

ریاضی میں ثبوت (PROOFS IN MATHEMATICS)

❖ ریاضی کے لئے ثبوت اسی طرح ہیں جیسے شاعری کے لئے - خطاطی - ریاضی کے کام میں ثبوت کی موجودگی اتنی ہی اہم ہے جتنا کہ نظموں میں کردار کی موجودگی۔

❖ ولادمیر آرنلڈ

A.1.1 تعارف

نویں، دسویں اور گیارہویں جماعتوں میں ہم نے بیانات، مرکب بیان، انکار، معکوس اور ایک بیان کے ضد مثبت، موضوع، اندازہ کرنا، مسئلہ اور استخراجی وجوہات کے بارے میں پڑھا ہے۔

A.1.2 ثبوت کیا ہے؟

ریاضیاتی ثبوت کے بیان میں، بیانات تواتر ہوتا ہے، ہر ایک بیان کی وضاحت ایک تعریف کے ساتھ یا ایک موضوع یا ایک قضیہ کے لیے کی جاتی ہے جو پہلے ہی بنایا جا چکا تھا صرف اجازت دیئے گئے منطقی اصولوں سے استخراجی طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح ہر ثبوت استخراجی دلیلوں کی ایک زنجیر ہے جس میں ہر ایک جگہ ہوتی ہے اور نتیجہ ہوتا ہے بہت بار ہم، قضیہ کو سیدھے طور پر ثابت کرتے ہیں کہ قضیہ میں کیا دیا گیا ہے۔ لیکن کئی بار قضیہ کے برابر ثابت کرنا قضیہ کو بخود ثابت کرنے سے آسان ہوتا ہے۔ یہ ہمیں ایک قضیہ کو دو طریقے سے ثابت کرنے کی طرف لے جاتا ہے براہ راست یا بالواسطہ اور اس طرح حاصل شدہ ثبوت، براہ راست ثبوت اور بالواسطہ ثبوت کہلاتے ہیں اور اس کے آگے ہر ایک کے تین مختلف راستے ہوتے ہیں جن پر نیچے بحث کی گئی ہے۔

براہ راست ثبوت یہ قضیہ کا وہ ثبوت ہے جس میں ہم براہ راست ثبوت شروع کرتے ہیں کہ قضیہ میں کیا دیا گیا ہے۔

(i) سیدھے طور پر طریقہ کار یہ دلیلوں کی ایک زنجیر ہے جو سیدھے طور پر رہنمائی کرتی ہے کہ کیا دیا گیا ہے یا کیا مانا گیا ہے، موضوع کی مدد سے تعریفوں یا پہلے ہی ثابت کئے گئے مسئلوں کی مدد سے، کہ کیا ثابت کرنا ہے۔ منطقی اصول کا استعمال کر کے۔

ذیل مثالوں پر غور کیجیے

مثال 1 دکھائیے کہ اگر $x^2 - 5x + 6 = 0$ ہے، تب $x = 3$ یا $x = 2$ ہے۔

حل (دیا ہوا ہے) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ایک عبارت کو برابر/برابر عبارت سے بدلنے پر) $\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

(پہلے بنائے گئے مسئلہ $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ یا $b = 0$ ہے، تمام $a, b \in \mathbf{R}$ کے لیے) $\Rightarrow x - 3 = 0$ یا $x - 2 = 0$

مساوات کے دونوں طرف یکساں اشیاء جمع کرنے سے مساوات $(x - 3) + 3 = 0 + 3$ یا $(x - 2) + 2 = 0 + 2$ $\Rightarrow x - 3 + 3 = 0 + 3$ کی طبعی حالت نہیں بدلتی۔

(جمع کے ماتحت صحیح اعداد کے لیے تماثلہ خصوصیت کا استعمال کر کے) $\Rightarrow x + 0 = 3$ یا $x + 0 = 2$

جمع کے ماتحت صحیح اعداد کی تماثلہ خصوصیت کا استعمال کر کے) $\Rightarrow x = 3$ یا $x = 2$

اس طرح $x^2 - 5x + 6 = 0$ کا مطلب ہے $x = 2$ یا $x = 3$

تشریح/وضاحت مان لیجیے p دیا ہوا بیان ہے ” $x^2 - 5x + 6 = 0$ “ اور q نتیجتاً بیان ہے ” $x = 2$ یا $x = 3$ “

بیان p سے، ہم بیان r نکالتے ہیں $r: (x - 3)(x - 2) = 0$ ، جو کہ بیان p کی عبارت $x^2 - 5x + 6 = 0$ کو دوسری

عبارت $(x - 3)(x - 2)$ سے بدلتے ہیں جو کہ $x^2 - 5x + 6$ کے برابر ہے۔

(i) عبارت $(x - 3)(x - 2)$ کس طرح عبارت $x^2 - 5x + 6$ کے برابر ہے؟

(ii) ہم ایک عبارت کو دوسری عبارت سے کس طرح بدل سکتے ہیں جو کہ پہلی کے برابر ہو؟

پہلی کو ہم کچھلی جماعتوں میں اجزائے ضربی کے طریقے سے ثابت کر چکے ہیں، یعنی،

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

دوسری دلیل کی شکل میں صحیح ہے (منطقی اصولوں سے)

آگے یہ بیان r جملے پر منحصر ہے یا دیا ہوا ہے اور بیان s نکلتا ہے۔ ” $x-3=0$ یا $x-2=0$ “ اور وجوہات بریکٹ میں دی گئی ہیں۔
یہ طریقہ مسلسل چلتا رہتا ہے جب تک ہم کسی نتیجہ پر نہ پہنچ پائیں۔
دلیل کی علامتی برابری استخراج یہ ثابت کرنے کے لیے ہے کہ $q \Leftarrow p$ صحیح ہے۔
 p سے شروع کر کے، ہم یہ نکالتے ہیں کہ $p \Leftarrow r \Leftarrow s \Leftarrow \dots \Leftarrow q$ ۔ اس کا مطلب ہے کہ ” $q \Leftarrow p$ “ صحیح ہے۔

مثال 2: ثابت کیجیے کہ فنکشن $R \rightarrow R: f$

جو کہ بیان کیا گیا ہے $f(x) = 2x + 5$ ، ایک، ایک ہے

حل یہ نوٹ کر لیجے کہ فنکشن f ، ایک، ایک ہے اگر

(یک، ایک فنکشن کی تعریف سے) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

اب، دیا گیا ہے $f(x_1) = f(x_2)$ ، یعنی $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$$\Rightarrow 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5 \quad (\text{یکساں مقداریں دونوں طرف جوڑنے پر})$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \quad (\text{حقیقی اعداد کی جمع کا متبادل استعمال کرنے پر})$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} x_1 = \frac{2}{2} x_2 \quad (\text{یکساں غیر صفر مقداروں سے تقسیم کرنے پر})$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

اس طرح، دیا ہوا فنکشن ایک، ایک ہے۔

(ii) ریاضی کا امالہ

ریاضی کا امالہ، ایک حکمت عملی ہے، ایک قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے جو کہ استخراجی ہے۔ اس طریقہ کو حل کرنے کی تمام وجوہات ذیل موضوعہ پڑتی ہیں۔

N کے ایک دیئے ہوئے ماتحت سیٹ S کے لیے، اگر

$$(i) \quad \text{طبعی عدد } 1 \in S \text{ اور}$$

(ii) طبعی عدد $k+1 \in S$ جب کہ $k \in S$ ، تب $S = N$ ۔

ریاضی کے امالہ کے اصول کے مطابق، اگر ایک بیان ” $S(n)$ صحیح ہے $n=1$ کے لیے“ (اور کسی شروعاتی نقطہ J کے لیے)، اور اگر ” $S(n)$ صحیح ہے $n=K$ “ کے لیے کا مطلب ہے کہ ” $S(n)$ صحیح ہے $n=k+1$ کے لیے“ (جب کہ صحیح عدد $k \geq j$ بھی ہو سکتا ہے)، تب بیان کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے صحیح ہے، تمام $k \geq j$ کے لیے اب ہم ذیل مثالوں پر غور دیتے ہیں۔

مثال 3 دکھائیے کہ اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ تب } A^n = \begin{bmatrix} \cos n \theta & \sin n \theta \\ -\sin n \theta & \cos n \theta \end{bmatrix}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n \theta & \sin n \theta \\ -\sin n \theta & \cos n \theta \end{bmatrix}$$

$$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ہم نوٹ کرتے ہیں}$$

اس لیے، $P(1)$ صحیح ہے

مان لیجیے $P(k)$ صحیح ہے، یعنی،

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k \theta & \sin k \theta \\ -\sin k \theta & \cos k \theta \end{bmatrix}$$

ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ $P(k+1)$ صحیح ہے جب کہ $P(k)$ صحیح ہے، یعنی،

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos (k+1) \theta & \sin (k+1) \theta \\ -\sin (k+1) \theta & \cos (k+1) \theta \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A$$

کیونکہ $P(k)$ صحیح ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k \theta & \sin k \theta \\ -\sin k \theta & \cos k \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k \theta \cos \theta - \sin k \theta \sin \theta & \cos k \theta \sin \theta + \sin k \theta \cos \theta \\ -\sin k \theta \cos \theta - \cos k \theta \sin \theta & -\sin k \theta \sin \theta + \cos k \theta \cos \theta \end{bmatrix}$$

(ماتریس ضرب ہے)

$$= \begin{bmatrix} \cos (k+1) \theta & \sin (k+1) \theta \\ -\sin (k+1) \theta & \cos (k+1) \theta \end{bmatrix}$$

اس طرح $P(k+1)$ صحیح ہے جب کہ $P(k)$ صحیح ہے

اس طرح $P(n)$ صحیح ہے تمام $n \geq 1$ (ریاضی کے امالہ کے اصول سے)

(iii) نظیر اور استملاک کے ذریعے ثبوت (Proof by Cases or by exhaustion)

اس بیان کو ثابت کرنے کا طریقہ $p \Rightarrow q$ صرف اسی وقت ممکن ہے جب کہ p کو کئی نظیروں میں توڑا جاسکے (مثال کے طور

پر) r, s, t تاکہ $p = r \vee s \vee t$ (جہاں 'V' کے لیے ایک نشان ہو۔)

$$r \Rightarrow q$$

اگر حالت یہ ہیں

$$s \Rightarrow q$$

$$t \Rightarrow q$$

یہ سب ثابت ہو گئے ہیں، تب $q \Rightarrow (r \vee s \vee t)$ ثابت ہو چکا ہے تاکہ $p \Rightarrow q$ ثابت ہو چکا ہے۔ مفروضہ کے ہر ممکن کیس کسی جانچ کرنے کے لیے، یہ طریقہ موجود ہے۔ یہ اسی وقت عملی طور پر آسان ہے جب کہ ممکن کیس کم ہوں۔

مثال 4 دکھائیے کہ ایک مثلث ABC میں،

$$a = b \cos C + c \cos B$$

مان لیجیے ABC ایک مثلث ہے A سے AD عمود BC پر کھینچیے (BC کو آگے بڑھائیے اگر ضروری ہو) جیسا کہ ہم جانتے

ہیں کہ کوئی بھی مثلث یا تو حادہ زاویہ یا منفرجہ زاویہ یا زاویہ قائمہ ہونا چاہئے، ہم p کو تین بیانات میں توڑ سکتے ہیں۔ r اور t

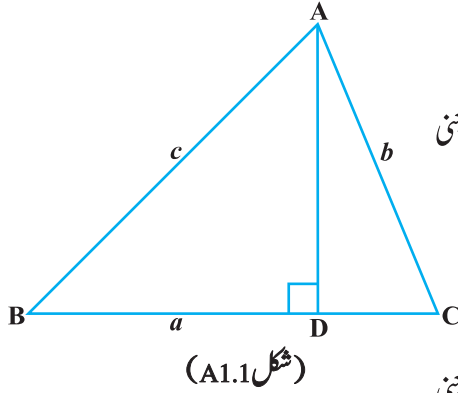
میں، جہاں

r : ABC ایک زاویہ حادہ مثلث ہے جہاں $\angle C$ ایک حادہ زاویہ ہے۔

s : ABC ایک زاویہ منفرجہ مثلث ہے، جہاں $\angle C$ ایک منفرجہ زاویہ ہے۔

ABC: ایک زاویہ قائمہ مثلث ہے، جہاں $\angle C$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔
اس طرح، ہم مسئلہ کو تین نظیروں (Cases) کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔

نظیر (i) جبکہ $\angle C$ کے حادہ زاویہ ہے (شکل A1.1)



قائم زاویہ مثلث ADB سے

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

یعنی $BD = AB \cos B$

$$= c \cos B$$

قائم زاویہ مثلث ADC ہے

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

یعنی $CD = AC \cos C$

$$= b \cos C$$

$$CD = AC \cos C$$

$$= b \cos C$$

کیس (ii) جب $\angle C$ ، زاویہ مفرجہ ہے (شکل A1.2)

قائم زاویہ مثلث ADB سے

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

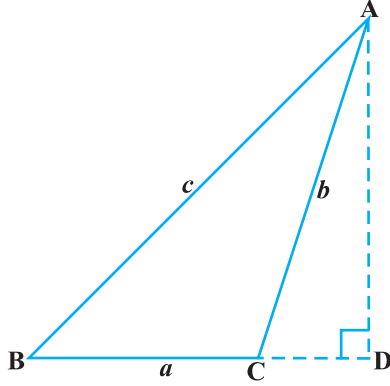
یعنی $BD = AB \cos B$

$$= c \cos B$$

قائم زاویہ مثلث ADC سے

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$$= \cos (180^\circ - C)$$



شکل A1.2

$$= -\cos C$$

$$\text{یعنی } CD = AC \cos C$$

$$= -b \cos C$$

$$\text{اب } a = BC = BD - CD$$

$$\text{یعنی } a = c \cos B - (-b \cos C)$$

$$a = c \cos B + b \cos C \quad \dots (2)$$

نظیر (کیس) (iii) جب کہ $\angle C$ ایک قائم زاوی مثلث ہے (شکل A1.3)

قائم زاوی مثلث ACB سے،

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

$$\text{یعنی } BC = AB \cos B$$

$$a = c \cos B,$$

$$\text{اور } b \cos C = b \cos 90^\circ = 0$$

اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں

$$a = 0 + c \cos B$$

$$= b \cos C + c \cos B \dots (3)$$

(1)، (2) اور (3) سے ہم یہ دکھاتے ہیں (ادا کرتے ہیں) کہ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

نظیر (i) سے، $q \Rightarrow r$ ثابت ہوا ہے

نظیر (ii) سے، $q \Rightarrow s$ ثابت ہوا ہے

نظیر (iii) سے، $q \Rightarrow s$ ثابت ہوا ہے

اس طرح کیسوں کے ثبوت سے، $(r \vee s \vee t)$ ثابت ہوا ہے۔ یعنی $q \Rightarrow p$ ثابت ہوا ہے۔ بالواسطہ طور پر دیئے ہوئے

قضیہ کو ثابت کرتے ہیں جو کہ دیئے ہوئے قضیہ کے برابر ہوتا ہے۔

(i) تضاد کے ذریعے ثبوت (ریڈو سٹیواژ اب سردم): یہاں ہم یہ مانتے ہوئے شروع کرتے

ہیں کہ دیا ہوا بیان غلط ہے۔ منطق کے اصولوں سے، ہم ایک نتیجہ پر پہنچتے ہیں جو کہ مانے ہوئے ہیں کے متضاد ہے اور اس طرح ہم یہ اندازہ لگاتے ہیں کہ ہم نے جو مانا ہے وہ غلط ہے اور اس طرح دیا ہوا بیان درست ہے۔

ہم اب اس طریقے کو ایک مثال کے ذریعے سمجھاتے ہیں۔

مثال 5: دکھائیے کہ تمام مفرد اعداد لامحدود ہوتے ہیں۔

حل: مان لیجیے p تمام مفرد اعداد کا سیٹ ہے۔ ہم اس بیان کا التالیے ہیں ”تمام مفرد اعداد کا سیٹ لامحدود نہیں ہے“، یعنی ہم مانتے ہیں کہ تمام مفرد اعداد کا سیٹ محدود ہے۔ اس طرح، ہم تمام مفرد اعداد کی فہرست بنا سکتے ہیں۔ جیسے (مان لیجیے) $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ ۔ یہ نوٹ کر لیجیے کہ ہم نے یہ مانا ہے کہ کوئی بھی مفرد عدد $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ کے علاوہ نہیں ہے۔

$$N = (P_1 P_2 P_3 \dots P_k) + 1 \quad \dots (1)$$

N فہرست میں نہیں ہے کیونکہ N فہرست میں موجود کسی بھی نمبر سے بڑا ہے

N یا تو مفرد ہے یا غیر مفرد ہے

اگر N ایک مفرد عدد ہے، تب (1) سے ایسا ایک مفرد عدد موجود ہے جو فہرست میں موجود نہیں ہے۔

دوسری طرف، اگر N غیر مفرد عدد ہے، اس کا ایک مفرد تقسیم علیہ ہوگا۔ لیکن فہرست میں موجود کوئی بھی عدد N کو تقسیم نہیں

کر سکتا، کیونکہ سب میں 1 باقی پچتا ہے۔ اس لیے مفرد تقسیم علیہ فہرست میں 1 سے جدا ہونا چاہئے۔

اس طرح، ہمارا ماننا کہ تمام مفرد اعداد کا سیٹ محدود ہے غلط ہے۔

اس لیے، تمام مفرد اعداد کا سیٹ لامحدود ہے۔

نوٹ مشاہدہ کیجیے کہ اوپر کا ثبوت بھین نظیروں کے ثبوت کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

(ii) دیئے ہوئے بیان کے ضد مثبت کے استعمال سے ثبوت

ایک خسرہ کا ضد مثبت $p \Rightarrow q$ شرطی ثبوت دینے کی بجائے، ہم اس کے معادل ثابت کرتے ہیں، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$

(طلباء خود اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔)

خسرہ کا ضد مثبت تفاعل نتیجہ اور مفروضہ کو آپس میں بدلنے اور دونوں کو منفی کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 6 ثابت کیجیے کہ فنکشن $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = 2x + 5$ سے بیان کیا گیا ہے ایک - ایک ہے۔

حل ایک فنکشن ایک - ایک ہے اگر $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

اس کا استعمال کرے ہمیں دکھانا ہے کہ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow "x_1 = x_2" \Rightarrow q \Rightarrow p$ کی شکل کا ہے، جہاں

$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ، p ہے اور $x_1 = x_2$ ، q ہے۔ ہم اسے مثال 2 میں، ”براہ راست طریقہ“ سے ثابت کر چکے ہیں۔

ہم اسے بیان کے عکس تقابل استعمال کر کے بھی ثابت کر سکے ہیں۔ اب اس بیان کا عکس تقابل $\sim p \Rightarrow \sim q$ ہے یعنی،

عکس تقابل کا ”اگر $f(x_1) = f(x_2)$ تب $x_1 = x_2$ ہے“ اگر $f(x_1) \neq f(x_2)$ تب $x_1 \neq x_2$ ، تب $f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{array}{rcl} \text{اب} & & x_1 \neq x_2 \\ \Rightarrow & & 2x_1 \neq 2x_2 \\ \Rightarrow & & 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5 \\ \Rightarrow & & f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}$$

کیونکہ $\sim p \Rightarrow \sim q$ ، معادل ہے $q \Rightarrow p$ کے ثبوت مکمل ہے

مثال 7 دکھائیے کہ ”اگر ماترِس A قابلِ انعکس ہے، تب A غیر نادر ہے۔“

حل اوپر کے بیان کو علامتی طور پر لکھنے پر، ہمارے پاس ہے $p \Rightarrow q$ ، جہاں p ہے ”ماترِس A قابلِ انعکس ہے“ اور q ہے

”A ایک غیر نادر ہے“

دیئے ہوئے بیان کو ثابت کرنے کی بجائے ہم اس کا عکس تقابل ثابت کرتے ہیں، یعنی، اگر A ایک غیر نادر ماترِس ہے،

تب ماترِس A غیر قابلِ انعکس نہیں ہے۔

ایک A ایک غیر نادر ماترِس ہے، تب اس کا مطلب ہے کہ ماترِس A نادر ہے، یعنی،

$$|A| = 0$$

تب موجود نہیں ہے $A^{-1} = \frac{adj A}{|A|}$ کیونکہ $|A| = 0$ ہے۔

اس طرح، ہم نے ثابت کر دیا ہے کہ اگر A ایک غیر نادر ماترس نہیں ہے، تب A تقابلی تکلیس نہیں ہے، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ ۔
اس لیے، اگر ایک ماترس A تقلیلی ہے، تب A غیر نادر ہے۔

(iii) ایک منفی (Counter) مثال کے ذریعے ثبوت

ریاضی کی تاریخ میں، بہت سے ایسے مواقع موجود ہیں جہاں ایک بیان کا معتبر ثبوت معلوم کرنے کی تمام کوششیں ناکام رہی ہیں اور بیان کی حقیقی قدر کی بے اعتمادی حل نہیں ہو پائی ہے۔
اس طرح کے حالات میں، یہ ہمارے لیے بہتر کہ، ہم اس طرح کی ایک مثال معلوم کر لیں جہاں جو بیان کو غلط ثابت کر دے۔ وہ مثال جو بیان کو غلط ثابت کرتی ہے منفی مثال کہلاتی ہے۔ کیونکہ قضیہ کا غیر ثبوت $p \Rightarrow q$ لگ بھگ قضیہ کا ثبوت ہے۔ $\sim (p \Rightarrow q)$ اس لیے ثابت کرنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔

مثال 8: ہر ایک n کے لیے $2^{2^n} + 1$ ایک مفرد ہے ($n \in \mathbb{N}$)

ثبوت: یہ ایک بار سوچا تھا۔ صحیح ہوگا اس کو مدد نظر رکھتے ہوئے کہ

$$\text{ایک مفرد ہے } 2^1 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\text{ایک مفرد ہے } 2^2 + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$\text{ایک مفرد ہے } 2^3 + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

حالانکہ، پہلی نظر میں عام کیا ہوا صحیح لگتا ہے۔ لیکن، وقوعائی طور پر یہ دکھایا گیا تھا کہ

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$$

جو کہ منفرد نہیں ہے کیونکہ $4294967297 = 641 \times 6700417$ (دو اعداد کا حاصل ضرب)

اس لیے عام طور پر n کے لیے، $2^{2^n} + 1$ کافی ہے اس عام اصول کا غلط ثابت کرنے کے لیے۔ یہ ایک مخالف مثال ہے۔

اس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ عام اصول n کے لیے $2^{2^n} + 1$ ایک مفرد ہے ($n \in \mathbb{N}$) کے لیے، عام طور پر صحیح نہیں ہے۔

مثال 9: ہر مسلسل تفاعل تفرق پذیر ہے۔

ثبوت: ہم کچھ تفاعل پر غور کرتے ہیں جو دیئے گئے ہیں۔

$$(i) \quad f(x) = x^2$$

$$(ii) \quad g(x) = e^x$$

$$(iii) \quad h(x) = \sin x$$

یہ فنکشن x کی تمام قدروں کے لیے مسلسل ہیں۔ اگر ہم ان کی تفرق پذیری کی جانچ کریں، ہم نے دیکھا یہ x کی تمام قدروں کے لیے تفرق پذیر ہیں۔ یہ ہمیں اس بات پر یقین کرنے کے لیے مجبور کر دیتا ہے کہ عمومی طور پر ”ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہے“ صحیح ہو سکتا ہے۔ لیکن اگر ہم ایک فنکشن کی تفرق پذیری کی جانچ کریں جو کہ دیا گیا ہے ” $\phi(x)=|x|$ “ سے جو کہ مسلسل ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $x=0$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ بیان ”ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہے“ غلط ہے، عام طور پر۔ اس لمحہ پر ایک فنکشن ” $\phi(x)=|x|$ “ بیان کو غیر ثابت کرنے کے لیے کافی ہے۔ اس لیے ” $\phi(x)=|x|$ “ ایک مخالف مثال کہلاتی ہے اسے غیر ثابت کرنے کے لیے کہ ”ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہوتا ہے۔“

