अध्याय 13

घातांक और घात

13.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी का द्रव्यमान (mass) क्या है? यह 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg है!

क्या आप इस संख्या को पढ़ सकते हैं?

यूरेनस ग्रह (Uranus) का द्रव्यमान 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

किसका द्रव्यमान अधिक है–पृथ्वी या यूरेनस ग्रह?

सूर्य (Sun) और शनि (Saturn) के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m है तथा शनि और यूरेनस ग्रह के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m है। क्या आप इन संख्याओं को पढ़ सकते हैं? इनमें कौन-सी दूरी कम है?

ऐसी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना और इनकी तुलना करना कठिन होता है। इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने, समझने और इनकी तुलना करने के लिए, हम घातांकों (exponents) का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय में, हम घातांकों के बारे में सीखेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि इनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

13.2 घातांक

हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं।

निम्नलिखित को देखिए : $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

संक्षिप्त संकेतन 10^4 गुणनफल $10\times10\times10\times10$ को व्यक्त करता है। यहाँ, '10' **आधार (base)** और '4' **घातांक** कहलाता है। **10^4** को **10 की ऊपर घात (power) 4 या केवल 10 की चौथी घात पढ़ा जाता है। 10^4** को 10000 का **घातांकीय रूप (exponential form)** कहा जाता है।

हम इसी प्रकार 1000 को भी 10 की घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। चूँकि 1000 संख्या 10 का स्वयं से तीन बार गुणा है, इसलिए

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \text{ है।}$$

यहाँ, पुनः 10^3 संख्या 1000 का घातांकीय रूप है।

इसी प्रकार, $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ है।

अर्थात्, 10^5 संख्या 1,00,000 का घातांकीय रूप है।

इन दोनों उदाहरणों में, आधार 10 है। 10^3 में घातांक 3 है तथा 10^5 में घातांक 5 है।

हम संख्याओं को विस्तारित या प्रसारित रूप (expanded form) में लिखने के लिए 10, 100, 1000 इत्यादि जैसी संख्याओं का प्रयोग कर चुके हैं।

उदाहरणार्थ, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ है।

इसे $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

निम्नलिखित संख्याओं को इसी प्रकार लिखने का प्रयत्न कीजिए :

172, 5642, 6374

उपरोक्त सभी उदाहरणों में, हमने वे संख्याएँ देखी हैं जिनके आधार 10 हैं। परंतु आधार कोई भी संख्या हो सकती है। उदाहरणार्थ,

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ आधार 3 है और घातांक 4 है।

कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं। उदाहरणार्थ :

10^2, जो 10 के ऊपर घात 2 है, इसे 10 का वर्ग (10 squared) भी पढ़ा जाता है।

10^3, जो 10 के ऊपर घात 3 है, इसे 10 का घन (10 cubed) भी पढ़ा जाता है।

क्या आप बता सकते हैं कि 5^3 (5 के घन) का क्या अर्थ है?

5^3 का अर्थ 5 का स्वयं से तीन बार गुणा किया जाना है, अर्थात् $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः हम कह सकते हैं कि 125 संख्या 5 की तीसरी घात (third power) है।

5^3 में आधार तथा घातांक क्या हैं?

इसी प्रकार $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ है, जो 2 की पाँचवीं घात है।

2^5 में, 2 आधार है तथा घातांक 5 है।

प्रयास कीजिए

ऐसे पाँच और उदाहरण दीजिए, जहाँ एक संख्या को घातांकीय रूप में व्यक्त किया जाता है। प्रत्येक स्थिति में, घातांक व आधार की पहचान भी कीजिए।

इसी विधि के अनुसार, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$,

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

आप संक्षिप्त रूप में लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

$(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

यह $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

क्या $(-2)^4 = 16$ है? इसकी जाँच कीजिए।

कोई निश्चित संख्या लेने के स्थान पर, आइए किसी भी संख्या a को आधार लें तथा संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखें :

$a \times a = a^2$ (इसे 'a का वर्ग' या 'a के ऊपर घात 2' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a = a^3$ (इसे 'a का घन' या 'a के ऊपर घात 3' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (इसे a के ऊपर घात 4 या 'a की चौथी घात' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (इसे 'a के ऊपर घात 7' या 'a की सातवीं घात' पढ़ा जाता है)

इत्यादि।

$a \times a \times a \times b \times b$ को a^3b^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का घन गुणा b का वर्ग पढ़ा जाता है)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ को a^2b^4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का वर्ग गुणा b पर 4 घात पढ़ा जाता है)।

प्रयास कीजिए

व्यक्त कीजिए :

(i) 729 को 3 की घात के रूप में

(ii) 128 को 2 की घात के रूप में

(iii) 343 को 7 की घात के रूप में

उदाहरण 1 256 को 2 की घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

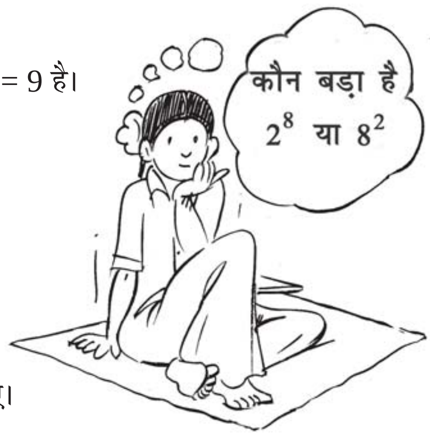
हल हमें प्राप्त है $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः हम कह सकते हैं कि $256 = 2^8$

उदाहरण 2 2^3 और 3^2 में कौन बड़ा है?

हल हमें प्राप्त है कि $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ है तथा $3^2 = 3 \times 3 = 9$ है।

चूँकि $9 > 8$ है, इसलिए 3^2 संख्या 2^3 से बड़ा है।



उदाहरण 3 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल $8^2 = 8 \times 8 = 64$ है।

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ है।

स्पष्टतया, $2^8 > 8^2$

उदाहरण 4 $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, और $b^3 a^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए। क्या ये सभी बराबर हैं?

हल

$$a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = (a \times a \times a) \times (b \times b) = a \times a \times a \times b \times b$$

$$a^2 b^3 = a^2 \times b^3 = a \times a \times b \times b \times b$$

$$b^2 a^3 = b^2 \times a^3 = b \times b \times a \times a \times a$$

$$b^3 a^2 = b^3 \times a^2 = b \times b \times b \times a \times a$$

ध्यान दीजिए कि पद $a^3\ b^2$ और $a^2\ b^3$ की स्थिति में, a और b की घातें भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार, $a^3\ b^2$ और $a^2\ b^3$ भिन्न-भिन्न हैं।

इसके विपरीत, $a^3\ b^2$ और $b^2\ a^3$ बराबर (एक ही) हैं, चूँकि इनमें a और b की घातें एक ही हैं। गुणनखंडों के क्रम से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस प्रकार, $a^3\ b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2\ a^3$ है।

इसी प्रकार $a^2\ b^3$ और $b^3\ a^2$ भी बराबर हैं।

उदाहरण 5 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

हल

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

इस प्रकार $72 = 2^3 \times 3^2$ (वांछित अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

या $432 = 2^4 \times 3^3$ (वांछित रूप)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

अतुल इस उदाहरण को निम्नलिखित विधि से हल करना चाहता है :

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$

$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (चूँकि $10 = 2 \times 5$ है)

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

क्या अतुल की विधि सही है?

(iv) $16000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000$ (चूँकि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$

(चूँकि $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

या, $16000 = 2^7 \times 5^3$

उदाहरण 6 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3$ और $(-5)^4$:

हल

(i) हमें प्राप्त है, $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि (–1) की कोई भी **विषम** घात (–1) के बराबर होती है तथा (–1) की कोई भी **सम** घात (+1) के बराबर होती है।

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$
$(-1)^{\text{सम संख्या}} = +1$

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :
(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :
(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$
(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :
(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, जहाँ भी संभव हो, बड़ी संख्या को पहचानिए:
(i) 4^3 या 3^4 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2
(iv) 100^2 या 2^{100} (v) 2^{10} या 10^2

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

6. सरल कीजिए :
(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4
(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरल कीजिए :
(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$
(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए :
(i) 2.7×10^{12}; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 घातांकों के नियम

13.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

(i) आइए $2^2 \times 2^3$ को परिकलित करें।

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

ध्यान दीजिए कि 2^2 और 2^3 में आधार एक ही (समान) है तथा घातांकों का योग, अर्थात् 2 और 3 का योग 5 है।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$
$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
$= (-3)^7$
$= (-3)^{4+3}$

पुनः ध्यान दीजिए कि आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $4 + 3 = 7$ है।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$
$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(टिप्पणी: आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $2 + 4 = 6$ है)

इसी प्रकार, सत्यापित कीजिए कि

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

तथा $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $2^5 \times 2^3$
(ii) $p^3 \times p^2$
(iii) $4^3 \times 4^2$
(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

क्या आप बॉक्स में उपयुक्त संख्या लिख सकते हैं ?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$

(याद रखिए, आधार एक ही है, b कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

यहाँ से हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि एक शून्येतर पूर्णांक a, के लिए, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

सावधानी!

$2^3 \times 3^2$ पर विचार कीजिए।

क्या आप घातांकों को जोड़ सकते हैं? नहीं! क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'? 2^3 का आधार 2 है और 3^2 का आधार 3 है। आधार एक समान नहीं हैं।

13.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

आइए $3^7 \div 3^4$ को सरल करें।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

इस प्रकार, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ है।

[ध्यान दीजिए कि 3^7 और 3^4 के आधार एक ही हैं और $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ हो जाता है।]

इस प्रकार, $$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

या, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ है।

मान लीजिए कि a कोई शून्येतर पूर्णांक है। तब,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4\quad 2}$$

या $\qquad a^4 \div a^2 = a^{4-2}$ है।

क्या अब आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं?

$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$

$a^8 \div a^5 = a^{\square}$

शून्येतर पूर्णांक b और c के लिए

$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$

$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $m > n$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए:
(उदाहरण के लिए, $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 एक घात की घात लेना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$\left(2^3\right)^2$ और $\left(3^2\right)^4$ को सरल कीजिए।

अब, का अर्थ है 2^3 का स्वयं से दो बार गुणा किया गया है।

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$$
$$= 2^{3+3} \qquad (\text{चूँकि } a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ है।})$$
$$= 2^6 = 2^{3\times 2}$$

अर्थात् $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

इसी प्रकार, $\qquad \left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$
$$= 3^{2+2+2+2}$$
$$= 3^8 \qquad (\text{देखिए कि 2 और 4 का गुणनफल 8 है।})$$
$$= 3^{2\times 4}$$

क्या आप बता सकते हैं कि $\left(7^2\right)^{10}$ किसके बराबर है?

अत:, $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$

$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$

प्रयास कीजिए

सरल करके, उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $6^2\ ^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$
(iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

$$\left(7^2\right)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$$

$$\left(a^2\right)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(a^m)^3 = a^{m \times 3} = a^{3m}$$

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए,

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

उदाहरण 7 क्या आप बता सकते हैं कि $(5^2) \times 3$ और $\left(5^2\right)^3$ में से कौन बड़ा है?

हल $(5^2) \times 3$ का अर्थ है कि 5^2 को 3 से गुणा किया गया है, अर्थात् यह $5 \times 5 \times 3 = 75$

परंतु $\left(5^2\right)^3$ का अर्थ है कि 5^2 का स्वयं से तीन बार गुणा किया गया है, अर्थात् यह

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15625 \text{ है।}$$

अतः, $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$ है।

13.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

क्या आप $2^3 \times 3^3$ को सरल कर सकते हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों पदों 2^3 और 3^3 के आधार भिन्न-भिन्न हैं। परंतु इनके घातांक समान हैं।

अब $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (देखिए 6 आधारों 2 और 3 का गुणनफल है)

देखिए $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

साथ ही, देखिए $3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (ध्यान दीजिए : $3 \times a = 3a$)

इसी प्रकार $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (ध्यान दीजिए कि $a \times b = ab$ है)

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक के लिए,

$a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है जहाँ, m एक पूर्ण संख्या है

उदाहरण 8 निम्नलिखित पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

हल

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

प्रयास कीजिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

13.3.5 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्नलिखित सरलीकरणों को देखिए :

(i) $\frac{2^4}{3^4} \quad \frac{2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}{3\ \ 3\ \ 3\ \ 3} \quad \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\frac{a^3}{b^3} \quad \frac{a\ \ a\ \ a}{b\ \ b\ \ b} \quad \frac{a}{b}\ \frac{a}{b}\ \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

इन उदाहरणों से, हम कह सकते हैं कि व्यापक रूप में,

$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक हैं तथा m

प्रयास कीजिए

$a^m \quad b^m \quad \frac{a}{b}^{\,m}$

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

उदाहरण 9 (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{4}{7}\right)^5$

हल

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

(ii) $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{(\ \ 4)^5}{7^5} = \frac{(\ \ 4)\ \ (\ \ 4)\ \ (\ \ 4)\ \ (\ \ 4)\ \ (\ \ 4)}{7\ \ \ 7\ \ \ 7\ \ \ 7\ \ \ 7}$

- **शून्य घातांक वाली संख्याएँ**

$$\frac{3^5}{3^5}$$

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$$

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$

$3^0 = 1$

7^0

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

$$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} \quad 1$$

$7^0 = 1$

$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} \quad \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} \quad 1$$

$a^0 = 1$ (a)

0

1

> a^o
>
> $2^6 = 64$
> $2^5 = 32$
> $2^4 = 16$
> $2^3 = 8$
> $2^2 = ?$
> $2^1 = ?$
> $2^o = ?$
>
> 2^o
>
> $2^o = 1$
>
> $3^6 = 729$,
> $3^5, 3^4, 3^3, \ldots$
> 3^o

13.4 घातांकों के नियमों का विविध उदाहरणों में प्रयोग

उदाहरण 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ 2

हल $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times 4}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2^{12}$

उदाहरण 11

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $((2^2)^3 \times 3^6) \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

हल (i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times 3^5 = \left(3^{7-2}\right)\times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2\times5)^5 = 10^5$

(iii) $\left(6^2 \times 6^4\right) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$$= \frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= \left(2\times3\right)^6 \times 5^6$

$= \left(2\times3\times5\right)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरण 12

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \quad 3^4 \quad 2^5}{9 \quad 4^2}$

हल (i)

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{2^2 \quad 3 \ ^4 \qquad 3^2 \ ^3 \quad 2^2}{2 \quad 3 \ ^3 \qquad 2^3 \ ^2 \quad 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \quad (3)^4 \quad 3^{2\times3} \quad 2^2}{2^3 \quad 3^3 \quad 2^{2\times3} \quad 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8 \ \ 2} \quad 3^{4 \ \ 6}}{2^{3 \ \ 6} \quad 3^{3 \ \ 3}} \quad \frac{2^{10} \quad 3^{10}}{2^9 \quad 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(ii) $\dfrac{2 \quad 3^4 \quad 2^5}{9 \quad 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \ 2^2 \ ^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \ \ 2}}$

$= \dfrac{2^{1 \ \ 5} \quad 3^4}{2^4 \quad 3^2} = \dfrac{2^6 \quad 3^4}{2^4 \quad 3^2} = 2^{6 \ \ 4} \quad 3^{4 \ \ 2}$

$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

टिप्पणीः

प्रश्नावली 13.2

1.

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $5^2 \quad ^3 \quad 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20} \div 2^{15}\right) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2.

(i) $\dfrac{2^3 \quad 3^4 \quad 4}{3 \quad 32}$ (ii) $5^2 \quad ^3 \quad 5^4 \quad 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\dfrac{a^5}{a^3} \quad \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \quad a^8 b^3}{4^5 \quad a^5 b^2}$ (xii) $\left(2^3 \times 2\right)^2$

3.

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4.

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5.

(i) $\dfrac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \quad 10^5 \quad 25}{5^7 \quad 6^5}$

13.5 दशमलव संख्या पद्धति

47561

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

10

$$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

[$10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ and $1 = 10^0$]

$$104278 = 1 \times 100{,}000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

10 5

0

13.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

प्रयास कीजिए

10

(i) 172
(ii) 5643
(iii) 56439
(iv) 176428

1. (Milky Way Galaxy) 300,000,000,000,000,000,000 m
2. 100,000,000,000
3. 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$
$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$
$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$$

मानक रूप (standard form)

1.0 10.0 1.0

10

$5985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ 5985

5985 59.85 × 100 59.85×10^2

5985

$5985 = 0.5985 \times 10000 = 0.5985 \times 10^4$ 5985

300,000,000,000,000,000,000 m

$3.0 \times 100{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$ m $= 3.0 \times 10^{20}$ m

40,000,000,000

10

$40{,}000{,}000{,}000 = 4.0 \times 10^{10}$

= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg

25

= 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg

10

1,433,500,000,000 m 1.4335×10^{12} m

1,439,000,000,000 m 1.439×10^{12} m

149, 600,000,000 m 1.496×10^{11} m

उदाहरण 13

(i) 5985.3 (ii) 65950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

हल

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65950 = 6.595 \times 10000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3{,}430{,}000 = 3.43 \times 1000{,}000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70{,}040{,}000{,}000 = 7.004 \times 10{,}000{,}000{,}000 = 7.004 \times 10^{10}$

1 10

11 10

11 – 1 = 10 10 4 – 1 = 3

प्रश्नावली 13.3

1.

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2.

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0\times 10^2 + 4\times 10^1 + 5\times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5\times 10^3 + 3\times 10^2 + 2\times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7\times 10^2 + 5\times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2\times 10^2 + 3\times 10^1$

3.

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4.

(a) 384,000,000 m

(b) 300,000,000 m/sec.

(c) 12756000 m

(d) 1,400,000,000 m

(e) 100,000,000,000

(f) 12,000,000,000

(g) 300,000,000,000,000,000,000 m

(h) 1.8 g 60,230,000,000,000,000,000,000 (molecules)

(i) 1,353,000,000 km^3

(j) 2001 1,027,000,000

हमने क्या चर्चा की?

1.

2.

$10000 = 10^4$ (10 4)

$243 = 3^5$, $128 = 2^7$.

10, 3 2 4, 5 7

10 10000 3 243

3.

a b m n

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m > n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(f) $a^\circ = 1$

(g) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$