1. $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ **નું x પ્રત્યે વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\right)\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\frac{d}{dx}\left(x^2+a^2\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)\left\{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)\left\{\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

2. $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \quad \left(\because -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{8} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{8}\right)$$

$\therefore \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ થાય.

$$\therefore y = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

3. $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(\sec x + \tan x)\right)$$

$$= \frac{1}{1 + (\sec x + \tan x)^2}\left(\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)\right)$$

$$= \frac{1\,(\sec x \tan x + \sec^2 x)}{1 + \sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \sec x)}{\sec^2 x + \sec^2 x + 2\sec x \tan x} \quad (\because\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$$

$$= \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{2\sec x\,(\sec x + \tan x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

4. $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ **અને** $\frac{a}{b}\tan x > -1$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{a\cos x}{b\cos x} - \frac{b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x}{b\cos x} + \frac{a\sin x}{b\cos x}}\right)$$ ($\because$ અંશ તથા છેદના દરેક પદને $b\cos x$ વડે ભાગતાં)

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)\tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha - \tan x}{1 + \tan\alpha \cdot \tan x}\right)$$ જ્યાં $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ છે.

$\therefore \tan^{-1}(\tan(\alpha - x))$

$\therefore y = \alpha - x$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1$$

5. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{4x^3 - 3x}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{4x^3 - 3x}\right)$

અહીં, $x = \cos\theta$ મૂકો.

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}\right)$$

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 3\theta}\right)$$

$= \sec^{-1}(\sec 3\theta)$

$= 3\theta$

$y = 3\cos^{-1}x \qquad (\because\ x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6. **આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે** $\frac{dy}{dx}$ **મેળવો :** $x = t + \frac{1}{t},\ y = t - \frac{1}{t},\ t \in R - \{0\}$

➡ $y = t - \frac{1}{t}$ | $x = t + \frac{1}{t}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = 1 - \left(\frac{-1}{t^2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{t^2}$

$= \frac{t^2 + 1}{t^2}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$

$= \frac{t^2 - 1}{t^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ (∵ પ્રાચલ વિધેયનું વિકલિત)

$= \frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 - \frac{1}{t^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$

7. **ગર્ભિત વિધેયના વિકલિતના નિયમ મુજબ નીચેના વિકલિતો મેળવો : $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$**

➡ $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$

$\therefore x^2 + y^2 = \tan^{-1} a$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ (અચળનું વિકલિત)

$\therefore x + y \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore y \frac{dy}{dx} = -x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

8. **ગર્ભિત વિધેયના વિકલિતના નિયમ મુજબ નીચેના વિકલિતો મેળવો : $(x^2 + y^2)^2 = xy$**

➡ $(x^2 + y^2)^2 = xy$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore 2(x^2 + y^2)\left(\frac{d}{dx}(x^2 + y^2)\right) = x\frac{dy}{dx} + y$

$\therefore 2(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = x\frac{dy}{dx} + y(1)$

$\therefore 4x^3 + 4xy^2 + 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$

$\therefore \left(4x^2y + 4y^3 - x\right)\frac{dy}{dx} = y - 4x^3 - 4xy^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x^3 - 4xy^2}{4x^2y + 4y^3 - x}$

9. **વિધેય $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ નું $x = 1$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 1$

$= 1 + 2 - 1$

$\therefore f(1) = 2$ ....(i)

હવે $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} (h + 1)^3 + 2(h + 1)^2 - 1$

$= (0 + 1)^3 + 2(0 + 1)^2 - 1$

$= 1 + 2 - 1$

$= 2$

આમ, જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ ....(ii)

તથા $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} (1 - h)^3 + 2(1 - h)^2 - 1$

$= (1 - 0)^3 + 2(1 - 0) - 1$

$= 1 + 2 - 1$

$= 2$

આમ, ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ ....(iii) $\therefore$ પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 1$ માટે સતત છે.

10. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 2$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^+} 3x + 5$

$= \lim_{h \to 0} 3(2 + h) + 5$

$= 3(2 + 0) + 5$

$= 6 + 5$

$= 11$

તથા ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^-} x^2$

$= \lim_{h \to 0} (2 - h)^2$

$= (2 - 0)^2$

$= 4$

આમ, $f(x)$ વિધેયનું જ.બા.નું લક્ષ $\neq$ ડા.બા.નું લક્ષ

$\therefore$ $x = 2$ માટે $f(x)$ નું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવે નહીં.

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 2$ માટે અસતત છે.

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(2x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 0$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(0) = 5$ છે.

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos(2(0 + h))}{(0 + h)^2}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos(2h)}{h^2}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{2\sin^2 h}{h^2}$ $(\because 1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2\theta)$

$= 2\left(\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h}\right)^2$

$= 2(1)$

$= 2$

આમ, જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$ થાય.

$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$ થાય છે.

$\therefore f(x)$ એ $x = 0$ માટે અસતત વિધેય છે.

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ **$f(x)$ નું $x = 2$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(2) = 5$ ....(i)

હવે $2x^2 - 3x - 2$

$= 2x^2 - 4x + x - 2$

$= 2x(x - 2) + 1(x - 2)$

$= (2x + 1)(x - 2)$

$\therefore f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2}$

$\therefore f(x) = 2x + 1$

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^+} 2x + 1$

$= \lim_{h \to 0} 2(2 + h) + 1$

$= 2(2 + 0) + 1$

$= 5$ ....(ii)

ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 2^-} 2x + 1$

$= \lim_{h \to 0} 2(2 - h) + 1$

$= 2(2 - 0) + 1$

$= 5$

$\therefore$ ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ ....(iii)

આમ, પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

$\therefore$ સાતત્યની વ્યાખ્યા મુજબ વિધેય $f(x)$ એ $x = 2$ માટે સતત છે, તેમ કહેવાય.

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 4|}{2(x - 4)}, & x \neq 4 \\ 0, & x = 4 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 4$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(0) = 4$

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 4^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 4^+} \dfrac{|x - 4|}{2(x - 4)}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{|4 + h - 4|}{2(4 + h - 4)}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{|h|}{2(h)}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

આમ, $\lim_{x \to 4^+} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 4$ માટે અસતત છે.

14. $f(x) = \begin{cases} 3x - 8, & x \leq 5 \\ 2k, & x > 5 \end{cases}$ **જો $f(x)$ એ $x = 5$ માટે સતત હોય તો k મેળવો.**

➡ આપેલ વિધેય $f(x)$ એ $x = 5$ માટે સતત છે.

$\therefore \lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$

$\therefore \lim_{x \to 5} 3x - 8 = 2k$

$\therefore 3(5) - 8 = 2k$

$\therefore 2k = 15 - 8$

$\therefore 2k = 7$

$\therefore k = \frac{7}{2}$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x+2} - 16}{4^x - 16}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ **જો $f(x)$ એ $x = 2$ માટે સતત હોય તો k મેળવો.**

➡ અહીં $f(x)$ એ $x = 2$ માટે સતત છે.

$\therefore f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

$$\therefore k = \lim_{x \to 2} \frac{2^{x+2} - 16}{4^x - 16}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2^2(2^x - 4)}{(2^x)^2 - (4)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4(2^x - 4)}{(2^x + 4)(2^x - 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4}{2^x + 4}$$

$$= \frac{4}{2^2 + 4}$$

$$= \frac{4}{8}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + kx} - \sqrt{1 - kx}}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{2x + 1}{x - 1}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, **જો $f(x)$ એ $x = 0$ માટે સતત હોય તો k મેળવો.**

➡ અહીં, $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, 0 \leq x < 1$

$$\therefore f(0) = \frac{2(0) + 1}{0 - 1}$$

$0 + 1$

$= \frac{}{0 - 1}$

$\therefore f(0) = -1$

હવે $f(x)$ એ $x = 0$ માટે સતત છે.

$\therefore f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

$\therefore -1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + kx} - \sqrt{1 - kx}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+kx} - \sqrt{1-kx})(\sqrt{1+kx} + \sqrt{1-kx})}{x(\sqrt{1+kx} + \sqrt{1-kx})}$

($\because$ સંમેયકારક અવયવ વડે ગુણતાં)

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + kx) - (1 - kx)}{x(\sqrt{1+kx} + \sqrt{1-kx})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2kx}{x(\sqrt{1+kx} + \sqrt{1-kx})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2k}{\sqrt{1+kx} + \sqrt{1-kx}}$

$= \frac{2k}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}}$

$= \frac{2k}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}$

$\therefore -1 = \frac{2k}{2}$

$\therefore k = -1$ થાય.

17. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(kx)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$, **જો $f(x)$ એ $x = 0$ માટે સતત હોય તો k મેળવો.**

➡ અહીં, સાતત્યની વ્યાખ્યા મુજબ $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ થાય.

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(kx)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\frac{4}{k^2}}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{kx}{2}\right)}{\left(\frac{kx}{2}\right)}\right]^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{2k^2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore k^2 = 1$

$\therefore k = \pm 1$

18. વિધેય $f(x)$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x| + 2x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$, **બતાવો કે k ના કોઈપણ મૂલ્યે $f(x)$ એ બિંદુ $x = 0$ માટે અસતત છે.**

➡ અહીં, જ.બા.નું લક્ષ = $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x| + 2x^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 + h}{|0 + h| + 2(0 + h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h + 2h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(1 + 2h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 2h}$$

$$= \frac{1}{1 + 2(0)}$$

આમ, $\lim_{h \to 0^+} f(x) = 1$ ....(i)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x| + 2x^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0 - h)}{|0 - h| + 2(0 - h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h + 2h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(1 + 2h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1 + 2h}$$

$$= \frac{-1}{1 + 0}$$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ ....(ii)

➡ અહીં, જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x| + 2x^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 + h}{|0 + h| + 2(0 + h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h + 2h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(1 + 2h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 2h}$$

$$= \frac{1}{1 + 2(0)}$$

આમ, $\lim_{h \to 0^+} f(x) = 1$ ....(i)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x| + 2x^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0 - h)}{|0 - h| + 2(0 - h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h + 2h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(1 + 2h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1 + 2h}$$

$$= \frac{-1}{1 + 0}$$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ ....(ii)

19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ વાસ્તવિક વિધેય છે. તો $y = f(f(x))$ કયા બિંદુએ અસતત છે ?

➡ અહીં, $f(f(x))$

$$= f\left(\frac{1}{x + 2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x + 2}\right) + 2}$$

$$= \frac{x + 2}{1 + 2(x + 2)}$$

$\therefore f(f(x)) = \dfrac{x + 2}{2x + 5}$

અહીં, $f(f(x))$ અવ્યાખ્યાયિત હોય તો તે સતત ન હોઈ શકે.

આમ $f(f(x))$ એ $2x + 5 = 0$ માટે અવ્યાખ્યાયિત થશે.

$\therefore 2x + 5 = 0, \quad x = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(f(x))$ એ $x = -\dfrac{5}{2}$ માટે અસતત વિધેય કહેવાય.

20. વિધેય $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + t - 2}$ જ્યાં $t = \dfrac{1}{x - 1}$ એ x ના કયા મૂલ્યો માટે અસતત હોય છે ?

➡ અહીં, $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + t - 2}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x - 1}\right)^2 + \frac{1}{x - 1} - 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x - 1} - 2}$$

$$= \frac{(x - 1)^2}{1 + x - 1 - 2(x - 1)^2}$$

$f(x)$ અવ્યાખ્યાયિત હોય તો જ તે અસતત થાય.

$\therefore 1 + x - 1 - 2(x^2 - 2x + 1) = 0$ થાય.

$\therefore\ x - 2x^2 + 4x - 2 = 0$
$\therefore\ -2x^2 + 5x - 2 = 0$
$\therefore\ 2x^2 - 5x + 2 = 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x - x + 2 = 0$
$\therefore\ 2x\ (x - 2) - 1(x - 2) = 0$
$\therefore\ (2x - 1)(x - 2) = 0$
$\therefore\ 2x - 1 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$
$\therefore\ x = \frac{1}{2}$ અથવા $x = 2$
આમ, આપેલ વિધેય $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 2$ માટે અસતત છે.

21. સાબિત કરો કે, $f(x) = |\sin x + \cos x|$ એ $x = \pi$ માટે સતત છે, તેમ બતાવો.

➡ અહીં, $f(x) = |\sin x + \cos x|$
હવે $g(x) = \sin x + \cos x$ લેતાં,
$\therefore\ h(x) = |x|$ થાય.
$\therefore\ f(x) = hog\,(x)$
$= h(\sin x + \cos x)$
$= |\sin x + \cos x|$
અહીં, $g(x)$ એ $\sin x$ અને $\cos x$ સરવાળા વિધેય છે માટે $\sin x$ તથા $\cos x$ સતત વિધેય હોવાથી તેમનું સરવાળા વિધેય પણ સતત વિધેય થશે.
$\therefore\ g(x)$ સતત વિધેય થાય તથા $h(x) = |x|$ પણ સતત વિધેય છે.
$\therefore\ h$ અને g નું સંયોજિત વિધેય સતત વિધેય થશે.
$\therefore\ f(x) = |\sin x + \cos x|$ પ્રત્યેક x માટે સતત વિધેય છે.
$\therefore\ f(x)$ એ $x = \pi$ માટે સતત છે તેમ કહેવાય.

22. $2^{\cos^2 x}$ નું x પ્રત્યે વિકલિત મેળવો.

➡ $y = 2^{\cos^2 x}$ લેતાં,
બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,
$\therefore\ \log_e y = \cos^2 x \cdot \log_e^2$
હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,
$$\therefore\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log_e^2 \left(\frac{d}{dx}\cos^2 x\right)$$
$$= \log_e^2 \left\{2\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)\right\}$$
$$= \log_e^2\ \{-2\ \sin x\ \cos x\}$$
$$\therefore\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -(\log_e^2)\ \sin(2x)$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\,y\ (\log_e^2)\ \sin(2x)$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\,2^{\cos^2 x}\ (\log_e^2)\ \sin(2x)$$

23. $y = \frac{8^x}{x^8}$ નું વિકલિત મેળવો.

➡ $y = \frac{8^x}{x^8}$
$$\therefore\ \log y = \log\left(\frac{8^x}{x^8}\right)$$

$= \log (8^x) - \log (x^8)$

$\therefore \log y = x \log 8 - 8 \log x$ (લઘુગુણકના કાર્ય નિયમ મુજબ)

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = [(\log 8)(1)] - 8\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\log 8 - \frac{8}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{8^x}{x^8}\left(\log 8 - \frac{8}{x}\right)$$

24. $y = \log\left[\log\left(\log(x)^5\right)\right]$ નું વિકલિત મેળવો.

➥ $y = \log\left[\log\left(\log(x)^5\right)\right]$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log\left(\log x^5\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\log\left(\log(x)^5\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\log\left(\log x^5\right)}\left\{\frac{1}{\log x^5}\right\}\left(\frac{d}{dx}\log(x^5)\right)$$

$$= \frac{1}{\log\left(\log x^5\right)} \cdot \left(\frac{1}{\log x^5}\right) \cdot \frac{d}{dx}(5 \cdot \log x)$$

$$= \frac{1}{\log\left(\log x^5\right) \cdot \log\left(x^5\right)} \cdot \left\{\frac{5}{x}\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5}{x \log\left(\log x^5\right) \log(x^5)}$$

25. $y = \sin(\sqrt{x}) + (\cos\sqrt{x})^2$ નું વિકલિત મેળવો.

➥ $y = \sin(\sqrt{x}) + (\cos\sqrt{x})^2$

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{d}{dx}\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + 2\cos\left(\sqrt{x}\right)\left(-\sin\sqrt{x}\right)\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sin\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{\cos\left(\sqrt{x}\right) - \sin\left(2\sqrt{x}\right)\right\}$$

26. $y = \sin^n(ax^2 + bx + c)$ નું વિકલિત મેળવો.

➥ $y = \sin^n(ax^2 + bx + c)$

$$y = \left(\sin(ax^2 + bx + c)\right)^n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n\left(\sin(ax^2 + bx + c)\right)^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}\sin(ax^2 + bx + c)$$

$$= n\left(\sin(ax^2 + bx + c)\right)^{n-1} \cdot \cos(ax^2 + bx + c) \cdot \left(\frac{d}{dx}ax^2 + bx + c\right)$$

$$= n\left(\sin(ax^2 + bx + c)\right)^{n-1} \cdot \cos(ax^2 + bx + c)\,(2ax + b)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n(2ax+b)\left\{\left(\sin(ax^2+bx+c)\right)^{n-1} \cdot \cos(ax^2+bx+c)\right\}$$

27. $y = \cos\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \cos\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right) \cdot \frac{d}{dx}\tan\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$= -\sin\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)\sec^2\left(\sqrt{x+1}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$= -\sin\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)\sec^2\left(\sqrt{x+1}\right) \cdot \left\{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\sin\left(\tan\left(\sqrt{x+1}\right)\sec^2\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

28. $y = \sin(x^2) + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \sin(x^2) + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$ (બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin x)^2 + \frac{d}{dx}\left(\sin(x^2)\right)^2 = \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx}(x)^2 + 2\sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) +$
$2\sin(x^2)\frac{d}{dx}\sin(x^2) = 2x \cdot \cos(x^2) + 2\sin x\cos x + 2\sin(x^2)\cos(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2) + \sin(2x) + \sin(2x^2) \cdot 2x$ ($\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$)

29. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$**, જ્યાં $x > 0$ નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}}\left\{\frac{d}{dx}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1-1}}\left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x+1)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(1)\right\}$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+1} \cdot (x+1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\left((x+1)^{-1}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$$

➡ **અન્ય રીત :**

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

અહીં $x = \tan^2\theta$ મૂકો.

$\therefore x + 1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore \sqrt{x+1} = \sec\theta$

$\therefore y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sec\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(\cos\theta)$

$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

$\therefore y = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\quad$ (હવે $x = \tan^2\theta$ $\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{x}$ $\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{x}$)

$\therefore y = \frac{\pi}{2} - \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)$

➡ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}} \left\{\frac{d}{dx}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1-1}} \left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx}(x+1)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(1)\right\}$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+1} \cdot (x+1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\left((x+1)^{-1}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$$

➡ **અન્ય રીત :**

$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

અહીં $x = \tan^2\theta$ મૂકો.

$\therefore x + 1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore \sqrt{x+1} = \sec\theta$

$\therefore y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sec\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(\cos\theta)$

$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

$\therefore y = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\quad$ (હવે $x = \tan^2\theta$ $\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{x}$ $\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{x}$)

$\therefore y = \frac{\pi}{2} - \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)$

30. $y = (\sin x)^{\cos x}$ નું વિકલિત મેળવો.

➡ બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore \log y = \log(\sin x)^{\cos x}$

$= \cos x \cdot \log(\sin x)$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x)\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos x\left\{\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x\right\} + \log(\sin x)\cdot(-\sin x)$$

$$= \cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) - \sin x \log \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left\{\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right\}$$

31. **$y = \sin^m x \cdot \cos^n x$ નું વિકલિત મેળવો.**

➥ $y = \sin^m x \cdot \cos^n x$

$= (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n$

$\therefore$ બંને બાજુ log લેતાં,

$$\therefore \log y = \log\left((\sin x)^m \cdot (\cos x)^n\right)$$

$$= \log (\sin x)^m + \log(\cos x)^n$$

$\therefore \log y = m \log \sin x + n \log \cos x$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x + \frac{n}{\cos x}\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= m\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + n\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= -n \tan x + m \cot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y(-n \tan x + m \cot x)$$

$$= \sin^m x \cdot \cos^n x\,(-n \tan x + m \cot x)$$

32. **$y = (x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4$ નું વિકલિત મેળવો.**

➥ $y = (x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4$

$$\log y = \log\left((x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4\right)$$

$$= \log(x+1)^2 + \log(x+2)^3 + \log(x+3)^4$$

$\therefore \log y = 2\log(x+1) + 3\log(x+2) + 4\log(x+3)$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+1}\frac{d}{dx}(x+1) + \frac{3}{x+2}\frac{d}{dx}(x+2) + \frac{4}{x+3}\frac{d}{dx}(x+3)$$

$$= \frac{2}{x+1}(1) + \frac{3}{x+2}(1) + \frac{4}{x+3}(1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+3}\right\}$$

$$= y\left\{\frac{2(x+2)(x+3)+3(x+1)(x+3)+4(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right\}$$

$$= y\left\{\frac{2x+10x+12+3x^2+12x+9+4x^2+12x+8}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4\ (9x^2+34x+29)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= (x+1)(x+2)^2(x+3)^3\ (9x^2+34x+29)$$

33. **$y = \cos^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \cos^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)$

$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x\right)$

$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} \cos x + \sin\frac{\pi}{4} \sin x\right)$

$= \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$

$y = \frac{\pi}{4} - x$ $\quad$ ($\because$ $\cos^{-1}(\cos x) = x$ છે.)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{d}{dx} x$

$= 0 - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -1$

34. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{x}{a} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $y = \tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3x}{a} - \frac{x^3}{a^3}}{1 - \frac{3x^2}{a^2}}\right)$ $\quad$ (દરેક પદને a^3 વડે ભાગતાં)

હવે $\frac{x}{a} = \tan\theta$ મૂકો.

$= \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 3\theta)$ $\quad\left(\because \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$

$= 3\theta$

$\therefore y = 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= 3\left(\frac{a^2}{a^2 + x^2}\right)\frac{1}{a}(1)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3a}{a^2 + x^2}$

35. $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}\right], -1 < x < 1, x \neq 0$ **નું વિકલિત મેળવો.**

➡ $x^2 = \cos(2\theta)$ લેતાં, $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$

તથા $1 + x^2 = 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

$1 - x^2 = 1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2\theta$

$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}\right]$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \theta$$

$$\therefore \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x^4}}\right) \cdot 2x$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

36. આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $x = e^{\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)$, $y = e^{-\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)$

➡ $y = e^{-\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = e^{-\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) + \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) \frac{d}{d\theta}\left(e^{-\theta}\right)$$

$$= e^{-\theta}\left(1 + \frac{1}{\theta^2}\right) + \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)\left(-e^{-\theta}\right)$$

$$= e^{-\theta}\left(1 + \frac{1}{\theta^2} - \theta + \frac{1}{\theta}\right)$$

$$= e^{-\theta} \frac{(\theta^2 + 1 - \theta^3 + \theta)}{\theta^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = e^{-\theta} \frac{(-\theta^3 + \theta^2 + \theta + 1)}{\theta^2} \qquad \text{........(i)}$$

હવે $x = e^{\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = e^{\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right) + \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right) \frac{d}{d\theta}\left(e^{\theta}\right)$$

$$= e^{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) + e^{\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)$$

$$= e^{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta^2} + \theta + \frac{1}{\theta}\right)$$

$$= e^{\theta} \frac{(\theta^2 - 1 + \theta^3 + \theta)}{\theta^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = e^{\theta} \frac{(\theta^3 + \theta^2 + \theta - 1)}{\theta^2} \qquad \text{........(ii)}$$

હવે $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$$= \frac{e^{-\theta}(-\theta^3 + \theta^2 + \theta + 1)}{e^{\theta}(\theta^3 + \theta^2 + \theta - 1)}$$

($\because$ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{-2\theta}\left(\frac{-\theta^3 + \theta^2 + \theta + 1}{\theta^3 + \theta^2 + \theta - 1}\right)$$

37. **આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $x = 3\cos\theta - 2\cos^3\theta,\ y = 3\sin\theta - 2\sin^3\theta$**

➡ $y = 3\sin\theta - 2\sin^3\theta$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 2(3\sin^2\theta)\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)$$
$$= 3\cos\theta - 6\sin^2\theta\cos\theta$$
$$= 3\cos\theta\ (1 - 2\sin^2\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta\cdot\cos(2\theta) \qquad \text{.........(i)}$$

$x = \cos\theta - 2\cos^3\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - 2\left(3\cos^2\theta\cdot\frac{d}{d\theta}\cos\theta\right)$$
$$= -\sin\theta + 6\cos^2\theta\sin\theta$$
$$= 3\sin\theta\ (2\cos^2\theta - 1)$$
$$= 3\sin\theta\ \cos\ (2\theta) \qquad \text{.........(ii)}$$

હવે $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$$= \frac{3\cos\theta\cdot\cos(2\theta)}{3\sin\theta\cdot\cos(2\theta)}$$ ($\because$ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cot\theta$$

38. **આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan y = \frac{2t}{1-t^2},\ t \in R.$**

➡ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan y = \frac{2t}{1-t^2}$

$$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right),\ y = \tan^{-1}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$$

હવે $t = \tan\theta$ મૂકો.

$$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right),\ y = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$\therefore\ x = \sin^{-1}(\sin 2\theta),\ y = \tan^{-1}(\tan 2\theta)$

$\therefore\ x = 2\theta,\qquad y = 2\theta$

$\therefore\ x = 2\tan^{-1}t,\ y = 2\tan^{-1}t$

$\therefore\ x = y$ થાય.

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$ થાય.

39. **આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $x = \frac{1+\log t}{t^2},\ y = \frac{3+2\log t}{t}$**

➡ $y = \frac{3+2\log t}{t}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{t\left(\frac{d}{dt}(3+2\log t)\right) - (3+2\log t)\frac{d}{dt}t}{t^2}$$ ($\because$ વિકલિત માટે ભાગાકારનો નિયમ)

$$= \frac{t\left(\frac{2}{t}\right) - (3+2\log t)(1)}{t^2}$$

$= 2 - 3 - 2\log t\ /\ t^2$

$\therefore \frac{dy}{dt} = -1 - 2\log t \; / \; t^2$ ....(i)

હવે $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2\left(\frac{d}{dt}(1+\log t)\right) + (1+\log t)\frac{d}{dt}(t^2)}{t^4}$ (∵ વિકલિત માટે ભાગાકારનો નિયમ)

$= t^2\left(\frac{1}{t}\right) - 2t(1+\log t) \; / \; t^4$

$= t(1 - 2 - 2\log t) \; / \; t^4$

$= -1 - 2\log t \; / \; t^3$ ....(ii)

હવે $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ (પ્રાચલ વિધેયનું વિકલન)

$= \frac{-1-2\log t}{t^2} \times \frac{t^3}{-1-2\log t}$ (∵ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી)

$\therefore \frac{dy}{dx} = t$

40. આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : જો $x = e^{\cos 2t}$, $y = e^{\sin 2t}$ હોય તો બતાવો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y\log x}{x\log y}$.

➡ $x = e^{\cos 2t}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = e^{\cos(2t)} \cdot \frac{d}{dt}\cos 2t$

$= e^{\cos(2t)}\left(-\sin 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)\right)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = x\,(-2\sin 2t)$ ....(i)

$y = e^{\sin 2t}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = e^{\sin(2t)}\left(\frac{d}{dt}\sin 2t\right)$

$= e^{\sin(2t)}\left(\cos(2t)\frac{d}{dt}(2t)\right)$

$\therefore \frac{dy}{dt} = y\,(2\cos 2t)$ ....(ii)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$= \frac{2y\cos(2t)}{-x(2\sin 2t)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos 2t}{x\sin 2t}$ ....(iii)

હવે $x = e^{\cos 2t}$, $y = e^{\sin 2t}$

$\therefore \log x = \cos(2t)$, $\log y = \sin(2t)$

આ મૂલ્યો પરિણામ (iii) માં મૂકો.

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y\log x}{x\log y}$,

જે માંગેલ પરિણામ છે.

41. આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : જો $x = a\sin(2t)\,(1+\cos 2t)$ અને $y = b\cos(2t)\,(1-\cos 2t)$ હોય તો બતાવો કે, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{a}$.

➡ અહીં $y = b\cos(2t)\,(1-\cos 2t)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = b\left[\cos(2t)\frac{d}{dt}(1-\cos 2t)+(1-\cos 2t)\frac{d}{dt}\cos 2t\right]$$
$$= b\ [\cos(2t)\ (2\sin 2t) - 2\sin 2t(1 - \cos 2t)]$$
$$= b\ [4 \sin 2t \cos 2t - 2\sin 2t]$$
$$= b\ [2 \sin 4t - 2\sin 2t]$$

હવે $x = a \sin(2t)\ (1 + \cos(2t))$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = a\left[\sin(2t)\frac{d}{dt}(1+\cos 2t)+(1+\cos(2t))\frac{d}{dt}(\sin 2t)\right]$$
$$= a\ [-2 \sin^2(2t) + 2\cos 2t\ (1 + \cos 2t)]$$
$$= a\ [2 \cos^2 2t - 2\sin^2 2t + 2\cos 2t]$$
$$= 2a\ [\cos^2(2t) - \sin^2(2t) + \cos 2t]$$
$$= 2a\ [\cos 4t + \cos 2t]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{2b\left(2\sin(4t) - \sin(2t)\right)}{2a(\cos 4t + \cos 2t)}$$
$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b\left(2\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)}{a\left(\cot\pi - \cot\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= \frac{b\,(0-1)}{a\,(-1+0)}$$
$$= \frac{-b}{-a}$$
$$= \frac{b}{a}$$

42. આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : જો $x = 3 \sin t - \sin(3t)$ અને $y = 3 \cos t - \cos 3t$ હોય તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ નું મૂલ્ય $t = \frac{\pi}{3}$ માટે મેળવો.

➥ $y = 3 \cos t - \cos 3t$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin + 3\sin 3t$$
$$= 3\ (\sin 3t - \sin t)$$ તથા $x = 3 \sin t - \sin(3t)$

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t$$
$$= 3\ (\cos t - \cos 3t)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{3(\sin 3t - \sin t)}{3(\cos t - \cos 3t)}$$
$$= \frac{2\cos(2t)\sin(t)}{-2\sin(2t)\sin(-t)}$$
$$= \frac{\cos(2t)\sin t}{\sin(2t)\sin t}$$
$$= \cot(2t)$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}} = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cot\frac{\pi}{3}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

43. આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$નું $\tan^{-1}x$ પ્રત્યેનું વિકલિત મેળવો.

➡ અહીં $u = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ તથા $v = \tan^{-1}x$ લેતાં,

હવે $u = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$x = \tan\theta$ મૂકો.

$$\therefore u = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{\theta}{2}$$
$$\therefore u = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$
$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)}{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}$$

44. ગર્ભિત વિધેયના વિકલિતના નિયમ મુજબ નીચેના વિકલિતો મેળવો : $\sin(xy) + \frac{x}{y} = x^2 - y$

➡ $\sin(xy) + \frac{x}{y} = x^2 - y$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલિત મેળવતાં,

$$\therefore \cos(xy)\left(\frac{d}{dx}(xy)\right) + \left(\frac{y(1) - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right) = 2x - \frac{dy}{dx}$$
$$\therefore \cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}\right) = 2x - \frac{dy}{dx}$$
$$\therefore x\cos(xy)\frac{dy}{dx} + y\cos(xy) + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \left(x\cos(xy) - \frac{x}{y^2} + 1\right)\frac{dy}{dx} = 2x - y\cos(xy) - \frac{1}{y}$$

$$\therefore \frac{\left(xy^2\cos(xy) - x + y^2\right)}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2\cos(xy) - 1}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\left(2xy - y^2\cos(xy) - 1\right)}{y\left(xy^2\cos(xy) - x + y^2\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y\left(2xy - y^2\cos(xy) - 1\right)}{xy^2\cos(xy) - x + y^2}$$

45. **ગર્ભિત વિધેયના વિકલિતના નિયમ મુજબ નીચેના વિકલિતો મેળવો : $\sec(x + y) = xy$**

➡ $\sec(x + y) = xy$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \sec(x+y)\cdot\tan(x+y)\left(\frac{d}{dy}(x+y)\right) = x\cdot\frac{dy}{dx} + y$$

$$\therefore \sec(x+y)\cdot\tan(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = x\cdot\frac{dy}{dx} + y$$

$$\therefore \sec(x+y)\tan(x+y) + \sec(x+y)\tan(x+y)\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$\therefore \left(\sec(x+y)\tan(x+y) - x\right)\frac{dy}{dx} = y - \sec(x+y)\tan(x+y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \sec(x+y)\tan(x+y)}{\sec(x+y)\cdot\tan(x+y) - x}$$

46. **જો $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$.**

➡ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore 2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore ax + hx\frac{dy}{dx} + hy + by\frac{dy}{dx} + g + f\frac{dy}{dx} = 0 \quad (\because \text{ બંને બાજુ 2 વડે ભાગતાં})$$

$$\therefore (hx + by + f)\frac{dy}{dx} = -(ax + hy + g)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}\right) \quad ....(i)$$

ફરીથી, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

હવે બંને બાજુ y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore 2ax\frac{dx}{dy} + 2h\left(x(1) + y\frac{dx}{dy}\right) + 2by + 2g\frac{dx}{dy} + 2f(1) = 0$$

$$\therefore ax\frac{dx}{dy} + hx + hy\frac{dx}{dy} + by + g\frac{dx}{dy} + f = 0$$

$$\therefore (ax + hy + g)\frac{dx}{dy} = -(hx + by + f)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\left(\frac{hx + by + f}{ax + hy + g}\right) \quad ....(ii)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\left(\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}\right)\times\left(\frac{-(hx + by + f)}{ax + hy + g}\right) (\because \text{ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી})$$

આમ, $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ માગેલ પરિણામ સાબિત થાય છે.

47. જો $x = e^{\frac{x}{y}}$ હોય તો બતાવો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x \cdot \log x}$.

➡ $x = e^{\frac{x}{y}}$

$\therefore \log x = \frac{x}{y} \cdot \log e$ ($\because$ બંને બાજુ log લેતાં)

$\therefore \log x = \frac{x}{y}$ ($\because$ બંને $\log e = 1$ છે.)

$\therefore y = \frac{x}{\log x}$ ....(1)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\log x \frac{dx}{dx} - x \frac{d}{dx} \log x}{(\log x)^2}$

$= \frac{\log x - x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{(\log x)^2}$

$= \frac{\log x - 1}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{\log x (\log x)}$

$= \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} (\log x)}$ (પરિણામ (i) પરથી $\log = \frac{x}{y}$ મૂકતાં)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x \cdot \log x}$ જે માગેલ પરિણામ છે.

48. જો $y^x = e^{y-x}$ હોય તો બતાવો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \log y)^2}{\log y}$.

➡ $y^x = e^{y-x}$

$\therefore \log(y^x) = \log(e^{y-x})$

$\therefore x \log y = (y - x) \log e$

$\therefore x \log y + x = y$ ($\because \log e = 1$ થાય.)

$\therefore x(1 + \log y) = y$

$\therefore x = \frac{y}{1 + \log y}$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore 1 = \frac{(1 + \log y) \frac{dy}{dx} - y \left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx}}{(1 + \log y)^2}$

$\therefore (1 + \log y)^2 = \frac{dy}{dx} + \log y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}$

$\therefore (1 + \log y)^2 = \log y \frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \log y)^2}{\log y}$

જે માગેલ પરિણામ છે.

49. $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\cdots\cdots\infty}}}$ હોય તો બતાવો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \tan x}{y \cdot \log \cos x - 1}$.

➡ $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\cdots\cdots\infty}}}$

$\therefore y = (\cos x)^y$

બંને બાજુ log લેતાં,

$\therefore \log y = \log(\cos x)^y$

$\therefore \log y = y \log(\cos x)$

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન લેતાં,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\cos x + \log\cos x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{y} - \log\cos x\right)\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\therefore (1 - y\log\cos x)\frac{dy}{dx} = -y^2\tan x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\tan x}{1 - y\log\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\tan x}{y\log\cos x - 1}$$

50. જો $x\sin(a + y) + \sin a\cos(a + y) = 0$ હોય તો બતાવો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$.

➡ અહીં, $x\sin(a + y) + \sin a\cos(a + y) = 0$

$$x = \frac{-\sin a\cos(a + y)}{\sin(a + y)}$$

$\therefore x = -\sin a\cdot\cot(a + y)$

હવે y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin a\left(-\mathrm{cosec}^2(a + y)\right)\frac{d}{dy}(a + y)$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a + y)}(0 + 1)$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a + y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$$

જે માગેલ પરિણામ છે.

51. જો $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = a(x - y)$ હોય તો બતાવો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}}$. (જ્યાં $|x| \le 1, |y| \le 1$)

➡ $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = a(x - y)$

અહીં, $x = \sin\alpha$ અને $y = \sin\beta$ મૂકો.

$\therefore \sqrt{1 - \sin^2\alpha} + \sqrt{1 - \sin^2\beta} = a(\sin\alpha - \sin\beta)$

$\therefore \cos\alpha + \cos\beta = a(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$\therefore 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2a\left(\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = a\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\therefore \cot\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = a$$

$$\therefore \frac{\alpha - \beta}{2} = \cot^{-1}a$$

$\therefore \alpha - \beta = 2\cot^{-1}a$

$\therefore \sin^{-1}x - \sin^{-1}y = 2\cot^{-1}a$

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = 0$ (અચળનું વિકલિત)

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ જે માગેલ પરિણામ છે.

52. રોલનું પ્રમેય (Rolle's theorem) ચકાસો : $f(x) = x(x-1)^2, x \in [0, 1]$

➡ $f(x) = x(x-1)^2, x \in [0, 1]$

$f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$

$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

અહીં $f(x)$ એ બહુપદી વિધેય છે.

$\therefore f(x)$ એ અંતરાલ $[0, 1]$ માં સતત છે તથા $(0, 1)$ માં વિકલનીય થશે.

હવે $a = 0, b = 1$

$\therefore f(a) = f(0) = 0$ તથા $f(b) = f(1) = 1^3 - 2(1)^2 + 1 = 2 - 2 = 0$

$\therefore f(a) = f(b)$ થાય.

આમ રોલના પ્રમેયની તમામ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in (0, 1)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

અહીં $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

હવે $f'(c) = 0$

$\therefore 3c^2 - 4c + 1 = 0$

$\therefore 3c^2 - 3c - c + 1 = 0$

$\therefore 3c\ (c-1)\ (c-1) = 0$

$\therefore (c-1)\ (3c-1) = 0$

$\therefore c = 1$ અથવા $c = \frac{1}{3}$

અહીં $c = 1 \notin (0, 1)$ થાય.

તથા $c = \frac{1}{3} \in (0, 1)$ થશે.

આમ આપેલ વિધેય માટે રોલનું પ્રમેય સત્ય છે.

53. રોલના પ્રમેયની મદદથી વક્ર $y = x(x-4)$ પર બિંદુ મેળવો. જ્યાં આગળ સ્પર્શક X અક્ષને સમાંતર હોય. $x \in [0, 4]$

➡ $y = x(x-4), x \in [0, 4]$

$\therefore y = x^2 - 4x$

અહીં, આપેલ વિધેય બહુપદી વિધેય છે માટે તે $[0, 4]$ માં સતત તથા $(0, 4)$ માં વિકલનીય થશે.

અહીં $a = 0$ તથા $b = 4$ છે.

$\therefore y = x(x-4)$

$\therefore f(x) = x(x-4)$

$\therefore f(a) = f(0) = 0(0-4) = 0$

તથા $f(b) = f(a) = 4(4-4) = 4(0) = 0$

આમ, $f(a) = f(b)$ પણ છે.

$\therefore$ રોલના પ્રમેયની બધી જ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in (0, 4)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

હવે $f(x) = x(x-4)$

$f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore f'(x) = 2x - 4$

$\therefore f'(c) = 2c - 4$

હવે $f'(c) = 0$ | $y = x(x - 4)$
$\therefore 2c - 4 = 0$ | $= 2(2 - 4)$
$\therefore c = 2$ | $= -4$
આમ, $x = 2$ | $\therefore$ બિંદુ $(x, y) = (2, -4)$ થાય.

54. નીચેના વિધેય માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : $f(x) = \frac{1}{4x - 1}, x \in [1, 4]$.

➡ આપેલ વિધેય $f(x) = \frac{1}{4x - 1}$, $x \in [1, 4]$ અને $x \neq \frac{1}{4}$ માટે સતત છે અને $x \in (1, 4)$ માં વિકલનીય છે.

$\therefore c \in (1, 4)$ મળે કે જેથી $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ થાય.

$\therefore f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$

$= \frac{\left(\frac{1}{16 - 1}\right) - \left(\frac{1}{4 - 1}\right)}{4 - 1}$

$\therefore \frac{-4}{(4c - 1)^2} = \frac{\frac{1}{15} - \frac{1}{3}}{3}$

$= \frac{3 - 15}{45 - (3)}$

$\therefore \frac{-4}{(4c - 1)^2} = \frac{3 - 15}{45(3)}$

$\therefore \frac{-4}{(4c - 1)^2} = \frac{-4}{45}$

$\therefore (4c - 1)^2 = 45$

$\therefore 4c - 1 = \pm\sqrt{45}$

$= \pm 3\sqrt{5}$

$\therefore 4c = 1 \pm 3\sqrt{5}$

$\therefore c = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ અહીં $c \in (1, 4)$ હોવાથી c નું મૂલ્ય ઋણ ન હોઈ શકે. $\therefore c \neq \frac{-3\sqrt{5} + 1}{4}$ હોય.

$\therefore c = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4} \in (1, 4)$

55. નીચેના વિધેય માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3, x \in [0, 1]$

➡ અહીં, $f(x)$ એ બહુપદી વિધેય છે.

$\therefore x \in [0, 1]$ માટે $f(x)$ સતત અને $x \in (0, 1)$ માટે વિકલનીય થશે.

$\therefore c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ થાય.

હવે $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$\therefore f'(c) = 3c^2 - 4c - 1$

હવે $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\therefore 3c^2 - 4c - 1 = \frac{(1 - 2 - 1 + 3) - (0 + 3)}{1 - 0}$

$= \frac{1 - 3}{1}$

$= -2$

$\therefore 3c^2 - 4c - 1 = -2$

$\therefore\ 3c^2 - 4c + 1$

$\therefore\ 3c^2 - 3c - c + 1 = 0$

$\therefore\ 3c(c - 1) - 1(c - 1) = 0$

$\therefore\ (c - 1)(3c - 1) = 0$

$\therefore\ c = 1$ અથવા $c = \dfrac{1}{3}$

અહીં, $c = 1 \notin (0, 1)$

$\therefore\ c = \dfrac{1}{3} \in (0, 1)$

આમ, મધ્યકમાન પ્રમેયની મદદથી અચળ $c = \dfrac{1}{3}$ થાય.

56. નીચેના વિધેય માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : $f(x) = \sin x - \sin(2x),\ x \in [0, \pi]$

➥ આપેલ વિધેય ત્રિકોણમિતિય વિધેય છે માટે તે $[0, \pi]$ માં સતત અને $(0, \pi)$ વિકલનીય છે.

$\therefore\ c \in (0, \pi)$ મળે કે જેથી $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ થાય.

અહીં, $f(x) = \sin x - \sin 2x$

$\therefore\ f'(x) = \cos x - 2\cos 2x$

$\therefore\ f'(c) = \cos c - 2\cos(2c)$ થાય.

હવે $a = 0$ છે. $\therefore\ f(a) = \sin 0 - \sin 0 = 0$

તથા $b = \pi$ છે. $\therefore\ f(b) = \sin \pi - \sin 2\pi = 0$

$\therefore\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\therefore\ \cos c - 2\cos(2c) = \dfrac{0}{\pi} = 0$ થાય.

$\therefore\ 2\cos 2c - \cos c = 0$

$\therefore\ 2(2\cos^2 c - 1) - \cos c = 0$

$\therefore\ 4\cos^2 c - \cos c - 2 = 0$

જે વિધેય $\cos c$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$\therefore\ \cos c = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 32}}{8}$

$\therefore\ c = \cos^{-1}\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right) \in (0, \pi)$

આમ, મધ્યકમાન પ્રમેયની મદદથી અચળ c નું મૂલ્ય $\cos^{-1}\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right)$ થશે.

57. નીચેના વિધેય માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : $f(x) = \sqrt{25 - x^2},\ x \in [1, 5]$

➥ અહીં, $f(x) = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

જ્યાં $25 - x^2 \geq 0$

$\therefore\ 25 \geq x^2$

$\therefore\ x^2 \leq 25$

$\therefore\ x \leq \pm 5$

$\therefore\ -5 \leq x \leq 5$

$\therefore\ f(x)$ એ બહુપદી વિધેય જે ગણ R ના અંતરાલ $[1, 5]$ માં સતત અને $(1, 5)$ માં વિકલનીય હોય.

તથા $a = 1$ અને $b = 5$ છે.

$\therefore\ f(a) = f(1) = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$

$\therefore\ f(b) = f(5) = \sqrt{25 - 25} = 0$

અહીં, મધ્યકમાન પ્રમેયની જરૂરી શરતોનું પાલન થાય છે.

હવે $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

$\therefore f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\therefore \dfrac{-c}{\sqrt{25 - c^2}} = \dfrac{0 - \sqrt{24}}{4}$

હવે બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$\therefore \dfrac{c^2}{25 - c^2} = \dfrac{24}{16}$

$\therefore \dfrac{c^2}{25 - c^2} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore 2c^2 = 75 - 3c^2$

$\therefore 5c^2 = 75$

$\therefore c^2 = 15$

$\therefore c = \pm \sqrt{15}$

પણ $c \in (1, 5)$ હોવાથી $c = -\sqrt{15}$ શક્ય ન હોય.

$\therefore c = \sqrt{15} \in (1, 5)$ થાય.

58. **વક્ર $y = (x - 3)^2$ પર એવું બિંદુ મેળવો. જ્યાં સ્પર્શક બિંદુઓ (3, 0) અને (4, 1) ને જોડતી જીવાને સમાંતર હોય.**

➡ અહીં, $y = (x - 3)^2$ વક્ર $x = 3$ અને $x^2 = 4$ અર્થાત્ [3, 4] માં સતત અને (3, 4) માં વિકલનીય થાય.

અહીં, મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in (3, 4)$ મળે કે જેથી $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ થાય.

હવે $y = (x - 3)^2$

$\therefore f(x) = x^2 - 6x + 9$

$\therefore f'(x) = 2x - 6$

$\therefore f'(c) = 2c - 6$

તથા $a = 3$ અને $b = 4$ લેતાં,

$f(b) = (4 - 3)^2 = 1$

$f(a) = (3 - 3)^2 = 0$

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (મધ્યકમાન પ્રમેય)

$\therefore 2c - 6 = \dfrac{1 - 0}{4 - 3}$

$\therefore 2c - 6 = 1$

$\therefore 2c = 7$

$\therefore c = \dfrac{7}{2}$

$\therefore x = \dfrac{7}{2}$ થાય.

$x = \dfrac{7}{2}$ માટે $y = \left(\dfrac{7}{2} - 3\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ બિંદુ $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ આગળ દોરેલ સ્પર્શક A(3, 0) અને B(4, 1) ને જોડતી જીવાને સમાંતર થાય.

59. **મધ્યકમાન પ્રમેયની મદદથી સાબિત કરો કે, વક્ર $y = 2x^2 - 5x + 3$ ને કોઈક બિંદુ આગળ દોરેલ સ્પર્શક P(1, 0) અને B(2, 1) ને જોડતી જીવાને સમાંતર થાય તથા તે બિંદુના યામ મેળવો.**

➡ આપેલ વક્ર $y = 2x^2 - 5x + 3$ અંતરાલ [1, 2] માં સતત તથા અંતરાલ (1, 2) માં વિકલનીય છે.

∴ મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન થાય છે.

∴ $c \in (1, 2)$ મળે કે જેથી $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ થાય. (જ્યાં $a = 1$ તથા $b = 2$ છે.)

$y = 2x^2 - 5x + 3$

∴ $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ($\because y = f(x)$)

∴ $f'(x) = 4x - 5$

∴ $f'(c) = 4c - 5$

તથા $f(b) = 2(2^2) - 5(2) + 3$

$= 8 - 10 + 3 = 1$

અને $f(a) = 2(1) - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$

∴ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (મધ્યકમાન પ્રમેય)

∴ $4c - 5 = \dfrac{1 - 0}{2 - 1}$

∴ $4c - 5 = 1$

∴ $4c = 6$

∴ $c = \dfrac{3}{2} \in (1, 2)$

હવે $x = \dfrac{3}{2}$

∴ $y = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{3}{2}\right) + 3$

$= 2\left(\dfrac{9}{4}\right) - \dfrac{15}{2} + 3$

$= \dfrac{9}{2} - \dfrac{15}{2} + 3$

$= \dfrac{9 - 15 + 6}{2}$

∴ $y = 0$

∴ બિંદુ $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ આગળ દોરેલ સ્પર્શક બિંદુઓ A(1, 0) તથા B(2, 1) ને જોડતી જીવાને સમાંતર થશે.

60. $f(x) = \begin{cases} |x| \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 0$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(x) = 0$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 0^+} |x| \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |0 + h| \cos\left(\dfrac{1}{0 + h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} h \cdot \cos\left(\dfrac{1}{h}\right)$

$= 0 \times$ {–1 અને 1 વચ્ચે કોઈ સંખ્યા}

∴ જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ....(ii)

ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^-} |x| \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |0 - h| \cos\left(\frac{1}{0 - h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |-h| \cos\left(-\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right)$ $(\because \cos(-\theta) = \cos\theta)$

= 0 × {–1 અને 1 વચ્ચેની સંખ્યા}

= 0

આમ, ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ....(iii)

આમ, પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 0$ માટે સતત છે.

61. $f(x) = \begin{cases} |x - a| \sin\left(\frac{1}{x - a}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = a \end{cases}$ **$f(x)$ નું $x = a$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(a) = 0$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to a^+} f(x)$

$= \lim_{x \to a^+} |x - a| \sin\left(\frac{1}{x - a}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |a + h - a| \sin\left(\frac{1}{a + h - a}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |h| \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

= 0 × {–1 અને 1 વચ્ચેની સંખ્યા}

= 0

આમ, જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ ....(ii)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to a^-} f(x)$

$= \lim_{x \to a^-} |x - a| \sin\left(\frac{1}{x - a}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |a - h - a| \sin\left(\frac{1}{a - h - a}\right)$

$= \lim_{h \to 0} |-h| \sin\left(-\frac{1}{h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} (-h) \left(-\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)$

$= \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ $(\because \sin(-\theta) = -\sin\theta)$

= 0 × {–1 અને 1 વચ્ચેની સંખ્યા}

= 0

$\therefore$ ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to a^-} f(x) = 0$ ....(iii)

આમ, પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

$\therefore$ સાતત્યની વ્યાખ્યા મુજબ આપેલ વિધેય $x = a$ માટે સતત છે.

62. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 0$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(0) = 0$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{0+h}\right)}}{e^{\left(\frac{1}{0+h}\right)} + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{\frac{1}{h}}}{e^{\frac{1}{h}} + 1}$$

હવે દરેક પદને $e^{\frac{1}{h}}$ વડે ભાગતાં,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{h}}}$$

અહીં, $\frac{1}{h} = n$ મૂકો.

$\therefore h \to 0 \Rightarrow n \to \infty$

$\therefore \lim_{h \to \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^h = \lim_{h \to \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^h = 0$

$$= \frac{1}{1 + 0}$$

$$= 1$$

આમ, $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$

$\therefore f(x)$ એ $x = 0$ માટે અસતત છે.

63. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + \dfrac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 1$ માટે સાતત્ય ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

$\therefore f(1) = \frac{1^2}{2}$

$\therefore f(1) = \frac{1}{2}$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 1^+} 2x^2 - 3x + \frac{3}{2}, \ 1 < x \le 2$

$= \lim_{h \to 0} 2(1 + h)^2 - 3(1 + h) + \frac{3}{2}$

$= 2(1 + 0)^2 - 3(1 + 0) + \frac{3}{2}$

$= 2 - 3 + \frac{3}{2}$

$= \frac{4 - 6 + 3}{2}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore$ જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$ ....(ii)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(1 - h)^2}{2}$

$= \frac{(1 - 0)^2}{2}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore$ ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ ....(iii)

આમ, પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\therefore$ સાતત્યની વ્યાખ્યા મુજબ $f(x)$ એ $x = 1$ માટે સતત વિધેય છે.

64. $f(x) = |x| + |x - 1|$ વિધેયનું $x = 1$ માટે સાતત્ય ચકાસો.

➥ $f(x) = |x| + |x - 1|$ છે.

$\therefore f(1) = |1| + |1 - 1| = |1| + |0|$

$\therefore f(1) = 1$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 1^+} |x| + |x - 1|$

$= \lim_{h \to 0} |1 + h| + |(1 + h) - 1|$

$= \lim_{h \to 0} |1 + h| + |h|$

$= |1 + 0| + |0|$

$= |1| + 0$

$= 1$ ....(ii)

આમ, જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 1^+} f(x)$

ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 1^-} |x| + |x - 1|$

$= \lim_{h \to 0} |1 - h| + |1 - h - 1|$

$= \lim_{h \to 0} |1 - h| + |-h|$

$= |1 - 0| - 0$

$= 1$

$\therefore$ ડા.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ ....(iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\therefore$ સાતત્યની વ્યાખ્યા પરથી આપેલ વિધેય $x = 1$ માટે સતત છે.

65. વિધેય $f(x)$ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{|x-4|} + a, & x < 0 \\ a + b, & x = 4, \\ \frac{x-4}{|x-4|} + b, & x > 4 \end{cases}$$ **વિધેય $f(x)$ એ $x = 4$ માટે સતત હોય તો a તથા b મેળવો.**

➡ અહીં, સતત વિધેયની વ્યાખ્યા મુજબ જો $f(x)$ એ $x = 4$ માટે સતત હોય તો $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$ થાય.

હવે $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$ લેતાં,

$\therefore \lim_{x \to 4^+} \frac{x-4}{|x-4|} + b = a + b$ ($\because f(4) = a + b$ છે.)

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)-4}{|(4+h)-4|} + b = a + b$

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{h}{|h|} + b = a + b$

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} + b = a + b$

$\therefore 1 + b = a + b$

$\therefore a = 1$

હવે $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$ લેતાં,

$\therefore \lim_{x \to 4^-} \frac{x-4}{|x-4|} + a = a + b$ ($\because f(4) = a + b$ છે.)

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{(4-h)-4}{|(4-h)-4|} + a = a + b$

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{-h}{|h|} + a = a + b$

$\therefore \lim_{h \to 0} -\frac{h}{h} + a = a + b$

$\therefore -1 + a = a + b$

$\therefore b = -1$

આમ, $a = 1$ અને $b = -1$ થશે.

66. વિધેય $f(x)$ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot [x], & 0 \le x < 2 \\ (x-1)x, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 2$ માટે વિકલનીયતા ચકાસો.**

➡ સૌ પ્રથમ જ.બા.નું લક્ષ મેળવતાં,

જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{((2+h)-1)(2+h) - (2-1)\cdot(2)}{h}$ ($\because f(x) = (x-1) \cdot x,\ 2 < x < 3$ છે.)

$= \lim_{h \to 0} \frac{(h+1)(h+2) - (2)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 3h + 2 - 2}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 3)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} h + 3$

$= 0 + 3$

$= 3$

$\therefore$ જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 2+} f(x) = 3$ ....(i)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ મેળવતાં,

$\therefore$ ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 2-} \frac{f(2 - h) - f(2)}{-h}$

અહીં $f(x) = x \cdot [x]$, $0 < x < 2$ છે.

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h) \cdot [2 - h] - (2 - 1)2}{-h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h)(1) - 2}{-h}$ ($\because$ $[a - h] = [a - 1]$ જ્યાં a કોઈ ઘન સંખ્યા છે.)

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{-h}$

$= \lim_{h \to 0} 1$

$= 1$

આમ, $\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$ ....(ii)

પરિણામ (i) $\neq$ પરિણામ (ii)

$\therefore$ $\lim_{x \to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 2$ માટે વિકલનીય નથી.

67. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **વિધેય $f(x)$ નું $x = 0$ માટે વિકલનીયતા ચકાસો.**

➥ અહીં, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

હવે $f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ($\because$ વિકલિતની વ્યાખ્યા)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0+} f(x)$

$= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$

$= \lim_{x \to 0+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{h \to 0} (0 + h) \sin\left(\frac{1}{0 + h}\right)$

$= \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$= 0 \times$ {(−1 અને 1) વચ્ચેની સંખ્યા}

$= 0$

આમ, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ ....(i)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0-} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

➡ અહીં, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

હવે $f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ($\because$ વિકલિતની વ્યાખ્યા)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0+} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (0 + h) \sin\left(\frac{1}{0 + h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

= 0 × {(–1 અને 1) વચ્ચેની સંખ્યા}

= 0

આમ, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ ....(i)

હવે ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 0-} f(x)$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

68. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \le 2 \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$ **માટે વિધેય $f(x)$ નું $x = 2$ વિકલનીયતા ચકાસો.**

➡ અહીં, $f(x) = 1 + x$, $x \le 2$ છે.

$\therefore$ $f(2) = 1 + 2$

$\therefore$ $f(2) = 3$ થાય.

હવે $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ($\because$ વિકલિતની વ્યાખ્યા)

$\therefore \lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{5 - x - 3}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2+} \frac{-x + 2}{x - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-(2 + h) - 2}{2 + h - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} -1$

$= -1$

આમ જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$ ....(i)

હવે $\lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2-} \frac{(1 + x) - (1 + 2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2-} \frac{2 + x - 3}{x - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + (2 - h) - 3}{2 - h - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{-h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} -1 = -1$

➥ અહીં, $f(x) = 1 + x$, $x \le 2$ છે.

$\therefore f(2) = 1 + 2$

$\therefore f(2) = 3$ થાય.

હવે $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ($\because$ વિકલિતની વ્યાખ્યા)

$\therefore \lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{5 - x - 3}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2+} \frac{-x + 2}{x - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-(2 + h) - 2}{2 + h - 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} -1$

$= -1$

આમ જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$ ....(i)

હવે $\lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2-} \frac{(1 + x) - (1 + 2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2-} \frac{2 + x - 3}{x - 2}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + (2 - h) - 3}{2 - h - 2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -1 = -1$$

69. સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = |x - 5|$ એ $x = 5$ માટે સતત છે, પણ વિકલનીય નથી.

➥ અહીં, $f(x) = |x - 5|$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -(x - 5), & x < 5 \\ x - 5, & x > 5 \end{cases}$$ (માનાંકની વ્યાખ્યા મુજબ)

હવે $f(x) = |x - 5|$

$\therefore \ f(5) = |5 - 5| = 0$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 5+} x - 5$

$= \lim_{h \to 0} h + 5 - 5$

$= \lim_{h \to 0} h$

$= 0$ ....(ii)

$\therefore \lim_{x \to 5+} f(x) = 0$

તથા ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 5-} f(x)$

$= \lim_{x \to 5-} -(x - 5)$

$= \lim_{h \to 0-} -(5 - h - 5)$

$= \lim_{h \to 0} h$

$= 0$

આમ $\lim_{x \to 5-} f(x) = 0$ ....(iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 5+} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 5-} f(x)$

$\therefore$ $f(x) = |x - 5|$ એ $x = 5$ માટે સતત વિધેય છે.

હવે વિકલનીયતા ચકાસતાં,

$$\therefore f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 5+} \frac{(x - 5) - 0}{x - 5}$

($\because$ $f(5) = |5 - 5| = 0$ થાય.)

$= \lim_{x \to 5+} \frac{x - 5}{x - 5}$

$= \lim_{x \to 5+} 1$

$\therefore$ જ.બા.નું લક્ષ $= -1$ ....(iv)

➥ અહીં, $f(x) = |x - 5|$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -(x - 5), & x < 5 \\ x - 5, & x > 5 \end{cases}$$ (માનાંકની વ્યાખ્યા મુજબ)

હવે $f(x) = |x - 5|$

$\therefore \ f(5) = |5 - 5| = 0$ ....(i)

હવે જ.બા.નું લક્ષ $\lim_{x \to 5+} x - 5$

$= \lim_{h \to 0} h + 5 - 5$

$= \lim_{h \to 0} h$

$= 0$ ....(ii)

$\therefore \lim_{x \to 5+} f(x) = 0$

તથા ડા.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 5-} f(x)$

$= \lim_{x \to 5-} -(x - 5)$

$= \lim_{h \to 0-} -(5 - h - 5)$

$= \lim_{h \to 0} h$

$= 0$

આમ $\lim_{x \to 5-} f(x) = 0$ ....(iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\lim_{x \to 5+} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 5-} f(x)$

$\therefore f(x) = |x - 5|$ એ $x = 5$ માટે સતત વિધેય છે.

હવે વિકલનીયતા ચકાસતાં,

$\therefore f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$

જ.બા.નું લક્ષ $= \lim_{x \to 5+} \frac{(x - 5) - 0}{x - 5}$

($\because f(5) = |5 - 5| = 0$ થાય.)

$= \lim_{x \to 5+} \frac{x - 5}{x - 5}$

$= \lim_{x \to 5+} 1$

$\therefore$ જ.બા.નું લક્ષ $= -1$ ....(iv)

70. વિધેય $f : R \to R$, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ નું સમાધાન કરે છે. તથા $f'(0) = 2$ જો $f(x)$ એ $x = 0$ માટે વિકલનીય હોય તો બતાવો કે $f'(x) = 2f(x)$. જ્યાં $f(x) \neq 0$.

➥ અહીં, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

હવે $x = y = 0$ મૂકો.

$\therefore f(0 + 0) = f(0)\ f(0)$

$\therefore f(0) = f(0) \cdot f(0)$

$\therefore f(0) - f(0) \cdot f(0) = 0$

$\therefore f(0)\ [1 - f(0)] = 0$

પણ $f(0) \neq 0$ છે.

$\therefore 1 - f(0) = 0$

$\therefore f(0) = 1$ ....(i)

હવે $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(0)}{h}$

$\therefore f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$

$\therefore 2 = \lim_{h \to 0} \frac{f(0) \cdot f(h) - f(0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$ ....(ii) ($\because$ પરિણામ (i) મુજબ $f(0) = 1$ છે.)

હવે $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} f(x) \left(\frac{f(h) - 1}{h} \right)$

$= f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$

$= 2\ f(x)$ ($\because$ સમી. (2) પરથી)

$\therefore f'(x) = 2\ f(x)$

જે માંગેલ પરિણામ છે.

71. **આપેલા પ્રાચલ વિધેય માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો : $\frac{x}{\sin x}$ નું $\sin x$ પ્રત્યે વિકલિત મેળવો.**

➡ $u = \frac{x}{\sin x}$ લેતાં,

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\sin x\left(\frac{dx}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}\sin x}{(\sin x)^2}$ ($\because$ વિકલિત માટે ભાગાકારનો નિયમ)

$= \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

હવે $v = \sin x$ લેતાં, $\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos x$

$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$

$= \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos x}$

$= \frac{\tan x - x}{\sin^2 x}$ (દરેક પદને $\cos x$ વડે ભાગતાં)

$\therefore \frac{x}{\sin x}$ નું $\sin x$ પ્રત્યેનું વિકલિત $= \frac{\tan x - x}{\sin^2 x}$ થાય.

72. **જો $y = \tan^{-1}x$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ નું મૂલ્ય y સ્વરૂપમાં મેળવો.**

➡ $y = \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$= (1 + x^2)^{-1}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x^2)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2)$

$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

હવે $y = \tan^{-1}x$ છે.

$\therefore x = \tan y$ થાય.

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\tan y}{(1+\tan^2 y)^2}$

$= \frac{-2\tan y}{(\sec^2 y)^2}$

$= \frac{-2\tan y}{\sec^2 y \cdot \sec^2 y}$

$$= -2\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)\cos^2 y \cdot \cos^2 y$$

$$= -(2\sin y \ \cos y) \ \cos^2 y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(2y) \ \cos^2 y$$ થાય.

➡ **<u>અન્ય રીત :</u>**

$y = \tan^{-1}x$

$\therefore \ x = \tan y$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \qquad \text{.........(i)}$$

➡ $y = \tan^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= (1 + x^2)^{-1}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x^2)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

હવે $y = \tan^{-1}x$ છે.

$\therefore \ x = \tan y$ થાય.

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\tan y}{(1+\tan^2 y)^2}$$

$$= \frac{-2\tan y}{(\sec^2 y)^2}$$

$$= \frac{-2\tan y}{\sec^2 y \cdot \sec^2 y}$$

$$= -2\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)\cos^2 y \cdot \cos^2 y$$

$$= -(2\sin y \ \cos y) \ \cos^2 y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(2y) \ \cos^2 y$$ થાય.

➡ **<u>અન્ય રીત :</u>**

$y = \tan^{-1}x$

$\therefore \ x = \tan y$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \qquad \text{.........(i)}$$

73. **રોલનું પ્રમેય (Rolle's theorem) ચકાસો :** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

➡ અહીં, $f(x)$ એ ત્રિકોણમિતિય વિધેય છે તથા $\sin^4 x$ અને $\cos^4 x$ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં સતત અને $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વિકલનીય હોય.

($\because$ અહીં $\sin^4 x$ તથા $\cos^4 x$ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$માં સતત હોય તો તેમનું સરવાળા વિધેય પણ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$માં સતત થાય.)

અહીં, $a = 0$ છે.

$\therefore f(a) = f(0) = \sin^4(0) + \cos^4(0)$

$= 0 + 1$

$\therefore f(b) = 1$

તથા $b = \frac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= (1)^4 - 0 = 1$

$f(b) = 1$

અહીં $f(a) = f(b)$ થાય છે.

આમ રોલના પ્રમેયની બધી જ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

હવે $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

$\therefore f(x) = (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2$

$\therefore f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$

➡ અહીં, $f(x)$ એ ત્રિકોણમિતિય વિધેય છે તથા $\sin^4 x$ અને $\cos^4 x$ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં સતત અને $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વિકલનીય હોય.

($\because$ અહીં $\sin^4 x$ તથા $\cos^4 x$ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$માં સતત હોય તો તેમનું સરવાળા વિધેય પણ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$માં સતત થાય.)

અહીં, $a = 0$ છે.

$\therefore f(a) = f(0) = \sin^4(0) + \cos^4(0)$

$= 0 + 1$

$\therefore f(b) = 1$

તથા $b = \frac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= (1)^4 - 0 = 1$

$f(b) = 1$

અહીં $f(a) = f(b)$ થાય છે.

આમ રોલના પ્રમેયની બધી જ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

હવે $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

$\therefore f(x) = (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2$

$\therefore f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$

74. રોલનું પ્રમેય (Rolle's theorem) ચકાસો : $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3,\ x \in [-1, 1]$

➡ આપેલ વિધેય લઘુગણકીય વિધેય છે અને લઘુગણકીય વિધેય તેના પ્રદેશગણમાં સતત હોય.

$\therefore f(x)$ એ $[-1, 1]$ માં સતત અને $(-1, 1)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે $a = -1$ લેતાં,

$\therefore f(-1) = \log((-1)^2 + 2) - \log(3)$

$= \log(1 + 2) - \log(3)$

$= \log(3) - \log(3)$

$\therefore f(-1) = 0$

તથા $b = 1$ લેતાં, $f(4) = f(-1)$

$= \log((1)^2 + 2) - \log 3$

$= \log 3 - \log 3$

$= 0$

આમ, $f(a) = f(b)$

$\therefore$ રોલનાં પ્રમેયની તમામ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in (-1, 1)$ મળશે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

હવે $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2}\frac{d}{dx}(x^2 + 2) - 0$

$\therefore f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$

$\therefore f'(c) = 0$

$\therefore \frac{2c}{c^2 + 2} = 0$

$\therefore 2c = 0$

$\therefore c = 0$

$\therefore c = 0 \in (-1, 1)$

આમ આપેલ વિધેય માટે રોલનું પ્રમેય સત્ય છે.

75. રોલનું પ્રમેય (Rolle's theorem) ચકાસો : $f(x) = x(x + 3) \cdot e^{-\frac{x}{2}},\ x \in [-3, 0]$

➡ અહીં, $f(x) = x(x + 3)e^{-\frac{x}{2}}$

$= (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$

આપેલ વિધેય બહુપદી વિધેય તથા ઘાતાંકીય વિધેયનું સંયોજન છે.

$\therefore f(x)$ એ ગણ R નાં અંતરાલ $[-3, 0]$ માં સતત તથા $(-3, 0)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે $a = -3$ લેતાં,

$\therefore f(a) = f(-3) = (-3)(-3 + 3)e^{\frac{3}{2}}$

$= -3(0)e^{\frac{3}{2}}$

$\therefore f(a) = 0$

તેમજ $f(b) = f(0)$

$= 0(0 + 3)e^0$

$= 0$

$\therefore f(a) = f(b)$

આમ, રોલના પ્રમેયની ત્રણેય શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore\ c \in (-3, 0)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

$$f(x) = (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\therefore f'(x) = (x^2 + 3x)\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}}(2x + 3)$$

$$= -\frac{(x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}}{2} + e^{-\frac{x}{2}}(2x + 3)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(2x + 3 - \frac{(x^2 + 3x)}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{4x + 6 - x^2 - 3x}{2}\right)$$

$$= -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\left(x^2 - x - 6\right)$$

➡ અહીં, $f(x) = x(x + 3)e^{-\frac{x}{2}}$

$$= (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$$

આપેલ વિધેય બહુપદી વિધેય તથા ઘાતાંકીય વિધેયનું સંયોજન છે.

$\therefore\ f(x)$ એ ગણ R નાં અંતરાલ $[-3, 0]$ માં સતત તથા $(-3, 0)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે $a = -3$ લેતાં,

$$\therefore f(a) = f(-3) = (-3)\ (-3 + 3)\ e^{\frac{3}{2}}$$

$$= -3(0)e^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f(a) = 0$$

તેમજ $f(b) = f(0)$

$$= 0\ (0 + 3)\ e^0$$

$$= 0$$

$\therefore\ f(a) = f(b)$

આમ, રોલના પ્રમેયની ત્રણેય શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore\ c \in (-3, 0)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

$$f(x) = (x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\therefore f'(x) = (x^2 + 3x)\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}}(2x + 3)$$

$$= -\frac{(x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}}{2} + e^{-\frac{x}{2}}(2x + 3)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(2x + 3 - \frac{(x^2 + 3x)}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{4x + 6 - x^2 - 3x}{2}\right)$$

$$= -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\left(x^2 - x - 6\right)$$

76. રોલનું પ્રમેય (Rolle's theorem) ચકાસો : $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2]$

➡ અહીં $f(x)$ એ બહુપદી વિધેય છે.

$\therefore\ f(x)$ એ $[-2, 2]$ માં સતત અને $(-2, 2)$ માં વિકલનીય છે.

અહીં $a = -2$

$\therefore f(a) = f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2}$

$= \sqrt{4 - 4} = 0$

તથા $b = 2$ છે.

$\therefore f(b) = f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$

આમ $f(a) = f(b)$

$\therefore$ રોલના પ્રમેયની તમામ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore c \in (-2, 2)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

હવે $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$\therefore f'(c) = 0$

$\therefore \frac{-c}{\sqrt{4 - c^2}} = 0$

$\therefore c = 0 \in (-2, 2)$ થાય.

આમ આપેલ વિધેય માટે રોલનું પ્રમેય સત્ય છે.

77. **$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 3 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે રોલનું પ્રમેય લાગુ પાડી શકાય ?**

➡ અહીં, આપણે $f(x)$ નું $x = 1$ માટે વિકલનીયતા ચકાસતાં,

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ($\because$ વિકલિતની વ્યાખ્યા)

$= \lim_{x \to 1+} \frac{3 - x - (3 - 1)}{x - 1}$ ($\because f(x) = 3 - x,\ 1 \le x \le 2$ છે.)

$= \lim_{x \to 1+} \frac{-x + 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{(x - 1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1+} (-1)$

$\therefore \lim_{x \to 1+} f(x) = -1$ ....(i)

હવે $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{(x^2 + 1) - (1 + 1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1-} x + 1$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

આમ, $\lim_{x \to 1+} f(x) \ne \lim_{x \to 1-} f(x)$

$\therefore f(x)$ એ $x = 1$ માટે વિકલનીય નથી.

$\therefore$ આપેલ વિધેય $f(x)$ માટે રોલનું પ્રમેય લાગુ પાડી શકાય નહીં.

78. **વક્ર $y = \cos x - 1$ માટે એવું બિંદુ મેળવો. જ્યાં સ્પર્શક x અક્ષને સમાંતર હોય. $x \in [0, 2\pi]$**

➡ અહીં, આપેલ વક્ર $y = \cos x - 1$ છે. આપણે $[0, 2\pi]$ નું એવું બિંદુ મેળવવું છે. જ્યાં વક્રને દોરેલ સ્પર્શક X અક્ષને સમાંતર થાય. અર્થાત્ વક્રને દોરેલ સ્પર્શ રેખા $x = c$ નો ઢાળ શૂન્ય થાય. જ્યાં $c \in [0, 2\pi]$.

આપણે રોલના પ્રમેયની મદદથી એવું બિંદુ મેળવીશું.

અહીં, $y = \cos x - 1$ ત્રિકોણમિતિય વિધેય છે.

$\therefore$ વિધેય $[0, 2\pi]$માં સતત અને $(0, 2\pi)$માં વિકલનીય થાય.

અહીં, $a = 0 \;\therefore\; f(a) = f(0) = \cos 0 - 1$

$= 1 - 1 = 0$

$\therefore\; f(a) = 0$

તેમજ $b = 2\pi \;\therefore\; f(b) = f(2\pi) = \cos(2\pi) - 1$

$= 1 - 1 = 0$

$\therefore\; f(a) = f(b)$ થાય છે.

$\therefore$ રોલના પ્રમેયની બધી જ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\therefore\; c \in (0, 2\pi)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$.

$\therefore\; -\sin c = 0$

$\therefore\; \sin c = 0$

$\therefore\; c = \pi$

આમ, $x = \pi$ તો $y = \cos \pi - 1$

$= -1 - 1$

$= -2$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ $(x, y) = (\pi, -2)$ થાય.