2}}$$

$$=\frac{8+2+8}{\sqrt{4+4+1}.\sqrt{16+1+64}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{9}\ \sqrt{81}}=\frac{18}{3\times9}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

प्रश्न 3. दर्शाइए कि बिन्दुओं (1,-1, 2), (3, 4,-2) से होकर जाने वाली बिंदुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

हल : बिंदु (1,-1, 2) तथा (3,4,-2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-1)}{4-(-1)}=\frac{z-3}{-2-2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-4}$$

अत: $l_1=2, m_1=5, n_1=-4$

बिंदु (0, 3, 2) तथा (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-3}{5-3} = \frac{z-2}{6-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{4}$$

दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब होगी यदि

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times 3 + 5 \times 2 + (-4) \times (4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6 + 10 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0$$

अतः रेखाएँ परस्पर लम्ब है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4.

यदि रेखाएँ

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$$

और

$$\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

परस्पर लंब हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$$

के दिक्-अनुपात

$l_1 = -3$

$m_1 = 2k$

$n_1 = 2$

तथा

$$\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

के दिक्-अनुपात

$l_2 = 3k$

$m_2 = 1$

$n_2 = -5$

∵ दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं अतः

$\Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
$\Rightarrow -3 \times 3k + 2k \times 1 + 2 \times -5 = 0$
$\Rightarrow -9k + 2k - 10 = 0$
$\Rightarrow -7k - 10 = 0$
$\Rightarrow k = \frac{-10}{7}$

प्रश्न 5. बिन्दु (1, 2, – 4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$$

और

$$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$$

पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल :

माना अभीष्ट रेखा

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}) + \lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \quad \ldots(1)$$

रेखाएँ $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$

और $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$

आपस में लम्ब हैं।

इन रेखाओं के दिक्-अनुपात 3, – 16, 7 और b_1, b_2, b_3 हैं। ये रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं, यदि

$$3b_1 - 16b_2 + 7b_3 = 0 \quad \ldots(2)$$

इसी प्रकार रेखा $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ और $\vec{r}$

$= \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$ के दिक् अनुपात 3, 8, – 5 और b_1, b_2, b_3 हैं। ये परस्पर लम्ब हैं।

$$\therefore \quad 3b_1 + 8b_2 - 5b_3 = 0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (2) व (3) से,

$$\frac{b_1}{80-56} = \frac{b_2}{21+15} = \frac{b_3}{24+48}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_1}{24} = \frac{b_2}{36} = \frac{b_3}{72}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_1}{2} = \frac{b_2}{3} = \frac{b_3}{6}$$

b_1, b_2, b_3 के समानुपाती मान समी. (1) में रखने पर,

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

इस रेखा का सदिश समीकरण

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{6}$$

प्रश्न 6. उस रेखा का कार्तीय समीकरणे ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-2, 4,-5) से जाती है और

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$$

के समांतर है।

हल : माना रेखा बिंदु (x_1, y_1, z_1) से गुजरती है तथा उसके दिक् अनुपात a, b, c हैं तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा (-2, 4, -5) से जाती है और

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$$

के समान्तर है। अतः रेखा के दिक् अनुपात 3, 5, 6 है।

∴ रेखा का वांछित समीकरण

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$$

Ex 14.4

प्रश्न 1. दिखाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

और

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$$

परस्पर प्रतिच्छेदी हैं। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=r_1$$

पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(2r_1 + 1, 3r_1 + 2, 4r + 3)$ हैं।

माना

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{1}=r_2$$

पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(5r_2 + 4, 2r_2 + 1, r_2)$ है। दोनों रेखायें परस्पर प्रतिच्छे करती हैं। अतः दोनों बिंदु उभयनिष्ठ होंगे और संपाती होंगे।

$\therefore 2r_1 + 1 = 5r_2 + 4$ ... (1)

$3r_1 + 2 = 2r_2 + 1$ ...(2)

$4r_1 + 3 = r_2$ ...(3)

सपी. (1) और (2),

$2r_1 - 5r_2 = 3$

$3r_1 - 2r_2 = -1$

हल करने पर, $r_1 = -1, r_2 = -1$

$\therefore$ बिदु $(-1, -1, -1)$

स्पष्ट है कि दोनों रेवाएँ प्रतिच्छेद करती है और प्रतिच्छेद बिंदु $(-1, -1, -1)$ है।

प्रश्न 2. उर्धारित कर निम्न रेखाएँ प्रतिच्छेद है या नहीं

$$\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\lambda(2\hat{i}+\hat{k})$$

और

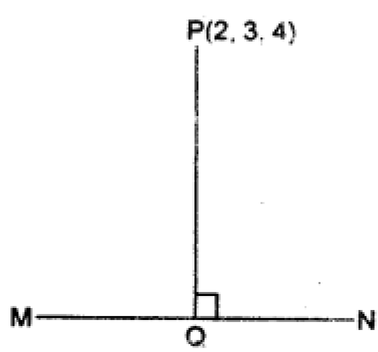
$$\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j})+\mu(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$$

हल : रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, अतः

$(i - j) + \lambda(2i + k) = (2i - j) + \mu(i + j - k)$
$(1 + 2\lambda)i - (1 - 0.\lambda)j + \lambda k$
$= (2 + \mu)i - (1 - \mu)j - \mu k$
तुलना करने पर,
$1 + 2\lambda = 2 + \mu$ ...(1)
$1 - 0.\lambda = 1 - \mu$ ...(2)
$\lambda = - \mu$ ...(3)
हल करने पर समी. (2) से,
$1 - \mu = 1$
$\Rightarrow \mu = 0$
$\therefore$ समी. (3) से, $\lambda = 0$
λ और μ के सान समी. (1) में रखने पर
$1 + 2 \times 0 = 2 + 0$
$1 \neq 2$
अतः रेखायें प्रतिच्छेदी नहीं है।

प्रश्न 3. बिन्दु (2,3,4) से रेखा
$$\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$$
पर डाले गये लम्ब का पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही दिए गए बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दूरी भी ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा का समीकरण
$$\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x-4}{-2} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-1}{-3} = 1 \qquad \ldots(1)$$



MN पर किसी बिंदु Q के निर्देशांक
$Q(-2\lambda + 4, 6\lambda + 0, - 3\lambda + 1)$
लम्ब PQ के दिक् अनुपात

$a_1, b_1, c_1 = x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$
$= -2\lambda + 4 - 2, 6\lambda + 0 - 3, -3\lambda + 1 - 4$
$= -2\lambda + 2, 6\lambda - 3, -3\lambda - 3$
रेखा MN के दिक् अनुपात
$a_2, b_2, c_2 = -2, 6, -3$
रेखा (1) व PQ लम्ववत् है।
इसलिए
$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
$(-2\lambda + 2)(-2) + (6\lambda - 3)(6) + (-3\lambda - 3)(-3) = 0$
$4\lambda - 4 + 36\lambda - 18 + 9\lambda + 9 = 0$
$49\lambda = 13$
$\lambda = \frac{13}{49}$
λ का मान Q में रखने पर पाद के निर्देशांक

$$Q\left(\frac{170}{49}, \frac{78}{49}, \frac{10}{49}\right)$$

डाले गए लम्ब की लम्बाई PQ

$$= \sqrt{\left(\frac{170}{49} - 2\right)^2 + \left(\frac{78}{49} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{49} - 4\right)^2}$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt{101}$$

प्रश्न 4. बिन्दु (2, 3, 2) से जाने वाले रेखा को सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j}) + \mu(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के समान्तर है। इन रेखाओं के मध्य दूरी भी ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा बिंदु (2,3, 2) से गुजरती है।
∴ बिंदु (2, 3, 2) का स्थिति सदिश

$$\vec{a} = 2i + 3j + 2k$$

पुन: रेखा $\vec{r} = -2i + 3j + \mu(2i - 3j + 6k)$ के स्थिति सदिश $\vec{b} = 2i - 3j + 6k$ के समान है।

∴ रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$= (2i + 3j + 2k) + \lambda[2i - 3j + 6k]$$

रेखाओं के मध्य की दूरी रेखाओं को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\vec{r} = (-2i + 3j) + \mu(2i - 3j + 6k)$$

$$= \vec{a_1} + \mu \vec{b_1}$$

तथा $\vec{r} = (2i + 3j + 2k) + \lambda(2i - 3j + 6k)$

$$= \vec{a_2} + \lambda \vec{b_2}$$

परन्तु $\vec{b_1} = \vec{b_2} = \vec{b}$ (∵ रेखायें समान्तर हैं)

$$\therefore \vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = (2i - 3j + 6k) \times [2i + 3j + 2k - (-2i + 3j)]$$

$$= (2i - 3j + 6k) \times (4i + 2k)$$

$$\therefore \vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(-6 - 0) - j(4 - 24) + k(0 + 12)$$

$$= -6i + 20j + 12k$$

∴ इनके बीच की दूरी

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right| = \frac{|-6i + 20j + 12k|}{|2i - 3j + 6k|}$$

$$= \frac{\sqrt{(-6)^2 + (20)^2 + (12)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} = \frac{\sqrt{36 + 400 + 144}}{\sqrt{4 + 9 + 36}}$$

$$= \frac{\sqrt{580}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{580}}{7}$$

Ex 14.5

प्रश्न 1. रेखाओं

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

और

$$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :

रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

रेखा $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ में

$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, \ \vec{b}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

तथा रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ में

$\vec{a}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \ \vec{b}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-1) - \hat{j}(2-2) + \hat{k}(1+2)$$

$$= -3\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad d = \left| \frac{(\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}).(-3\hat{i} + 3\hat{k})}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{1 \times (-3) + (-3) \times 0 + (-2) \times 3}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{-3 - 0 - 6}{3\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{-9}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

प्रश्न 2. **रेखाओं**

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1} \text{ और } \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाओं

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ और } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}} \quad \ldots(1)$$

यहाँ $x_1=-1, y_1=-1, z_1=-1$

$x_2=3, y_2=5, z_2=7$

$a_1=7, b_1=-6, c_1=1$

$a_2=1, b_2=-2, c_2=1$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=4(-6+2)-6(7-1)+8(-14+6)$$

$$=4\times(-4)-6\times 6+8\times(-8)$$

$$=-16-36-64=-116$$

$$\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$=\sqrt{(-6+2)^2+(1-7)^2+(-14+6)^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-8)^2}$$

$$=\sqrt{16+36+64}=\sqrt{116}$$

$$\therefore \quad d=\left|\frac{-116}{\sqrt{116}}\right|=\sqrt{116}=2\sqrt{29}.$$

प्रश्न 3. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).$$

हल : रेखाएँओं

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$$

और $\vec{r} = \vec{a_2}+\mu\vec{b_2}$ से रेखाओं

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और $\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}) + \mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

की तुलना करने पर,

$$a_1 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$

$$b_1 = \hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$$

$$a_2 = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$$

$$b_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$$

रेखाओं $\vec{r} = \hat{a_1}+\lambda\hat{b_1}$ और $\vec{r} = \hat{a_2}+\mu\hat{b_2}$

के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(\vec{a_2}-\vec{a_1}).(\vec{b_1}\times\vec{b_2})}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}\right|$$

अब $\vec{a_2}-\vec{a_1} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$$= 3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$$

और $\vec{b_1}\times\vec{b_2} = (\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3-6) - \hat{j}(1-4) + \hat{k}(3+6)$$

$$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{81+9+81}$$

$$= 3\sqrt{9+1+9} = 3\sqrt{19}$$

$$\therefore \quad d = \left| \frac{(3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}).(-9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k})}{3\sqrt{19}} \right|$$

$$= \left| \frac{3\times(-9) + 3\times(3) + 3\times 9}{3\sqrt{19}} \right|$$

$$= \left| \frac{-27+9+27}{3\sqrt{19}} \right| = \frac{9}{3\sqrt{19}}$$

$$\therefore \quad d = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

प्रश्न 4. रेखाएँ, जिसकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

और

$$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$

हल : रेखा

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

या $$\vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

की तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{b_1} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

और रेखा $$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$

या $$\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

की तुलना $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ से करने पर,

$$\vec{a_2} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$

के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right| \quad \ldots(1)$$

$$\therefore \quad \vec{a_2} - \vec{a_1} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$
$$= 0 + \hat{j} - 4\hat{k} = \hat{j} - 4\hat{k}$$

और $$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$
$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{171} = \sqrt{29}$$

$$\therefore \quad d = \left| \frac{(\hat{j} - 4\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \left| \frac{-4+12}{\sqrt{29}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

प्रश्न 5. निम्न रेखाओं के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z \text{ और } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1}, z = 2$$

तथा लघुतम दूरी वाली रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{3-0}{1} = r_1 \text{ (माना)} \quad \ldots(1)$$

तथा
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{0} = r_2 \text{ (माना)} \quad \ldots(2)$$

अतः रेखा (1) पर कोई बिंदु $P(2r_1 + 1, 3r_1 - 1, r_1)$ तथा
रेखा (2) पर कोई बिंदु $Q(3r_2 - 1, r_2 + 2, r_2 + 2)$
तब रेखा PQ के दिक्-अनुपात
$= 3r_2 - 2r_1 - 2, r_2 - 3r_1 + 3, 2 - r_1$
PQ रेखा (1) के लम्बवत् हैं, इसलिए
$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
$2(3r_2 - 2r_1 - 2) + 3(r_2 - 3r_1 + 3) + 1(2 - r_1) = 0$
$9r_2 - 14r_1 = 7$ ...(3)
PQ रेखा (2) के लम्बवत् है।।
इसलिए $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
$3(3r_2 - 2r_1 - 2) + 1(r_2 - 3r_1 + 3) + 0(2 - r_1) = 0$
$10r_2 - 9r_1 - 3 = 0$
समी. (3) व (4) को हल करने पर

$$r_1 = \frac{97}{59}, \; r_2 = \frac{105}{59}$$

r_1 व r_2 के ये मान बिन्दु P व Q में रखने पर

$$P\left(\frac{253}{59}, \frac{232}{59}, \frac{97}{59}\right)$$

$$Q\left(\frac{256}{59}, \frac{223}{59}, 2\right)$$

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{256}{59} - \frac{253}{59}\right)^2 + \left(\frac{223}{59} - \frac{232}{59}\right)^2 + \left(2 - \frac{97}{59}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{59}\right)^2 + \left(\frac{-9}{59}\right)^2 + \left(\frac{21}{59}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{59}\sqrt{1 + 9 + 49}$$

$$= \frac{3}{59} \times \sqrt{59} = \frac{3}{\sqrt{59}} \text{ इकाई}$$

Ex 14.6

प्रश्न 1. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X-अक्ष के लम्ब है तथा बिन्दु (2, − 1, 3) से गुजरता है।

हल : बिन्दु (2, − 1, 3) से गुजरने वाले समतल का समीकरण
$a(x - 2) + b(y + 1) + c(z - 3) = 0$
∵ समतल X अक्ष के लम्बवत है अर्थात्
$b = 0, c = 0$
अतः $a(x - 2) + 0(y + 1) + 0(z - 3) = 0$
$\Rightarrow a(x - 2) = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0$

प्रश्न 2. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X-अक्ष तथा बिन्दु (3, 2, 4) से गुजरता है।

हल : बिन्दु (3, 2, 4) से गुजरने वाले समतल का समीकरण
$a(x - 3) + b(y - 2) + c(z - 4) = 0$ ...(1)
∵समतल X अक्ष से गजरता है अतः
$a = 0, d = 0 \Rightarrow by + cz = 0$ ...(2)
समी. (1) से a = 0 अतः
$\Rightarrow b(y - 2) + c(z - 4) = 0$
$\Rightarrow by - 2b + cz - 4c = 0$
$\Rightarrow by + cz - 2b - 4c = 0$
$\Rightarrow - 2b = c$ [∵ $by + cz = 0$ समी. (2) से]
$\Rightarrow b = - 2c$
∴बिन्दु (3, 2, 4) तथा X अक्ष से गुजरने वाले से समतल का समीकरण
$\Rightarrow b(y - 2) + c(z - 4) = 0$
$\Rightarrow - 2c(y - 2) + c(z - 4) = 0$
$\Rightarrow - 2y + 4 + z - 4 = 0$
$\Rightarrow 2y - z = 0$

प्रश्न 3. एक चर समतल बिन्दु (p, q, r) से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को बिन्दु A, B तथा C पर मिलता है। प्रदर्शित कीजिए कि निर्देशांक समतलों के समान्तर A, B तथा C से गुजरने वाले समतलों के उभयनिष्ठ बिन्दु का बिन्दुपथ

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 1,$$

हल : माना समतल का समीकरण

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 \quad ...(1)$$

समतल बिंदु (p, q, r) से गुजरता है।

$$\therefore \quad \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}=1 \quad ...(2)$$

पुनः समतल (1) निर्देशांक्षों से बिंदुओं A, B तथा C पर मिलता है।

∴ बिंदु A के निर्देशांक (α, 0, 0)

बिंदु B के निर्देशांक (0, β, 0)

तथा बिंदु C के निर्देशांक (0, 0, γ)

बिंदुओं A, B, C से जाने वाले और निर्देशांक्षों के समान्तर समतल का समीकरण

$x = \alpha$ ...(3)

$y = \beta$ ....(4)

$z = \gamma$ ...(5)

∴ प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ समी. (2) से

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=1$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. उस समतल को सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा i इसके अभिलम्ब की तरफ इकाई सदिश है।

हल : दिया है अभिलम्ब के अनुदिश इकाई सदिश

$\hat{n} = i$

तथा मूल बिंदु से दूरी d = 7 इकाई

अतः समतल को सदिश समीकरण

$\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ से

$\vec{r} \cdot \hat{i} = 7$

प्रश्न 5. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा सदिश 6i + 3j − 2k इसके अभिलम्ब है।

हल : सदिश 6i + 3j − 2k के अनुदिश इकाई सदिश

$$\hat{n} = \frac{6i+3j-2k}{\sqrt{(6)^2+(3)^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{6i+3j-2k}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6i+3j-2k}{\sqrt{49}}$$

∴ समतल का सदिश समीकरण

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = d$$

$$\therefore \quad \vec{r} \cdot \left(\frac{6i+3j-2k}{\sqrt{49}}\right) = 7$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \cdot (6i+3j-2k) = 7\sqrt{49}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \cdot (6i+3j-2k) = 49$$

प्रश्न 6. समतल के समीकरण

$$\vec{r} \cdot (3i-4j+12k) = 5$$

को अभिलम्बे रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्बे दूरी ज्ञात कीजिए, प्राप्त समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।

या

समतल के समीकरण 3x − 4y + 12z = 5 को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए, समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।

हल : प्रथम विधि :

$$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 5$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{9+16+144} = 13 \text{ (13 का भाग देने पर)}$$

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}\right) = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{13}x - \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z = \frac{5}{13}$$

अतः अभिलम्ब की दिक् कोज्याएँ = $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$

मूल बिन्दु से दूरी $P = \frac{5}{13}$

द्वितीय विधि :

दिये गये समीकरण 3x − 4y + 12z = 5 को निरपेक्ष पद से विभाजित करने पर समतल का अभिलम्ब रूप

$$\frac{x}{\frac{5}{3}} - \frac{y}{\frac{5}{4}} + \frac{z}{\frac{5}{12}} = 1$$

माना मूल बिंदु से डाले गये लम्बे की लम्बाई p तथा अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं (dc's) l, m, n हैं तो समतल का समीकरण

lx + my + nz = p ...(1)

इस समीकरण की तुलना 3x − 4y + 12z = 5 से करने पर

$$\frac{l}{3} = \frac{m}{-4} = \frac{n}{12} = \frac{p}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{(3)^2 + (-4)^2 + (12)^2}} = \frac{p}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{p}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{5} = \frac{1}{\sqrt{169}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{5} = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow p = \frac{5}{13}$$

दिक्-कोज्याएं $\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}$

लम्ब दूरी $\frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$

प्रश्न 7. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 4 इकाई दूरी पर है तथा इसके अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 2, -1, 2 हैं।

हल : समतल के अभिलम्ब पर दिक् अनुपात 2, -1, 2 हैं। अतः कोसाइन

$$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}$$

हूँ जहाँ

$$\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{n} = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$$

तथा d = 4 इकाई

∴ समतल का समीकरण

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = d \text{ से}$$

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k\right) = 4$$

प्रश्न 8. समतल के समीकरण 2x – 3y + 6z + 14 = 0 से समतल का अभिलम्ब रूप ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये समतल का समीकरण

2x – 3y + 6z + 14 = 0

समतल पर अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 2, -3, 6 हैं।

अतः अभिलम्ब के दिक्-कोसाइन

$$\frac{2}{\sqrt{4+9+36}}, \frac{-3}{\sqrt{4+9+36}}, \frac{6}{\sqrt{4+9+36}}$$

या $\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$

समीकरण 2x – 3y + 62 + 14 = 0 को 7 से भाग देने पर

$$\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z + 2 = 0$$

या $$\frac{-2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z = 2$$

प्रश्न 9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 13 है तथा इस लम्ब के दिक् अनुपात 4, – 3, 12 है।

हल : समतल पर अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 4, – 3, 12 हैं अत: अभिलम्ब के दिक् कोसाइन

$$\frac{4}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(12)^2}}, \frac{-3}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(12)^2}}, \frac{12}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(12)^2}}$$

अर्थात् $\frac{4}{\sqrt{169}}, \frac{-3}{\sqrt{169}}, \frac{12}{\sqrt{169}}$

या $\frac{4}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{12}{13}$

अतः समतल का समीकरण ax + by + cz = d से जहाँ d = 13 दिया है।

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z = 13$$

प्रश्न 10. समतल x + y + z − 3 = 0 का इकाई अभिलम्ब सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये समतल x + y + z − 3 = 0 के दिक्-अनुपात 1, 1, 1 हैं। अतः दिक्-कोसाइन

$$\frac{1}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^1}} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

अतः $lx + my + nz = d$ से

$$(li + mj + nk)\,(xi + yi + zk) = d$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)(xi + yj + zk) = 3$$

$$\Rightarrow \quad \hat{n} . \vec{r} = 3$$

से $\quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$

या $\quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$

Ex 14.7

प्रश्न 1. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

(i) $\vec{r}\cdot(2i - j + 2k) = 6$ **तथा** $\vec{r}\cdot(3i + 6j - 2k) = 9$

(ii) $\vec{r}\cdot(2i + 3j - 6k) = 5$ **तथा** $\vec{r}\cdot(i - 2j + 2k) = 9$

(iii) $\vec{r}\cdot(i + j + 2k) = 5$ **तथा** $\vec{r}\cdot(2i - j + 2k) = 6$

हल : (i) समतल $\vec{r}$.(2i − j + 2k) = 6 का अभिलम्ब 2i − j + 2k के अनुदिश और समतल $\vec{r}$.(3i + 6j − 2k) = 9 कः अभिलम्ब 3i + 6j − 2k के अनुदिश है।

∴ समतलों के बीच कोण θ अभिलम्बों के बीच के कोण के समान

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{(2i - j + 2k)\cdot(3i + 6j - 2k)}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}\cdot\sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{2\times 3 - 1\times 6 + 2\times -2}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{9+36+4}}$$

$$= \frac{6-6-4}{\sqrt{9}\sqrt{49}}$$

$$= \frac{-4}{3\times 7} = \frac{-4}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{21}\right)$$

(ii) समतल $\vec{r}$.(2i + 3j − 6k) = 5 का अभिलम्ब 2i + 3j − 6k के अनुदिश और $\vec{r}$.(i − 2j + 2k) = 9 का अभिलम्ब i − 2j + 2k के अनुदिश है। अतः

$$\cos\theta = \frac{(2i+3j-6k)\cdot(i-2j+2k)}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(-6)^2}\ \sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2\times1+3\times-2+(-6)\times2}{\sqrt{4+9+36}\ \sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{2-6-12}{\sqrt{49}\ \sqrt{9}}$$

$$= \frac{-16}{7\times3} = \frac{-16}{31}$$

$$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-16}{21}\right)$$

(iii) समतल $\vec{r}$.(i + j + 2k) = 5 का अभिलम्ब i + j + 2k के अनुदिश और $\vec{r}$.(2i − j + 2k) = 6 का अभिलम्ब 2i − j + 2k के अनुदिश है।

$$\text{अत:} \quad \cos\theta = \frac{(i+j+2k).(2i-j+2k)}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}\ \sqrt{(2)^2+(-1)+(2)^2}}$$

$$= \frac{1\times2+1\times-1+2\times2}{\sqrt{1+1+4}\ \sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{2-1+4}{\sqrt{6}\ \sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{6}}$$

$$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{6}}\right)$$

प्रश्न 2. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

(i) x + y + 2z = 9 और 2x − y + z = 15

(ii) 2x − y + z = 4 और x + y + 2z = 3

(iii) x + y − 2z = 3 और 2x − 2y + z = 5

हल : यदि समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं तो

उनके बीच का कोण $\cos\theta = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

(i) $x + y + 2z = 9$ तथा $2x - y - z = 15$ में

$a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 2$ तथा $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 1$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1\times2 + 1\times-1 + 2\times1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2-1+2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt6\sqrt6}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \cos 60^\circ = \cos = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

(ii) $2x - y + z = 4$ तथा $x + y + 2z = 3$ में

$a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2\times1 + (-1)\times1 + 1\times2}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt6\sqrt6}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

(iii) $x + y - 2z = 3$ तथा $2x - 2y + z = 5$ में

$a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -2$ तथा $a_2 = 2, b_2 = -2, c_2 = 1$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1\times2 + 1\times-2 + (-2)\times1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2-2-2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+4+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt6\sqrt9}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{-2}{3\sqrt6}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3\sqrt6}\right)$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि निम्न समतल परस्पर लम्बवत है

(i) $x - 2y + 4z = 10$ और $18x + 17y + 4z = 49$

(ii) $\vec{r}.(2i - j + k) = 4$ और $\vec{r}.(-i - j + k) = 3$

हल : समतल $x - 2y + 4z = 10$ तथा $18x + 17y + 4z = 49$ में

$a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 4$ तथा $a_2, b_2 = 17, c_2 = 4$

(i) समतल लम्बवत् होंगे यदि

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

L.H.S.= $1 \times 18 + (-2) \times 17 + 4 \times 4$

$= 18 - 34 + 16$

$= -34 + 34$

$= 0$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

(ii) हम जानते है कि समतल

$\vec{r}\ \vec{n_1} = \vec{d_1}$

तथा

$\vec{r}\ \vec{n_2} = \vec{d_2}$

परस्पर लम्बवत् होते है यदि

$$\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$$

समतल $\vec{r}(2i - j + k) = 4$ में $\vec{n_1} = 2i - j + k$

तथा समतल $\vec{r}(-i - j + k) = 3$ में $\vec{n_2} = -i - j + k$

अतः लम्बवत् होने के लिये

$(2i - j + k) . (-i - j + k) = 0$

$\Rightarrow 2 \times -1 + (-1) \times (-) + 1 \times 1 = 0$

$\Rightarrow -2 + 1 + 1 = 0$

$0 = 0$

L.H.S. = R.H.S.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. यदि निम्न समतल परस्पर लम्बवत हो, तो λ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\vec{r}.(2i - j + \lambda k) = 5$ और $\vec{r}.(3i + 2j + 2k) = 4$

(ii) $2x - 4y + 3z = 5$ और $x + 2y + \lambda z = 5$

हल : (i) समतल

$$\vec{r}(2i - j + \lambda k) = 5 \text{ में}$$

$$\vec{n_1} = 2i - j + \lambda k$$

तथा समतल $\vec{r} \cdot (3i + 2j + 2k) = 4$ में

$$\vec{n_2} = 3i + 2j + 2k$$

यदि $\vec{n_1}$ और $\vec{n_2}$ परस्पर लम्बवत् हों तो

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$$

$\Rightarrow (2i - j + \lambda k) . (3i + 2j + 2k) = 0$
$\Rightarrow 2 \times 3 + (-1) \times 2 + \lambda \times 2 = 0$
$\Rightarrow 6 - 2 + 2\lambda = 0$
$\Rightarrow 4 + 2\lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda = -2$

(ii) समतल $2x - 4y + 3z = 5$ तथा $x + 2y + \lambda z = 5$ में

$a_1 = 2, b_1 = -4, c_1 = 3$ तथा $a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = \lambda$,

परस्पर लम्बवत् होने पर,

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
$\Rightarrow 2 \times 1 + (-4) \times 2 + 3 \times \lambda = 0$
$\Rightarrow 2 - 8 + 3\lambda = 0$
$\Rightarrow -3 + \lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda = \frac{6}{3}$
$\Rightarrow \lambda = 2$

प्रश्न 5. रेखा

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$$

और समतल $2x + y - 3z + 4 = 0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : समतल $2x + y - 3z + 4 = 0$ के अभिलम्ब सदिश $\vec{n} = 2i + j - 3k$ तथा रेखा

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$$

के समान्तर सदिश

$\vec{b} = 3i + 2j + 4k$

यदि समतल और सरल रेखा के बीच कोण θ हो तो

$$\sin\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{b}}{|\vec{n}||\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{(2i + j - 3k)\cdot(3i + 2j + 4k)}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2}\,\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (4)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{2\times3 + 1\times2 + (-3)\times4}{\sqrt{4+1+9}\,\sqrt{9+4+16}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{6+2-12}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{-4}{\sqrt{406}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{406}}\right)$$

प्रश्न 6. रेखा

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

और समतल 3x + 4 + z + 5 = 0 के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : समतल 3x + 4y + z + 5 = 0 के अभिलम्ब सदिश 3i + 4j + k तथा रेखा

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

के समान्तर सदिश $\vec{b}$ = 3i − j + 2k है। यदि समतल और रेखा के मध्य कोण 8 हो तो

$$\sin\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{b}}{|\vec{n}||\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{(3i+4j+k).(3i-j+2k)}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(1)^2}\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{3\times3+4\times-1+1\times2}{\sqrt{9+16+1}\sqrt{9+1+4}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{9-4+2}{\sqrt{26}\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{7}{\sqrt{364}} = \frac{7}{\sqrt{52}\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{52}}\right)$$

प्रश्न 7. रेखा

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$$

और समतल

$$\vec{r}.(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 4$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि रेखा

$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$ और $\vec{r}.\vec{n} = \vec{d}$

समतल के मध्य कोण

$$\sin\theta = \frac{\vec{b}.\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

दिया है रेखा $\vec{r} = (i+2j-k)+\lambda(i-j+k)$ से $\vec{b} = i-j+k$

तथा समतल $\vec{r}.(2i-j+k) = 4$ से

$$\vec{n} = 2i-j+k$$

रेखा और समतल के बीच कोण

$$\sin\theta = \frac{(i-j+k).(2i-j+k)}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1\times 2+(-1)\times(-1)+1\times 1}{\sqrt{1+1+1}\,\sqrt{4+1+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{2+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

प्रश्न 8. रेखा

$$\vec{r} = (2i+3j+k)+\lambda(i+2j-k)$$

और समतल

$$\vec{r}\cdot(2i-j+k) = 4$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि रेखा

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\,\vec{b}$$

तथा समतल

$$\vec{n}\,.\,\vec{n} = \vec{d}$$

के मध्य कोण θ का मान

$$\sin\theta = \frac{\vec{b}\,.\,\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

अत: रेखा $\vec{r} = (2i+3j+k)+\lambda(i+2j-k)$ **से**

$$\vec{b} = i+2j-k$$

तथा समतल $\vec{r}\,.(2i-j+k) = 4$ **में**

$$\vec{n} = 2i-j+k$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{(i+2j-k).(2i-j+k)}{\sqrt{(1)^2+(2)+(1)^2}\,\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1\times 2 + 2\times -1 + (-1)\times 1}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{4+1+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{2-2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{6}\right)$$

प्रश्न 9. यदि रेखा

$$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

समतल

$$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + m\hat{k}) = 3$$

के समान्तर हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा

$$\vec{r} = (i - 2j + k) + \lambda(2i + j + 2k)$$

के समान्तर सदिश

$$\vec{b} = 2i + j + 2k$$

और समतल

$$\vec{r} . (3i - 2j + mk) = 3$$

में अभिलम्ब सदिश

$$\vec{n} = 3i - 2j + mk$$

है।

चूँकि दी गई रेखा, समतल के समान्तर है अतः

$$\vec{b} \perp \vec{n}$$

$$\vec{b} . \vec{n} = 0$$

$\Rightarrow (2i + j + 2k).(3i - 2j + mk) = 0$

$\Rightarrow 2 \times 3 + 1 \times - 2 \times m = 0$

$\Rightarrow 6 - 2 + 2m = 0$

$\Rightarrow 4 + 2m = 0$

$\Rightarrow m = -2$

प्रश्न 10. यदि रेखा

$\vec{r} = i + \lambda(2i - mj - 3k)$

समतल

$\vec{r} \cdot (mi + 3j + k) = 4$

के समान्तर हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा

$\vec{r} = i + \lambda(2i - mj - 3k)$

के समान्तर सदिश

$\vec{b} = 2i - mj - 3k$

तथा समतल

$\vec{r} \cdot (mi + 3j + k) = 4$

के अभिलम्ब सदिश

$\vec{n} = mi + 3j + k$

चूँकि दी गई रेखा समतल के समान्तर है अतः

$\vec{b} \perp \vec{n}$

$\vec{b} . \vec{n} = 0$

⇒ (2i − mj − 3k).(mi + 3j + k) = 0
⇒ 2 × m + (-m) x 3 + (-3) x 1 = 0
⇒ 2m − 3m − 3 = 0
⇒ − m − 3 = 0
⇒ m = − 3

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. निम्न में से कौन-सा समूह एक रेखा की दिक् कोज्याएँ नहीं है।
(a) 1, 1, 1
(b) 0, 0, – 1
(c) – 1, 0, 0
(d) 0, – 1, 0

हल : उत्तर (a) सही है क्योंकि रेखा की दिक-कोज्यायें उसके दिक-अनुपातों के समानुपाती होती हैं। अतः माना a, b, c इसके दिक्-अनुपात हैं तो प्रश्नानुसार

$$1 \propto \frac{l}{a}$$

$\Rightarrow$ $$1 = \frac{l}{a}$$ जहाँ k कोई स्थिरांक है

इसी प्रकार $$1 = \frac{m}{b}$$

$$1 = \frac{n}{c}$$

$\therefore$ $$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\because$ $l^2+m^2+n^2 = 1$

परन्तु $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \neq 1$

$\therefore$ $$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \neq 1$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \neq 1$$

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \neq 1$$

अतः समूह (1, 1, 1) दिक् कोज्याएं नहीं है। उत्तर

प्रश्न 2. बिन्दु P समष्टि में इस प्रकार है कि OP = 6 तथा $\overline{OP}$, OX तथा OY-अक्षों के साथ क्रमशः 45° वे 60° के कोण बनाता है। तो P का स्थिति सदिश होगा :

(a) $3i+3j\pm 3\sqrt{2}k$ **(b)** $6i+6\sqrt{2}j\pm 6k$

(c) $3\sqrt{2}i+3j\pm 3k$ **(d)** $3i+3\sqrt{2}j\pm 3k$

हल :

माना P का स्थिति सदिश xi + yj + zk

r = $|\overrightarrow{OP}|$ = xi + yj + zk

जहाँ

x = r cos α

y = r cos β

z = r cos γ

परन्तु $x^2 + y^2 + z^2 = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$

$$\therefore \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\because \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 r = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 r = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos r = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P \text{ का सदिश} = ri \cos \alpha + rj \cos \beta + rj \cos \gamma$$

$$= r\left[i \times \frac{1}{\sqrt{2}} + j \times \frac{1}{2} \times k\left(\pm \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 6\left[\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{2} j \pm \frac{1}{2} k\right]$$

$$= 3\sqrt{2}i + 3j \pm 3k$$

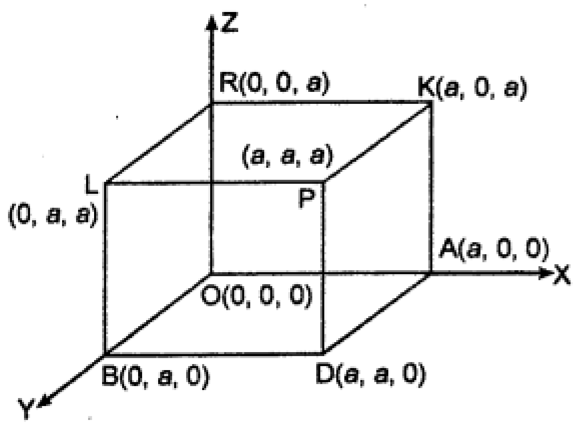
∴ सही विकल्प (c) है।

प्रश्न 3. घन के दो विकर्षों के मध्य का कोण होगा :

(a) 30° **(b) 45°**

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **(d)** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

हल : भुजा a के घन की तीन संलग्न कोरों OA, OB, OR को निर्देशाक्ष लेने पर घन के शीर्षों के निर्देशांक निम्न हैं :



O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0), R(0, 0, a), D(a, a, 0), K(a, 0, a), L(0, a, a), P(a, a, a)
विकर्ण OP की दिक्-कोज्याएँ (direction-cosines) (a − 0, a − 0, a − 0) अर्थात् (a, a, a) के समानुपाती हैं।

अतः OP की दिक्-कोज्याएँ

$$\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}\right]$$

अर्थात् $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

इसी प्रकार AL, BK तथा RD की दिक्-कोज्याएँ क्रमशः इस प्रकार हैं :

$$\sim \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

माना विकर्णों OP और AL के बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि किन्हीं दो विकर्णों के बीच का न्यूनकोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ है।

प्रश्न 4. सदिश 3i की दिक् कोज्याएं होगी :
(a) 3, 0, 0

(b) 1, 0, 0
(c) − 1, 0, 0
(d) − 3, 0, 0

हल : दिया है सदिश $\vec{a}$ = 3i + 0j + 0k

जिसके दिक्-अनुपात 3, 0, 0 है।

अतः दिक्-कोज्यायें

$$\frac{3}{\sqrt{(3)^2+0+0}}, \frac{0}{\sqrt{(3)^2+0+0}}, \frac{0}{\sqrt{(3)^2+0+0}}$$

अर्थात् $\frac{3}{3}, \frac{0}{3}, \frac{0}{3}$

अर्थात् 1, 0, 0

अतः सही विकल्प (b) है।

प्रश्न 5. सरल रेखा

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{x+7}{13}$$

का सदिश रूप होगा
(a) (3i + 4j − 7k) + λ(− 2i − 5j + 13k)
(b) (− 2 − 5j + 13k) + λ(3i + 4j − 7k)
(c) (− 3i − 4j + 7k) + λ(− 2i − j + 13k)
(d) इनमें से कोई नहीं ।

हल : रेखा

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{x+7}{13}$$

बिंदु A(3, 4, − 7) से गुजरती है।

अतः बिंदु A का स्थिति सदिश

$\vec{a}$ = 3i + 4j − 7k

दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात − 2, − 5, 13 है।

∴ $\vec{b}$ = − 2i − 5j + 13k

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण

$\vec{r}$ = $\vec{a}$ + λ.$\vec{b}$

= (3i + 4j − 7k) + λ(− 2i − 5j + 13k)

अतः उत्तर का सही विकल्प (a) है।

प्रश्न 6. रेखाएँ

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{\lambda} = \frac{z-1}{-1}$$

तथा

$$\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

परस्पर लम्बवत् हो तो l का मान होगा

(a) 0
(b) 1
(c) – 1
(d) 2

हल : दी हुई रेखा

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{\lambda} = \frac{z-1}{-1}$$

की दिक्-कोज्यायें

$l_1 = 1, m_1 = 1, n_1 = -1$ तथा रेखा

$$\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y+1}{+2} = \frac{z+1}{1}$$

दिक्-कोज्यायें $l_2, = -\lambda, m_2 = +2$ तथा $n_2 = 1$ हैं।

∵ रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं अतः

$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
$1 \times -\lambda + 1 \times +2 + (-1) \times 1 = 0$
$-\lambda + 21 - \lambda = 0$
$+\lambda - \lambda = 0$
$\lambda = 1$

अतः उत्तर का सही विकल्प (b) है।

प्रश्न 7. रेखाओं $\vec{r}$ = (5i + 7j + 3k) + λ(5i − 16j + 7k) तथा $\vec{r}$ = (9i + 13j + 15k) + μ(3i + 8j − 5k) के मध्य लघुत्तम दूरी

(a) 10 इकाई

(b) 12 इकाई

(c) 14 इकाई

(d) 7 इकाई

हल :

$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ से

$\vec{a_1} = 5i + 7j + 3k$

$\vec{b_1} = 5i - 16j + 7k$

तथा $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda b_2$ से

$\vec{a_2} = 9i + 13j + 15k$

$\vec{b_2} = 3i + 8j - 5k$

$\therefore \quad \vec{a_2} - \vec{a_1} = (9i + 13j + 15k) - (5i + 7j + 3k)$

$= 4i + 6j + 12k$

और $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix}$

$= i(80 - 56) - j(-21 - 25) + k(40 + 48)$

$= 24i + 46j + 88k$

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(24)^2 + (-46)^2 + (88)^2}$

$= \sqrt{11436}$

$$\text{S.D.} = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{\vec{b_1} \times \vec{b_2}} \right|$$

$$= \frac{(4i + 6j + 12k).(24i + 46j + 88k)}{\sqrt{11436}}$$

$$= \frac{4 \times 24 + 6 \times 46 + 12 \times 88}{\sqrt{11436}}$$

$$= \frac{1428}{\sqrt{11436}}$$

अत: उपरोक्त विकल्प में कोई विकल्प सही नहीं है। उत्तर

प्रश्न 8. रेखा

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + \lambda(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

तथा समतल

$$\vec{r} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 4$$

के मध्य कोण होगा :

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$

हल : हम जानते हैं कि रेखा $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ और $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{d}$ समतल के मध्य कोण

$$\sin\theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

$$= \frac{(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2}\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{-1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times -1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{9+4+1}}$$

$$= \frac{-3+2-1}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{42}}$$

$$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right)$$

अतः सही विकल्प (a) है।

प्रश्न 9.

समीकरण lx + my + nz = p समतल का अभिलम्ब रूप है तो निम्न में से असत्य है।

(a) l, m, n समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएँ हैं।

(b) p, समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है।

(c) p के प्रत्येक मान के लिए समतल मूल बिन्दु से गुजरता है।

(d) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

हल : परिभाषा से कथन (a) तथा (d) सत्य है।
∴ कथन (c) असत्य है क्योंकि समतल की मूलबिन्दु से दूरी p है।
जिसके सिर्फ p = 0 पर समतल ही मलबिन्दु से गुजर सकता है।
p के अन्य किसी मान के लिये नहीं।

प्रश्न 10. एक समतल निर्देशांक अक्षों को A, B, C इस प्रकार मिलता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (1, 2, 3) है, तो समतल का समीकरण होगा

(a) $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ (b) $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\frac{1}{6}$

(c) $\frac{x-1}{1}+\frac{y-2}{2}+\frac{z-3}{3}=1$ (d) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$

हल : माना समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, जो निर्देशांक्ष को बिन्दु A(a, 0, 0), B(0, b, 0) तथा C(0, 0, c) पर मिलता है, तब ΔABC का केन्द्रक $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ होगा।

$$\therefore \quad \frac{a}{3}=1, \frac{b}{3}=2, \frac{c}{3}=3$$

$$\Rightarrow \quad a=3, b=6, c=9$$

∴ समतल का अभीष्ट समीकरण $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1.$

अत: सही विकल्प (d) है।

प्रश्न 11. दो बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः

$P(2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$

तथा

$Q(-4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

है। Q से गुजरने वाले तथा PQ के लम्बवत् समतल का समीकरण होगा।

(a) $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})=28$

(b) $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})=32$

(c) $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+28=0$

(d) $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+32=0$

हल : प्रश्नानुसार,

बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

बिन्दु Q का स्थिति सदिश $\vec{b} = -4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

तब $\vec{PQ}$ = बिन्दु Q का स्थिति सदिश – बिन्दु P का स्थिति सदिश

$$\vec{n} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} - (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{n} = -6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

∴ बिन्दु $Q(\vec{b})$ से गुजरने वाले PQ के लम्बवत् समतल का समीकरण

$$(\vec{r} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n}$$

$$= (-4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= -4 \times -6 + (-2) \times (-3) + 1 \times -2$$

$$= 24 + 6 - 2 = 28$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(-6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 28$$

$$\Rightarrow \quad -\vec{r}(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 28$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$$

उत्तर का सही विकल्प (c) है।

प्रश्न 12. दो रेखाओं की दिक्-कोज्याएँ निम्न सम्बन्धों द्वारा दी गई है, उन्हें ज्ञात कीजिए।

$l - 5m + 3n = 0$ तथा $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$

हल : $l - 5m + 3n = 0$ तथा $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$

दिया है

$l - 5m + 3n = 0$ …(1)

$7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ …(2)

समीकरण (1) से, $l = 5m - 3n$ को समीकरण (2) में रखने पर,

$7(5m - 3n)^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$7(25m^2 + 9n^2 - 30mn) + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$175m^2 + 63n^2 - 210mn + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$180m^2 - 210mn + 60m^2 = 0$

$6m^2 - 7mn + 2n^2 = 0$

$6m^2 - 4mn - 3mn + 2n^2 = 0$

$2m(3m - 2n) - n(3m - 2n) = 0$

$(3m - 2n)(2m - n) = 0$

$3m = 2n$ और $2m = n$

जब $3m = 2n$ अर्थात् $m = \frac{2n}{3}$ तो (1) से,

$$l = 5\left(\frac{2n}{3}\right) - 3n$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{10n}{3} - \frac{3n}{1} = \frac{n}{3}\left(= \frac{m}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{3} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^3}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

अत: एक रेखा की दिक्-कोज्याएँ :

$$\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$$

पुन: जब $2m = n$ तो (1) से,

$$l = 5m - 3\,(2m)$$

$$= 5m - 6m = -m \left(= -\frac{n}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{l}{-1} = \frac{m}{1} = \frac{n}{2} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

अत: दूसरी रेखा की दिक्-कोज्याएँ हैं :

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$$

प्रश्न 13. एक रेखाखण्ड का अक्षों पर प्रक्षेप − 3, 4, − 12 है। रेखा खण्ड की लम्बाई तथा दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : अक्षों पर प्रक्षेप − 3, 4, − 12 है जो रेखा के दिक्-अनुपात होते हैं। अतः दिक् कोज्यायें l, m,

n हों, तो

$$\frac{l}{-3} = \frac{m}{4} = \frac{n}{-12} = k$$

$\therefore \quad l = -3k, m = 4k, n = -12$

परन्तु $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\therefore \quad (-3k)^2 + (4k)^2 + (-12k)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad 9k^2 + 16k^2 + 144k^2 = 1$

$\Rightarrow \quad 169k^2 = 1$

$\Rightarrow \quad k = \pm \frac{1}{13}$

$\therefore \quad l = \frac{-3}{13}, \quad m = \frac{4}{13}, \quad n = \frac{-12}{13}$

OP रेखाखण्ड की लम्बाई = बिन्दु $P(-3, 4, -12)$ से $O(0, 0, 0)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2 + (-12-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169}$$

लम्बाई = 13 इकाई

दिक्-कोज्यायें $-\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{-12}{13}$

प्रश्न 14.

सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (a, b, c) और (a', b', c') को मिलाने वाली रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है। यदि aa' + bb' + cc' = pp' जहाँ p और p' इन बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरियाँ हैं।

हल :

प्रश्नानुसार, बिन्दु (a, b, c) तथा (a', b', c') की मूल बिन्दु से दूरी

$\Rightarrow \quad P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ तथा $P' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$

बिन्दु (a, b, c) तथा बिन्दु (a', b', c') से जाने वाली रेखा का समीकरण'

$$\frac{x-a}{a'-a} = \frac{y-b}{b'-b} = \frac{z-c}{c'-c}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}}$$

$$= \frac{P}{\sqrt{P^2+P'^2-2(aa'+bb'+cc')}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{P^2+P'^2-2(aa'+bb'+cc')}} = \frac{P}{P-P'}$$

$$\Rightarrow P^2+P'^2-(2aa'+bb'+cc') = (P-P')^2$$

$$\Rightarrow P^2+P'^2-2(aa'+bb'+cc') = P^2+P'^2-2PP'$$

$$\Rightarrow PP' = aa'+bb'+cc'$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 15. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु P(− 2, 1, 2) से गुजरता है एवं दो सदिशों

$\vec{a} = -\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

तथा

$\vec{b} = 5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

के समान्तर है।

हल : समतल बिन्दु P(− 2, 1, 2) से गुजरता है।

अतः समतल का समीकरण a(x + 2) + b(y − 1) + c(z − 2) = 0

परन्तु समतल सदिश $\vec{a} = -\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -5\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ के समान्तर है।

अत: सदिश $\vec{a}$ का बिन्दु $A(-1, 2, -3)$ तथा $\vec{b}$ का बिन्दु (5, − 1, 1) समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

अतः $ax + by + cz \neq 0$ में

a(-1) + b(2) + c(-3) = 0

⇒ − a + 2b − 3c = 0 ….(2)

तथा a(5) + b(-1) + c(1) = 0

⇒ 5a − b + c = 0 …(3)

समी. (2) से a − 2b + 3c = 0

समी. (3) से $5a - b + c = 0$

हल करने पर

$$\frac{a}{-2+3} = \frac{-b}{1-15} = \frac{c}{-1+10} = k$$

$\Rightarrow a = k, b = 14k, c = 9k$

∴वांछित समीकरण

$a(x + 2) + b(y + 1) + c(z - 2) = 0$ से

$k(x + 2) + 14k(y + 1) + 9k(z - 2) = 0$

$x + 2 + 14y - 14 + 9z - 18 = 0$

$x + 14y + 9z = 30$