पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 8

8.6. अपरिमित G.P. और उसका योग

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ के प्रकार की G.P. एक अपरिमित (infinite) G.P. कहलाती है। अब, एक अपरिमित G.P. के योग का सूत्र ज्ञात करने के लिए, हम एक उदाहरण से प्रारंभ करते हैं। आइए निम्न G.P. पर विचार करें–

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

यहाँ $\quad a = 1,\ r = \frac{2}{3}$ है। हमें प्राप्त होता है–

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, आइए देखें कि $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ का क्या व्यवहार रहता है।

n	1	5	10	20
$\frac{2}{3}^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ शून्य के निकटतर और अधिकतर निकटतर होता जाता है। गणितीय रूप से, हम कहते हैं कि जैसे n पर्याप्त रूप से बड़ा हो जाता है।, वैसे ही $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ पर्याप्त रूप से छोटा हो जाता है। दूसरे शब्दों में, जब $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ होता है। इसके परिणाम स्वरूप, हम ज्ञात करते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक पदों का योग $S_\infty = 3$ है।

अब, एक गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ...,$ के लिए, यदि सार्वअनुपात r का संख्यात्मक मान 1 से छोटा है, तो

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

इस स्थिति में, जब $n \to \infty$, $r^n \to 0$ है, क्योंकि $|r| < 1$ है। अत:,

$$S_n \to \frac{a}{1-r}$$

सांकेतिक रूप से, अपरिमित पदों के योग को S_∞ या S से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, हमें $S = \frac{a}{1-r}$ प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, (i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

प्रश्नावली 8.4

निम्न गुणोत्तर श्रेढ़ियों के अपरिमित पदों तक योग ज्ञात कीजिए–

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...$ (उत्तर 1.5)

2. 6, 1.2, .24, ... (उत्तर 7.5)

3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, ...$ (उत्तर $\frac{35}{3}$)

4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, ...$ (उत्तर $\frac{-3}{5}$)

5. सिद्ध कीजिए कि $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} ... = 3$ है।

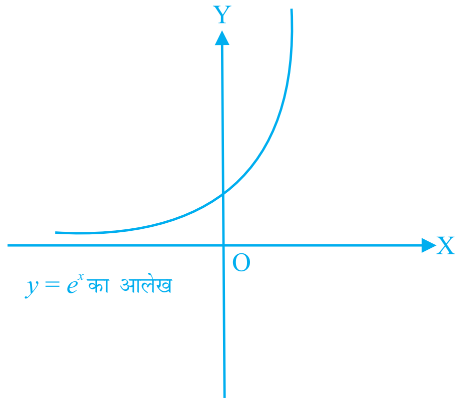
6. मान लीजिए कि $x = 1 + a + a^2 + ...$ और $y = 1 + b + b^2 + ...$, जहाँ $|a| < 1$ और $|b| < 1$ है। सिद्ध कीजिए कि

$$1 + ab + a^2b^2 + ... = \frac{xy}{x+y-1}$$

अध्याय 12

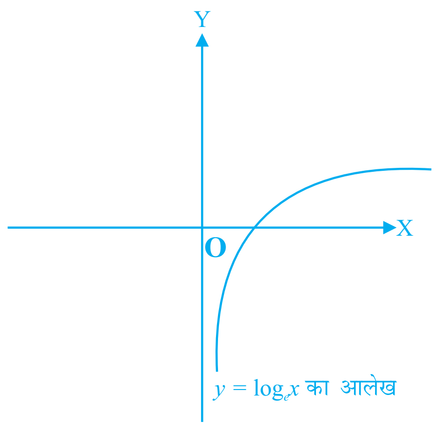
12.6 चरघातांकीय और लघुगणकीय फलनों से संबद्ध सीमाएँ

चरघातांकीय (exponential) और लघुगणकीय (logarithmic) फलनों से संबंध व्यंजकों की सीमाओं (limits) के मानों को निकालने की चर्चा करने से पहले, हम इन दोनों फलनों के प्राँत और परिसर बताते हुए, इनका परिचय कराते हैं तथा इनके रफ़ आलेख बनाते हैं। एक महान स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (1707– 1783) ने संख्या e का परिचय दिया जिसका मान 2 और 3 के बीच स्थित है। यह संख्या चरघातांकीय फलन को परिभाषित करने के लिए उपयोगी है तथा इसे $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसका प्राँत $\mathbf{R}$ है और परिसर घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। चरघातांकीय फलन, अर्थात् $y = e^x$ का आलेख आकृति 12.12 में दिए अनुसार होता है।



आकृति 12.12

इसी प्रकार, लघुगणकीय फलन, जिसे $\log_e : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, को $\log_e x = y$ द्वारा प्रदत्त किया जाता है, यदि और केवल यदि $e^y = x$ हो। इसका प्राँत $\mathbf{R}^+$ है, जो सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर $\mathbf{R}$ है। लघुगणकीय फलन $y = \log_e x$ का आलेख आकृति 12.13 में दर्शाया गया है।



आकृति 12.13

परिणाम $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ को सिद्ध करने के लिए, हम व्यंजक $\frac{e^x - 1}{x}$ से संबद्ध एक असमिका का उपयोग करते हैं, जो इस प्रकार है–

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + (e-2)\,|x|,\ [-1, 1] \sim \{0\} \text{ में सभी } x \text{ के लिए सत्य है।}$$

प्रमेय 6 सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ है।

उपपत्ति उपर्युक्त असमिका का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + |x|(e-2),\ x \in [-1, 1] \sim \{0\}$$

साथ ही,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim\limits_{x \to 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$$

और

$$\lim_{x \to 0} 1 + (e-2)|x| = 1 + (e-2)\lim_{x \to 0}|x| = 1 + (e-2)0 = 1$$

अतः, सैंडविच प्रमेय द्वारा, हमें प्राप्त होता है–

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

प्रमेय 7 सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

उपपत्ति मान लीजिए कि Let $\dfrac{\log_e(1+x)}{x} = y$ है तब,

$$\log_e(1+x) = xy$$

$$1 + x = e^{xy}$$

$$\frac{e^{xy} - 1}{x} = 1$$

या

$$\frac{e^{xy} - 1}{xy} \cdot y = 1$$

$$\lim_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \lim_{x \to 0} y = 1 \qquad \text{(क्योंकि } x \to 0 \text{ से } xy \to 0 \text{ प्राप्त होता है)}$$

$$\lim_{x \to 0} y = 1 \quad \left(\text{क्योंकि } \lim_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$$

उदाहरण 5 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$

हल हमें प्राप्त है–

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{3x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot 3$$

$$= 3\left(\lim_{y \to 0} \frac{e^{y}-1}{y}\right), \quad \text{जहाँ } y = 3x$$

$$= 3.1 = 3$$

उदाहरण 6 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-\sin x-1}{x}$

हल हमें प्राप्त है– $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-\sin x-1}{x} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{e^{x}-1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right]$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1-1=0$$

उदाहरण 7 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{x-1}$

हल $x = 1 + h$ रखिए। तब, $x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ है। अतः,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1 \left(\text{क्योंकि } \lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1+x)}{x} = 1 \text{ है}\right)$$

प्रश्नावली 12.3

निम्न सीमाओं के मान निकालिए, यदि उनका अस्तित्व है–

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$ (उत्तर 4)

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x}-e^{2}}{x}$ (उत्तर e^2)

3. $\lim_{x \to 5} \frac{e^{x}-e^{5}}{x-5}$ (उत्तर e^5)

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$ (उत्तर 1)

5. $\lim_{x\to 3}\frac{e^x - e^3}{x-3}$ (उत्तर e^3)

6. $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x - 1)}{1-\cos x}$ (उत्तर 2)

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1-2x)}{x}$ (उत्तर 2)

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$ (उत्तर 1)