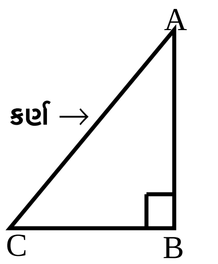
૮–ત્રિકોણમિતિનો પરિચય

સંકલન : રજનીકાંત સી. ચાવડા
આચાર્યશ્રી – શ્રી મુરલીધર માધ્યમિક શાળા
દાતાર રોડ, જુનાગઢ. મો. ૯૪૨૭૪ ૧૨૨૩૧

❖ **આટલું સમજીએ અને યાદ રાખીએ :**

- ગણિતશાસ્ત્રની એક શાખા ત્રિકોણમિતિમાં આવતી ગાણિતિક પદ્ધતિઓના ઉપયોગથી અંતર અને ઊંચાઇ શોધી શકાય છે.
- પ્રાચીન સમયમાં ખગોળશાસ્ત્રીઓ ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી તારાઓ અને ગ્રહોનું અંતર શોધવા માટે કરતાં હતા.
- આજે પણ યંત્રશાસ્ત્ર અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં વપરાતી પ્રોદ્યોગિકીની નવીન પદ્ધતિઓ ત્રિકોણમિતિની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત છે.
- અંગ્રેજી શબ્દ 'Trigonometry' એ ત્રણ ગ્રીક શબ્દો 'Tri' (ત્રણ) 'Gon' (બાજુ) અને 'Metron' (માપ)ના સંયોજનથી બનેલ છે. ખરેખર તો ત્રિકોણમિતિ ત્રિકોણની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ છે.
- આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લઈએ, જેમાં $\angle B$ કાટખૂણો છે. $\angle A$ અને $\angle C$ લઘુકોણ છે. AC એ કર્ણ છે. BC એ $\angle A$ ની સામેની બાજુ અને AB એ $\angle A$ ની પાસેની બાજુ છે. એજ રીતે AB એ $\angle C$ ની સામેની બાજુ અને BC એ $\angle C$ ની પાસેની બાજુ છે.



- કાટકોણ ΔABC માં $\angle A$ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરાય.

(1) $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{BC}{AC}$

(2) $\cos A = \dfrac{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{AB}{AC}$

(3) $\tan A = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \dfrac{BC}{AB}$

(4) $\cot A = \dfrac{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}} = \dfrac{AB}{BC}$

(5) $\sec A = \dfrac{\text{કર્ણ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \dfrac{AC}{AB}$

(6) $\text{cosec}A = \dfrac{\text{કર્ણ}}{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}} = \dfrac{AC}{BC}$

❖ **ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરના સંબંધો :**

(1) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ (2) $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

(3) $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$ (4) $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

(5) $\cos ecA = \dfrac{1}{\sin A}$ (6) $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$

(7) $\sin A = \dfrac{1}{\cos ecA}$ (8) $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$

(9) tan A . cotA = 1 (10) cosecA . sinA = 1

(11) sec A . cosA = 1

❖ **0^0, 30^0, 45^0, 60^0 અને 90^0 ના ખૂણાના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યો.**

ખૂણો / ત્રિકોણ મિતીય ગુણોત્તર	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin θ	0 $\left(\sqrt{\frac{0}{4}}\right)$	$\frac{1}{2}$ $\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\sqrt{\frac{2}{4}}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$	1 $\left(\sqrt{\frac{4}{4}}\right)$
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયીત
cot θ	અવ્યાખ્યાયીત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયીત
cosecθ	અવ્યાખ્યાયીત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

❖ **કોટીકોણ :**

sin (90-θ) = cosθ, cos (90-θ) = sinθ

tan (90-θ) = cotθ, cot (90-θ) = tanθ

sec (90-θ) = cosecθ, cosec (90-θ) = secθ

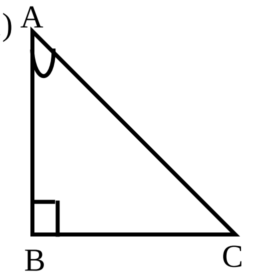
❖ **ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ મેળવવા**

જો ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો હોય તો

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ .... (1)

સમીકરણ (1) ના દરેક પદને AC^2 વડે ભાગતાં

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$



$\therefore \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore$ $\cos^2A + \sin^2A = 1$ .... (2)

સમીકરણ (1) **ના દરેક પદને** AB^2 **વડે ભાગતાં**

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\therefore\ 1 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$\therefore$ $1 + \tan^2A = \sec^2A$ ...... (3)

સમીકરણ (1) **ના દરેક પદને** BC^2 **વડે ભાગતાં**

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

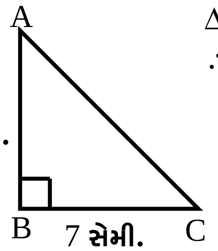
$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + 1 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$\therefore$ $\cot^2A + 1 = \text{cosec}^2A$ ...... (4)

અહીં સમીકરણ 2, 3 **અને** 4 **ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ છે.**

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ • $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
  $\therefore \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ $\therefore 1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$
  $\therefore \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ $\therefore \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
- $\cot^2A + 1 = \text{cosec}^2A$
  $\therefore 1 = \text{cosec}^2A - \cot^2A$
  $\therefore \cot^2A = \text{cosec}^2A-1$

Ex.1 ΔABC **માં** $\angle B$ **કાટખૂણો છે.** AB=24 **સેમી,** BC=7 **સેમી હોય તો નીચેના ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધો.**
(1) sinA, cosA (2) sinc, cosc



ΔABC **માં** $\angle B$ **કાટખૂણો છે.**
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$
$= (24)^2 + (7)^2$
$= 576 + 49$
$= 625$
$\therefore AC = 25$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

Ex. 1 ની રીતે ગણતરી કરો.

(1) **જો** $\tan A = \frac{4}{3}$ **હોય, તો ખૂણા** A **ના અન્ય ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો શોધો.**

(2) **જો** $\sin A = \frac{3}{4}$ **તો** cosA **તથા** tanA **ની ગણતરી કરો.**

(3) **જો** 15 cotA = 8 **આપેલ હોય, તો** sinA **અને** secA **શોધો.**

(4) ΔABC **માં** $\angle B$ **કાટખૂણો છે. જો** $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **હોય, તો**
(1) sinA . cosC + cosA . sinC
(2) cosA cosC - sinA sinC **ના મૂલ્યો શોધો.**

(5) ΔPQR **માં** $\angle Q$ **કાટખૂણો છે.** PR+QR = 25 **સેમી અને** PQ=5 **સેમી. છે.** sinP, cosP **અને** tanP **શોધો.**

❖ **ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોના ખૂણાઓની કિંમતોનો ઉપયોગ**

Ex. 2 કિંમત શોધો. $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = = \frac{4}{4} = 1 \leftarrow \text{Ans.}$$

Ex. 2 ની રીતે ગણો.

(6) **કિંમત શોધો.** $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

(7) **કિંમત શોધો.** $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

(8) **કિંમત શોધો.** $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \cos ec 60^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

(9) **કિંમત શોધો.** $\sin 60^0 . \sin 45^0 + \cos 60^0 \cos 45^0$

(10) **કિંમત શોધો.** $2\sin^2 30^0 \cot 30^0 - 3\cos^2 60^0 \sec^2 30^0$

(11) **જો** $\theta = 30^0$ **તો ચકાસો કે** $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin 3\theta$

❖ **કોટીકોણના દાખલા** ❖

Ex. 3 સાબિત કરો કે

$\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$

ડા.બા. $= \cos 38^0 . \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0$
$= \cos 38^0.\cos 52^0 - \cos(90-38^0).\cos(90-52^0)$
$= \cos 38^0.\cos 52^0 - \cos 52^0 . \cos 38^0$
$= 0$
= જ.બા.

Ex. 3 ની રીતે ગણો.

(12) **કિંમત શોધો.**

$$2\left[\frac{\cos 58^0}{\sin 32^0}\right] - \sqrt{3}\left[\frac{\cos 38^0 \cos ec 52^0}{\tan 15^0 \tan 60^0 \tan 75^0}\right]$$

(13) કિંમત શોધો. $\frac{\tan 26^0}{\cot 64^0}$

(14) સાબિત કરો કે $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$

(15) જો 4A **એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા**
$\sec 4A = \text{cosec}(A-20^0)$ **તો** A **ની કિંમત શોધો.**

(16) સાબિત કરો કે

$$\frac{\cos 50^0}{\sin 40^0} + \frac{\sin 42^0}{\cos 48^0} - \frac{2\tan 18^0}{\cot 72^0} = 0$$

(17) કિંમત શોધો. $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

❖ **ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમના ઉપયોગ** ❖

Ex. 4 સાબિત કરો કે

sec A (1-sin A) (secA + tanA) = 1

ડા.બા. = sec A (1-sinA) (secA + tanA)

$$=\frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\left[\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$=\frac{(1-\sin A)}{\cos A}\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$$

$$=\frac{(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$ **= 1 = જ.બા.**

Ex. 4 ની રીતે ગણો.

(18) સાબિત કરો કે $\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \cdot \sec^2\theta$

(19) સાબિત કરો કે

$(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

(20) સાબિત કરો કે $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

(21) સાબિત કરો કે $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$

(22) સાબિત કરો કે

$(\sin A + \operatorname{cosec}A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(23) સાબિત કરો કે

$\tan^2 A - \tan^2 B$

$=\frac{\cos^2 B-\cos^2 A}{\cos^2 B\cos^2 A}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A.\cos^2 B}$

(24) સાબિત કરો કે

$$\frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A}+\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}=\frac{2}{\sin^2 A-\cos^2 A}=\frac{2}{1-2\cos^2 A}=\frac{2}{2\sin^2 A-1}$$

❖ મહાવરાના દાખલા ❖

(1) **જો** $\cos A = \frac{7}{25}$ **તો** $\tan A + \cot A$ **ની કિંમત શોધો.**

(2) **જો** $\sin\theta=\frac{1}{3}$ **તો** $2\cot^2\theta + 2$ **ની કિંમત શોધો.**

(3) **જો** $\sec^2\theta(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = K$ **તો** K **ની કિંમત શોધો.**

(4) **જો** $5x = \sec\theta$ **અને** $\frac{5}{x}=\tan\theta$ **તો** $5\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ **ની કિંમત શોધો.**

(5) **જો** $\operatorname{cosec}\theta = 2x$ **અને** $\tan\theta = \frac{2}{x}$ **તો** $2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ **ની કિંમત શોધો.**

(6) $\tan^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ **તો** θ = ...

(7) **જો** $\tan 7\theta \cdot \tan 3\theta = 1$ **તો** θ = ...

(8) $5\cos A = 4\sin A$ **તો** $\tan A$ = ...

(9) **જો** 7θ **અને** 2θ **લઘુકોણના માપ હોય તથા** $\sin 7\theta = \cos 2\theta$ **તો** θ = ...

(10) **જો** $\frac{\sin 4A}{\sin 5A}=\tan 4A$ **હોય તો** A = ...

(11) **જો** $16\cot x = 12$ **તો** $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ = ...

(12) **જો** $15\tan^2\theta + 4\sec^2\theta = 23$ **તો** $\tan^2\theta$ = ...

(13) $\cot^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$ = ...

(14) $1-2\sin^2 30^0$ = ...

(15) $\frac{1}{\sin^2\theta}-1$ = ...

❖ જવાબ ❖

(1) $\sin A=\frac{4}{5},\cos A=\frac{3}{5},\cot A=\frac{3}{4},\operatorname{cosec}A=\frac{5}{4}$

$\sec A=\frac{5}{3},\sin\theta=\frac{5}{13},\cos\theta=\frac{12}{13},\tan\theta=\frac{5}{12}$

$\cot\theta=\frac{12}{5},\operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{5},\sec\theta=\frac{13}{12}$

(2) $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4},\tan A=\frac{3}{\sqrt{7}}$

(3) $\sin A=\frac{15}{17},\sec A=\frac{17}{8}$ (4) (i) 1 (ii) 0

(5) $\sin P=\frac{12}{13},\cos P=\frac{5}{13},\tan P=\frac{12}{5}$ (6) 2

(7) $\frac{67}{12}$ (8) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (9) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(10) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ (12) 1 (13) 1 (14) A = 22 (17) 1

---

(1) $\frac{625}{168}$ (2) 18 (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 45 (7) 9

(8) $\frac{5}{4}$ (9) 10 (10) 10 (11) $\frac{1}{7}$ (12) 1 (13) -1

(14) $\cos 60^0$ (15) $-\frac{1}{2}$ (16) $\cot^2\theta$