પ્રકરણ 8

ચતુષ્કોણ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- ચતુષ્કોણની બાજુઓ, ખૂણાઓ અને વિકર્ણો, અલગ અલગ પ્રકારના ચતુષ્કોણો :

સમલંબ ચતુષ્કોણ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ અને ચોરસ.

- ચતુષ્કોણના ચારે ય ખૂણાનો સરવાળો 360° છે.
- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.
- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં,
  (i) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે.
  (ii) સામસામેની બાજુઓ સમાન છે.
  (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.
- જો ચતુષ્કોણમાં,
  (i) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન હોય
  (ii) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય
  (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે
  (iv) સામસામેની બાજુઓની એક જોડની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
- લંબચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ એ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેનાથી અડધો છે.
- ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.
- ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

નોંધ : ચતુષ્કોણનો અર્થ બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ સમજીશું.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 1 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો બિંદુ O માં છેદે છે. જો $\angle BOC = 90^\circ$ અને $\angle BDC = 50^\circ$ હોય, તો $\angle OAB$ = ...

(A) 90° (B) 50° (C) 40° (D) 10°

ઉકેલ : $\angle BOC + \angle COD = 180^\circ$

$\therefore\ 90^\circ + \angle COD = 180^\circ$

$\therefore\ \angle COD = 90^\circ$

ΔCOD માં

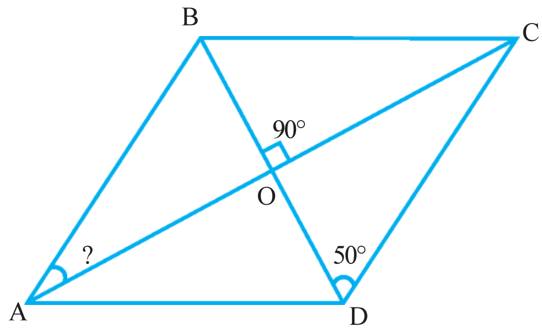
$\angle COD + \angle ODC + \angle OCD = 180^\circ$

$\therefore\ 90^\circ + 50^\circ + \angle OCD = 180^\circ$

$\therefore\ \angle OCD = 40^\circ$

$\angle OAB = \angle OCD = 40^\circ$ (અંતઃ યુગ્મકોણ)

જવાબ (C)



બીજી રીત : $\angle OCD = 90^\circ - \angle ODC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ કારણ કે Δ BOC એ Δ OCD નો બહિષ્કોણ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 14 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

1. કોઈ એક ચતુષ્કોણના ત્રણ ખૂણાઓ અનુક્રમે 75°, 90° અને 75° હોય, તો ચોથા ખૂણાનું માપ .... છે.

(A) 90° (B) 95° (C) 105° (D) 120°

2. લંબચોરસનો વિકર્ણ લંબચોરસની કોઈ એક બાજુ સાથે 25° માપનો ખૂણો બનાવે છે. તો બે વિકર્ણોથી બનતા લઘુકોણનું માપ .... છે.

(A) 55° (B) 50° (C) 40° (D) 25°

3. સમબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં $\angle ACB = 40^\circ$ છે. તો $\angle ADB$ = ...

(A) 40° (B) 45° (C) 50° (D) 60°

4. જો ....

(A) PQRS લંબચોરસ હોય, તો (B) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો

(C) PQRS ના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય, તો (D) PQRS ના વિકર્ણો સમાન હોય, તો

ચતુષ્કોણ PQRS ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય.

5. જો ....

(A) PQRS સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો (B) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો

(C) PQRS ના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય, તો (D) PQRS ના વિકર્ણો સમાન હોય, તો

ચતુષ્કોણ PQRS, ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય.

6. ચતુષ્કોણ ABCD ના ખૂણાઓ A, B, C અને D નો ગુણોત્તર 3 : 7 : 6 : 4 હોય, તો ABCD એ .... છે.

(A) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (B) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

(C) સમલંબ ચતુષ્કોણ (D) પતંગ

7. ચતુષ્કોણ ABCD માં $\angle A$ અને $\angle B$ ના દ્વિભાજકો બિંદુ P માં, $\angle B$ અને $\angle C$ ના દ્વિભાજકો બિંદુ Q માં, $\angle C$ અને $\angle D$ ના બિંદુ R માં અને $\angle D$ અને $\angle A$ ના દ્વિભાજકો બિંદુ S માં છેદે, તો ચતુષ્કોણ PQRS એ .... છે.

(A) લંબચોરસ

(B) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

(C) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

(D) સામસામેના ખૂણાઓ પૂરક કોણ હોય તેવો ચતુષ્કોણ

8. જો APB અને CQD બે પરસ્પર સમાંતર રેખાઓ હોય, તો ખૂણાઓ APQ, BPQ, CQP અને PQD ના દ્વિભાજકો .... બનાવે છે.

(A) ચોરસ (B) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

(C) લંબચોરસ (D) કોઈ બીજો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

9. સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતી આકૃતિ .... છે.

(A) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (B) લંબચોરસ

(C) ચોરસ (D) કોઈ પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

10. ΔABC માં, બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E છે તથા બાજુ BC પર કોઈ બિંદુ O આવેલ છે. O ને A સાથે જોડેલ છે. જો OB અને OC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q હોય, તો DEQP .... છે.

(A) ચોરસ (B) લંબચોરસ

(C) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (D) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

11. જો ....

(A) ચતુષ્કોણ ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો

(B) ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો સમાન હોય, તો

(C) ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો સમાન અને પરસ્પર લંબ હોય, તો

(D) ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય, તો

ચતુષ્કોણ ABCD નાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતી આકૃતિ ચોરસ હોય.

12. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. જો $\angle DAC = 32^\circ$ અને $\angle AOB = 70^\circ$, તો $\angle DBC =$ ....

(A) 24° (B) 86° (C) 38° (D) 32°

13. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે નીચે આપેલ વિધાનોમાંથી .... વિધાન સત્ય નથી.

(A) સામસામેની બાજુઓ સમાન છે. (B) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે.

(C) વિકર્ણ સામસામેના ખૂણાઓને દુભાગે છે. (D) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે

14. ΔABC માં બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E છે. DE ને F સુધી લંબાવેલ છે. CF એ DA ને સમાન અને સમાંતર છે તેવું સાબિત કરવા માટે નીચે આપેલ પૈકી .... વધારાની માહિતીની જરૂર પડશે.

(A) $\angle DAE = \angle EFC$ (B) AE = EF (C) DE = EF (D) $\angle ADE = \angle ECF$.

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જો તેના વિકર્ણો સમાન હોય, તો $\angle ABC$નું માપ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો સમાન છે, તેથી તે લંબચોરસ છે.

માટે, $\angle ABC = 90^\circ$

ઉદાહરણ 2 : ''સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન અને પરસ્પર લંબ છે.'' આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

ઉકેલ : આપેલ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય છે, પરંતુ સમાન હોય તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 3 : ચતુષ્કોણ ABCD ના ત્રણ ખૂણાઓ સમાન છે. તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? કેમ અથવા કેમ નહીં ?

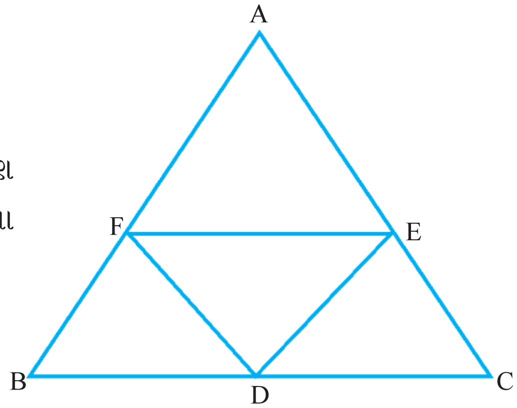
ઉકેલ : તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય તે જરૂરી નથી, કારણ કે આપણે $\angle A = \angle B = \angle C = 80^\circ$ અને $\angle D = 120^\circ$. લઈએ તો $\angle B \neq \angle D$ થશે.

ઉદાહરણ 4 : ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે જેથી OA : OC = 3: 2 છે. ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહીં ?

ઉકેલ : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી, કારણ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે. અહીં $OA \neq OC$.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો OA = 3 સેમી અને OD = 2 સેમી હોય તો AC અને BD ની લંબાઈ શોધો.
2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય છે. આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.
3. 110°, 80°, 70° અને 95° એ કોઈ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનાં માપ હોઈ શકે ? કેમ ? અથવા કેમ નહીં ?
4. ચતુષ્કોણ ABCD માં, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ છે. આ કયા વિશિષ્ટ પ્રકારના ચતુષ્કોણમાં શક્ય છે ?
5. ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ સમાન છે. આ કયા વિશિષ્ટ પ્રકારના ચતુષ્કોણમાં શક્ય છે ?
6. લંબચોરસના વિકર્ણો સમાન અને પરસ્પર લંબ છે. આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.
7. કોઈ એક ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ ગુરુકોણ હોઈ શકે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
8. ΔABC માં, AB = 5 સેમી, BC = 8 સેમી અને CA = 7 સેમી છે. જો D અને E અનુક્રમે AB અને BCનાં મધ્યબિંદુઓ હોય, તો DE ની લંબાઈ શોધો.
9. આકૃતિ 8.1 માં, BDEF અને FDCE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલ છે. શું તમે કહી શકશો કે BD = CD ? હા, તો શા માટે ? અથવા ના, તો શા માટે નહીં ?



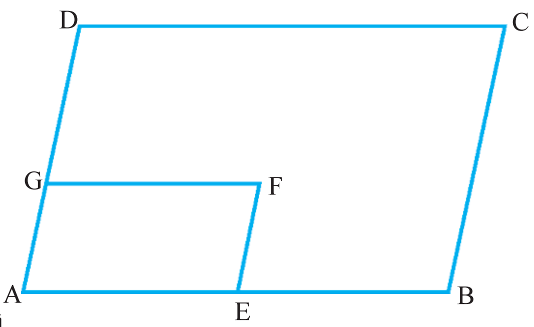
આકૃતિ 8.1

10. આકૃતિ 8.2 માં, બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને AEFG છે. જો $\angle C = 55^\circ$ હોય, તો $\angle F$ શોધો.

11. ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ લઘુકોણ હોઈ શકે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

12. ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ કાટકોણ હોઈ શકે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

13. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે. જો $\angle A = 35^\circ$ હોય, તો $\angle B$ શોધો.



આકૃતિ 8.2

14. ચતુષ્કોણ ABCD ના સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે. જો AB = 4 સેમી હોય, તો CD શોધો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એક ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો ગુણોત્તર 3 : 4 : 4 : 7 છે. આ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ $3x$, $4x$, $4x$ અને $7x$ છે.

તેથી, $3x + 4x + 4x + 7x = 360^\circ$

અથવા $18x = 360^\circ$, એટલે કે, $x = 20^\circ$

આમ, માંગેલ ખૂણાઓ 60°, 80°, 80° અને 140° છે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 8.3 માં, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓ AD અને BC ના મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે X અને Y છે. તથા BX અને DY એ AC ને અનુક્રમે બિંદુ P અને Q માં છેદે છે. સાબિત કરો કે AP = PQ = QC.

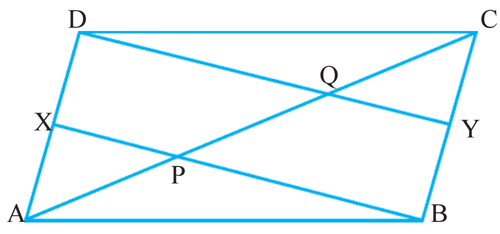
ઉકેલ : AD = BC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ)

માટે, DX = BY $\left[\frac{1}{2}\text{AD} = \frac{1}{2}\text{BC}\right]$

તથા DX || BY **(AD || BC હોવાથી)**

તેથી, XBYD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(સામસામેની બાજુઓની એક જોડ સમાન અને સમાંતર)



આકૃતિ 8.3

એટલે કે, PX || QD

માટે, AP = PQ **(ΔAQD પરથી, જ્યાં X એ AD નું મધ્યબિંદુ છે.)**

તે જ પ્રમાણે, ΔCPB પરથી CQ = PQ **(1)**

આમ, AP = PQ = CQ **[પરિણામ (1) અને (2) પરથી]** **(2)**

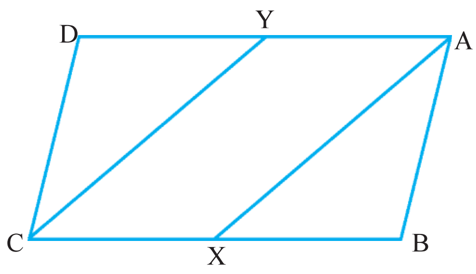
ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 8.4 માં, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં, AX અને CY એ અનુક્રમે ABCD માં, સામસામેના ખૂણાઓ $\angle A$ અને $\angle C$ ના દ્વિભાજકો છે.

સાબિત કરો કે AX || CY.

ઉકેલ : $\angle A = \angle C$

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

માટે, $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$



આકૃતિ 8.4

એટલે કે, $\angle YAX = \angle YCX$ **(1)**

$\angle AYC + \angle YCX = 180^\circ$ **(કારણ કે YA || CX) (2)**

માટે, $\angle AYC + \angle YAX = 180^\circ$ **[પરિણામ (1) અને (2) પરથી]**

તેથી, AX || CY **(છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણો પૂરકકોણ હોય તો તે રેખાઓ સમાંતર હોય)**

સ્વાધ્યાય 8.3

1. ચતુષ્કોણમાં એક ખૂણાનું માપ 108° છે અને બાકીના ત્રણેય ખૂણાઓ સમાન છે. પ્રત્યેક સમાન ખૂણાનાં માપ શોધો.

2. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC તથા $\angle A = \angle B = 45^\circ$ છે. સમલંબ ચતુષ્કોણના ખૂણા C અને D નાં માપ શોધો.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં ગુરુકોણ હોય તેવા એક ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલા બે વેધ વચ્ચેનો ખૂણો 60° છે. આ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ શોધો.

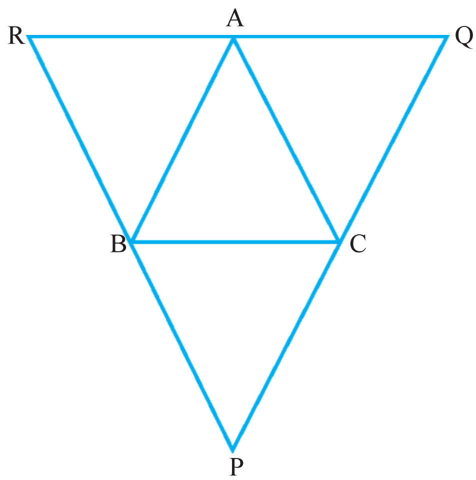
4. સમબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં, D પરથી બાજુ AB ને દોરેલ વેધ AB ને દુભાગે છે. આ સમબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ શોધો.

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં વિકર્ણ AC પર બે બિંદુઓ E અને F એવાં લીધાં છે કે જેથી AE = CF થાય. સાબિત કરો કે BFDE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

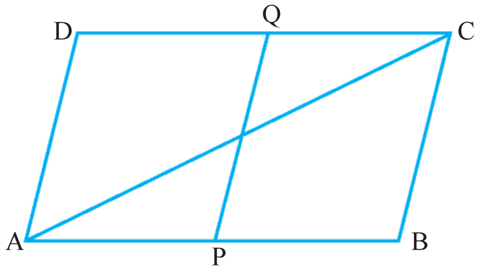
6. AB || DC હોય તેવા સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં, E એ બાજુ AD નું મધ્યબિંદુ છે. E માંથી પસાર થતી અને AB ને સમાંતર દોરેલી રેખા BC ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે F એ BC નું મધ્યબિંદુ છે. [**સૂચન :** AC ને જોડો.]

7. આકૃતિ 8.5 માં બતાવ્યા પ્રમાણે Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B અને C માંથી અનુક્રમે બાજુઓ BC, CA અને AB ને સમાંતર હોય તેવી રેખાઓ RQ, PR અને QP દોરેલ છે. સાબિત કરો કે $BC = \frac{1}{2} QR$.

8. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC માં બાજુઓ BC, CA અને AB નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. સાબિત કરો કે Δ DEF પણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.



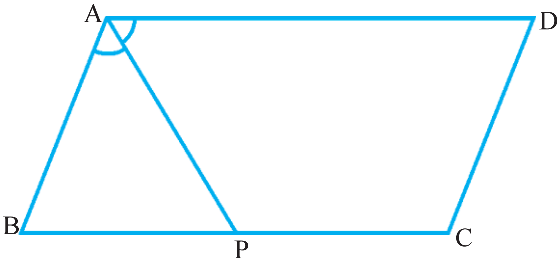
આકૃતિ 8.5



આકૃતિ 8.6

9. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં P અને Q એ અનુક્રમે સામસામેની બાજુઓ AB અને CD, પરનાં એવાં બિંદુઓ છે કે જેથી AP = CQ થાય. (જુઓ આકૃતિ 8.6). સાબિત કરો કે AC અને PQ પરસ્પર દુભાગે છે.

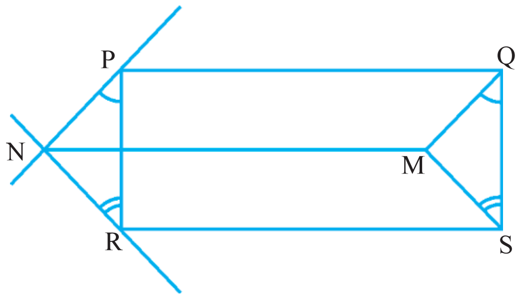
10. આકૃતિ 8.7 માં, P એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુ BC નું મધ્યબિંદુ છે તથા $\angle BAP = \angle DAP$ છે. સાબિત કરો કે AD = 2CD.



આકૃતિ 8.7

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : PQ અને RS, બે સમાન અને સમાંતર રેખાખંડો છે. PQ અને RS પર ના હોય તેવા કોઈ બિંદુ M ને બિંદુઓ Q અને S સાથે જોડેલ છે. તથા P માંથી QM ને સમાંતર હોય અને R માંથી SM ને સમાંતર હોય તેવી રેખાઓ એકબીજાને બિંદુ N માં છેદે છે. સાબિત કરો કે રેખાખંડો MN અને PQ સમાન અને પરસ્પર સમાંતર છે.



આકૃતિ 8.8

ઉકેલ : આપણે આપેલ શરતો પ્રમાણે આકૃતિ દોરીશું. (આકૃતિ 8.8).

PQ = RS અને PQ || RS આપેલ છે માટે PQSR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેથી, PR = QS તથા PR || QS **(1)**

હવે, PR || QS

માટે, $\angle RPQ + \angle PQS = 180^\circ$ **(છેદિકાની એક જ બાજુ પરના અંત:કોણ)**

એટલે કે, $\angle RPQ + \angle PQM + \angle MQS = 180^\circ$ **(2)**

અને PN || QM **(રચના દ્વારા)**

માટે, $\angle NPQ + \angle PQM = 180^\circ$

એટલે કે, $\angle NPR + \angle RPQ + \angle PQM = 180^\circ$ **(3)**

તેથી, $\angle NPR = \angle MQS$ **[પરિણામ (2) અને (3) પરથી] (4)**

તે જ પ્રમાણે, $\angle NRP = \angle MSQ$ **(5)**

માટે, $\Delta PNR \cong \Delta QMS$ **[ખૂબાખૂ, (1), (4) અને (5)નો ઉપયોગ કરતાં]**

તેથી, PN = QM અને NR = MS **(એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગ)**

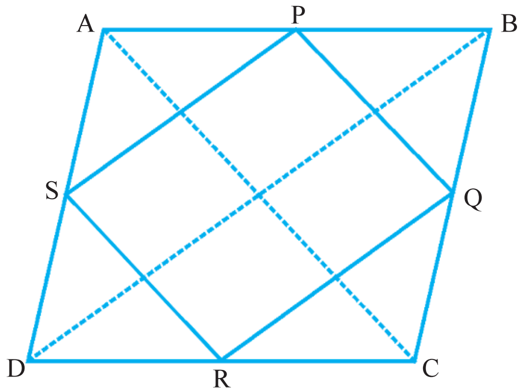
હવે, PN = QM અને PN || QM છે.

તેથી PQMN સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ મળશે.

તેથી, MN = PQ અને NM || PQ.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.

ઉકેલ : પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલ પ્રમેય 8.1 ની સાબિતી જુઓ.



આકૃતિ 8.9

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય છે.

ઉકેલ : ધારો કે ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા P, Q, R અને S અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. (આકૃતિ 8.9). AC અને BD ને જોડો.

ત્રિકોણ ABD પરથી, આપણને

$SP = \frac{1}{2}$ BD અને

$SP \parallel BD$ મળશે. (કારણ કે S અને P મધ્યબિંદુઓ છે.)

તે જ પ્રમાણે, $RQ = \frac{1}{2}$ BD અને $RQ \parallel BD$

માટે, $SP = RQ$ અને $SP \parallel RQ$

તેથી, PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થશે. (1)

વળી, $AC \perp BD$ છે. (સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં વિકર્ણો પરસ્પર લંબ હોય)

અને $PQ \parallel AC$ (ΔBAC પરથી)

અહીં, $SP \parallel BD$, $PQ \parallel AC$ અને $AC \perp BD$ હોવાથી,

આપણને $SP \perp PQ$, મળશે, એટલે કે $\angle SPQ = 90^\circ$. (2)

માટે, PQRS લંબચોરસ છે. (અન્યથા PR = QS હોવાથી PQRS લંબચોરસ છે.) [પરિણામ (1) અને (2) પરથી]

ઉદાહરણ 4 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેના કોઈ એક ખૂણાને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે તે આપેલ ખૂણાની સામેના ખૂણાને પણ દુભાગશે.

ઉકેલ : ચાલો આપેલી શરત પ્રમાણે આકૃતિ દોરીએ (આકૃતિ 8.10). તેમાં, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં વિકર્ણ AC, $\angle BAD$ ને દુભાગે છે. એટલે કે $\angle BAC = \angle DAC$ આપેલ છે. આપણે $\angle BCA = \angle DCA$ સાબિત કરવાનું છે.

$AB \parallel CD$ અને AC તેની છેદિકા છે.

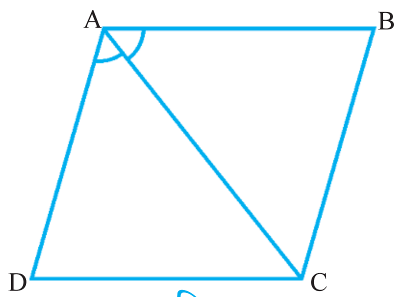
માટે, $\angle BAC = \angle DCA$ (અંતઃ યુગ્મકોણ) (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle DAC = \angle BCA$ ($AD \parallel BC$ પરથી) (2)

પરંતુ, $\angle BAC = \angle DAC$ આપેલ છે. (3)

માટે, પરિણામ (1), (2) અને (3), પરથી

$\angle BCA = \angle DCA$

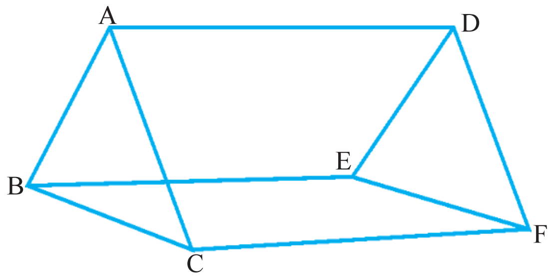


આકૃતિ 8.10

સ્વાધ્યાય 8.4

1. એક સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણને અંતર્ગત એક ચોરસ એવી રીતે આવેલો છે કે જેથી ચોરસ અને ત્રિકોણમાં એક ખૂણો સામાન્ય હોય. સાબિત કરો કે સામાન્ય ખૂણાના શિરોબિંદુની સામે આવેલ ચોરસનું શિરોબિંદુ ત્રિકોણના કર્ણને દુભાગે છે.

2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB = 10 સેમી અને AD = 6 સેમી છે. ∠A નો દ્વિભાજક DC ને E માં મળે છે. AE અને BC ને લંબાવતા તે બિંદુ F માં મળે છે. CF ની લંબાઈ શોધો.
3. AC = BD હોય તેવા ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે PQRS સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
4. AC ⊥ BD હોય તેવા ચતુષ્કોણ ABCD માં, બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે PQRS લંબચોરસ છે.
5. AC = BD અને AC ⊥ BD હોય તેવા ચતુષ્કોણ ABCD માં, બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે PQRS ચોરસ છે.
6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેના એક ખૂણાને દુભાગે તો સાબિત કરો કે તે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
7. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં P અને Q એ અનુક્રમે સામસામેની બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ છે. જો AQ એ DP ને S માં છેદે અને BQ એ CP ને R માં છેદે તો સાબિત કરો કે PRQS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
8. ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC અને AD = BC છે. સાબિત કરો કે ∠A = ∠B અને ∠C = ∠D છે.
9. આકૃતિ 8.11 માં, AB || DE, AB = DE, AC || DF અને AC = DF છે. સાબિત કરો કે BC || EF અને BC = EF.
10. ΔABC માં, મધ્યગા AD નું મધ્યબિંદુ E છે તથા BE ને લંબાવતા તે AC ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $AF = \frac{1}{3} AC$.



આકૃતિ 8.11

11. સાબિત કરો કે ચોરસની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ પણ ચોરસ છે.
12. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં, સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ AD અને BC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. સાબિત કરો કે EF || AB અને $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

[**સૂચન :** BE ને જોડો અને તેને લંબાવો કે જેથી તે લંબાવેલ બાજુ CD ને G માં છેદે.]
13. સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના દ્વિભાજકોથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.
14. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં P અને Q એ અનુક્રમે સામસામેની બાજુઓ AD અને BC પર આવેલા એવાં બિંદુઓ છે કે જેથી PQ વિકર્ણ AC અને BD ના છેદબિંદુ O માંથી પસાર થાય. સાબિત કરો કે બિંદુ O એ PQ ને દુભાગે છે.
15. લંબચોરસ ABCD માં વિકર્ણ BD એ ∠B ને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે ABCD ચોરસ છે.
16. ΔABC માં, બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. મધ્યબિંદુઓ D, E અને F, ને જોડતાં ΔABC ચાર એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજિત થાય છે તેમ સાબિત કરો.
17. સાબિત કરો કે સમલંબ ચતુષ્કોણમાં, વિકર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતી રેખા સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર બાજુઓને સમાંતર હોય છે.
18. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુ CD નું મધ્યબિંદુ P છે. C માંથી પસાર થતી અને PA ને સમાંતર હોય તેવી રેખા, AB ને Q માં અને લંબાવેલ રેખા DA ને Rમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે DA = AR અને CQ = QR.