07

त्रिभुज
(TRIANGLES)

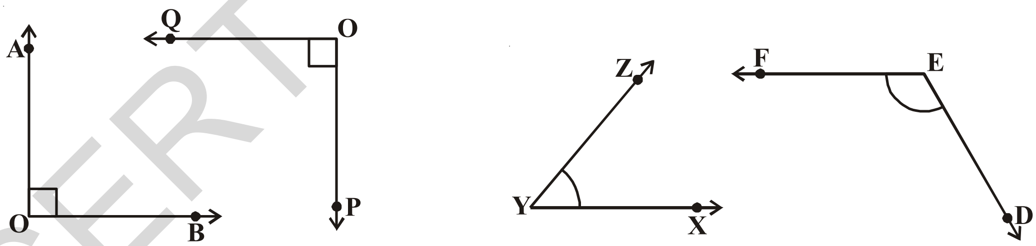
7.1 परिचय :

हमने रेखाओं और काणों के चित्र उतारकर उनके गुणों का अध्ययन किया है। क्या आपको दी गई लम्बाई का रेखाखण्ड खींचना याद है? सभी रेखाखण्ड समान लम्बाई के नहीं होते, वे भिन्न लम्बाई के भी होंगे। हम वृत्त भी खींचते हैं। वृत्त खींचने के लिये हमें कौनसे मापों की आवश्यकता है?वह वृत्त की त्रिज्या होती है। हम दिये गये मापों से कोण भी बनाते हैं।

हम जानने है कि यदि दो रेखाओं की लम्बाई समान हो तो वे सर्वसमान होते हैं।

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (सर्वसमान) $\qquad$ $\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$ (अ-सर्वसमान)

दो कोण सर्वसमान है यदि उनका परिमाण समान हो ।



$\angle AOB \cong \angle POQ$ (सर्वसमान) $\qquad$ $\angle XYZ \ncong \angle DEF$ (अ-सर्वसमान)

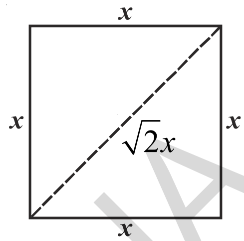
ऊपर्युक्त उदाहरणों से हम ये कह सकते है कि आकृतियाँ समान परिमाण की है या नहीं बताने के लिये हमें कुछ विशिष्ट आकृतियों के मापों की सूचना ज्ञात होना आवश्यक है।

एक वर्ग पर विचार करेंगे : वह न्यूनतम आवश्यक सूचना क्या है? जो यह बताती है कि दो वर्ग समान है या नहीं।

सत्या ने कहाः '' मुझे सिर्फ दिये गये वर्गो की भुजा का माप चाहिए। यदि दिये गये वर्गों की भुजाये समान हो तो दानों वर्ग परिमाण में समान हांगे।''

SCERT TELANGANA

सिरी ने कहा ''वह सच है लेकिन यदि दो वर्गों के कर्ण भी यदि समान हो तो हम कह सकते है कि दोनो वर्ग समान होते है ।



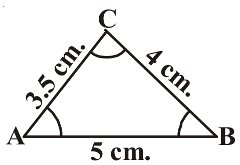
क्या आप बता सकते है कि दानों सही है ?

वर्ग के गुणों को याद कीजिये।आप दो समान मापो के विभिन्न वर्ग नहीं बना सकते है। क्या आप ऐसा कर सकते हो? और दो वर्गों के कर्ण तब समान होगे जब उनकी भुजायें समान हो। दिये गये चित्र को देखियेः

वे आकृतियाँ जो समान आकार और परिमाण के हो वे सर्वसमान आकृतियाँ कहलाती हैं। (सर्वसमान का अर्थ है सभी विषयों में समान) अतः वे वर्ग जिनकी भुजायें समान वे हैं सर्वसमान कहलाते है और समान कर्णों के वर्ग भी सर्वसमान होते है।

नोटः समान्यतः भुजायें परिमाण का निर्णय और कोण आकृति का निर्णय करते है ।

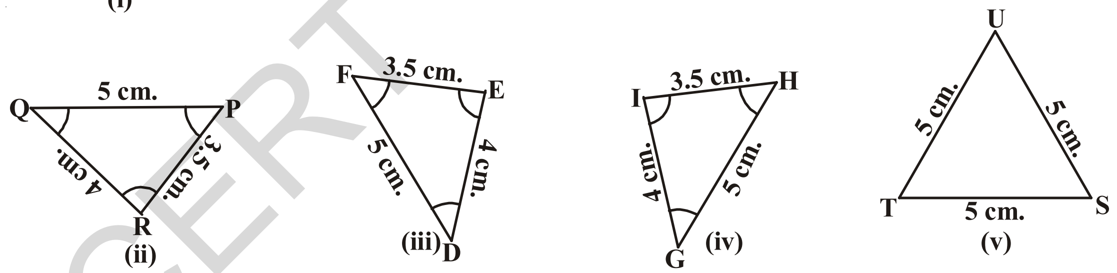
हम जानते है कि यदि दो वर्ग सर्वसमान है और हम उनमे से एक का ट्रेस कर दूसरे पर रखें तो वह पहले वाले को पूर्ण रूप से ढक देगा।



(i)

अब त्रिभुज की सर्वसमानता के विषय में विचार करेंगे । हम जानते है कि यदि दो त्रिभुज सर्वसमान हैं तो एक त्रिभुज की भुजायें और कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजायें और कोण के समान होंगे।

निम्न चित्रों में से कौनसे त्रिभुज, त्रिभुज ABC के सर्वसमान हैं ?



यदि हम आकृति (ii) से (v) तक त्रिभुजों ट्रेस कर ΔABC के ऊपर रखेंगे तो हम देखेंगे कि चित्र (ii), (iii) और (iv) ΔABC के सर्वसमान है जब कि चित्र (v) ΔTSU ΔABC के सर्वसमान नहीं है।

यदि ΔPQR, ΔABC के सर्वसमान है तो हम $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिखते हैं ध्यान दीजिये कि जब

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ हो, तो, ΔPQR की भुजायें ΔABC की संगत भुजाओं के समान होगी और ऐसा ही कोणों के लिये भी अर्थात, भुजा PQ भुजा AB को ढकती है, भुजा QR भुजा BC को ढकती है और भुजा RP भुजा CAको ढकती है, कोण P कोण A, को कोण Q कोण B और को कोण R कोणC को ढकता है। साथ ही, दोनों त्रिभुजों के शीर्षों में एक-एक अनुरूपता पायी जाती है। अर्थात् शीर्ष P शीर्ष A के संगत है, शीर्ष Q शीर्ष B मे संगत और शीर्ष R शीर्ष C के संगत होते है इसे निम्न रुप, में लिखा जाता हैः

SCERT TELANGANA

$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$

ध्यान दीजिये कि इस संगतता के अंतर्गत, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; है। $\Delta QRP \cong \Delta ABC$, $Q \leftrightarrow A$; $R \leftrightarrow B$;$P \leftrightarrow C$ परन्तु इसे $QR = AB$, $RP = BC$ और $QP = AC$ लिखना गलत होगा ।

इसी प्रकार, आकृति (iii) के लिये,

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$ और $EF \leftrightarrow CA$

और $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ और $E \leftrightarrow C$

इसलिए, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ लिखना सही है, परन्तु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

आकृति (iv) के त्रिभुज और ΔABC के बीच संगत लिखिये अतः त्रिभुजों की सर्वसमानता को सांकेतिक रूप में लिखने के लिये, उनके शीर्षों की संगतता को सही प्रकार से लिखना आवश्यकता है। ध्यान दीजिये कि ''सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भाग'' समान होते हैं और हम इसे संक्षिप्त में 'CPCT' लिखते हैं (*corresponding parts of congruent triangles.*) (उसी प्रकार ΔABC की सर्वसमानता को चित्र (iv) के साथ लिखने का प्रयत्न किजिए।)

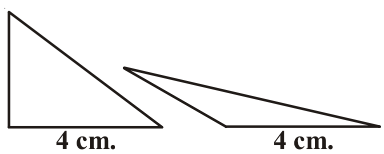
प्रयत्न कीजिये :

1. नीचे कुछ कथन दिये गये हैं। 'सत्य' या 'असत्य' है लिखिये ।
   i. दो वृत्त हमेशा सर्वसमान होते हैं। (   )
   ii. समान लम्बाई की दो रेखायें सदैव सर्वसमान होती हैं। (   )
   iii. दो समकोण त्रिभुज कभी-कभी सर्वसमान होते हैं। (   )
   iv. दो समबाहु त्रिभुज उनकी समान भुजाओं के साथ सदैव सर्वसमान होते हैं। (   )
2. दिये गये आकृतियाँ सर्वसमान है या नहीं देखने के लिये आपको कौनसे मापों की आवश्यकता होगी।?
   i. दो आयत   ii. दो समचतुभुर्ज

7.2 त्रिभुजों की अनुरूपता के नियम

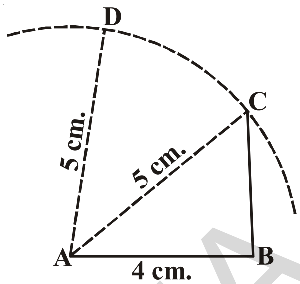
पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुजों की सर्वसमानता के लिए चार कसौटियाँ (नियम) पढ चुके हैं। एक अद्वितीय (unique) त्रिभुज बनाने के लिये क्या सभी तीनों भुजाये और तीनों कोण ज्ञात होना आवश्यक है? क्या हम समान दिए गए मापों से भिन्न-भिन्न त्रिभुजों का निर्माण कर सकते है।

भुजा 4 से.मी. से दो त्रिभुज बनाइये। क्या आप 4 सेमी भुजा वाले दो भिन्न त्रिभुज बना सकते है? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिये। क्या आपको सभी त्रिभुज सर्वसमान प्राप्त होंगे? यदि त्रिभुज की एक भुजा 4 से.मी दी गई हो तो हम विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों का निर्माण कर सकते है।



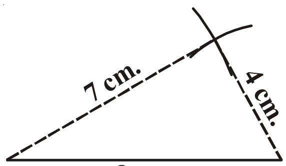
SCERT TELANGANA

अब दो भुजायें 4 सेमी और 5 सेमी लीजिये और जितने संभव हो उतने त्रिभुज बनाइए क्या आपको सर्वसमान त्रिभुज प्राप्त होंगे?



हम दीए गए दो मापों से विभिन्न त्रिभुज बना सकते हैं ।

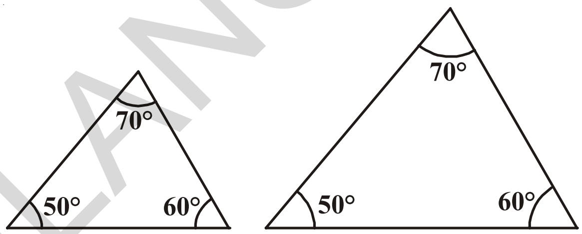
अब 4 सेमी, 7 सेमी और8 सेमी भुजाओं के त्रिभुज बनाइये ।



क्या आप दो भिन्न त्रिभुज बना सकोगे? आप ज्ञात करोगे कि इन तीन भुजाओं के माप से, हम एक अद्वितीय (unique) त्रिभुज बना सकते है। यदि हम इन मापों से त्रिभुज बनाने पर भी वे उसे अद्वितीय त्रिभुज के सर्वसमान होंगे ।

अब अपनी इच्छा से कोई तीन कोण लीजिये। लेकिन ध्यान रहे उनका योग 180° होना चाहिये। आप के द्वारा लिये गये मापो से दो त्रिभुज उतारिये। महिमा को पता चलेगा कि वह तीन कोणों के मापों से विभिन्न त्रिभुज बना सकती है।

$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$



इससे यह लगता है कि तीन कोणों का ज्ञात होना विशिष्ट त्रिभुज उतारने के लिये पर्याप्त नहीं है।

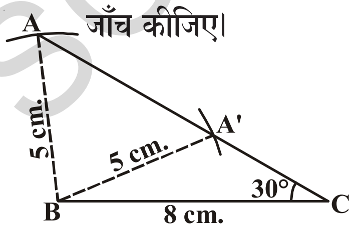
शरीफ ने सोचा कि यदि दो कोण किसी त्रिभुज के दिये गये हों तो '' त्रिभुज के तीनों कोणों के योग'' के नियम का उपयोग करते हुये तीसरा कोण ज्ञात किया जा सकता है। इसलिये दो कोणों के मापों का ज्ञान होना एक त्रिभुज बनाने के लिये पर्याप्त है लेकिन अद्वितीय नहीं है। इसलिये दो या तीन कोण का दिया जाना पर्याप्त नहीं होगा। एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना करने के लिये कम से कम तीन विशिष्ट और स्वतंत्र दत्तों (मापों) की आवश्यकता होगी।

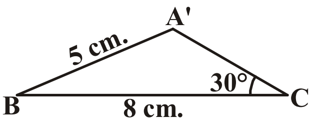
नीचे दिये गये प्रत्येक मापों के समूह से दो भिन्न त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए।

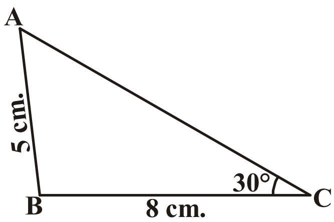
i. ΔABC जहाँ $AB = 5$ से.मी $BC = 8$ से.मी $\angle C = 30°$

ii. ΔABC जहाँ $AB = 5$ से.मी. $BC = 8$ से.मी. $\angle B = 30°$

(i) क्या आप दिये गये दत्तों से अद्वितीय त्रिभुज उतार सकते हैं? उतारकर अफने मित्रों के साथ उसकी जाँच कीजिए।



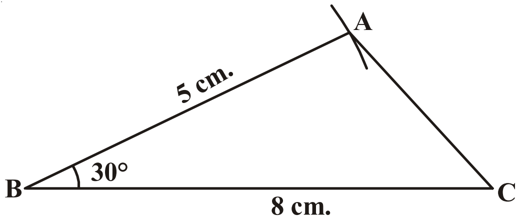




यहाँ हम दिये गये दत्तों से दो भिन्न त्रिभुज बना सकते है ΔABC और $\Delta A'BC$ आप क्या निरीक्षण करोगे? के सर्वसमान त्रिभुज है। या नहीं?

दूसरे शब्दों में आप दूसरी स्थिति (ii) के मापों से एक अद्वितीय त्रिभुज बना सकते हैं । स्थिति

SCERT TELANGANA

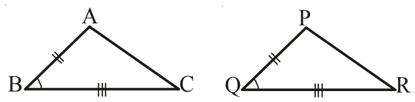


(i) और स्थिति (ii) में क्या आपने दिये गये दत्तों की ओर ध्यान दिया है? पहली स्थिति (i) में दो भुजायें और एक कोण दिया गया है जो अंतर्गत कोण नहीं है। लेकिन स्थिति (ii) मे अंतर्गत कोण दो भुजाओं के साथ दिया गया है। इसलिए दिये गये दो भुजायें और एक कोण अर्थात् तीन स्वतंत्र दत्त त्रिभुज उतारने के लिये पर्याप्त हैं । बल्की दिये गये दत्तों का क्रम भी अद्वितीय त्रिभुज उतारने के लिए एक मुख्य भूमिका निभाता है ।

7.3 त्रिभुज की अनुरूपतायें (Congruency of Triangles)

उपर्युक्त धारणा त्रिभुजो की अनुरूपता को जाँच करने का एक निहितार्थ है। यदि हमारे पास एक भुजा समान वाले दो त्रिभुज, या फिर तीनों कोण समान वाले दो त्रिभुज है, तो हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि इन विशिष्ट दत्तों से त्रिभुज अनुरूप हैं, क्यों कि एक से अधिक त्रिभुज, संभव है। दो भुजायें और एक कोण समान होने पर भी हम यह नहीं कह सकते है कि त्रिभुज अनुरूप है जब कोण दी गई भुजाओं के बीच में हो तो हम कह सकते हैं कि SAS अनुरूपता सत्य है लेकिन SSA या ASS नहीं । इसे हम अनुरुपता की पहली कसौटी मानकर इसकी सहायता से दुसरी कसौटीयों को सिध्द करेंगे।

हम इसे त्रिभुज हैं कि Axiom (SAS congruence rule): भु.को.भु. अनुरूपता नियम : दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों ।

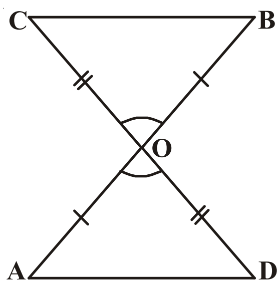


- उदाहरण के लिए ΔABC में तथा ΔPQR में

$AB=PQ$, $BC=QR$ तथा $\angle CBA=\angle RQP$, हो तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

उदाहरण -1. 1. संलग्न चित्र में $OA = OB$ और $OD = OC$ है। दर्शाइये कि

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ और (ii) $AD \parallel BC$.



हल : (i) ΔAOD और ΔBOC मे,

$OA = OB$ (दिया गया है)

$OD = OC$ (दिया गया है)

साथ ही, $\angle AOD$ और $\angle BOC$ सम्मुख कोण है,

$\angle AOD = \angle BOC$.

अतः $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS अनुरूपता नियम द्वारा)

(ii) सर्व समान ΔAOD तथा ΔBOC में दुसरे संगत भाग भी समान होते है।

इसिलिए $\angle AOD = \angle BOC$. तथा रेखा खण्ड तथा के लिए में एकान्तर कोण बनाते है।

$\therefore AD \parallel BC$

SCERT TELANGANA

उदाहरण -2. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा l इसका समद्विभाजक है यदि P एक बिन्दु l परस्थित है तो दर्शाइए कि P बिन्दु A और B से सम-दूरी पर है ।

हल: $l \perp AB$ और AB के मध्य-बिन्दु C से होकर जाती है (चित्र देखिए)

आपको दर्शाना है कि $PA = PB$ है। इसके लिये

ΔPCA और ΔPCB पर विचार कीजिये। हमें प्राप्त हैः

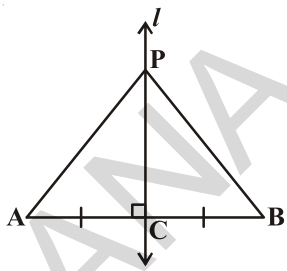
$AC = BC$ (C, AB का मध्य-बिन्दु है)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (दिया है)

$PC = PC$ (उभयनिष्ट)

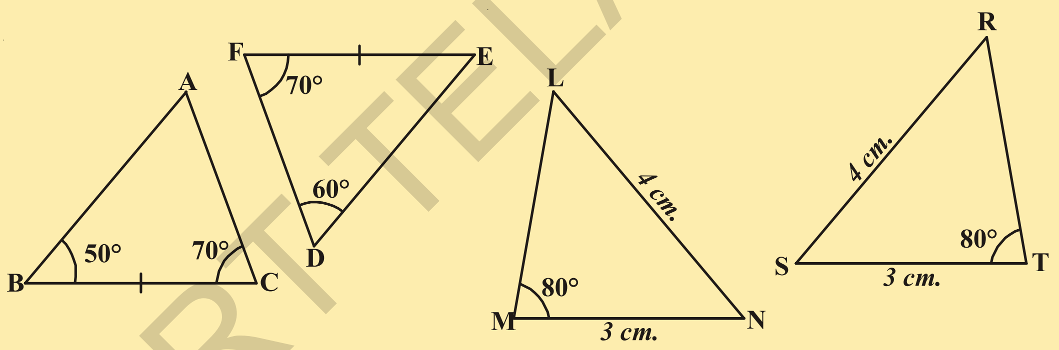
So, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

इसलिए $PA = PB$ (अनुरूप त्रिभुजों की संगत भुजायें)



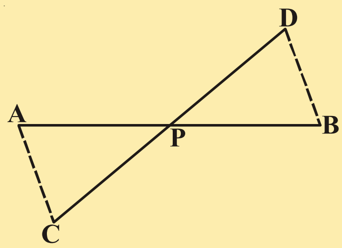
प्रयत्न कीजिये

1. बताइये कि निम्न त्रिभुज अनुरूप है या नहीं ? आपके उत्तर का कारण बताइये ।



(i) (ii)

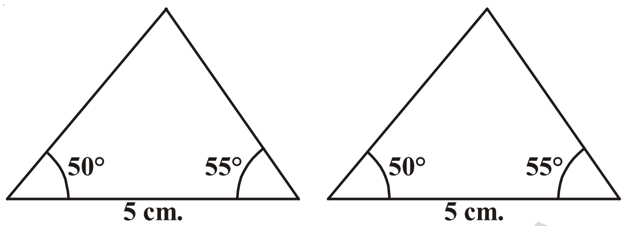
2. दिये गये चित्र में बिन्दु P, AB और DC को समद्विभाजिक करता है। सिद्ध कीजिये कि $\Delta APC \cong \Delta BPD$



7.3.1 अनुरूपता के कुछ और नियम

ऐसे दो त्रिभुजों की रचना करने का प्रयत्न कीजिये जिसमें दो कोण 50° और 55° और इन कोणों की अंतर्गत भुजा 5 से.मी. है। (चित्र देखिये) इन दो त्रिभुजों की काटिये, और एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर रखिए। आप क्या देखते है? आप देखोंगे कि दोनो त्रिभुज अनुरूप हैं। यह कोण-भुजा कोण की अनुरूपता का नियम हैं ।

SCERT TELANGANA



और इसे ASA लिखा जाता है जैसे कि आप पिछली कक्षाओं में पढा है। अब हम इसे समझेंगे और सिद्ध भी करेंगे। क्यों कि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, यह प्रमेय कहलाता है और इसे सिद्ध करने के लिये हम SAS अनुरूपता के स्वयंतथ्य का उपयोग करेंगे ।

प्रमेय 7.1 (ASA अनुरूपता नियम) : दो त्रिभुज अनुरूप होते है, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के समान हों ।

परिकल्पना: त्रिभुज ABC और ΔDEF

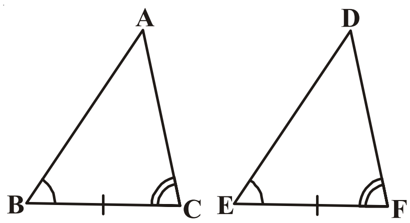
$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ and $BC = EF$

निष्कर्ष (RTP): $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्तिः यहाँ पर तीन संभावनायें हैं। AB और DE के बीच स्थित संभावनायें या तो $AB > DE$ या $DE > AB$ या $DE = AB$.

हम इन सभी स्थितियों पर विचार करेंगे और देखेंगे कि ΔABC और ΔDEF के लिये इसका क्या अर्थ निकलता है ।

स्थिति(i): मानलो $AB = DE$ (हम क्या देखेंगे?)



ΔABC और ΔDEF पर विचार कीजिये

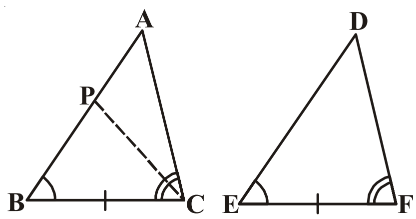
$AB = DE$ (कल्पना की गयी है)

$\angle B = \angle E$ (दिया गया है)

$BC = EF$ (दिया गया है)

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS अनुरूपता स्वयंतथ्य)

स्थितिः (ii): दूसरी संभावना यह है कि $AB > DE$ है। इसलिए हम AB पर एक बिन्दु P ऐसा हो सकते है कि $PB = DE$ हो अब



ΔPBC और ΔDEF पर विचार कीजिये

$PB = DE$ (रचना से)

$\angle B = \angle E$ (दिया गया है)

$BC = EF$ (दिया गया है)

इसलिए, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS अनुरूपता के स्वयंतथ्य से)

SCERT TELANGANA

क्यों कि दोनों त्रिभुज सर्वसमान है, इसलिये इनके संगत भाग समान होने चाहिये

अतः $\angle PCB = \angle DFE$

परन्तु हमें दिया गया है कि $\angle ACB = \angle DFE$

अतः $\angle ACB = \angle PCB$

परन्तु क्या यह संभव है ?

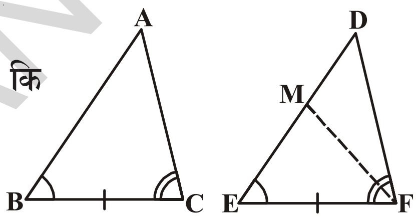
यह तभी संभव है, जब P बिन्दु का A के साथ मेल हो ।

(या) $BA = ED$

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS स्वयेतथ्य द्वारा)

(**नोट:** ऊपर हमने बताया है कि यदि $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$ तथा $BC = EF$ और $AB = DE$ और वे दो त्रिभुज अनुरूप हैं SAS नियम से)

स्थिति(iii): तीसरी संभावना यह है कि $AB < DE$



हम DE पर एक बिन्दु M इस प्रकार ले सकते हैं कि $ME = AB$ हो। अतः स्थिति (ii), वाले तर्क-वितर्क को दोहराते हुये, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = DE$ है और इसलिये $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.है ।

अब, मानव लिजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म समान हैं, तो यदि ये भुजाये बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजायें नही है, तो क्या ये त्रिभुज फिर भी अनुरूप हैं। आप निरीक्षण करेंगे कि यें त्रिभुज अनुरूप हैं। क्या आप इसका कारण बतायेंगे ?

आप जानते है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनका तीसरा कोण भी समान ही होंगा ($180°$ – दोनों समान कोणों का योग).

अतः दो त्रिभुज सर्वसमान होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म समान हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। हम इसे **AAS** अनुरुपता नियम कह सकते हैं। अब हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-3. $AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$ पर विचार करो ।

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ पर विचार करो ।

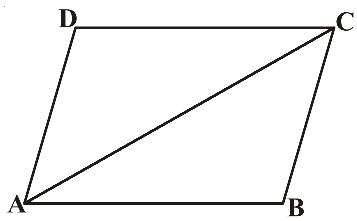
हल : ΔABC और ΔCDA पर विचार करो

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अतः कोण)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

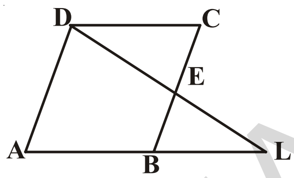
$\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर अतः कोण)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(ASA अनुरूपता से)



उदाहरण-4. दिये गये आकृति में $AL \parallel DC$ और E, BC का मध्य बिन्दु हो तो बताइये कि

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$



हल : ΔEBL और ΔECD पर विचार कीजिये

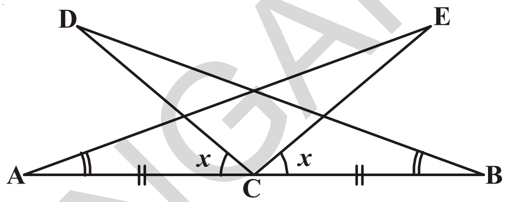
$\angle BEL = \angle CED$ (सम्मुख कोण)

$BE = CE$ (क्यों कि E, BC का मध्यबिन्दु है)

$\angle EBL = \angle ECD$ (एकांतर अतः कोण)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ASA की अनुरूपता से)

उदाहरण-5. आकृति में दी गई सूचनाओं के उपयोग से सिद्ध कीजिये



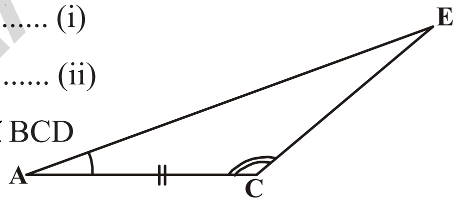
(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DC = EC$.

हल : मानलो $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

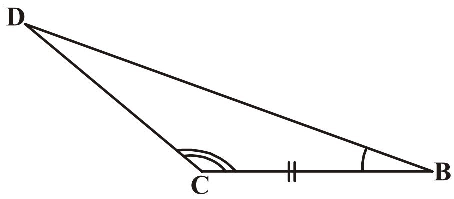


(i) और (ii) से हमें प्राप्त होता है कि : $\angle ACE = \angle BCD$

अब ΔDBC और ΔEAC,

$\angle ACE = \angle BCD$ (ऊपर सिद्ध किया गया)

$BC = AC$ [दिया गया है]



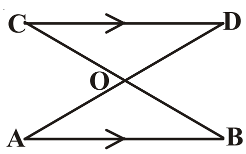
$\angle CBD = \angle EAC$ [दिया गया है]

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [दिया गया है]

अतः $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

$DC = EC$.(CPCT के द्वारा)

उदाहरण -6. एक रेखा खण्ड AB दूसरे रेखाखम्ड CD के समानांतर हैः O, AD का मध्य बिन्दु है। तो सिद्ध कीजिए



(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O,BC का मध्य बिन्दु है ।

हल : (i) विचार कीजिये कि ΔAOB तथा ΔDOC.

$\angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण :$AB \parallel CD$ और BC तिर्यक रेखा है)

$\angle AOB = \angle DOC$ (सम्मुख कोण है)

$OA = OD$ (दिया गया है)

SCERT TELANGANA

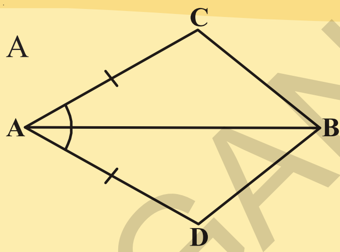
अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियम)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

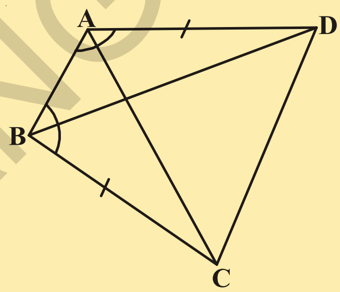
इसलिए, O, BC का मध्यबिन्दु होगा।

अभ्यास- 7.1

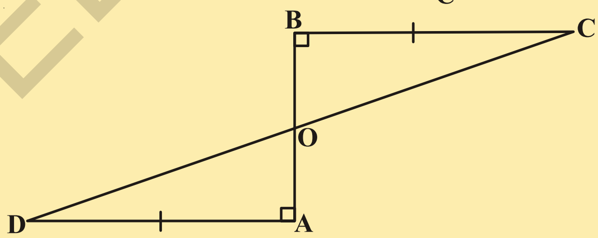
1. दिये गये चतुर्भुज ACBD मे $AC = AD$ और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है। $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. आप BC और BD के विषय में क्या कहोगे ।



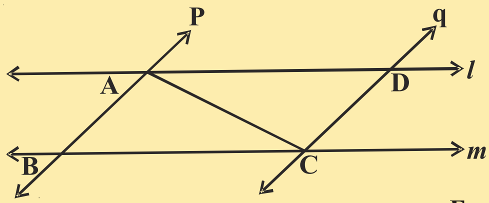
2. ABCD एक चतुर्भुज $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है सिद्ध कीजिये कि
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
   (ii) $BD = AC$
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



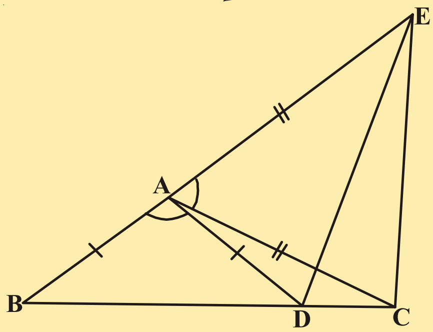
3. एक रेखाखण्ड AB पर, AD तथा BC दो समान लंब रेखाखण्ड है। बताइये कि CD रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करती है ।



4. l और m दो समांतर रेखायें है जिन्हें समांतर रेखाएँ p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

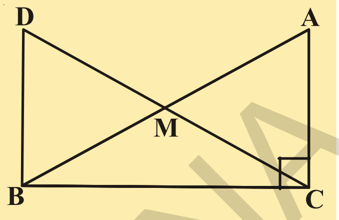


5. आकृति में $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$. हो तो दर्शाइये कि $BC = DE$ होगा।



SCERT TELANGANA

6. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB पर मध्य-बिन्दु है। C को M से मिलकर D तक इस प्रकार बढाया गया है कि DM = CM। बिन्दु D को B से मिला दिया गया है । दर्शाइये कि



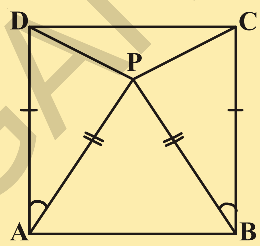
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle$ DBC एक समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

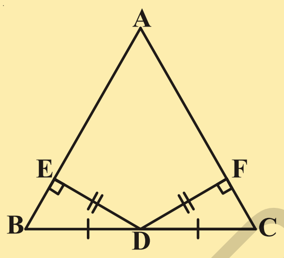
(iv) $CM = \frac{1}{2}AB$

7. संलग्न आकृति में ABCD एक वर्ग है ΔAPB एक समबाहु त्रिभुज है। सिद्ध कीजिये कि $\Delta APD \cong \Delta BPC$.



(**संकेत:** ΔAPD और ΔBPC में $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ और $\angle PAD = \angle PBC = 90^o - 60^o = 30^o$]

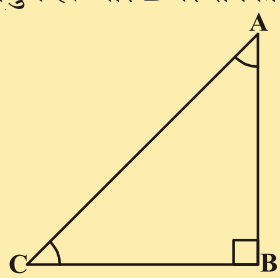
8. संलग्न चित्र में ΔABC में D, BC का मध्यबिन्दु है। $DE \perp AB$, तथा $DF \perp AC$ और DE = DF हो तो बताइये कि $\Delta BED \cong \Delta CFD$.



9. एक त्रिभुज के कोण का समद्विभाजक उसके सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है तो सिद्ध कीजिये कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा

10. दिये गये त्रिभुज ABC मे एक समकोण त्रिभुज है। और B पर समकोण है जिससे $\angle BCA = 2\angle BAC$ है।

(**संकेत** : CB को D तक बढाओ जिससे BC = BD है)



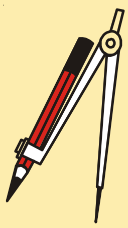
7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण :

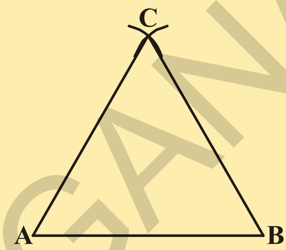
ऊपर के विभाग में आपने त्रिभुजों की दो अनुरूपताओं का अध्ययन किया है। आइये इन परिणामों का एक ऐसे त्रिभुज के कुछ गुणों का अध्ययन करने में प्रयोग करे जिसकी दो भुजायें समान होती है।

SCERT TELANGANA

क्रियाकलाप

i. प्रकार (compass) के उपयोग से त्रिभुज की रचना करने के लिये एक माप लेकर रेखाखण्ड AB खींचो। कुछ लम्बाई लेते हुये प्रकार को खोलिये और उससे A और B से दो चाप खींचिये। आप किस तरह का त्रिभुज प्राप्त करेंगे। यह एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा। इसलिये ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है $AC = BC$ के साथ। अब $\angle A$ और $\angle B$ को मोंपिये आप क्या देखेंगे ?

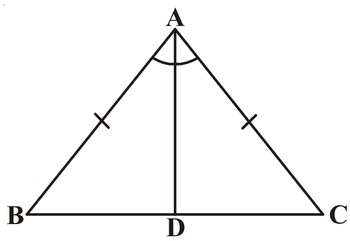




ii. कुछ समद्विबाहु त्रिभुज काटिये। अब त्रिभुज को मोडिये जिस से दो अनुरूप त्रिभुज एक दूसरे पर बराबर बैठते हों। आप $\angle A$ और $\angle B$ के विषय में क्या कहेंगे ?

आप निरीक्षण करेंगे कि ऐसे प्रत्येक त्रिभुज मे समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है। यह एक बहुत मुख्य परिणाम है और वास्तव में यह कोई भी समद्विबाहु त्रिभुज के लिये सत्य सिद्ध होती है। इसको निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय-7.2 : समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है। इस तथ्य को कई विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। इसमें से एक उपपत्ति नीचे दी गई है।



परिकल्पना : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$.

सिद्ध करना : $\angle B = \angle C$.

रचना : $\angle A$ का समद्विभाजक उतारिये। मान लिजिये यह BC से D पर मिलता है। अब ΔBAD और ΔCAD मे

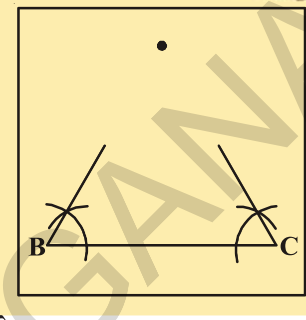
$AB = AC$	(दिया गया है)
$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना से)
$AD = AD$	(उभयनिष्टभुजा)
अतः $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS अनुरूपना)
इसलिये $\angle ABD = \angle ACD$	(CPCT)
अर्थात् $\angle B = \angle C$	(समान कोण)

SCERT TELANGANA

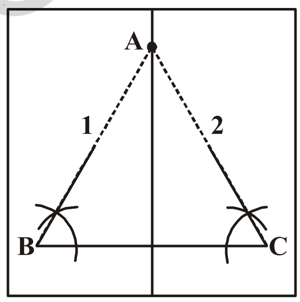
क्या इसका विलोम भी सत्य होगा? अर्थात् यदि किसी त्रिभुज के दो कोण समान हो तो क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि उनकी सम्मुख भुजाये भी समान होगी?

क्रिया कलाप

1. एक अक्षरेखण (Tracing Paper) कागज पर 6 से.मी लम्बाई वाला रेखाखण्ड BC उतारिये ।
2. शीर्ष B और C से 60^0 के दो किरण उतारिये और उनके कटान बिन्दु को B नाम दीजिए।
3. कागज को इस तरह मोडिये कि B और C एक दूसरे पर समाजाये, आप क्या निरीक्षण करोगे? क्या AB = AC होगा।



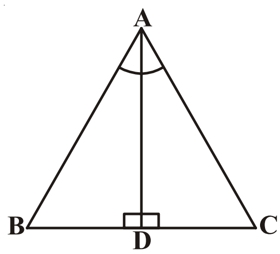
$\angle$B और $\angle$C के भिन्न मापों को लेकर इस कार्यविधी को दोहराइये। हर बार आप देखोगे कि समान कोणों की सम्मुख भुजायें समान हैं । इससे हमें यह प्राप्त होता है।



प्रमेय -7.3 : किसी त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजायें समान होती है ?

यह प्रमेय 7.2 का विलोम है ।

आप इस प्रमेय को ASA अनुरूपता नियम के उपयोग से सिद्ध करेंगे।आइये इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिये कुछ उदाहरण लें ।



उदाहरण -7. ΔABC में, $\angle$A का समद्विभाजक AD, भुजा BC पर लम्ब है । दर्शाइये कि AB = AC और ΔABC समद्विबाहु है ।

हलः ΔABD और ΔACD में, $\angle$BAD = $\angle$CAD (दिया गया है)

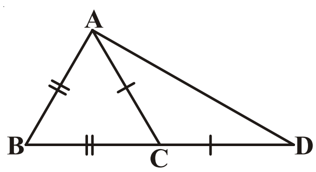
AD = AD (उभयनिष्ठ)

$\angle$ADB = $\angle$ADC = 90°

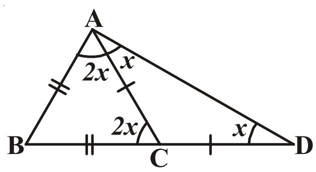
अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA नियम से)

AB = AC (CPCT)

ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है ।



उदाहरण -8. संलग्न चित्र में AB = BC और AC = CD सिद्ध कीजिये $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$.



हल : मानलो $\angle ADB = x$

SCERT TELANGANA

ΔACD में $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

और $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because \Delta ABC$ में, $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

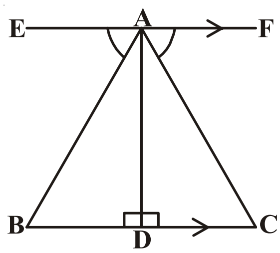
और $\quad \dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

अर्थात $\quad \angle BAD : \angle ADB = 3 : 1.$

अतः सिद्ध किया गया है।

उदाहरण-9. दिये गये चित्र में AD BC और EF || BC यदि $\angle EAB = \angle FAC$ बताइए कि ABD तथा ACD सर्वसमान है। x और y का मूल्य भी ज्ञात कीजिये यदि $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$, $BD = x$ और $DC = y + 1$ है।

हल: AD, EF पर लम्ब है ।



$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (दिया गया है)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

इन ΔABD और ΔACD में

$\angle BAD = \angle CAD$ [ऊपर सिद्ध किया गया]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [दिया गया है AD, BC पर लम्ब है ।]

और $\quad AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ASA]

अतः सिद्ध किया गया है ।

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ और $BD = CD$ [C.P.C.T से]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ और $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ और $x - y = 1$

x का मूल्य प्रतिस्थापन करने पर $2(1 + y) - 3y = -2$ प्रतिस्थापित करने पर $y = 4$ in $x = 1 + y$

$x = 1 + y \qquad 2 + 2y - 3y = -2 \qquad x = 1 + 4$

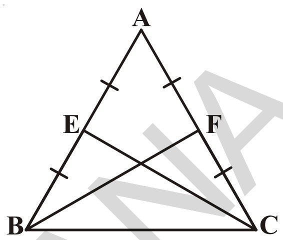
$-y = -2 - 2 \qquad x = 5$

$-y = -4$

SCERT TELANGANA

उदाहरण -10. E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की समान भुजाएँ AB और AC के मध्यबिन्दु हैं । (चित्र देखिये)

बताईये कि BF = CE है



हल : ΔABF और ΔACE,

AB = AC (दिया है)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

AF = AE (समान भुजाओं के आधे भाग)

अतः $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS नियम)

इसलिये, BF = CE (CPCT)

उदाहरण-11. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें AB = AC तथा भुजा BC पर दो बिन्दु D और E पर इस प्रकार स्थित है कि BE = CD (चित्र देखिये) AD = AE को सिद्ध कीजिए।

हलः ΔABD और ΔACE में,

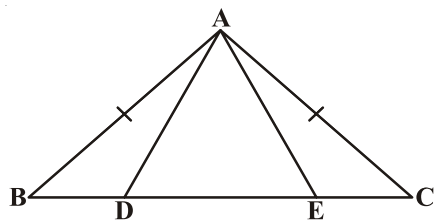
AB = AC (दिया गयाहै) .... (1)

$\angle B = \angle C$ .... (2)

साथ ही, BE = CD (दिया गया है)

इसलिये BE – DE = CD – DE

अर्थात BD = CE (3)



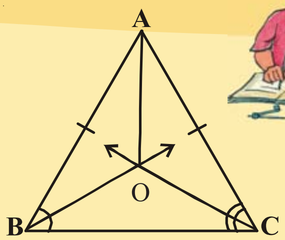
अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) और SAS नियम द्वारा).

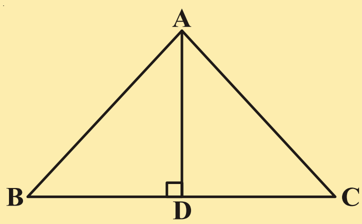
प्राप्त होता है : AD = AE (CPCT)

अभ्यास - 7.2

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्वाभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है। A और O को जोडिये तथा सिद्ध कीजिए।
(i) OB = OC (ii) AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है ।

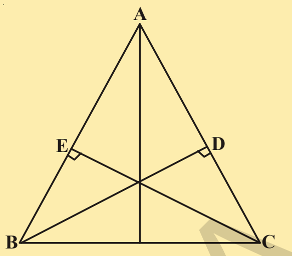


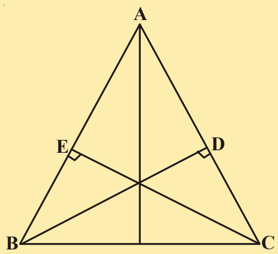
2. ΔABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है। दर्शाइये कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमे AB=AC है।



SCERT TELANGANA

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें समान भुजाएँ AC और AB पर क्रमाशः शीर्ष लम्ब BD और CE खींचे गये हैं। दर्शाइये कि ये लम्ब बराबर है।

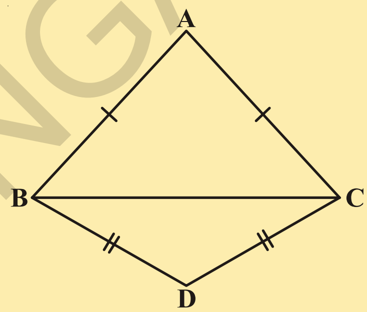




4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गये शीर्षलम्ब BD और CE समान हैं। तो सिद्ध कीजिए।

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(ii) $AB = AC$ अर्थातABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



5. ΔABC और ΔDBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दर्शाइये कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।

7.5 त्रिभुज अनुरूपता के कुछ और नियम :

7.4 प्रमेय (SSS अनुरूपता नियम) : रचना के द्वारा हमने देखा कि SSS अनुरूपता सत्य है। इस प्रमेय को हम उचित रचना के द्वारा सिद्ध कर सकते हैं।

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजायें दूसरे अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज अनुरूप होते है।

• SSS अनुरूपता के नियम की उपपत्ति

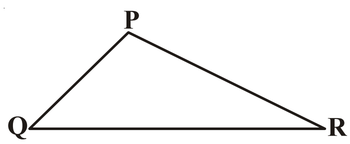
परिकल्पना : ΔPQR औरΔXYZ इस तरह है के $PQ = XY$, $QR = YZ$ और $PR = XZ$

निषकर्ष: $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

रचना : रेखा YW इस तरह खिंचो $\angle ZYW = \angle PQR$ और $WY = PQ$. है XW और WZ को मिलाओ।

उपपत्ति: ΔPQR और ΔWYZ

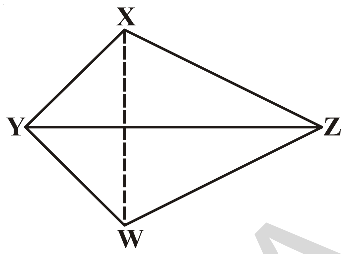
$QR = YZ$	(दिया गया है)
$\angle PQR = \angle ZYW$	(रचना द्वारा)
$PQ = YW$	(रचना द्वारा)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$	(SAS अनुरूपता नियम)



SCERT TELANGANA

$\Rightarrow \angle P = \angle W$ और $PR = WZ$ (CPCT)

$PQ = XY$ (दिया गया है) और $PQ = YW$ (रचना द्वारा)



$\therefore XY = YW$

इसी तरह, $XZ = WZ$

ΔXYW में $XY = YW$

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है)

इसी तरह, $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

अब $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR और ΔXYZ $PQ = XY$

$\angle P = \angle X$

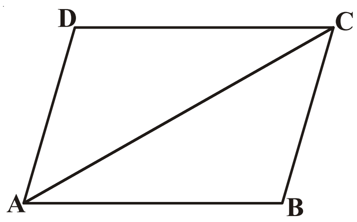
$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS अनुरूपता)

इसी पर आधारित एक उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-12. चतुर्भुज ABCD में, $AB = CD$, $BC=AD$ बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

ΔABC और ΔCDA पर विचार कीजिये।



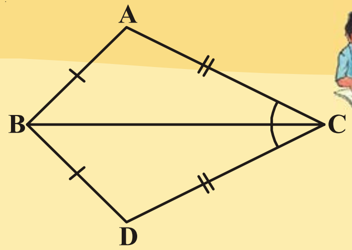
$AB = CD$ (दिया गया है)

$AD = BC$ (दिया गया है)

$AC = CA$ (समान भुजा)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS अनुरूपता से)

प्रयत्न कीजिए



1. संलग्न चित्र में ΔABC और ΔDBC दो त्रिभुज है जिस $\overline{AB} = \overline{BD}$ और $\overline{AC} = \overline{CD}$. बताइये कि $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

SAS अनुरूपता में आपने देखा है कि समान संगत भुजाओं के युग्मों के बीच कोण में होना चाहिए और यदि ऐसा नहीं है, तो दोनो त्रिभुज सर्वसमान नही हो सकते हैं ।

SCERT TELANGANA

क्रिया कलाप

दो समकोण त्रिभुज बनाइये जिसके कर्ण 5 से.मी. और एक भुजा उसे भी लम्बी है। कितने भिन्न त्रिभुज बनाये जा सकते है ? अपने त्रिभुज की तुलना मित्रों के त्रिभुजों से कीजिये । क्या वे त्रिभुज अनुरूप है? इन्हे काटिये और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिये कि इनकी बराबर भुजाये एक दूसरे पर आयें । यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइये। आपने क्या देखा? आप आप देखेंगे कि दो होंगे यदि एक त्रिभुज की भुजा और कर्ण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की भुजा और कर्ण के समान हो तो समकोण त्रिभुज अनुरूप होंगे। वे ध्यान दीजिये कि इस स्थिति समकोण अंतर्गत कोण नहीं है। इसलिए हम निम्न अनुरूपता के नियम पर पहुँचते हैं।

प्रमेय 7.5 (RHS congruence rule) : अनुरूपता नियम : यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होते हैं।

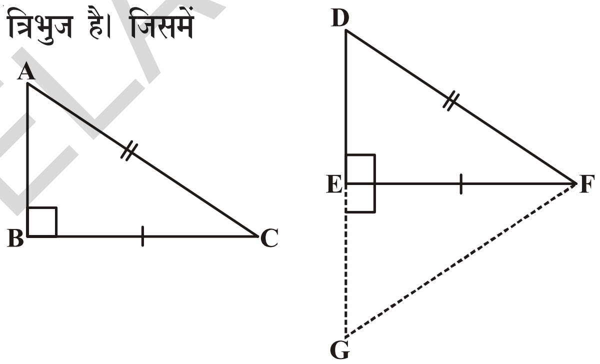
ध्यान दीजिये कि यहाँ RHS समकोण - कर्ण - भुजा को दर्शाता है अब हम सिद्ध करेंगे।

परिकल्पना : ΔABC तथा ΔDEF दो समकोण त्रिभुज है। जिसमें

$\angle B = 90^o$ और

$\angle E = 90^o$ $AC = DF$

और $BC = EF$.



निष्कर्ष: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना: DE को G तक बढाओ, जिससे $EG = AB$. GF को मिलाओ

उपपत्ति:

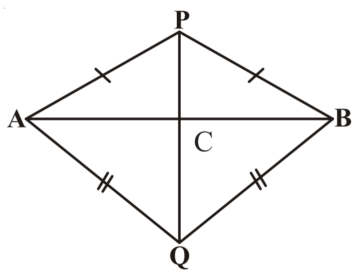
कथन	कारण
ΔABC और ΔGEF में, प्राप्त हैं	
$AB = GE$	(रचना से)
$\angle B = \angle FEG$	(प्रत्येक कोण 90^0 है)
$BC = EF$	(दिया गया है)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(SAS अनुरूपता)
इसलिए $\angle A = \angle G$ ... (1)	(CPCT)

SCERT TELANGANA

AC = GF ... (2)	(CPCT)
आगे AC=GF और AC=DF	((2) से और दिया गया)
अतःDF = GF	(ऊपर से)
इसलिये, , $\angle D = \angle G$ ... (3)	(समान भुजाओं के समुख कोण समान है)
हमे प्राप्त है, $\angle A = \angle D$ ... (4)	(समान भुजाओं के समुख कोण समान है)
अतः ΔABC और ΔDEF $\angle A = \angle D$,	(4 से)
$\angle B = \angle E$	(दिया गया है)
इसलिये $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(जोडने पर)
लेकिन $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ और	(त्रिभुज के तीन कोणों का योग)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	
180 - $\angle C$ = 180 - $\angle F$	($\angle A+\angle B=180^0-\angle C$ and $\angle D+\angle E=180^0-\angle F$)
इसलिये $\angle C = \angle F$, ... (5)	(रद्द करने का नियम)
अब, ΔABC औक ΔDEF, प्रापत है	
BC = EF	(दिया गया है)
$\angle C = \angle F$	(5 से)
AC = DF	(दिया गया है)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS अनुरूपता से)

उदाहरण-13. AB एक रेखा खण्ड है तथा बिन्दु P और Q इस रेखा खण्ड के दोनों ओर इस प्रकार स्थित है कि दोनों A और B से समान दूरी पर है।बताइये कि रेखा PQ रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है ।

हल: दिया गया है कि PA = PB और QA = QB है। आपको सिद्ध करना है कि PQ, AB पर लम्ब है। PQ रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करती है । मानलो रेखा PQ रेखा खण्ड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। क्या आप इस आकृति में दो अनुरूप त्रिभुजों को देख सकते हो ?



आइये ΔPAQ और ΔPBQ.

इन त्रिभुजों में

AP = BP (दिया गया है)

AQ = BQ (दिया गया है)

PQ = PQ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिये $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT).

अब ΔPAC और ΔPBC को लिजिये। आपको प्राप्त है :

AP = BP (दिया गया है)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ उपर सिद्ध किया गया)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिये $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

अतः $AC = BC$ (CPCT) .... (1)

और $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

यह भी है कि $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिये, $2\angle ACP = 180°$

या $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1) और (2) आप निष्कर्ष निकाल सकते है कि रेखा PQ रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है ।

[ध्यान दीजिये कि ΔPAQ और ΔPBQ, की अनुरूपता दर्शाये बिना, आप यह नही बता सकते कि $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ यद्यपि $AP = BP$ (दिया गया)

$PC = PC$ (उभयष्ठि)

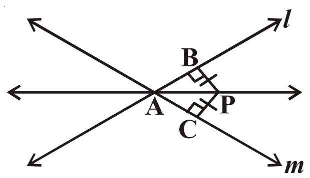
और $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB के समान भुजाओ के सम्मुख कोण)

कारण यह है कि इनसे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की अनुरूपता के लिये हमेशा माना नहीं जाता है। साथ ही, कोण समान भुजाओं के अंतर्गत नहीं है ।

आइये कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण-14. बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l और m से समान दुरी पर एक बिन्दु P है। दर्शाइये कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच बनने वाले कोण को समद्विभाजित करती है ।

हल : आपको दिया गया है कि रेखायें l और m पर प्रतिच्छेद करती हैं।



मानलो $PB \perp l$ और $PC \perp m$. है। यह दिया गया है कि $PB = PC$ है।

आपको दर्शाना है कि $\angle PAB = \angle PAC$ है

अब ΔPAB और ΔPAC में

$PB = PC$ (दिया है)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (दिया है)

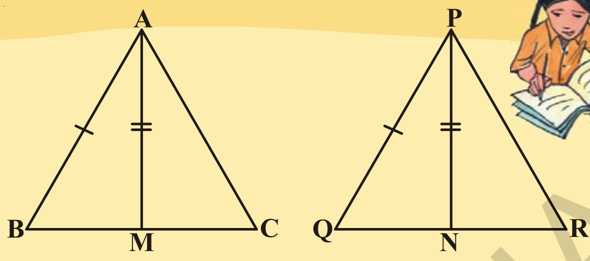
$PA = PA$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS नियम)

अतः $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 7.3



1. समद्विबाहु ΔABC में AD उसकी ऊँचाई है जिसमें $AB = AC$ हो तो बताइये कि,

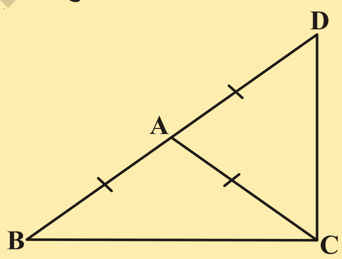
   (i) AD, BC को समद्विभाजित करता है (ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है ।

2. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाये AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के समान है ΔPQR (चित्रमें). दर्शाइये कि

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

3. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो समान शीर्ष लम्ब है। RHS अनुरूपता का नियम के प्रयोग से सिद्ध कीजिये ABC एक समद्बबाहु त्रिभुज है ।



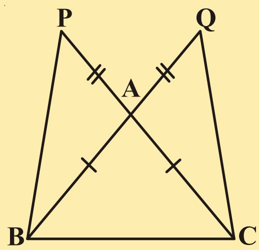
4. ΔABC एक समद्बबाहु त्रिभुज है जिसमे $AB = AC$ बताइये $\angle B = \angle C$.

   (**संकेत**: $AP \perp BC$) (RHS अनुरूपता के उपयोग से)

5. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमे $AB = AC$ भुजा BA को D तक बढाया गया जिससे $AD = AB$ (चित्र देखिए) बताइये कि $\angle BCD$ समकोण है ।

6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AB \perp AC$ खींच कर दर्शाइये कि $\angle A = 90^0$ तथा $AB = AC$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\angle B = \angle C$ है ।

7. दर्शाइये कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येककोण 60^0 का होता है।

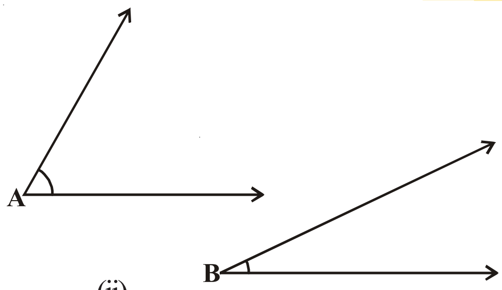


8. संलग्न चित्र में ΔABC समद्विबाहु $AB = AC$, BA और CA को Q और P तक क्रमशः बढाया गया है, जिससे AQ=AP. हो। बताइये कि PB=QC

(**संकेत:** ΔAPB और ΔAQC की तुलना कीजिये)

SCERT TELANGANA

(i)



(ii)

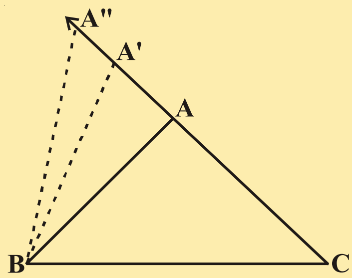
7.6 एक त्रिभुज की असमानताएँ (Inequalities)

आपने, अब तक एक त्रिभुज की भुजाओं और काणो की समानताओं के विषय में पढा है। कभी कभी हमारे सम्मुख असमान वस्तुयें भी आती है हमें इसकी तुलना भी करती पडती है। उदाहरणार्थ, चित्र में (i) रेखाखण्डAB रेखाखण्ड CD से बडा है और आकृति (ii) में $\angle B$ $\angle A$ बडा है ।

आइये अब इसकी जाँच करें कि क्या किसी त्रिभुज में असमान भुजाओं तथा असमान कोणों का कुछ संबंध होता है। इसके लिये आइये निम्न कार्य कलाप करेंगे ।

क्रिया कलाप :

1. त्रिभुज ABC उतारिये और A' बिन्दु को CA पर अंकित कीजिए जिससे
 $A'C > AC$ (लम्बाई की तुलना)
 A'को B से मिलाओ और त्रिभुज $A'BC$ पूर्ण करो
 $\angle A'BC$ और $\angle ABC$ के विषय मे आप क्या कहोंगे ?
 उनकी तुलना कीजिये। आप क्या देखोंगे ?



स्पष्ट है कि $\angle A'BC > \angle ABC$

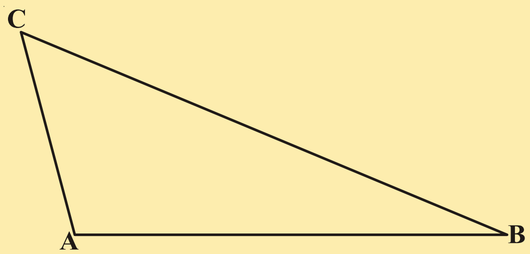
CA पर और अधिक बिन्दु अंकित करते रहिये, तथा अंकित बिन्दुओं से और भुजा BC के साथ त्रिभुज खींचते रहिये ।

आप देखोगे कि जैसे AC बढती जाती है (A की विभिन्न स्थितियों को अंकित करने पर), वैसे इसका सम्मुख कोण, अर्थात् $\angle B$ भी बढता जाता है ।

आइये अब एक अन्य क्रियाविधी को करेंगे :

2. कार्यविधिः एक विषम बाहु त्रिभुज उतारिये (अर्थात् ऐसा त्रिभुज जिसमें सभी भुजाओं की लम्बाईयाँ भिन्न हों) इस त्रिभुज की भाजुओं की लम्बाई और कोण का मापन कीजिये।

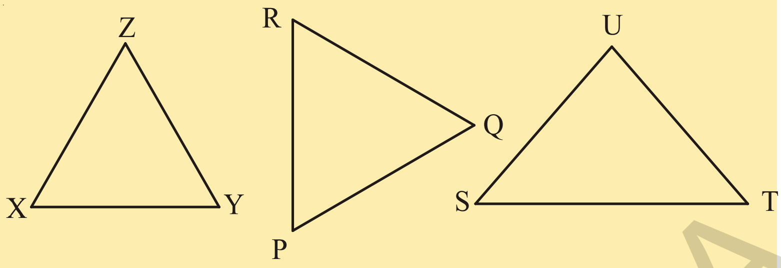
आप क्या देखते है? आप क्या निरीक्षण करोगे ?



SCERT TELANGANA

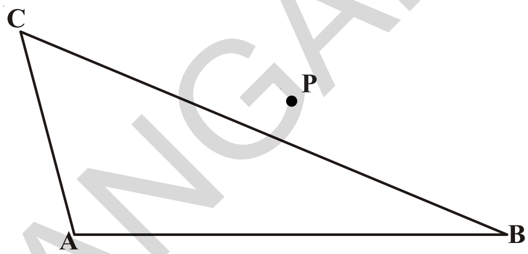
चित्र के ΔABC मे, BC सबसे लम्बी भुजा है और AC सबसे छोटी भुजा है ।

साथ ही $\angle A$ सबसे बडा है और $\angle B$ सबसे छोटा है ।



ऊपर के त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को मापिये। त्रिभुज की भुजा और उसके सम्मुख कोण मे क्या संबंध है, जब आप उनको दूसरे जोडियों से तुलना करेंगे ?

प्रमेय-7.6 : यदि एक त्रिभुज की दो भुजाये असमान है, तो लम्बी भुजा का सम्मुख कोण बडा होगा ।

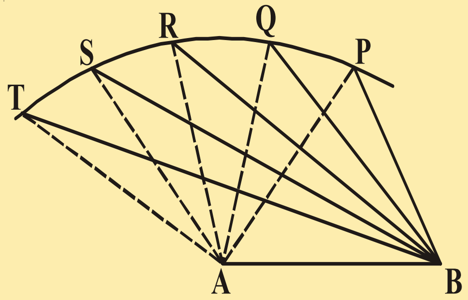


आप इस प्रमेय को BC पर एक बिन्दु P लेकर जिससे CA = CP जैसे कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है, सिद्ध कर सकते हैं ।

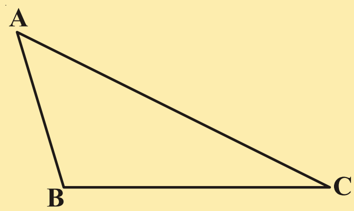
अब हम अन्य क्रियाकलाप करेंगे ।

क्रियाकलाप

एक रेखा खण्ड AB उतारिये A को केन्द्र मानकर और कुछ त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिये और उस पर P, Q, R, S, T बिन्दु अंकित कीजिये ।



इन बिन्दुओं को A और B दोनों से मिलाइए। ध्यान दीजिये कि जैसे हम P से T की ओर चलते है, वैसे $\angle A$ बढता जाता है। इसकी सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयों को क्या हो रहा है? अर्थात $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ और $TB > SB > RB > QB > PB$.

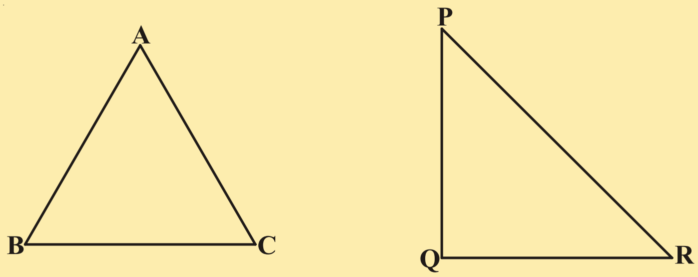


अब कोई ऐसा त्रिभुज खींचिये जिसके सभी कोण असमान हैं। इस त्रिभुज की भुजाओं को मापिये। निरीक्षण कीजिये कि सबसे बडे बडा कोण $\angle B$ है और AC सबसे लम्बी भुजा है ।

कुछ और त्रिभुज खींचकर इस कार्यकलाप को दोहराइये और देखिये कि प्रमेय 7.6 का विलोम भी सत्य सिद्ध होता है ।

SCERT TELANGANA

नीचे दिये गये प्रत्येक त्रिभुज की भुजाये और कोणों को मापो। आप प्रत्येक त्रिभुज की भुजा और उसके सम्मुख कोण के विषय में क्या कल्पना करोगे ?



इस प्रकार हम निम्न प्रमेय पर पहुँचेंगे ।

प्रमेय -7.7 : किसी त्रिभुज में बडे कोण की सम्मुख भुजा बडी होती है। इस प्रमेय को विरोधाभास (contradiction) की विधी से सिद्ध किया जा सकता है।

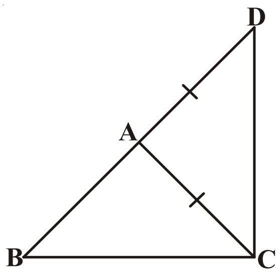
प्रयत्न कीजिये

अब एक त्रिभुज ABC खींचिये और इसमें $AB + BC$, $BC + AC$ और $AC + AB$ ज्ञात कीजिये आप क्या निरीक्षण करोगे ?

आप निरीक्षण करोगे कि $AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ और $AC + AB > BC$.

कुछ और त्रिभुज लेकर, इस कार्यकलाप को दोहराइये और निम्न प्रमेय पर पहुँचिये :

प्रमेय-7.8 : त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बडा होता है ।



संलग्न चित्र में दिये गये त्रिभुज ABC का निरीक्षण करने पर हमें ज्ञात होता है कि भुजा BA को एक बिन्दु D तक इस प्रकार बढाया गया है कि $AD = AC$ है। क्या आप बता सकोंगे कि $\angle BCD > \angle BDC$ और $BA + AC > BC$? क्या आप उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति पर पहुँच पाओगे?

आइये इन परिणामों पर कुछ उदाहरण देखें।

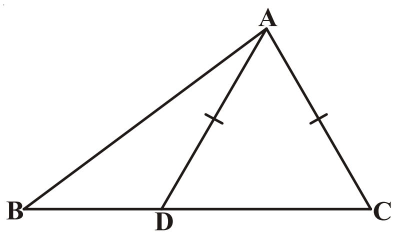
उदाहरण-15. ΔABC की भुजा BC पर D ऐसा बिन्दु है कि $AD = AC$ है (चित्र देखिये)। सिद्ध कीजिए $AB > AD$ है ।

हल : ΔDAC में,

$$AD = AC \text{ (दिया गया है)}$$

इसलिए, $\angle ADC = \angle ACD$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\angle ADC$ त्रिभुज ABD का एक बाह्यकोण है ।



SCERT TELANGANA

इसलिए, $\angle ADC > \angle ABD$

या, $\angle ACD > \angle ABD$

या, $\angle ACB > \angle ABC$

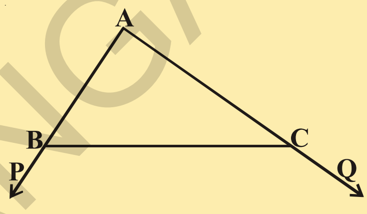
अतः, $AB > AC$ (ΔABC में बडे कोण की सम्मुख भुजा)

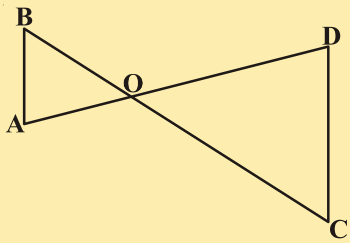
या, $AB > AD$ $(AD = AC)$

अभ्यास - 7.4

1. दर्शाइये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा होती है ?

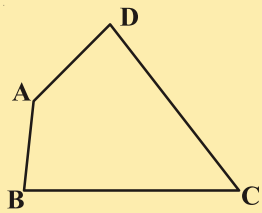
2. संलग्न चित्र में, ABC की भुजाएँ AB और AC को क्रमशः बिंदु P और Q तक बढाया गया है। साथ ही, $\angle PBC < \angle QCB$.है। सिद्ध कीजिए $AC > AB$ है।

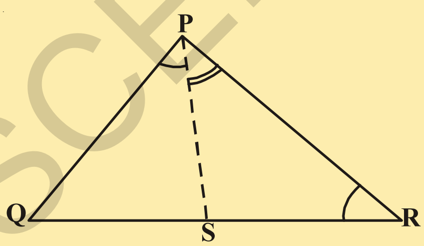




3. दिये गये चित्र मे $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। बताइये कि $AD < BC$ है ।

4. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबस छोटी और सबसे बडी भुजायें है बताइये कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है।





5. संलग्न आकृति दृथ $PR > PQ$ है और PS $\angle QPR$ को समद्विभाजित करता है। सिद्ध करो कि Prove that $\angle PSR > \angle PSQ$ है।

6. यदि त्रिभुज की दो भुजायें 4से.मी और 6 से.मी है तो तीसरी भुजा के सभी संभव माप ज्ञात कीजिये (धन पूर्णांक) कितने अलग त्रिभुज बनेंगे ?

7. 5 से.मी, 8 से.मी और 1से.मी त्रिभुज की रचना करने का प्रयास कीजिये । क्या यह संभव है या नहीं? अपना औचित्य दीजिये ?

SCERT TELANGANA

हमने क्या सीखा?

- जो आकृतियाँ समदर्शी है अर्थात् समान आकृति और परिमाण हो तो वे आकृतियाँ सर्वसमान या अनुरूप कहलाते हैं ?
- एक अद्वितीय त्रिभुज के निर्माण के लिये तीन स्वतंत्र मापों की आवश्यकता होती हैं।
- दो त्रिभुज अनुरुप होते है, यदि उनकी संगत कोण सर्वसमान हो तथा उनकी संगत भुजायें समान हो।
- साथ ही, शीर्षो के बीच में एक-एक संगतता होती है ।
- सर्वसमान त्रिभुजों में संगत भाग भी समान होते है और हम इसे संक्षिप्त में 'CPCT' लिखते है जो सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भागों का सूचक है ।
- SAS अनुरूपता नियम: दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों ।
- ASA अनुरूपता नियमः दो त्रिभुज अनुरूप है, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा समान हो ।
- समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं ।
- उसका विलोम, त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं ।
- SSS अनुरूपता नियम दो त्रिभुज अनुरूप होते हैं, यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाये दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान हो ।
- RHS अनुरूपता नियमः दो त्रिभुज अनुरूप है, यदि त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हो ।
- यदि त्रिभुज की दो भुजायें असमान हैं, तो लम्बी भुजा का सम्मुख कोण बडा होता है ।
- किसी त्रिभुज में, बडे कोण की सम्मुख भुजा बडी होती है ।
- एक त्रिभुज की दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक होता है ।
- रेखाँए, रेखाखण्ड तथा किरणों का निरुपण LM= रेखाखण्ड LM की लम्बाई $\overline{LM}$ =किरण LM ; $\overrightarrow{LM}$ = रेखा LM

SCERT TELANGANA