सम्मिश्र संख्याएँ

Ex 5.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित को सरलतम रूप में लिखिए
(i) i^{52}
(ii) √-2√-3
(iii) $(1 + i)^5(1 – i)^5$

हल-

(i) i2 = (i) = (1) = 1 ∵ i = 1 होता है।

(ii) √-2√-3 = √2 x √-1 x √3 x √-1
= √2i x √3i = √2 x √3i^2
= √6i^2
= √-6 ∵ i^2 = -1

(iii) $(1 + i)^5(1 – i)^5$
= $[(1 +i) (1 – i)]^5 = ((1)^2 – (i)^2)^5$
= $(1 + 1)^5 = 2^5 = 32$ ∵$i^2 = -1$

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं के योज्य एवं गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए-
(i) 1 + 2i
(ii) $\frac{1}{3+4i}$
(iii) $(3 + i)^2$

हल-

(i) माना 1 + 2i का योज्य प्रतिलोम (a + ib) है।
⇒ (1 + 2i) + (a + ib) = 0 + i0
⇒ (1 + a) + i(2 + b) = 0 + i0
⇒ 1 + a = 0 एवं 2 + b = 0

⇒ a = -1 एवं b = -2
अतः (1 + 2i) का योज्य प्रतिलोम (-1 – 2i) है।

(ii) $\frac{1}{3+4i}$

a + ib के रूप में लिखने के लिए अंश तथा हर में (3 + 4i) के संयुग्मी से गुणा करने पर

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1\times(3-4i)}{(3+4i)\times(3-4i)} = \frac{3-4i}{(3)^2-(4i)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3-4i}{9-16i^2} = \frac{3-4i}{9+16} \qquad \because i^2 = -1$$

$$= \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

माना $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ का योज्य प्रतिलोम $(a + ib)$ है।

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) + (a + ib) = 0 + i0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{25} + a\right) + \left(\frac{-4}{25} + b\right) = 0 + i0$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$\Rightarrow \frac{3}{25} + a = 0 \therefore a = \frac{-3}{25}$$

इसी तरह से $\frac{-4}{25} + b = 0 \therefore b = \frac{4}{25}$

अत: $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ का योज्य प्रतिलोम $-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ है।

$\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ का गुणन प्रतिलोम $= \frac{1}{\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i}$

$$= \frac{25}{3-4i}$$

$$\frac{25}{3-4i} = \frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

अंश तथा हर में $(3 - 4i)$ के संयुग्मी से गुणा करने पर

$$= \frac{75+100i}{(3)^2-(4i)^2} = \frac{75+100i}{9+16}$$

$$= \frac{75+100i}{25} = 3 + 4i$$

(iii) $(3 + i)^2 = (3)^2 + 2 \times 3 \times i + i^2$
$= 9 + 6i - 1 \because i^2 = -1$
$8 + 6i$

माना $8 + 6i$ का योज्य प्रतिलोम $(a + ib)$ है।
$\Rightarrow (8 + 6i) + (a + ib) = 0 + 0.i$
$= (8 + a) + (6 + b)i = 0 + 0.i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को अलग-अलग करने पर
$8 + a = 0 \therefore a = -8$

'इसी तरह से $6 + b = 0 \therefore b = 0 - 6 = -6$

अतः $(8 + 6i)$ का योज्य प्रतिलोम $= (-8 - 6i)$ है।

$8 + 6i$ का गुणन प्रतिलोम $= \frac{1}{8+6i}$

$8 + 6i$ का गुणन प्रतिलोम $= \dfrac{1}{8+6i}$

$$= \frac{1}{8+6i} \times \frac{8-6i}{8-6i} = \frac{8-6i}{(8)^2+(6)^2} = \frac{8-6i}{100}$$

$$= \frac{8}{100} - \frac{6i}{100} \Rightarrow \frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$$

प्रश्न 3. सम्मिश्र संख्या $\frac{(2+i)^3}{3+i}$ की संयुग्मी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\frac{(2+i)^3}{3+i} = \frac{(2)^3+(i)^3+3(2)^2(i)+3(2)(i)^2}{3+i}$$

$$= \frac{8+i^2\times i+12i+6i^2}{3+i} = \frac{8-i+12i-6}{3+i} \quad \because i^2=-1$$

$$= \frac{2+11i}{3+i} = \frac{(2+11i).(3-i)}{(3+i).(3-i)} = \frac{6-2i+33i-11i^2}{(3)^2-(i)^2}$$

$$= \frac{6+31i+11}{9+1} \quad \because i^2=-1$$

$$= \frac{17+31i}{10} \Rightarrow \frac{17}{10}+i\frac{31}{10}$$

$\frac{17}{10}+i\frac{31}{10}$ का संयुग्मी $\frac{17}{10}-i\frac{31}{10}$ होगा।

प्रश्न 4. निम्नलिखित के मापांक ज्ञात कीजिए
(i) 4 + i
(ii) – 2 – 3i
(iii) $\frac{1}{(3-2i)}$

हल-

(i) माना z = 4 + i

$$\therefore \quad |z| = \sqrt{(4)^2+(1)^2} = \sqrt{16+1}$$

$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{17}$$

(ii) z = – 2 – 3i

$$\therefore \quad |z| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9}$$

$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{13}$$

(iii) माना $z = \frac{1}{3-2i}$

अंश तथा हर में (3 – 2i) के संयुग्मी से गुणा करने पर

$$\frac{1}{(3-2i)} = \frac{1\times(3+2i)}{(3-2i)\times(3+2i)} = \frac{3+2i}{(3)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{3+2i}{9-4i^2} = \frac{3+2i}{9+4}$$

$$z = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$$

$$\therefore \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{9+4}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

प्रश्न 5. यदि $a^2 + b^2 = 1$ तो $\frac{1+b-ia}{1+b+ia}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\frac{1+b-ia}{1+b+ia}$$

अंश तथा हर में (1 + b – ia) के संयुग्मी से गुणा करने पर।

$$\Rightarrow \frac{(1+b+ia)(1+b+ia)}{(1+b-ia)(1+b+ia)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+b+ia)^2}{(1+b)^2-(ia)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+b)^2+2(1+b)\times ai+(ia)^2}{1+2b+b^2-i^2a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2b+b^2+2a(1+b)i-a^2}{1+2b+b^2+a^2}$$

लेकिन दिया गया है $a^2 + b^2 = 1$ मान रखने पर

$$\Rightarrow \frac{1+2b+b^2+2a(1+b)i-(1-b^2)}{1+2b+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2b+b^2+2a(1+b)i-1+b^2}{2+2b}$$

$$\Rightarrow \frac{2b^2+2b+2a(1+b)i}{2+2b}$$

$$\Rightarrow \frac{2b(b+1)}{2(1+b)}+\frac{2a(1+b)}{2(1+b)}i$$

$\Rightarrow b + ai$

प्रश्न 6. यदि a = cos θ + i sin θ तब $\frac{1+a}{1-a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल-

दिया है a = cos θ + i sin θ

तब $$\frac{(1+a)}{(1-a)} = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-i\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$\because$ 1 + cos θ = 2cos²θ/2, 1 − cos θ = 2sin²θ/2

और sin θ = 2sin θ/2 cos θ/2

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{i\cot\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]}{\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]} = i\cot\frac{\theta}{2}$$

प्रश्न 7. समीकरण

$$\frac{(1+i)x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$$

हल-

$$\frac{(1+i)x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)y+i}{3-i}$$

$$\Rightarrow \frac{x+(x-2)i}{3+i}+\frac{2y+(1-3y)i}{3-i}=i$$

$$\Rightarrow \frac{(x+(x-2)i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\frac{(2y+(1-3y)i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i$$

$$\Rightarrow \frac{3x+(x-2)+i(3(x-2)-x)}{9}+$$

$$\frac{6y-(1-3y)+i(3-9y+2y)}{9}=i$$

$\Rightarrow 4x-2+i(2x-6)+6y-1+3y+i(3-7y)=9i$

$\Rightarrow 4x+9y-3+i(2x-6+3-7y)=9i$

$\Rightarrow 4x+9y-3+i(2x-7y-3)=9i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$4x+9y-3=0 \quad \therefore 4x+9y=3$ ....(1)

$2x-7y-3=9, \quad 2x-7y=9+3=12$ ....(2)

समी. (1) तथा (2) को हल करने पर

$$\begin{array}{r} 4x+9y=3 \\ 4x-14y=24 \\ -\quad+\qquad\;\; - \\ \hline 23=-21 \end{array}$$

घटाने पर

$$\boxed{y = \frac{-21}{23}}$$

y का मान समी. (1) में रखने पर

$$4x + 9x\left(\frac{-21}{23}\right) = 3$$

$$4x - \frac{189}{23} = 3$$

$$4x = 3 + \frac{189}{23} = \frac{258}{23}$$

$$\therefore \quad x = \frac{258}{4 \times 23} = \frac{129}{46}$$

अत: $x = \dfrac{129}{46}$ तथा $y = \dfrac{-21}{23}$

प्रश्न 8. यदि z_1 तथा z_2, कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि
$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

हल-

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$$
$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$
$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \qquad ....(1)$$

और $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$

$$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$
$$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2z_1\bar{z}_1 + 2z_2\bar{z}_2$$
$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

अत: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 9. यदि a + ib = $\frac{c+i}{c-i}$, जहाँ c एक वास्तविक संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = 1$ और है $\frac{b}{a} = \frac{2c}{c^2-1}$

हल-

दिया है a + ib = $\frac{c+i}{c-i}$ .....(1)
इसका संयुग्मी लिखने पर

a – ib = $\frac{c-i}{c+i}$ .....(2)
समी. (1) तथा (2) का गुणा करने पर

$$\Rightarrow \quad (a+ib)(a-ib) = \frac{c+i}{c-i} \times \frac{c-i}{c+i}$$

$$\Rightarrow \quad (a)^2 - (ib)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ इतिसिद्धम्}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{c+i}{c-i} \times \frac{c+i}{c-i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(c+i)^2}{(c-i)^2} = \frac{c^2+2ic+i^2}{c^2-2ic+i^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{c^2-1+i.2c}{c^2-1-i.2c}$$

योगान्तरानुपात के नियम से

$$\Rightarrow \quad \frac{a+ib+a-ib}{a+ib-a+ib} = \frac{c^2-1+i.2c+c^2-1-i.2c}{c^2-1+i.2c-c^2+1+i.2c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a}{i.2b} = \frac{2c^2-2}{i.4c}$$

$\Rightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{c^2-1}{2c}$

या $\qquad \frac{b}{a} = \frac{2c}{c^2-1}$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 10. यदि $(x + iy)^{1/3} = (a + ib)$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$$

हल-

दिया गया है।
$(x + iy)^{1/3} = (a + ib)$
दोनों तरफ घन करने पर

$((x + iy)^{1/3})^3 = (a + ib)^3$
$x + iy = (a + ib)^3$
या $(a + ib)^3 = x + iy$

या $a^3 + i^3b^3 + 3ia^2b + 3i^2ab^2 = x + iy$
या $a^3 - ib^3 + 3ia^2b - 3ab^2 = x + iy$
या $(a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3) = x + iy$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग को अलग-अलग करने पर
अतः $x = a^3 - 3ab^2$
तथा $3a^2b - b^3$

LHS $\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}$

$$= \frac{a^3-3ab^3}{a}+\frac{3a^2b-b^3}{b}$$
$$= a^2 - 3b^2 + 3a^2 - b^2$$
$$= 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2) = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 11. यदि $\frac{(x+i)^2}{3x+2} = a + ib$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{(x^2+1)^2}{(3x+2)^2} = a^2 + b^2$$

हल-

प्रश्नानुसार

$$a + ib = \frac{(x+i)^2}{3x+2} \qquad \text{....(1)}$$

i के स्थान पर $-i$ रखने पर

$$a - ib = \frac{(x-i)^2}{3x+2} \qquad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) का गुणा करने पर

$$(a + ib) \times (a - ib) = \frac{(x+i)^2}{(3x+2)} \times \frac{(x-i)^2}{(3x+2)}$$

$\Rightarrow$ $$(a)^2 - (ib)^2 = \frac{(x+i)^2 \times (x-i)^2}{(3x+2)^2}$$

या $$a^2 - i^2b^2 = \frac{\left((x+i)(x-i)\right)^2}{(3x+2)^2}$$

या $$a^2 + b^2 = \frac{\left((x)^2 - (i)^2\right)^2}{(3x+2)^2}$$

या $$a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(3x+2)^2}$$ **इतिसिद्धम्**

Ex 5.2

प्रश्न 1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $-1+\sqrt{3}i$ (iii) $\frac{5+i\sqrt{3}}{4-i2\sqrt{3}}$

हल-

(i) $\frac{1+i}{1-i}$

अंश तथा हर में (1 – i) के संयुग्मी से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Rightarrow \frac{(1+i)^2}{(1)^2-(i)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

इसे $(a + ib)$ के रूप में लिखने पर

$0 + i$

अतः सम्मिश्र संख्या $= 0 + i.1$

यहाँ पर स्पष्ट है $a \geq 0, y > 0$ (प्रथम चतुर्थांश) में स्थित है।

$\therefore$ कोणांक $\quad z = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{1}{0}\right| = \tan^{-1}\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(ii) – 1 + √3i

यहाँ पर स्पष्ट है a < 0, b > 0 (द्वितीय चतुर्थांश)

तब कोणांक

$$z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$$

$$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$$

$$= \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

(iii) $\frac{5+i\sqrt{3}}{4-i2\sqrt{3}}$

अंश तथा हर में 4 – 2i√3 के संयुग्मी 4 + 2i√3 से गुणा करने पर

$$= \frac{\left(5+i\sqrt{3}\right)\left(4+2i\sqrt{3}\right)}{\left(4-2i\sqrt{3}\right)\left(4+2i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{20+i10\sqrt{3}+i4\sqrt{3}+i^2 6}{(4)^2-\left(i2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{20+14\sqrt{3}i-6}{16+4\times 3} = \frac{14+14\sqrt{3}i}{28}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

यहाँ पर स्पष्ट है कि $a > 0, b > 0$ (प्रथम चतुर्थांश)

इसलिए कोणांक $z = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \tan^{-1}\left|\sqrt{3}\right|$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

प्रश्न 2. निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए

(i) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (iii) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$

हल- (i) माना

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\frac{1}{2}+i.\frac{1}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग अलग-अलग करने पर

$\frac{1}{2}$ = r cos θ ....(1)

$$\frac{1}{2} = r\sin\theta \qquad ....(2)$$

समी. (1) तथा (2) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{2} \;\therefore\; r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\because$ $\frac{1}{2}+i.\frac{1}{2}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है अतः

$$\text{कोणांक } \theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

अतः $\frac{1+i}{2}$ का ध्रुवीय रूप $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(ii)

$$\frac{1+7i}{(2-i)^2}$$

$(a + ib)$ के रूप में लिखने पर

$$\frac{1+7i}{4-4i+i^2} = \frac{1+7i}{4-4i-1} = \frac{1+7i}{3-4i}$$

अंश तथा हर में $(3 - 4i)$ के संयुग्मी $(3 + 4i)$ से गुणा करने पर

$$= \frac{(1+7i)\times(3+4i)}{(3-4i)\times(3+4i)} = \frac{(3-28)+i(4+21)}{(3)^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{-25+i.25}{9+16} = \frac{-25+i.25}{25}$$

$= -1 + i.1$

माना $-1 + i.1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग अलग-अलग करने पर

$$-1 = r\cos\theta \qquad ....(1)$$

$$1 = r\sin\theta \qquad ....(2)$$

समी. (1) व (2) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$(-1)^2 + (1)^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad 2 = r^2 \therefore r = \sqrt{2}$$

$-1 + i.1$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है। अतः

$$\text{कोणांक } \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$$

$$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right|$$

$$= \pi - \tan^{-1} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$$

अत: $\quad -1 + i.1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(iii)

$\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग अलग–अलग करने पर

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = r\cos\theta \qquad \text{....(1)}$$

$$\frac{1}{2} = r\sin\theta \qquad \text{....(2)}$$

समी. (1) व (2) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \times 1$

$$r^2 = 1 \therefore r = 1$$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है। इसलिए

$$\text{कोणांक } \theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

अत: $\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}$ का ध्रुवीय रूप

$$= 1\ .\ \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

प्रश्न 3. यदि z_1 तथा z_2 दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

कोणांक $z_1 \bar{z}_2$ = कोणांक z_1 – कोणांक z_2

हल-

माना कि $z_1 = r_1 (\cos\theta_1, + i \sin\theta_1)$
तथा $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$
कोणांक $z_1 = \theta_1$ तथा कोणांक $z_2 = \theta_2$,

अब $\bar{z}_2 = r_2 (\cos\theta_2 - i \sin\theta_2)$

$\therefore$
$$\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 &= r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ .\ r_2 (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2 [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ .\ (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)] \\
&= r_1r_2 [\cos\theta_1\ .\ \cos\theta_2 - i^2 \sin\theta_1\ .\ \sin\theta_2 + i\sin\theta_1\ .\ \cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1] \\
&= r_1r_2 [\cos\theta_1\ .\ \cos\theta_2 + \sin\theta_1\ .\ \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\ .\ \cos\theta_2 - \sin\theta_2\ .\ \cos\theta_1)] \\
&= r_1r_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]
\end{aligned}$$

अत: कोणांक $(z_1\bar{z}_2) = \theta_1 - \theta_2$

= कोणांक (z_1) – कोणांक (z_2) **इतिसिद्धम्**

Ex 5.3

प्रश्न 1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) – 5 + 12i

(ii) 8 – 6i

(iii) – i

हल-

(i) माना $\sqrt{-5+12i} = x + iy$

$\Rightarrow \quad -5 + 12i = (x + iy)^2$

$\therefore \quad -5 + 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2 - y^2 = -5 \quad ....(1)$$

$$2xy = 12 \quad ....(2)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 13 \quad ....(3)$

समीकरण (1) एवं (3) को जोड़ने पर

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \qquad \therefore x = \pm 2$$

समीकरण (3) में से (1) को घटाने पर

$$2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \qquad \therefore y = \pm 3$$

$\therefore \quad \sqrt{-5+12i} = \pm 2 \pm 3i = \pm(2 + 3i)$

(ii) माना $\sqrt{8-6i} = x + iy$

$\Rightarrow \quad 8 - 6i = (x + iy)^2$

$\therefore \quad 8 - 6i = x^2 - y^2 + 2xyi$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2 - y^2 = 8 \quad ....(1)$$

$$2xy = -6 \quad ....(2)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$x^2 + y^2 = 10 \qquad ....(3)$$

समीकरण (1) एवं (3) को जोड़ने पर

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \qquad \therefore x = \pm 3$$

समीकरण (3) में से (1) घटाने पर

$$2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \qquad \therefore y = \pm 1$$

चूँकि समीकरण (2) में $2xy$ ऋणात्मक है, अतः x एवं y विपरीत चिह्न के होंगे।

$$\therefore \qquad \sqrt{8 - 6i} = \pm 3 \mp i.1 = \pm(3 - i)$$

(iii) माना $\sqrt{-i} = x + iy$

$$\Rightarrow \qquad (x + iy)^2 = -i$$

$$\therefore \; x^2 - y^2 + 2xyi = -i = 0 - 1.i$$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को अलग-अलग करने पर

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad ....(1)$$

एवं

$$2xy = -1 \qquad ....(2)$$

$$(x^2 + y^2) = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$= \sqrt{0 + 1} = 1$$

$$\therefore \qquad x^2 + y^2 = 1 \qquad ....(3)$$

समीकरण (1) एवं (3) को जोड़ने पर

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \qquad \therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

समीकरण (3) में से (1) को घटाने पर

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \qquad \therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

चूँकि समीकरण (2) में $2xy$ ऋणात्मक है, अतः x एवं y विपरीत चिह्न के होंगे।

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

प्रश्न 2.

$$\sqrt{4+3\sqrt{-20}}+\sqrt{4-3\sqrt{-20}}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\sqrt{4+3\sqrt{-20}}+\sqrt{4-3\sqrt{-20}}$$
$$=\sqrt{4+3\sqrt{20}i}+\sqrt{4-3\sqrt{20}i}$$

माना $4 + 3\sqrt{20}i = (x + iy)^2$
$4 + 3\sqrt{20}i = x^2 - y^2 + 2xyi$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को अलग-अलग करने पर
$x^2 - y^2 = 4$ ....(1)
एवं $2xy = 3\sqrt{20}$ .....(2)

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 - y^2 + 4x^2y^2}$$
$$= \sqrt{4+9\times 20} = \sqrt{16+180} = \sqrt{196}$$
$$x^2 + y^2 = 14 \qquad ....(3)$$

समीकरण (1) एवं (3) को जोड़ने पर

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \qquad \therefore x = \pm 3$$

समीकरण (3) में से (1) को घटाने पर

$$2y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 5 \qquad \therefore y = \pm\sqrt{5}$$

$$\sqrt{4+3\sqrt{20}i} = \pm 3 \pm \sqrt{5}i \qquad ....(4)$$

इसी प्रकार $\sqrt{4-3\sqrt{20}i} = \pm 3 \mp \sqrt{5}i$ ....(5)

समीकरण (4) एवं (5) को जोड़ने पर

$$\sqrt{4+3\sqrt{20}i}+\sqrt{4-3\sqrt{20}i} = \pm 6$$

प्रश्न 3. निम्न के घनमूल ज्ञात कीजिए
(i) -216
(ii) -512

हल-

(i) माना $(-216)^{1/3} = x$
$\therefore x = (-216 \times 1)^{1/3}$
$x = (-216)^{1/3} \times (1)^{1/3}$
$= -6 \times (1, w, w^2)$
$\because 1, w, w^2$ इकाई के घनमूल हैं।
$x = -6, -6w, -6w^2$

(ii) माना $(-512)^{1/3} = x$
$\therefore x = (-512)^{1/3} = (-512 \times 1)^{1/3}$
$x = -8 \times (1)^{1/3} = -8(1, w, w^2)$
$x = -8, -8w, -8w^2$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए
(i) $1 + w^n + w^{2n} = 0$, जबकि $n = 2, 4$
(ii) $1 + w^n + w^{2n} = 3$, जबकि n, 3 की गुणज है।

हल-

(i) L.H.S.= $1 + w^n + w^{2n}$
जब $n = 2$
तब L.H.S. = $1 + w^2 + w^4 = 1 + w^2 + w^3.w$
L.H.S. = $1 + w^2 + w \because w^3 = 1$
L.H.S. = 0 = R.H.S.

$\because 1 + w + w^2 = 0$
जब $n = 4$
तब L.H.S. = $1 + w^4 + w^8$
L.H.S. = $1 + w^3.w + w^3.w^3.w^3$

L.H.S. = $1 + w^3.w + (w^3)^2.w^2$
L.H.S. = $1 + w + w^2 \because w^3 = 1$
L.H.S. = 0 = R.H.S.
$\because 1 + w + w^2 = 0$

(ii) L.H.S. = $1 + w^n + w^{2n}$
जब n, 3 का गुणन है, तब

माना n = 3m

∴ L.H.S. = $1 + w^{3m} + w^{2.3m}$
L.H.S. = $1 + (w^3)^m + (w^3)^{2m}$
= $1 + (1) + (1)^m$ ∵ $w^3 = 1$
L.H.S. = 1 + 1 + 1 = 3 = R.H.S.

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए
(i)
$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^{29} + \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^{29} = -1$$
(ii) $(1 + 5w^2 + w)(1 + 5w + w^2)(5 + w + w^2) = 64$

हल-
(i) माना
$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = w$$
$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = w^2$$
$$\text{L.H.S.} = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^{29} + \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^{29}$$
$$= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{29} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{29}$$
= $(w)^{29} + (w^2)^{29}$
= $w^{29} + w^{58}$
= $(w^3)^9.w^2 + (w^3)^{19}.w$
= $1.w^2 + 1.w$ ∵ $w^3 = 1$
∵ $1 + w + w^2 = 0$
= $w^2 + w = -1$ = R.H.S.

(ii) $(1 + 5w^2 + w)(1 + 5w + w^2)(5 + w + w^2) = 64$
LHS = $(1 + 5w^2 + w)(1 + 5w + w^2)(5 + w + w^2)$
LHS = $(1 + 4w^2 + w^2 + w)(1 + 4w + w + w^2) \times (5 + w + w^2)$
∵ $w^2 + w + 1 = 0 \Rightarrow w^2 + w = -1$
LHS = $(1 + 4w^2 - 1)(1 + 4w - 1)(5 - 1)$
LHS = $4w^2 \times 4w \times 4 = 64w^3 = 64$ = R.H.S.

प्रश्न 6. 1, w, w^2 इकाई के घनमूल हो तो सिद्ध कीजिए
$(1 + w)(1 + w^2)(1 + w^4)(1 + w^8)$......... 2n गुणनखण्ड = 1

हल-
LHS = $(1 + w)(1 + w^2)(1 + w^4)(1 + w^8)$ .... 2n गुणनखण्ड
LHS = $(1 + w)(1 + w^2)(1 + w^3.w)(1 + w^3.w^3.w^2)$ .... 2n गुणनखण्ड

LHS = $(1 + w)(1 + w^2)(1 + w)(1 + w^2)$ .... 2n गुणनखण्ड
LHS = $(-w^2)(-w)(-w^2)(-w)$ .... 2n गुणनखण्ड
LHS = $w^3.w^3.w^3$.......... n बार
LHS = 1.1.1.1.1.1 .... n बार = 1

Ex 5.4

प्रश्न 1. निम्न, समीकरणों के हल वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए

(i) $x^2 + 4x + 13 = 0$
(ii) $2x^2 + 5x + 4 = 0$
(iii) $ix^2 + 4x - \frac{15}{2} = 0$

हल-

(i) यहाँ पर $D_1 = 2x + 4$,

विविक्तिकर $= \pm\sqrt{(4)^2 - 4\times1\times13}$

$= \sqrt{16-52}$

$= \pm\sqrt{-36} = \pm\sqrt{i^2 36} = \pm 6i$

$\therefore \quad 2x + 4 = \pm 6i$

अत: $\quad 2x = -4 \pm 6i$

$\therefore \quad x = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$

(ii) $2x^2 + 5x + 4 = 0$

यहाँ पर $D_1 = 4x + 5$

$$\text{विविक्तिकर} = \pm\sqrt{(5)^2 - 4\times 2\times 4}$$
$$= \pm\sqrt{25-32} = \pm\sqrt{-7}$$
$$= \pm\sqrt{i^2 7} = \pm\sqrt{7}i$$

$$\therefore \quad 4x + 5 = \pm\sqrt{7}i$$
$$\Rightarrow \quad 4x = -5\pm\sqrt{7}i$$
$$\therefore \quad x = \frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$$

(iii) $ix^2 + 4x - \frac{15}{2} = 0$

यहाँ पर $D_1 = 2ix + 4$

$$\text{विविक्तिकर} = \pm\sqrt{(4)^2 + 4\times i\times\frac{15}{2}}$$
$$= \sqrt{16+30i}$$

अत: यहाँ से हमें $\sqrt{16+30i}$ का वर्गमूल निकालना आवश्यक है।

माना यह वर्गमूल $x + iy$ है।

$$\therefore \quad \sqrt{16+30i} = x + iy$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$16 + 30i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को अलग-अलग करने पर

$$x^2 - y^2 = 16 \quad \text{....(1)}$$
$$2xy = 30 \quad \text{....(2)}$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$
$$= \sqrt{256+900} = \sqrt{1156} = 34$$
$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 34 \quad \text{....(3)}$$

समी. (1) तथा (3) को जोड़ने पर

$$2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25$$
$$\therefore \; x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

समी. (3) में मान रखने पर

$$25 + y^2 = 34 \Rightarrow y^2 = 34 - 25 = 9$$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\therefore \quad \sqrt{16+30i} = \pm(5 + 3i)$

प्रश्नानुसार

$$2ix + 4 = \pm(5 + 3i)$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$2ix + 4 = 5 + 3i$$

$\Rightarrow \quad 2ix = 5 + 3i - 4$

$\Rightarrow \quad 2ix = 1 + 3i$

$\therefore \quad x = \dfrac{1+3i}{2i}$

अंश तथा हर में i से गुणा करने पर

$$x = \frac{(1+3i)\times i}{2i\times i} = \frac{i+3i^2}{2i^2}$$

$$x = \frac{i-3}{-2} = \frac{3-i}{2}$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$2ix + 4 = -(5 + 3i)$$

$\Rightarrow \quad 2ix = -5 - 3i - 4$

$\Rightarrow \quad 2ix = -9 - 3i$

$\therefore \quad x = \dfrac{-(9+3i)}{2i} = \dfrac{i^2(9+3i)}{2i}$

$$\because \; i^2 = -1$$

$$x = \frac{i(9+3i)}{2} = \frac{9i+3i^2}{2}$$

$$x = \frac{-3+9i}{2}$$

अतः $\quad x = \dfrac{3-i}{2}, \dfrac{-3+9i}{2}$

प्रश्न 2. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल

(i) 5 तथा -2 हैं।

(ii) 1 + 2i

हल-

(a) दिया है

$\alpha = 5, \beta = -2$

अभीष्ट समीकरण

x^2 – (मूलों का योग)x + मूलों का गुणनफल = 0

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - (5 - 2)x + (5) \times (-2) = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) 1 + 2i

दिये गये मूल का संयुग्मी मूल = 1 – 2i

$\therefore \alpha = 1 + 2i$ और $\beta = 1 - 2i$

अभीष्ट समीकरण

x^2 – (मूलों का योग)x + मूलों को गुणनफल = 0

$x^2 - (1 + 2i + 1 - 2i)x + (1 + 2i) \times (1 - 2i) = 0$

$x^2 - 2x + (1)^2 - (2i)^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + 4 = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

प्रश्न 3. यदि समीकरण $x^2 - px + q = 0$ का एक मूल दूसरे का दुगुना है तो सिद्ध कीजिए कि $2p^2 = 9q$.

हल- माना दिये गये समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल α तथा β है|

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{p}{1} = p \qquad ....(1)$$

$$\alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{q}{1} = q \qquad ....(2)$$

दिया गया है

$$\alpha = 2\beta$$

समी. (1) तथा (2) में मान रखने पर

$$2\beta + \beta = p$$

$$\Rightarrow \quad 3\beta = p$$

$$\boxed{\therefore \beta = \frac{1}{3}p} \qquad ....(3)$$

$$2\beta.\beta = q$$

$\Rightarrow$ $$\beta^2 = \frac{1}{2}q \quad \ldots(4)$$

समी. (3) तथा (4) से

$$\left(\frac{1}{3}p\right)^2 = \frac{1}{2}q$$

$$\frac{1}{9}p^2 = \frac{1}{2}q$$

$\Rightarrow$ $\boxed{2p^2 = 9q}$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल m : n के अनुपात में हैं।

हल- माना दिये गये समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल αm तथा αn हैं।

$\therefore$ मूलों का योग = $-\frac{b}{a}$ $\therefore$ $\alpha m + \alpha n = -\frac{b}{a}$

$$\alpha(m+n) = -\frac{b}{a} \quad \ldots(1)$$

मूलों का गुणनफल = $\frac{c}{a}$ $\quad\therefore \alpha m + \alpha n = \frac{c}{a}$

$$\alpha^2 mn = \frac{c}{a} \quad \ldots(2)$$

समी. (1) से α का मान निकालकर समी. (2) में रखने पर

$$\left(\frac{-b}{a(m+n)}\right)^2 mn = \frac{c}{a}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{b^2 mn}{a^2(m+n)^2} = \frac{c}{a}$$

$\Rightarrow b^2mn = ac(m + n)^2$

$\Rightarrow mnb^2 = ac(m + n)^2$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}$ का वास्तविक एवं काल्पनिक भाग क्रमशः है

(A) 1, 1
(B) 0, 0

(C) 0, 1
(D) 1, 0

हल : (C)

प्रश्न 2. यदि 2 + (2a + 5ib) = 8 + 10i, तब
(A) a = 2, b = 3
(B) a = 2, b = -3
(C) a = 3, b = 2
(D) a = 3, b = -2

हल : (C)

प्रश्न 3. 3 – i की गुणन प्रतिलोम है

(A) $\frac{3+i}{10}$ (B) $\frac{-3+i}{10}$

(C) $\frac{3-i}{10}$ (D) $\frac{-3-i}{10}$

हल : (A)

प्रश्न 4. $\frac{2-3i}{4+i}$ **का संयुग्मी है**

(A) $\frac{-5+14i}{17}$ (B) $\frac{5+14i}{17}$

(C) $\frac{14+5i}{17}$ (D) $\frac{14-5i}{17}$

हल : (B)

प्रश्न 5. यदि z_1, z_2, $\in$ C तो कौनसा कथन सत्य है

(A) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| + |z_2|$
(B) $|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2|$
(C) $|z_1 + z_2| \geq |z_1 - z_2|$
(D) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

हल : (D)

प्रश्न 6. यदि |z – 3| = [z + 3| तो z स्थित है

(A) x-अक्ष पर
(B) y-अक्ष पर

(C) x = y रेखा पर
(D) x = -y रेखा पर

हल : (B)

प्रश्न 7. -2 का मुख्य कोणांक लिखिए।

हल- -2 = -2 + i.0

यहाँ पर a < 0, b > 0 (द्वितीय चतुर्थांश)

तब कोणांक $z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$

$$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{0}{-2}\right|$$

$$= \pi - \tan^{-1} 0 = \pi - 0$$

$$= \pi$$

प्रश्न 8.

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

का ध्रुवीय रूप लिखिए।

हल- माना

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग अलग-अलग करने पर

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} = r\cos\theta \qquad \text{....(1)}$$

$$\frac{5}{2} = r\sin\theta \qquad \text{....(2)}$$

वर्ग करके जोड़ने पर

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25\times 3}{4} + \frac{25}{4} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100}{4} = r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \qquad \therefore r = 5$$

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\therefore\; \theta = \frac{\pi}{6}$$

अत: $\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$ का ध्रुवीय रूप $= 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

प्रश्न 9. $4 + 5w^4 + 3w^5$ का मान होगा?

हल- $4 + 5w^4 + 3w^5$

$= 4 + 5w^3.w + 3w^3.w^2$

$= 4 + 5w + 3w^2$

$$= 4 + 5\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + 3\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$\because$ $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ और $w^2 = \dfrac{-1-3i}{2}$ होता है।

$$= \frac{1}{2}\left[8-5+5\sqrt{3}i-3-3\sqrt{3}i\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{3}i\right] = \sqrt{3}i$$

प्रश्न 10.

$$\frac{1}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$$

को a + ib रूप में लिखिए।

हल-

$$\frac{1}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+i\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

अंश तथा हर में $\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$ से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \frac{\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right]\times\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right]} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{i\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

प्रश्न 11. $|1 – i|^x = 2^x$ के शून्येतर पूर्णांक मूलों की संख्या है।

हल-

$$|1 - i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2})^x = 2^x$$
$$\Rightarrow 2^{x/2} = 2^x \Rightarrow 1 = \frac{2^x}{2^{x/2}} = 2^{x/2}$$
$$\Rightarrow 2^{x/2} = 1 = 2^0$$
$$\therefore \frac{x}{2} = 0 \therefore x = 0$$

अतः शून्येतर पूर्णांक मूलों की संख्या = शून्य।

प्रश्न 12. यदि $z_1, z_2 \in C$ तो सिद्ध कीजिए

(i) $|z_1 – z_2| \le |z_1| + |z_2|$
(ii) $|z_1 + z_2| \ge |z_1| – |z_1|$

हल-

(i) $$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \quad (\because |z|^2 = z\bar{z})$$
$$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \quad [\because \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2]$$
$$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + (\overline{z_1\bar{z}_2})) + |z_2|^2 \quad [\because \overline{(\bar{z})} = z]$$
$$= |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad [\because z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)]$$
$$\le |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \quad [\because -2\mathrm{Re}(z) \le |z|]$$
$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$$
$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$[\because |z| = |\overline{z}|]$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 \le [|z_1| + |z_2|]^2$$

$\therefore |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ **इतिसिद्धम्**

(ii) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \quad (\because |z|^2 = z\overline{z})$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \qquad [\because \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2]$$

$$= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + \left[z_1\overline{z}_2 + \left(\overline{z_1\overline{z}_2}\right)\right] + |z_2|^2 \qquad \left[\because \overline{(\overline{z})} = z\right]$$

$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \quad [\because z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)]$$

$$\ge |z_1|^2 - 2|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \ge |z_1|^2 - 2|z_1||\overline{z}_2| + |z_2|^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \ge |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$\because |\overline{z}_2| = |z_2|$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \ge [|z_1| - |z_2|]^2$$

$\therefore |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 13. यदि $|z_1| = 1 = |z_2|$ तो सिद्ध कीजिए

$$|z_1 + z_2| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right|$$

हल-

R.H.S. $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2}\right|$

$\because \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

$$\therefore \quad \frac{|z_2 + z_1|}{|z_1 z_2|} = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1|.|z_2|}$$

$$\because |z_2 + z_1| = |z_1 + z_2|$$

लेकिन $|z_1| = 1 = |z_2|$

अत: मान रखने पर

$$\frac{|z_1 + z_2|}{|x|} = |z_1 + z_2| = \text{L.H.S.}$$

प्रश्न 14. यदि $\frac{(a+i)^2}{2a-i} = p + iq$ **तो सिद्ध कीजिए कि** $p^2 + q^2 = \frac{(a^2+1)^2}{4a^2+1}$

हल- दिया है।

$$\frac{(a+i)^2}{2a-i} = p + iq \qquad \text{....(1)}$$

समीकरण (1) में i के स्थान पर $-i$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+i)^2}{2a-i} = p - iq \qquad \text{....(2)}$$

समी. (1) तथा (2) का गुणा करने पर

$$\frac{(a+i)^2}{(2a-i)} \times \frac{(a-i)^2}{(2a+i)} = (p + iq) \times (p - iq)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{((a+i)(a-i))^2}{(2a)^2 - (i)^2} = (p)^2 - (iq)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left((a)^2 - (i)^2\right)^2}{4a^2 + 1} = p^2 + q^2 \qquad \because i^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a^2 + 1)^2}{4a^2 + 1} = p^2 + q^2$$

$$\text{या} \quad p^2 + q^2 = \frac{(a^2 + 1)^2}{4a^2 + 1}$$

L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 15. यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा कोणांक z_1 + कोणांक $z_2 = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $z_1 = \bar{z}_2$

हल- माना $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
एवं $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
$\Rightarrow |z_1| = r_1, |z_2| = r_2$ एवं कोणांक $z_1 = \theta_1$, कोणांक $z_2 = \theta_2$
प्रश्नानुसार, $|z_1| = |z_2| \Rightarrow r_1 = r_2$ ....(1)

एवं कोणांक z_1 + कोणांक $z_2 = 0$
$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 0 \therefore \theta_1 = -\theta_2$ ......(2)
$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$
$z_1 = r_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)$ [समी (1) एवं (2) से]
$z_1 = r_2[\cos\theta_2 - i\sin\theta_2]$
$z_1 = \bar{z}_2$

प्रश्न 16. यदि θ_1,θ_2 क्रमश सम्मिश्र सख्याएँ z_1,z_2 के कोणांक हैं तो सिद्ध कीजिए कि

हल :

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2|z_1|\,|z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

माना
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$\bar{z}_1 = r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$$
$$\bar{z}_2 = r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$$

L.H.S. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) + r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\Rightarrow r_1r_2[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) + (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$\Rightarrow r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 - i\sin\theta_1\cos\theta_2]$

$\Rightarrow r_1r_2[2\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2]$
$= 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$
$= 2|z_1|\,|z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2) = \text{RHS}$

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
(ii) $(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

हल : (i) $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw)$

$\Rightarrow a^2 + abw^2 + acw + abw + b^2w^3 + bcw^2 + acw^2 + bcw^4 + c^2w^3$
$\Rightarrow a^2 + abw^2 + acw + abw + b^2.1 + bcw^2 + acw^2 + bcw^3.w + c^2.1. \because w^3 = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abw + abw^2 + bcw + bcw^2 + acw + acw^2$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab(w + w^2) + bc(w + w^2) + ac(w + w^2)$

हम जानते हैं कि $1 + w + w^2 = 0 \because w + w^2 = -1$

मान रखने पर

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab(-1) + bc(-1) + ac(-1)$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$ R.H.S.
L.H.S. = R.H.S.

(ii) $(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + abw^2 + acw + abw + b^2w^3 + bcw^2 + acw^2 + bcw^4 + cw^3)$

$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + abw^2 + acw + abw + bcw^2 + acw^2 + bcw^3.w)$
$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2\ ab(w + w^2) + bc(w + w^2) + ac(w + w^2))$

हम जानते हैं कि $1 + w + w^2 = 0 \because w + w^2 = -1$
मान रखने पर

$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab(-1) + bc(-1) + ac(-1))$
$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$ R.H.S.
अतः L.H.S.= R.H.S.

प्रश्न 18. यदि α, β दो भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हों तथा |β| = 1 तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right| = 1.$$

हल- माना कि $\alpha = x + iy$

तथा β = c + id

$$\text{अब } \left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{(c+id)-(x+iy)}{1-(x-iy)(c+id)}\right|$$

$$= \left|\frac{(c-x)+i(d-y)}{1-(cx-ciy+ixd-i^2yd)}\right|$$

$$= \left|\frac{(c-x)+i(d-y)}{1-cx+icy-idx-yd}\right|$$

$$= \left|\frac{(c-x)+i(d-y)}{(1-cx-yd)+i(cy-dx)}\right|$$

$$= \frac{|(c-x)+i(d-y)|}{|(1-cx-yd)+i(cy-dx)|} \qquad \left[\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{(c-x)^2+(d-y)^2}}{\sqrt{(1-cx-yd)^2+(cy-dx)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{c^2+x^2-2cx+d^2+y^2-2dy}}{\sqrt{1+c^2x^2+y^2d^2-2cx+2cdxy-2yd+c^2y^2+d^2x^2-2cdxy}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2-2cx+y^2-2dy}}{\sqrt{1+x^2(c^2+d^2)+y^2(c^2+d^2)-2cx-2yd}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2-2cx+y^2-2dy}}{\sqrt{1+x^2+y^2-2cx-2yd}}$$

$$= 1$$

प्रश्न 19. यदि α तथा β समीकरण $px^2 - qx - r = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{1}{a}$ तथा $\frac{1}{b}$ हैं।

हल- दिया गया द्विघात समीकरण
$px^2 - qx - r = 0$

इस समीकरण के मूल α तथा β हैं।

$$\therefore \qquad \alpha + \beta = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}\right)$$

$$\alpha + \beta = -\left(\frac{-q}{p}\right) = \frac{q}{p} \qquad ....(1)$$

$$\alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-r}{p} \qquad ....(2)$$

हमें वह अभीष्ट द्विघात समीकरण ज्ञात करनी है जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}$ तथा $\frac{1}{\beta}$ हैं।
अभीष्ट समीकरण

x^2 – (मूलों का योग)x + मूलों का गुणनफल = 0

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

मान रखने पर

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\frac{q}{p}}{-\frac{r}{p}}\right)x + \frac{1}{-\frac{r}{p}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{q}{r}x - \frac{p}{r} = 0$$

$$\Rightarrow rx^2 + qx - p = 0$$

प्रश्न 20. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण $lx^2 - 2mx + n = 0$ का एक मूल दूसरे का P गुणा होता है।

हल- दिया गया समीकरण
$lx^2 - 2mx + n = 0$
माना उपरोक्त समीकरण के मूल α तथा β हैं।

$$\therefore \qquad \alpha + \beta = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}\right)$$

$$\alpha + \beta = -\left(\frac{-2m}{l}\right) = \frac{2m}{l} \qquad ....(1)$$

$$\alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{n}{l} \qquad ....(2)$$

हमें वह प्रतिबन्ध ज्ञात करना है जिससे दिये गये समीकरण का एक मूल दूसरे का P गुणा है।

दिया है $\qquad \alpha = P\beta \qquad ....(3)$

समीकरण (1) में मान रखने पर

$$P\beta + \beta = \frac{2m}{l} \qquad \therefore \beta(P+1) = \frac{2m}{l}$$

$$\beta = \frac{2m}{l(P+1)} \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) में α का मान रखने पर

$$P\beta.\beta = \frac{n}{l} \therefore \beta^2 = \frac{n}{lP} \qquad ....(5)$$

समीकरण (4) का मान (5) में रखने पर

$$\left(\frac{2m}{l(P+1)}\right)^2 = \frac{n}{lP}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{4m^2}{l^2(P+1)^2} = \frac{n}{lP}$$

$$\Rightarrow \qquad 4Pm^2 = nl(P+1)^2$$

या $\qquad 4m^2P = ln(1+P)^2$